

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(982) *Existence de modèles minimaux
pour les variétés de type général*

Stéphane DRUEL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**EXISTENCE DE MODÈLES MINIMAUX
POUR LES VARIÉTÉS DE TYPE GÉNÉRAL**
[d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan]

par Stéphane DRUEL

INTRODUCTION

La classification des variétés⁽¹⁾ projectives lisses à équivalence birationnelle près est un problème central en géométrie algébrique. On rappelle que deux variétés X et X' sont dites birationnellement équivalentes ou simplement birationnelles s'il existe un isomorphisme d'un ouvert dense de X sur un ouvert dense de X' .

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété projective lisse X est son *fibré canonique* ω_X , défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Pour tout entier m , le m -ième *plurigenre* est la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$; on le note $P_m(X)$. On définit un invariant numérique de X , appelé sa *dimension de Kodaira*, en posant $\kappa(X) = \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log P_m(X)}{\log m}$. On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \dots, \dim(X)\}$; on dit que X est *de type général* si $\kappa(X) = \dim(X)$.

Il est connu depuis longtemps que deux variétés projectives lisses birationnelles ont de nombreuses propriétés en commun : la dimension de Kodaira et les plurigenres sont des exemples d'invariants birationnels des variétés projectives lisses. La question peut être formulée ainsi.

Existe-t-il un « bon » représentant d'une classe d'équivalence birationnelle donnée ?

Le cas des courbes est particulier puisque deux courbes (projectives lisses) birationnelles sont isomorphes. Le cas des surfaces est plus compliqué, toute classe d'équivalence birationnelle contenant une infinité de surfaces projectives lisses deux à deux non isomorphes. La solution au problème précédent a été donnée par les géomètres italiens au début du siècle dernier. Soit X une surface projective lisse. Il existe une

⁽¹⁾ Nous travaillons sur le corps des nombres complexes et toutes nos variétés sont algébriques et irréductibles.

surface projective lisse X_\bullet et un morphisme birationnel $X \rightarrow X_\bullet$ tels que ou bien le fibré canonique ω_{X_\bullet} soit numériquement effectif, on dit que X_\bullet est un *modèle minimal* de X , ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ tel que $\dim(Y_\bullet) \leq 1$ et $\omega_{X_\bullet}^{\otimes -1}$ soit ample relativement à Y_\bullet , le morphisme c_\bullet est appelé une *fibration de Mori*⁽²⁾. On peut être plus précis : dans la seconde alternative, ou bien X_\bullet est isomorphe à \mathbf{P}^2 et $\dim(Y_\bullet) = 0$ ou bien $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ est une surface géométriquement réglée. On obtient X_\bullet en contractant successivement des courbes exceptionnelles de première espèce, *i.e.* des courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -1 . La variété X_\bullet est unique à quelques exceptions près bien comprises.

Il faut attendre le début des années 80 et les travaux de Mori ([20]) et Reid ([23]) pour entrevoir la possibilité de généraliser l'approche italienne à la dimension supérieure. Les obstacles sont nombreux. Il existe des variétés projectives lisses de dimension 3, de type général, n'ayant pas de modèle minimal lisse (voir par exemple [24, Exemples 2.8]); il faut donc considérer des variétés singulières. Soit X une variété projective lisse. Le programme de Mori ou programme des modèles minimaux ou encore MMP (« Minimal Model Program » en anglais) prédit l'existence d'une variété projective X_\bullet birationnellement équivalente à X , peu singulière⁽³⁾, telle que ou bien le diviseur canonique K_{X_\bullet} soit numériquement effectif, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ tel que $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à Y_\bullet . Il prédit aussi comment obtenir X_\bullet au moyen de transformations birationnelles ; il ne suffit plus, comme c'était le cas pour les surfaces, de contracter des diviseurs, il faut introduire de nouvelles transformations birationnelles, les flips, dont l'existence est conjecturale. La dernière difficulté est la question de l'aboutissement du programme ou encore le problème de la non-existence de suite infinie de flips qui, là encore, est conjecturale.

À la suite de contributions de Kawamata, Shokurov et Tsunoda pour les principales, Mori prouve l'existence des flips en dimension 3 ([21]). L'existence des flips en dimension 4 est due à Shokurov ([28], voir également [6]). La non-existence de suite infinie de flips est démontrée par Shokurov ([25]) en dimension 3 et par Kawamata, Matsuda et Matsuki ([15]) en dimension 4. Le programme des modèles minimaux est donc complet en dimension ≤ 4 .

De larges parties du MMP ont été généralisées en dimension ≥ 5 mais les principales conjectures demeuraient : l'existence des flips et la non-existence de suite infinie de flips.

Le but de ce texte est d'exposer les travaux récents de Birkar, Cascini, Hacon et McKernan sur ces questions. Les progrès réalisés sont spectaculaires : ils montrent,

⁽²⁾ Le point de vue adopté ici, généralement attribué à Reid, diffère de celui des géomètres italiens.

⁽³⁾ À singularités terminales.

par exemple, l'existence des flips en toutes dimensions (voir le corollaire 2.5 pour un énoncé précis) et la non-existence de suite infinie de flips dirigés lorsque X est de type général (voir le corollaire 2.8). Ils n'obtiennent pas la non-existence de suite infinie de flips en toute généralité mais leurs résultats sont néanmoins suffisants pour beaucoup d'applications.

THÉORÈME 0.1. — *Soit X une variété projective lisse.*

1. *Si X est de type général, alors il existe une variété projective X_\bullet birationnellement équivalente à X , peu singulière, telle que K_{X_\bullet} soit numériquement effectif.*
2. *Si K_X n'est pas pseudo-effectif, alors il existe encore une variété projective X_\bullet birationnellement équivalente à X , peu singulière, et un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ tels que $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à Y_\bullet .*

Soit X une variété projective lisse. La finitude de l'algèbre canonique

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(kK_X))$$

est un problème classique et difficile. On sait qu'elle est de type fini sur \mathbf{C} si $\dim(X) \leq 3$ grâce aux travaux de Zariski si $\dim(X) = 2$, Fujita et ceux que nous avons déjà cités si $\dim(X) = 3$; très peu de choses étaient connues jusqu'alors en dimension plus grande.

THÉORÈME 0.2. — *Soit X une variété projective lisse. L'algèbre canonique*

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(kK_X))$$

est de type fini sur $\mathbf{C}^{(4)}$.

Le lien avec la question initiale est le suivant. L'énoncé précédent est une conséquence (facile) de l'existence de modèles minimaux et de la conjecture d'abondance qui, X_\bullet étant un modèle minimal de X , prédit que le système linéaire $|mK_{X_\bullet}|$ est sans point base pour $m \gg 0$ (voir par exemple [23, Conjecture 4.6]).

L'approche de Birkar, Cascini, Hacon et McKernan est un peu différente, ils ne montrent ni l'existence de modèles minimaux, ni la conjecture d'abondance en général (voir théorèmes 2.1 et 1.18).

Le texte est organisé de la façon suivante. On rassemble dans la première partie des résultats « classiques » sur le programme des modèles minimaux et ses extensions aux paires d'une part et à la situation relative d'autre part. On présente les résultats

⁽⁴⁾ Une preuve de ce résultat lorsque X est supposée de type général est annoncée dans [31].

en début de seconde partie et on donne ensuite les grandes lignes des démonstrations des principaux résultats.

Je remercie pour leur aide à la préparation de ce texte Laurent Bonavero, Sébastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Caroline Gruson, Catriona Maclean, James McKernan et Tanguy Rivoal, ainsi que tous les participants au groupe de travail de Grenoble.

1. LE MMP

1.1. Notations et rappels

Dans la suite de ce texte, le symbole X/Z désigne un morphisme projectif $X \rightarrow Z$ de variétés quasi-projectives normales. Si X/Z et Y/Z sont deux tels objets, le symbole $X/Z \rightarrow Y/Z$ (resp. $X/Z \dashrightarrow Y/Z$) désigne un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ (resp. une application rationnelle $\pi : X \dashrightarrow Y$) tel que $g \circ \pi = f$ où f et g sont respectivement les morphismes de X et Y vers Z .

Soit $f : X \rightarrow Z$ comme ci-dessus. Un diviseur de Weil sur X est une combinaison linéaire formelle $D = \sum_{i \in I} d_i D_i$, à coefficients entiers, d'hypersurfaces irréductibles de X . Il est dit effectif lorsque tous les coefficients sont positifs ; on écrit alors $D \geq 0$. Il est dit premier si une seule hypersurface irréductible apparaît dans D et qu'elle a coefficient 1. On considérera aussi des \mathbf{Q} -diviseurs et des \mathbf{R} -diviseurs. On définit $\lfloor D \rfloor = \sum_{i \in I} \lfloor d_i \rfloor D_i$ et $\lceil D \rceil = \sum_{i \in I} \lceil d_i \rceil D_i$.

Toute fonction rationnelle non nulle u sur X a un diviseur, celui de ses pôles et zéros, noté $\text{div}(u)$.

On désigne par K_X un diviseur canonique sur X , c'est-à-dire le diviseur d'une forme différentielle méromorphe de degré maximal ; si X est lisse, on a $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$.

Un diviseur de Cartier sur X est un diviseur de Weil qui peut être défini localement par une seule équation.

Le groupe des diviseurs de Weil sur X à coefficients dans \mathbf{Z} (resp. \mathbf{Q} et \mathbf{R}) est noté $Z^1(X)_{\mathbf{Z}}$ (resp. $Z^1(X)_{\mathbf{Q}}$ et $Z^1(X)_{\mathbf{R}}$). Le sous-groupe de $Z^1(X)_{\mathbf{Z}}$ formé des diviseurs de Cartier sur X est noté $\text{Div}(X)$. Un \mathbf{Q} -diviseur (resp. \mathbf{R} -diviseur) de Weil est dit \mathbf{Q} -Cartier (resp. \mathbf{R} -Cartier) s'il est dans le \mathbf{Q} -sous-espace vectoriel (\mathbf{R} -sous-espace vectoriel) de $Z^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $Z^1(X)_{\mathbf{R}}$) engendré par $\text{Div}(X)$. L'ensemble des \mathbf{Q} -diviseurs de Weil \mathbf{Q} -Cartier (resp. \mathbf{R} -diviseurs de Weil \mathbf{R} -Cartier) est noté $\text{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$).

Les diviseurs D_1 et D_2 de $Z^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $Z^1(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits \mathbf{Q} -linéairement équivalents relativement à Z (resp. \mathbf{R} -linéairement équivalents relativement à Z) et on note $D_1 \sim_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \sim_{\mathbf{R},Z} D_2$) s'il existe $u_j \in \text{Rat}(X) \setminus \{0\}$, $r_j \in \mathbf{Q}$

(resp. $r_j \in \mathbf{R}$) pour $j \in J$ fini et $D_Z \in \text{Div}(Z)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $D_Z \in \text{Div}(Z)_{\mathbf{R}}$) tels que $D_1 - D_2 = \sum_{j \in J} r_j \text{div}(u_j) + f^* D_Z$ où $\text{Rat}(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur X .

On note $Z_1(X/Z)$ le groupe abélien libre engendré par les courbes intègres complètes $C \subset X$ telles que $\dim(f(C)) = 0$.

Les diviseurs D_1 et D_2 de $\text{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits numériquement équivalents relativement à Z et on note $D_1 \equiv_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \equiv_{\mathbf{R},Z} D_2$) si $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ pour tout 1-cycle $C \in Z_1(X/Z)$.

On note $N_1(X/Z)$ (resp. $N^1(X/Z)$) l'espace vectoriel réel $Z_1(X/Z) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ (resp. $\text{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$) modulo la relation d'équivalence numérique définie ci-dessus. Les espaces vectoriels réels $N_1(X/Z)$ et $N^1(X/Z)$ sont de dimension finie ; leur dimension commune est appelée le nombre de Picard relatif et notée $\rho(X/Z)$.

Le cône convexe fermé de $N_1(X/Z)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs de $Z_1(X/Z)$ est noté $\overline{\text{NE}}(X/Z)$.

On note $\text{Amp}(X/Z) \subset N^1(X/Z)$ le cône convexe engendré par les classes de diviseurs amples relativement à Z et $\text{Nef}(X/Z)$ son adhérence. Un élément $D \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit ample relativement à Z ou *ample*/ Z (resp. numériquement effectif relativement à Z ou encore *nef*/ Z) si sa classe dans $N^1(X/Z)$ est dans $\text{Amp}(X/Z)$ (resp. $\text{Nef}(X/Z)$) de façon équivalente, si pour tout $C \in \overline{\text{NE}}(X/Z) \setminus \{0\}$, on a $D \cdot C > 0$ (resp. $D \cdot C \geq 0$) (voir [16]).

Un \mathbf{Q} -diviseur $D \in Z^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est dit effectif relativement à Z ou *effectif*/ Z s'il existe un diviseur effectif $B \in Z^1(X)_{\mathbf{Q}}$ tel que $D \sim_{\mathbf{Q},Z} B$. On note $\text{Eff}(X/Z)$ le cône convexe de $N^1(X/Z)$ engendré par les classes des \mathbf{Q} -diviseurs de Weil \mathbf{Q} -Cartier effectifs/ Z et $\text{Pef}(X/Z)$ son adhérence. Un élément $D \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit pseudo-effectif relativement à Z ou encore *pseudo-effectif*/ Z si sa classe dans $N^1(X/Z)$ est dans $\text{Pef}(X/Z)$. L'intérieur du cône $\text{Pef}(X/Z)$ est noté $\text{Big}(X/Z)$. Un élément $D \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit grand (« big » en anglais) relativement à Z ou *grand*/ Z si sa classe dans $N^1(X/Z)$ est dans $\text{Big}(X/Z)$. Quitte à remplacer Z par la normalisation de $f(X)$, on peut toujours supposer f dominant. La terminologie est alors justifiée par le fait qu'un élément $D \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est grand/ Z si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\text{rang}(f_* \theta(\lfloor mD \rfloor)) \geq c(\dim(X) - \dim(Z))^m$ pour tout $m \gg 0$. Le lemme de Kodaira en donne une autre caractérisation : D est grand/ Z si et seulement si pour tout $A \in \text{Amp}(X/Z)$, il existe un réel $t > 0$ et $B \in Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tel que $D \sim_{\mathbf{R},Z} tA + B$. L'une ou l'autre de ces deux caractérisations permet d'étendre la définition précédente aux \mathbf{R} -diviseurs de Weil.

Un élément $D \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit semi-ample relativement à Z ou encore *semi-ample*/ Z s'il existe un morphisme $\pi : X/Z \rightarrow Y/Z$ et $D_Y \in \text{Amp}(Y/Z)$ tel que $D \sim_{\mathbf{R},Z} \pi^* D_Y$ ⁽⁵⁾⁽⁶⁾.

L'interprétation géométrique des diviseurs à coefficients réels n'est pas évidente, il faut la chercher du côté de la géométrie complexe où, par exemple, si X est supposée projective et lisse, la classe d'un \mathbf{R} -diviseur pseudo-effectif dans $H^2(X, \mathbf{R})$ peut être représentée par un courant positif fermé de type $(1, 1)$ (voir par exemple [7]).

1.2. Les singularités de paires

Le lecteur pourra consulter le très joli texte [18] sur le sujet ainsi que [6, Chapter 3]. L'introduction des paires peut sembler un peu artificielle au premier abord mais il ne fait plus aucun doute aujourd'hui que les techniques sous-jacentes sont un outil extrêmement efficace pour étudier les variétés de dimension supérieure.

DÉFINITION 1.1. — *Une paire (X, Δ) (resp. $(X/Z, \Delta)$) est la donnée d'une variété quasi-projective X normale et d'un \mathbf{R} -diviseur de Weil effectif Δ sur X (resp. d'un morphisme $f : X \rightarrow Z$ de variétés quasi-projectives normales et d'un \mathbf{R} -diviseur de Weil effectif Δ sur X) tels que $K_X + \Delta$ soit \mathbf{R} -Cartier.*

Soient (X, Δ) une paire et $\pi : V \rightarrow X$ une résolution des singularités de (X, Δ) ⁽⁷⁾. Écrivons

$$K_V + \tilde{\Delta} = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_F a_F(X, \Delta) F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers π -exceptionnels, $\tilde{\Delta}$ est le transformé strict de Δ dans V et, si K_X est le diviseur d'une forme différentielle méromorphe ω_X sur X , K_V est le diviseur de ω_X sur V , vue comme forme différentielle méromorphe sur V . Les coefficients $a_F(X, \Delta)$ ne dépendent pas du choix des diviseurs canoniques K_V et K_X par le lemme suivant (voir par exemple [19, Lemma 3.39]).

LEMME 1.2 (Lemme de négativité). — *Soient $\pi : V \rightarrow X$ un morphisme propre et birationnel de variétés normales et $B \in \text{Div}(V)_{\mathbf{R}}$. On suppose $-B$ nef/ X . Alors B est effectif si et seulement si $\pi_* B$ l'est. En particulier, tout \mathbf{R} -diviseur de Weil \mathbf{R} -Cartier sur V , π -exceptionnel et π -numériquement trivial est nul.*

⁽⁵⁾ Si π est propre et à fibres connexes alors π est unique à isomorphisme près ; il est alors déterminé par les courbes complètes $C \subset X$ telles que $D \cdot C = 0$.

⁽⁶⁾ On retrouve la définition usuelle si D est à coefficients entiers ou rationnels.

⁽⁷⁾ Une résolution des singularités de la paire (X, Δ) est un morphisme projectif birationnel $\pi : V \rightarrow X$ avec V lisse tel que $\text{Exc}(\pi)$ soit de codimension pure 1 et $\text{Exc}(\pi) + \pi^{-1}(\text{Supp}(\Delta))$ un diviseur dont le support est à croisements normaux simples, i.e. les composantes irréductibles de son support sont lisses et se coupent transversalement. Il en existe toujours.

Si $F \subset V$ est maintenant un diviseur premier non π -exceptionnel, on définit $a_F(X, \Delta)$ comme étant l'opposé du coefficient de F dans $\tilde{\Delta}$.

DÉFINITION 1.3. — Le réel $a_F(X, \Delta)$ est appelé la *discrépance du diviseur F relativement à la paire (X, Δ)* .

L'anneau local $\mathcal{O}_{F,Y} \subset \text{Rat}(X)$, où $F \subset V$ est un diviseur premier, est un anneau de valuation discrète correspondant à une valuation v_F sur $\text{Rat}(X)$. Une telle valuation est appelée une *valuation algébrique*. Soient $\pi' : V' \rightarrow X$ une autre résolution des singularités de (X, Δ) et $F' \subset V'$ un diviseur premier; $v_F = v_{F'}$ si et seulement si l'application rationnelle induite $V \dashrightarrow V'$ est un isomorphisme aux points génériques de F et F' respectivement et dans ce cas $a_F(X, \Delta) = a_{F'}(X, \Delta)$. Le réel $a_F(X, \Delta)$ ne dépend donc que de v_F et pas de π . Une valuation algébrique v_F sur $\text{Rat}(X)$ est dite *exceptionnelle* sur X si son centre dans X est de codimension au moins 2. Posons

$$\text{discrep}(X, \Delta) := \inf\{a_F(X, \Delta) \text{ où } v_F \text{ est exceptionnelle sur } X\}.$$

DÉFINITION 1.4. — Une paire (X, Δ) est dite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{klt pour Kawamata log-terminale} \\ \text{plt pour purement log-terminale} \\ \text{lc pour log-canonique} \end{array} \right. \quad \text{si } \text{discrep}(X, \Delta) \left\{ \begin{array}{l} > -1 \text{ et } \lfloor \Delta \rfloor = 0, \\ > -1, \\ \geq -1. \end{array} \right.$$

La paire $(X/Z, \Delta)$ est dite *klt* (resp. *plt*, *lc*) si (X, Δ) l'est.

DÉFINITION 1.5. — Une paire (X, Δ) est dite *dlt pour divisoriellement log-terminale* si les coefficients de Δ sont inférieurs à 1 et s'il existe un ouvert $X_0 \subset X$ tel que X_0 soit lisse, $\Delta|_{X_0}$ un diviseur dont le support est à croisements normaux simples et $a_F(X, \Delta) > -1$ pour toute valuation v_F dont le centre dans X est contenu dans $X \setminus X_0$ ⁽⁸⁾. La paire $(X/Z, \Delta)$ est dite *dlt* si (X, Δ) l'est.

Exemple 1.6. — La paire (\mathbf{C}^2, C_1) où C_1 est la cubique cuspidale d'équation $\{(x, y) \mid y^2 = x^3\}$ n'est pas lc, la paire (\mathbf{C}^2, C_2) où C_2 est la cubique nodale d'équation $\{(x, y) \mid x^3 + y^3 - xy = 0\}$ est lc mais pas dlt et, enfin, la paire (\mathbf{C}^2, C_3) où $C_3 := \{(x, y) \mid xy = 0\}$ est dlt mais pas plt.

⁽⁸⁾ De façon équivalente, une paire (X, Δ) est dlt si les coefficients de Δ sont inférieurs à 1 et s'il existe une résolution $\pi : V \rightarrow X$ des singularités de (X, Δ) telle que pour tout diviseur premier $F \subset V$ π -exceptionnel on ait $a_F(X, \Delta) > -1$ (voir [32]).

Exemple 1.7. — Soient X une variété quasi-projective lisse et $\Delta = \sum_{i \in I} \delta_i \Delta_i$ un diviseur effectif dont le support est à croisements normaux simples. La paire $(X, \sum_{i \in I} \delta_i \Delta_i)$ est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{klt} \\ \text{plt} \\ \text{dlt} \\ \text{lc} \end{array} \right. \text{ssi pour tout } i, j \in I \left\{ \begin{array}{l} \delta_i < 1, \\ \delta_i \leq 1 \text{ et } \delta_i + \delta_j < 2 \text{ si } \Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset \text{ et } i \neq j, \\ \delta_i \leq 1, \text{ et} \\ \delta_i \leq 1. \end{array} \right.$$

La classe des paires (X, Δ) klt est grosso modo la classe de singularités de paires la plus grande où tout fonctionne essentiellement comme si X était lisse et $\Delta = 0$ mais dont le principal défaut est de ne pas permettre les raisonnements par récurrence sur la dimension. Les classes de singularités de paires plt, dlt et lc sont introduites pour y remédier.

Soit (X, Δ) une paire dlt. Alors X est à singularités rationnelles et en particulier de Cohen-Macaulay⁽⁹⁾ (voir [8] et [15, Theorem 1.3.6]). De plus, (X, Δ) est « limite » d'une suite de paires klt ; de façon plus précise, si A est un diviseur ample sur X , il existe un réel $c > 0$ et un \mathbf{R} -diviseur de Weil $\Delta_1 \sim_{\mathbf{R}} \Delta + cA$ tel que la paire $(X, (1-t)\Delta + t\Delta_1)$ soit klt pour tout $0 < t \ll 1$.

La proposition suivante explique le lien entre les singularités de paires plt et dlt.

PROPOSITION 1.8 ([19, Proposition 5.51]). — *Soit (X, Δ) une paire dlt. Alors (X, Δ) est plt si et seulement si $\lfloor \Delta \rfloor$ est réunion disjointe de ses composantes irréductibles, auquel cas $\lfloor \Delta \rfloor$ est normal.*

On peut montrer que si $\text{discrep}(X, \Delta) < -1$ alors en fait $\text{discrep}(X, \Delta) = -\infty$: la classe des paires lc est donc la classe de singularités de paires la plus grande qui puisse être définie de cette façon. On espère pouvoir étendre le MMP aux paires lc mais personne ne sait encore le faire⁽¹⁰⁾.

La formule suivante, dite d'adjonction, motive en partie l'introduction des paires (voir [15, Lemma 5.1.9] et [17, Chapter 16]).

THÉORÈME 1.9. — *Soient X une variété normale et $S \subset X$ une hypersurface normale telles que $K_X + S$ soit \mathbf{Q} -Cartier. Alors il existe un \mathbf{Q} -diviseur de Weil effectif Diff_S sur S , appelé la différente, ne dépendant pas des choix de K_S et K_X tel que*

$$(K_X + S)|_S \sim_{\mathbf{Q}} K_S + \text{Diff}_S^{(11)}.$$

⁽⁹⁾ La paire $(X, 0)$ où X est un cône sur une variété abélienne de dimension ≥ 2 est lc mais pas de Cohen-Macaulay, X n'étant pas S_3 en son sommet (voir [19, Example 5.23]).

⁽¹⁰⁾ Quelques résultats dans cette direction sont annoncés dans [10] (voir également [2]).

⁽¹¹⁾ Le diviseur Diff_S est supporté par les composantes de codimension 2 du lieu singulier de X contenues dans S .

Exemple 1.10. — Soient $X \subset \mathbf{P}^3$ le cône quadratique d'équation $xy = z^2$ et $S \subset X$ la droite d'équations $x = z = 0$. Si p est le sommet de X alors $\text{Diff}_S = \frac{1}{2}p$.

LEMME 1.11. — Soient X une variété normale et $S \subset X$ une hypersurface normale telles que $K_X + S$ soit \mathbf{Q} -Cartier. Soit $D \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ effectif dont le support ne contient pas S . Posons $\text{Diff}_S(D) := \text{Diff}_S + D|_S$. Si $(X, S + D)$ est plt (resp. dlt, lc) alors $(S, \text{Diff}_S(D))$ est klt (resp. dlt, lc).

1.3. Modèles nef, minimaux et canoniques

Ce qui sera expliqué au paragraphe suivant (et plus particulièrement la remarque 1.22) nous amène à poser les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.12. — Un modèle nef (resp. canonique) $(X_{\bullet}/Z, \Delta_{\bullet}, \varphi)$ ou $(X_{\bullet}/Z, \varphi)$ de la paire $(X/Z, \Delta)$ est la donnée d'une paire $(X_{\bullet}/Z, \Delta_{\bullet})$ et d'une application birationnelle $\varphi : X/Z \dashrightarrow X_{\bullet}/Z$ telles que

1. φ^{-1} ne contracte pas de diviseur ⁽¹²⁾,
2. $\Delta_{\bullet} = \varphi_*\Delta$,
3. $K_{X_{\bullet}} + \Delta_{\bullet}$ soit nef/ Z (resp. ample/ Z) et
4. $a_F(X, \Delta) \leq a_F(X_{\bullet}, \Delta_{\bullet})$ pour tout diviseur premier φ -exceptionnel F .

Un modèle nef est appelé un modèle minimal si

5. les inégalités ci-dessus sont strictes ⁽¹³⁾.

Remarque 1.13. — Si Δ' est un \mathbf{R} -diviseur de Weil effectif tel que $K_X + \Delta'$ et $\varphi_*(K_X + \Delta')$ soient \mathbf{R} -Cartier et $K_X + \Delta \equiv_{\mathbf{R}, Z} K_X + \Delta'$, alors $(X_{\bullet}/Z, \varphi)$ est un modèle nef (resp. minimal, canonique) de $(X/Z, \Delta)$ si et seulement si c'est un modèle nef (resp. minimal, canonique) de $(X/Z, \Delta')$.

Remarque 1.14. — Soit $(X_{\bullet}/Z, \varphi)$ un modèle nef d'une paire $(X/Z, \Delta)$. Soient V une résolution commune des singularités de (X, Δ) et $(X_{\bullet}, \Delta_{\bullet})$, π et π_{\bullet} les morphismes de V sur X et X_{\bullet} respectivement et

$$E := \sum_F (a_F(X_{\bullet}, \Delta_{\bullet}) - a_F(X, \Delta))F \sim_{\mathbf{R}} \pi^*(K_X + \Delta) - \pi_{\bullet}^*(K_{X_{\bullet}} + \Delta_{\bullet})$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers de V . La condition 4 dans la définition précédente entraîne que π_*E est effectif et la condition 3 et le lemme de négativité que E est effectif. Il est π_{\bullet} -exceptionnel par la condition 1 et si $(X_{\bullet}, \Delta_{\bullet})$

⁽¹²⁾ On a donc $\varphi_*K_X = K_{X_{\bullet}}$.

⁽¹³⁾ Soit $(X_{\bullet}/Z, \varphi)$ un modèle nef d'une paire $(X/Z, \Delta)$ klt. On peut montrer (en utilisant le théorème 2.1) qu'il existe un modèle minimal $(Y/Z, \varphi_0)$ de $(X/Z, \Delta)$ et un morphisme $\varphi_1 : Y/Z \rightarrow X_{\bullet}/Z$ tels que $K_Y + \varphi_{0*}\Delta = \varphi_{1*}(K_{X_{\bullet}} + \varphi_*\Delta)$ (on dit alors que φ_1 est un morphisme *crépant*) et $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$.

est modèle minimal alors le support de E contient les transformés stricts des diviseurs sur X contractés par φ par la condition 5. On en tire les conséquences suivantes :

1. le diviseur $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif/ Z ,
2. $a_F(X, \Delta) \leq a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ pour toute valuation algébrique v_F sur $\text{Rat}(X)$,
3. en particulier, si (X, Δ) est klt (resp. lc), alors $(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ est klt (resp. lc) et enfin,
4. si Δ est à coefficients rationnels et si r est un entier tel que $r(K_X + \Delta)$ et $r(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet)$ soient des diviseurs de Cartier, alors les algèbres graduées

$$\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(kr(K_X + \Delta))) \text{ et } \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X_\bullet, \mathcal{O}_{X_\bullet}(kr(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet)))$$

sont isomorphes.

La remarque précédente motive la définition suivante.

DÉFINITION 1.15. — Soient $(X/Z, \Delta)$ et $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$ deux paires. Une application birationnelle $\varphi : X/Z \dashrightarrow X_\bullet/Z$ est dite $K_X + \Delta$ négative si elle satisfait aux conditions 1 et 2 de la définition 1.12 et

$$a_F(X, \Delta) \leq a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$$

pour toute valuation algébrique v_F sur $\text{Rat}(X)$. Elle est dite $K_X + \Delta$ strictement négative si, de plus,

$$a_F(X, \Delta) < a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$$

pour tout diviseur premier φ -exceptionnel F .

LEMME 1.16. — Un modèle canonique est unique à isomorphisme près⁽¹⁴⁾.

Preuve. — Soient $(X_1/Z, \varphi_1)$ et $(X_2/Z, \varphi_2)$ deux modèles canoniques de $(X/Z, \Delta)$ et $\pi : V \rightarrow X$ une résolution commune des singularités de (X, Δ) et (X_i, φ_i) pour $i \in \{1, 2\}$. Notons π_i le morphisme de V vers X_i et $\Delta_i := \varphi_{i*} \Delta$. Par la remarque 1.14, pour $i \in \{1, 2\}$, il existe un diviseur effectif π_i -exceptionnel E_i tel que $\pi^*(K_X + \Delta) \sim_{\mathbf{R}} \pi_i^*(K_{X_i} + \Delta_i) + E_i$ de sorte que

$$\pi_1^*(K_{X_1} + \Delta_1) - \pi_2^*(K_{X_2} + \Delta_2) \sim_{\mathbf{R}} E_2 - E_1.$$

Le lemme de négativité appliqué à π_1 donne $E_2 - E_1 \geq 0$, et $E_1 - E_2 \geq 0$ s'il est appliqué à π_2 . On en tire $E_1 = E_2$ et $\pi_1^*(K_{X_1} + \Delta_1) \sim_{\mathbf{R}} \pi_2^*(K_{X_2} + \Delta_2)$. Les morphismes π_1 et π_2 contractent donc les mêmes courbes et, par suite, l'application rationnelle $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ s'étend en l'isomorphisme $X_1/Z \simeq X_2/Z$ cherché. \square

⁽¹⁴⁾ Les modèles $(X_1/Z, \varphi_1)$ et $(X_2/Z, \varphi_2)$ sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : X_1/Z \simeq X_2/Z$ tel que $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Soit maintenant $(X/Z, \Delta)$ une paire klt telle que $K_X + \Delta$ soit grand/ Z . Par le théorème suivant (voir par exemple [15, Theorem 3.1.1] et [15, Remark 3.1.2] si Δ est un \mathbf{Q} -diviseur et [4, Theorem 3.4.1] pour le cas général), si la paire $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal alors elle a un modèle canonique.

THÉORÈME 1.17. — *Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt et $H \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ nef/ Z tels que $cH - (K_X + \Delta)$ soit nef/ Z et grand/ Z pour un réel $c > 0$. Alors H est semi-ample/ Z .*

Le résultat suivant est un corollaire bien utile du théorème précédent.

COROLLAIRE 1.18 ([4, Corollary 3.4.2]). — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt où Δ est grand/ Z . Si $K_X + \Delta$ est nef/ Z alors il est semi-ample/ Z .*

Enfin, on peut justifier (en partie) l'hypothèse de \mathbf{Q} -factorialité introduite aux paragraphes 1.4 et 1.5 de la façon suivante. Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt et $\pi : V \rightarrow X$ une résolution des singularités de (X, Δ) . Soit $E \subset V$ un diviseur effectif dont le support est exactement le lieu exceptionnel de π . Posons

$$\Gamma := - \sum_{a_F(X, \Delta) < 0} a_F(X, \Delta) F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de V tels que $a_F(X, \Delta) < 0$. On peut montrer que pour tout $0 < t \ll 1$, $(X_{\bullet}/Z, \varphi)$ est un modèle minimal (resp. nef) de (X, Δ) si et seulement si $(X_{\bullet}/Z, \varphi \circ \pi)$ est un modèle minimal (resp. nef) de $(V, \Gamma + tE)$ (voir [4, Lemma 3.5.5]).

1.4. Le MMP

Les textes de référence pour ce paragraphe sont [15], [17] et [19]. Soit $(X/Z, \Delta) := (X_0/Z, \Delta_0)$ une paire dlt. On suppose X \mathbf{Q} -factorielle, i.e que tout diviseur de Weil sur X est \mathbf{Q} -Cartier. Le MMP produit conjecturalement de nouvelles paires $(X_i/Z, \Delta_i)$ pour $0 \leq i \leq m$, avec X_i \mathbf{Q} -factorielle, des applications birationnelles $\varphi_i : X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ pour $0 \leq i \leq m-1$ (Δ_{i+1} est le transformé strict de Δ_i dans X_{i+1}) et un objet final $(X_{\bullet}/Z, \Delta_{\bullet}) := (X_m/Z, \Delta_m)$ tel que ou bien $(X_{\bullet}/Z, \varphi_{\bullet})$ soit un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$, où l'on a posé $\varphi_{\bullet} := \varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_0$, ou bien il existe un morphisme projectif à fibres connexes $c_{\bullet} : X_{\bullet}/Z \rightarrow Y_{\bullet}/Z$ tel que $\dim(Y_{\bullet}) < \dim(X_{\bullet})$, $-(K_{X_{\bullet}} + \Delta_{\bullet})$ soit ample/ Y_{\bullet} et $\rho(X_{\bullet}/Y_{\bullet}) = 1$ (le morphisme c_{\bullet} est appelé une *fibration de Mori*).

Le premier pas est le résultat suivant dit « théorème du cône », fruit des travaux de nombreux auteurs dont les principaux sont Benveniste, Kawamata, Kollár, Mori, Reid et Shokurov.

THÉORÈME 1.19. — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire dlt.*

1. Il existe une famille au plus dénombrable $(\Gamma_i)_{i \in I}$ de courbes rationnelles $\Gamma_i \in Z_1(X/Z)$, telle que $0 < -(K_X + \Delta) \cdot \Gamma_i \leq 2 \dim(X)$, $R_i := \mathbf{R}^+[\Gamma_i]$ soit une arête du cône $\overline{\text{NE}}(X/Z)$ et

$$\overline{\text{NE}}(X/Z) = \overline{\text{NE}}(X/Z)_{K_X + \Delta \geq 0} + \sum_{i \in I} R_i \quad (15).$$

2. Pour tout diviseur A ample/ Z , il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes du cône $\overline{\text{NE}}(X/Z)$ contenues dans le demi-espace $N_1(X/Z)_{K_X + \Delta + A < 0}$.
3. Soit $i \in I$. Il existe un morphisme projectif à fibres connexes $c_i : X/Z \rightarrow X_i/Z$ tel que, pour toute courbe complète $C \subset X$, $\dim(c_i(C)) = 0$ si et seulement si $[C] \in R_i$; le morphisme c_i est appelé la contraction de R_i , il est unique à isomorphisme près.
4. Enfin, si $c_i : X/Z \rightarrow X_i/Z$ est comme ci-dessus et si \mathcal{L} est un fibré inversible sur X tel que $\mathcal{L} \cdot \Gamma_i = 0$, alors il existe un fibré inversible \mathcal{L}_i tel que $\mathcal{L} \simeq c_i^* \mathcal{L}_i$.

Supposons la paire $(X_i/Z, \Delta_i)$ déjà construite avec X_i \mathbf{Q} -factorielle et (X_i, Δ_i) dlt.

Si $K_{X_i} + \Delta_i$ est nef/ Z alors $(X_i/Z, \Delta_i)$ est un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$ et $m = i$.

Si $K_{X_i} + \Delta_i$ n'est pas nef/ Z , alors il existe une arête R_i du cône $\overline{\text{NE}}(X_i/Z)$ telle $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$. Soit $c_i : X_i/Z \rightarrow Y_i/Z$ la contraction de R_i .

Si $\dim(Y_i) < \dim(X_i)$ alors c_i est une fibration de Mori par les points 3 et 4 du théorème 1.19 et $m = i$.

Si $\dim(Y_i) = \dim(X_i)$ et le lieu exceptionnel $\text{Exc}(c_i)$ de c_i est de codimension 1 dans X_i alors la contraction c_i est dite *divisorielle*. On peut montrer que $\text{Exc}(c_i)$ est irréductible, Y_i \mathbf{Q} -factorielle, la paire $(Y_i, c_{i*} \Delta_i)$ dlt (voir remarque 1.22) et $\rho(Y_i/Z) = \rho(X_i/Z) - 1$. On pose $X_{i+1}/Z := Y_i/Z$ et $\Delta_{i+1} := c_{i*} \Delta_i$.

Si $\dim(Y_i) = \dim(X_i)$ et $\text{Exc}(c_i)$ est de codimension au moins 2 dans X_i alors la contraction c_i est dite *petite*. La situation se complique singulièrement : le diviseur $K_{Y_i} + c_{i*} \Delta_i$ n'est pas \mathbf{R} -Cartier. Il faut introduire une nouvelle transformation birationnelle : le *flip* de c_i .

DÉFINITION 1.20. — *Le flip de c_i est un morphisme birationnel projectif $c_i^+ : X_i^+ \rightarrow Y_i$, où X_i^+ est une variété normale, dont le lieu exceptionnel $\text{Exc}(c_i^+)$ est de codimension au moins 2 dans X_i^+ et tel que $K_{X_i^+} + \Delta_i^+$ soit \mathbf{R} -Cartier et ample/ Y_i où Δ_i^+ est le transformé strict de Δ_i dans X_i^+ . On appelle aussi flip l'application rationnelle $X_i/Z \dashrightarrow X_i^+/Z$.*

(15) On note $\overline{\text{NE}}(X/Z)_{K_X + \Delta \geq 0} := \{z \in \overline{\text{NE}}(X/Z) \mid (K_X + \Delta) \cdot z \geq 0\}$.

Si le flip de c_i existe, X_i^+ est \mathbf{Q} -factorielle, la paire (X_i^+, Δ_i^+) dlt (voir remarque 1.22) et $\rho(X_i/Z) = \rho(X_i^+/Z)$. On pose $X_{i+1}/Z := X_i^+/Z$ ⁽¹⁶⁾ et $\Delta_{i+1} := \Delta_i^+$.

Remarque 1.21. — Le flip de c_i (s'il existe) est unique : c'est le modèle canonique de la paire $(X_i/Y_i, \Delta_i)$ et inversement, si le modèle canonique de $(X_i/Y_i, \Delta_i)$ existe, c'est le flip de c_i (voir [15, Proposition 5.1.11]).

Remarque 1.22. — Si $\varphi_i : X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ est un flip ou une contraction divisorielle, le lemme de négativité entraîne que pour toute valuation algébrique v_F sur $\text{Rat}(X_i)$

$$a_F(X_i, \Delta_i) \leq a_F(X_{i+1}, \Delta_{i+1}),$$

l'inégalité étant stricte si le centre de v_F est contenu dans le lieu exceptionnel de c_i ou dans le lieu exceptionnel de c_{i+1} ⁽¹⁷⁾. On en déduit que la paire (X_{i+1}, Δ_{i+1}) est dlt. L'application birationnelle φ_i est $K_{X_i} + \Delta_i$ strictement négative.

Remarque 1.23. — Soit Δ' un \mathbf{R} -diviseur de Weil sur X tel que $K_X + \Delta'$ soit \mathbf{R} -Cartier et $K_X + \Delta \equiv_{\mathbf{R}, Z} K_X + \Delta'$; le MMP pour (X, Δ) produit (conjecturalement) des paires $(X_i/Z, \Delta'_i)$ et un objet final $(X_\bullet/Z, \Delta'_\bullet)$ du même type que $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$. La remarque précédente entraîne que si (X, Δ') est klt (resp. plt, dlt, lc) alors les paires (X_i, Δ'_i) et $(X_\bullet, \Delta'_\bullet)$ sont klt (resp. plt, dlt, lc). C'est une observation élémentaire mais fort utile dans la suite.

Il reste donc, pour que le MMP soit complet, à montrer l'existence des flips et l'aboutissement du MMP (« termination » en anglais). Si $X_i/Z \rightarrow X_{i+1}/Z$ est une contraction divisorielle alors $\rho(X_{i+1}/Z) = \rho(X_i/Z) - 1$ et le second point se réduit à montrer qu'il n'y a pas de suite infinie de flips. On conjecture que l'une et l'autre des deux assertions précédentes sont vraies pour les paires (X, Δ) dlt. En dimension 2, il n'y a pas de petites contractions et le MMP est donc complet.

L'existence des flips est due à Mori ([21]) si $\dim(X) = 3$, X est à singularités terminales (*i.e.* $\text{discrep}(X, 0) > 0$) et $\Delta = 0$ et à Shokurov ([26], [17] et [28]) si $\dim(X) \leq 4$ et (X, Δ) est klt.

La non-existence de suite infinie de flips est une question encore ouverte en dimension ≥ 4 . Elle est due à Shokurov ([25]) si $\dim(X) = 3$, X est à singularités terminales et $\Delta = 0$, à Kawamata, Matsuda et Matsuki ([15]) si $\dim(X) = 4$, X est à singularités terminales et $\Delta = 0$, à Kawamata ([13] et [17]) si $\dim(X) = 3$ et (X, Δ) est klt et enfin à Fujino ([9]) si $\dim(X) = 4$ et (X, Δ) est canonique (*i.e.* $\text{discrep}(X, \Delta) \geq 0$) (voir également [1]).

⁽¹⁶⁾ Les variétés X_i et X_i^+ sont isomorphes en codimension 1.

⁽¹⁷⁾ On reprend les hypothèses et notations du lemme 1.2. Si B est effectif alors, pour tout $x \in X$, ou bien $f^{-1}(x) \subset \text{Supp}(B)$ ou bien $f^{-1}(x) \cap \text{Supp}(B) = \emptyset$.

On considérera aussi dans la suite de ce texte des flips de pl-contractions ou encore pl-flips (pour « prelimiting flips »).

DÉFINITION 1.24 ([26]). — Soit (X, Δ) une paire plt. On suppose X \mathbf{Q} -factorielle et $S := \lfloor \Delta \rfloor$ irréductible. Un morphisme birationnel propre $c : X \rightarrow Y$ où Y est une variété normale est appelé une pl-contraction si

1. le lieu exceptionnel de c est de codimension ≥ 2 dans X ,
2. $\rho(X/Y) = 1$,
3. $-(K_X + \Delta)$ et $-S$ sont amples/ Y .

Le flip de c , s'il existe, est un morphisme birationnel propre $c^+ : X^+ \rightarrow Y$, où X^+ est une variété normale, dont le lieu exceptionnel est de codimension ≥ 2 dans X^+ tel que $K_{X^+} + \Delta^+$ soit \mathbf{R} -Cartier et ample/ Y , où Δ^+ est le transformé strict de Δ dans X^+ . Le flip d'une pl-contraction est appelé un pl-flip.

Remarque 1.25. — Le pl-flip, s'il existe, est lui aussi unique : c'est le modèle canonique de la paire $(X/Y, \Delta)$ et inversement, si le modèle canonique de $(X/Y, \Delta)$ existe, c'est le pl-flip de c .

1.5. Le MMP dirigé

Le MMP dirigé est un MMP où les arêtes contractées ne sont pas choisies de façon arbitraire. Les données sont une paire $(X/Z, \Delta)$ dlt où X est \mathbf{Q} -factorielle et un \mathbf{R} -diviseur effectif $H \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ tel que $K_X + \Delta + H$ soit nef/ Z et $(X, \Delta + H)$ lc. On pose $t_0 = 1$. Le MMP dirigé par H produit (conjecturalement) des paires $(X_i/Z, \Delta_i)$, une suite décroissante de réels $0 \leq t_i \leq 1$ pour $0 \leq i \leq m$, des applications birationnelles $\varphi_i : X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ pour $0 \leq i \leq m-1$ telles que $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ soit nef/ Z et $(X_i, \Delta_i + t_i H_i)$ lc où, comme toujours, Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} et un objet final $(X_{\bullet}/Z, \Delta_{\bullet}) = (X_m/Z, \Delta_m)$ comme précédemment. Le point est que $(X_i/Z, \varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_0)$ est un modèle nef de la paire $(X/Z, \Delta + t_i H)$.

L'observation importante est la suivante.

LEMME 1.26 ([3, Lemma 2.6]). — Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire dlt où X est \mathbf{Q} -factorielle et $H \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tel que la paire $(X, \Delta + H)$ soit lc. Si $K_X + \Delta$ n'est pas nef/ Z mais $K_X + \Delta + H$ l'est alors il existe une arête $R \subset \overline{\text{NE}}(X/Z)$ et un réel $0 < t \leq 1$ tels que $(K_X + \Delta) \cdot R < 0$, $(K_X + \Delta + tH) \cdot R = 0$ et $K_X + \Delta + tH$ soit nef/ Z .

Supposons $(X_i/Z, \Delta_i)$ et $0 \leq t_i \leq 1$ déjà construits avec $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ nef/ Z et supposons $K_{X_i} + \Delta_i$ non nef/ Z . Par le lemme 1.26, il existe une arête $R_i \subset \overline{\text{NE}}(X_i/Z)$ et un réel $0 < t_{i+1} \leq t_i$ tels que $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$, $(K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i) \cdot R_i = 0$

et $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1}H_i$ soit nef/ Z . Soit $c_i : X_i/Z \rightarrow Y_i/Z$ la contraction associée et supposons par exemple la contraction petite. Soit $c_i^+ : X_i^+ \rightarrow Y_i$ le flip de c_i (s'il existe). On pose à nouveau $X_{i+1}/Z := X_i^+/Z$ et $\Delta_{i+1} := \Delta_i^+$. Par le point 4 du théorème 1.19, $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1}H_i = c_i^*M_i$ où $M_i \in \text{Div}(Y_i)_{\mathbf{R}}$. Le diviseur M_i est nef/ Z puisque $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1}H_i$ l'est,

$$K_{X_{i+1}} + \Delta_{i+1} + t_{i+1}H_{i+1} = ((c_i^+)^{-1} \circ c_i)_*(K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1}H_i) = (c_i^+)^*M_i$$

l'est donc également. Le cas des contractions divisorielles est analogue.

Si $t \in [0, t_i[$ ($i \geq 1$), $(K_{X_{i-1}} + \Delta_{i-1} + tH_{i-1}) \cdot R_{i-1} < 0$ de sorte que φ_{i-1} est $K_{X_{i-1}} + \Delta_{i-1} + tH_{i-1}$ strictement négative. On en tire facilement que l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta + t_iH$ négative ou encore que $(X_i/Z, \varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_0)$ est un modèle nef de $(X/Z, \Delta + t_iH)$.

1.6. Les polytopes de Shokurov

L'un des ingrédients de la preuve du théorème 0.2 est la compréhension de la dépendance en Δ des modèles nef et minimaux de la paire $(X/Z, \Delta)$. L'observation clef est le résultat suivant (voir également [15, Proposition 4.2.4]).

PROPOSITION 1.27 ([27]). — Soient $X \rightarrow Z$ un morphisme projectif de variétés quasi-projectives normales et $P \subset Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ un polytope convexe tel que pour tout $\Delta \in P$, Δ soit grand/ Z et (X, Δ) klt.

1. Fixons $\Delta \in P$. L'ensemble des arêtes $R \subset \overline{\text{NE}}(X/Z)$ telles que $(K_X + \Delta) \cdot R < 0$ est fini.
2. L'ensemble des arêtes $R \subset \overline{\text{NE}}(X/Z)$ pour lesquelles $R^{\perp} := \{\Delta \in P \mid (K_X + \Delta) \cdot R = 0\}$ est non vide est également fini.

Preuve. — Montrons que la seconde assertion est entraînée par la première. On peut toujours supposer que P est un simplexe; soient $(\Delta_i)_{i \in I}$ ses sommets. Soit A un \mathbf{Q} -diviseur ample/ Z . Il existe un rationnel $t_0 > 0$ et, pour tout $i \in I$, $E_i \in Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tels que $\Delta_i \sim_{\mathbf{R}} t_0A + E_i$. Quitte à remplacer A par t_0A , on peut toujours supposer $t_0 = 1$. Écrivons $\Delta_i = (1-t)\Delta_i + t\Delta_i \sim_{\mathbf{R}} (1-t)\Delta_i + tA + tE_i$. Si $t > 0$ est assez petit, la paire $(X, tA + (1-t)\Delta_i + tE_i)$ est klt pour tout $i \in I$. Si $\Delta = \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$ alors la paire $(X, tA + (1-t)\Delta + \sum_{i \in I} \lambda_i E_i)$ est elle aussi klt et $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}} K_X + tA + (1-t)\Delta + \sum_{i \in I} \lambda_i E_i$. Il en résulte qu'on peut toujours supposer $\Delta \geq A$ pour tout $\Delta \in P$, quitte à remplacer A par $\frac{1}{t}A$.

Le polytope P étant compact, il suffit de montrer la seconde assertion de la proposition au voisinage d'un point $\Delta \in P$. Soient R' une arête et $\Delta' \in P$ tels que $(K_X + \Delta') \cdot R' = 0$. Le calcul

$$(K_X + \Delta - \frac{1}{2}A) \cdot R' = (K_X + \Delta') \cdot R' + (\Delta - \Delta' - \frac{1}{2}A) \cdot R' = (\Delta - \Delta' - \frac{1}{2}A) \cdot R'$$

montre que si Δ' est assez proche de Δ alors $(K_X + \Delta - \frac{1}{2}A) \cdot R' < 0$. La seconde assertion est donc bien entraînée par la première.

Montrons la première assertion. Soit $\Delta \in P$. On peut toujours supposer $\Delta = A + B$ où A est un \mathbf{Q} -diviseur (effectif) ample/ Z et $B \geq 0$ par les arguments ci-dessus. Le résultat cherché est maintenant une conséquence immédiate du point 2 du théorème 1.19 appliqué à la paire $(X/Z, B)$ et au diviseur A . \square

Les données étant celles de la proposition précédente, soit $\varphi : X/Z \dashrightarrow Y/Z$ une application birationnelle dont l'inverse ne contracte pas de diviseur. On déduit facilement de la proposition 1.27 que l'ensemble

$$P(Y/Z, \varphi) := \{\Delta \in P \mid (Y/Z, \varphi_*\Delta) \text{ soit un modèle nef de } (X/Z, \Delta)\}$$

est un polytope convexe. En utilisant les théorèmes 2.1 et 2.3, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.28 ([4, Corollary 1.1.5]). — *On reprend les hypothèses de la proposition 1.27. Alors l'ensemble $\{\Delta \in P \mid K_X + \Delta \text{ soit pseudo-effectif}/Z\}$ est la réunion (finie) des polytopes convexes $P(X_\bullet/Z, \varphi)$ où $(X_\bullet/Z, \varphi)$ parcourt l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles minimaux de paires $(X/Z, \Delta)$ pour $\Delta \in P$.*

2. LES RÉSULTATS

2.1. Les énoncés

Les énoncés qui suivent, sauf mention du contraire, sont tirés de [12] et [4].

THÉORÈME 2.1 (Existence de modèles minimaux). — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt. On suppose Δ grand/ Z et $K_X + \Delta$ pseudo-effectif/ Z . Alors $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal $(X_\bullet/Z, \varphi)$ où X_\bullet est de plus \mathbf{Q} -factorielle.*

Preuve du théorème 0.2 (esquisse). — Supposons X de type général pour commencer. Soient $k \gg 0$ et $\Delta \in |kK_X|$. La paire $(X, t\Delta)$ est klt pour un rationnel $t > 0$ assez petit et $t\Delta$ est grand. Soit (X_\bullet, φ) un modèle minimal de $(X, t\Delta)$, dont l'existence est garantie par le théorème 2.1 ; c'est aussi un modèle minimal pour $(X, 0)$ puisque $K_X + t\Delta \sim_{\mathbf{R}} (1 + tk)K_X$ et K_{X_\bullet} est donc semi-ample par le théorème 1.17.

Soit $r > 0$ un entier tel que rK_{X_\bullet} soit Cartier. L'algèbre $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(krK_X))$ est isomorphe à l'algèbre $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X_\bullet, \mathcal{O}_{X_\bullet}(krK_{X_\bullet}))$ (voir remarque 1.14) qui est de type fini sur \mathbf{C} par le lemme suivant (voir par exemple [24]).

LEMME 2.2. — *Soient X une variété projective et \mathcal{L} un fibré en droites sur X semi-ample. Alors l'algèbre $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k})$ est de type fini sur \mathbf{C} .*

L'argument lorsque X est quelconque est le suivant. D'après [11], il existe une paire (Y, Γ) klt telle que Γ soit grand et les algèbres $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(krK_X))$ et $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(kr'(K_Y + \Gamma)))$ isomorphes où r et r' sont des entiers convenables. On conclut ensuite essentiellement comme ci-dessus. \square

Le résultat suivant complète le théorème 2.1.

THÉORÈME 2.3 (Finitude des modèles nef). — *Soient $X \rightarrow Z$ un morphisme projectif de variétés quasi-projectives normales et $P \subset Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ un polytope convexe tel que pour tout $\Delta \in P$, Δ soit grand/ Z et (X, Δ) klt. Alors l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles nef des paires $(X/Z, \Delta)$ pour $\Delta \in P$ est fini⁽¹⁸⁾.*

Le dernier et probablement le plus important des énoncés est un résultat de « non-annulation ».

THÉORÈME 2.4 (Non-annulation). — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt. On suppose Δ grand/ Z et $K_X + \Delta$ pseudo-effectif/ Z . Alors il existe un \mathbf{R} -diviseur effectif D sur X tel que $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}, Z} D$.*

Indiquons quelques corollaires des théorèmes 2.1 et 2.3 en plus des résultats déjà mentionnés.

COROLLAIRE 2.5. — *Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt avec X \mathbf{Q} -factorielle et $c : X/Z \rightarrow Y/Z$ la contraction d'une arête $R \subset \overline{\text{NE}}(X/Z)$ telle que $(K_X + \Delta) \cdot R < 0$. On suppose la contraction petite. Alors le flip de c existe.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.6 et de la remarque 1.21. \square

COROLLAIRE 2.6. — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt. Si $K_X + \Delta$ est grand/ Z alors le modèle canonique de $(X/Z, \Delta)$ existe.*

Preuve. — Soit $B \sim_{\mathbf{R}, Z} K_X + \Delta$ un \mathbf{R} -diviseur effectif ; pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, la paire $(X, \Delta + \varepsilon B)$ est klt et $\Delta + \varepsilon B$ est grand/ Z . La paire $(X, \Delta + \varepsilon B)$ a donc un modèle minimal par le théorème 2.1 qui est également un modèle minimal de la paire (X, Δ) puisque $K_X + \Delta + \varepsilon B \sim_{\mathbf{R}, Z} (1 + \varepsilon)(K_X + \Delta)$. On conclut comme indiqué à la fin du paragraphe 1.3. \square

COROLLAIRE 2.7. — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt avec X \mathbf{Q} -factorielle. On suppose que $K_X + \Delta$ n'est pas pseudo-effectif/ Z . Un MMP convenable pour $(X/Z, \Delta)$ donne alors une paire $(X_{\bullet}/Z, \Delta_{\bullet})$ et une fibration de Mori $c_{\bullet} : X_{\bullet}/Z \rightarrow Y_{\bullet}/Z$ ⁽¹⁹⁾.*

⁽¹⁸⁾ Ce résultat est faux si on ne suppose pas Δ grand/ Z pour tout $\Delta \in P$ (voir [14]).

⁽¹⁹⁾ Les arguments donnés ici montrent également comment déduire le corollaire 2.8 du théorème 2.3.

PREUVE — Soit $H \in \text{Div}(X)$ un diviseur ample/ Z tel que $K_X + \Delta + H$ soit ample/ Z et $(X, \Delta + H)$ klt. Soit $t > 0$ un réel tel que $K_X + \Delta + tH$ ne soit pas pseudo-effectif/ Z . Considérons un MMP dirigé par H pour la paire $(X/Z, \Delta + tH)$. Il produit des paires $(X_i/Z, \Delta_i + tH_i)$, des réels $0 \leq t_i \leq 1$ et des applications birationnelles $X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ où Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} tels que $K_{X_i} + \Delta_i + (t+t_i)H_i$ soit nef/ Z . Les paires $(X_i, \Delta_i + (t+t_i)H_i)$ sont klt par la remarque 1.14. Le théorème 2.3 entraîne que l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles minimaux $(X_i/Z, \Delta_i + (t+t_i)H_i)$ ainsi obtenus est fini et donc que le MMP aboutit puisque deux tels modèles ne sont pas isomorphes s'ils sont distincts (par exemple par la remarque 1.22). L'objet final $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet + tH_\bullet)$ ne peut être un modèle minimal puisque par choix de t , $K_X + \Delta + tH$ n'est pas pseudo-effectif. Il existe donc une contraction $c_\bullet : X_\bullet/Z \rightarrow Y_\bullet/Z$ avec $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$, $-(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet + tH_\bullet)$ ample/ Z et $\rho(X_\bullet/Y_\bullet) = 1$. Il reste à voir que toutes les étapes du MMP pour la paire $(X/Z, \Delta + tH)$ sont en fait des étapes du MMP pour la paire (X, Δ) , autrement dit, que $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$, les notations étant celles du paragraphe 1.5. C'est immédiat puisque $K_{X_i} + \Delta_i + (t+t_i)H_i$ est nef/ Z et $(K_{X_i} + \Delta_i + tH_i) \cdot R_i < 0$. \square

COROLLAIRE 2.8. — Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt avec X \mathbf{Q} -factorielle et soit $H \in \text{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tel que $(X, \Delta + H)$ soit klt et $K_X + \Delta + H$ nef/ Z ⁽²⁰⁾. On suppose Δ grand/ Z . Alors il n'existe pas de suite infinie de flips dans un MMP dirigé par H .

COROLLAIRE 2.9. — Soit (X, Δ) une paire klt. Il existe $\pi : X' \rightarrow X$ où π est un morphisme petit et X' \mathbf{Q} -factorielle.

2.2. Schéma de la preuve

Décrivons la structure de la preuve des théorèmes d'existence de modèles minimaux, de finitude des modèles nef et de non-annulation.

Le théorème de finitude des modèles nef en dimension n se déduit, ce n'est pas facile, du théorème d'existence de modèles minimaux en dimension n ; cela fait l'objet du paragraphe 2.3.

Le théorème d'existence de modèles minimaux se démontre par récurrence sur la dimension n de X . Le résultat en dimension 1 est immédiat. Fixons $n \geq 2$ et supposons le théorème d'existence de modèles minimaux vrai si $\dim(X) = n - 1$.

⁽²⁰⁾ Un diviseur de la forme $H = \frac{1}{2}H_0$ où H_0 est un diviseur très ample sur X , assez général dans $|H_0|$ tel que $K_X + \Delta + \frac{1}{2}H_0$ soit nef/ Z fait l'affaire.

Étape 1. — On montre l'existence des pl-flips en dimension n , autrement dit l'énoncé suivant (voir paragraphe 2.6).

THÉORÈME 2.10. — *Soit (X, Δ) une paire plt où X est \mathbf{Q} -factorielle de dimension n , Δ un \mathbf{Q} -diviseur et $S := \lfloor \Delta \rfloor$ irréductible et soit $c : X \rightarrow Y$ une pl-contraction. Alors le flip de c existe.*

Étape 2. — On montre ensuite le théorème d'existence des modèles minimaux dans le cas particulier où la paire (X, Δ) est « effective » (voir paragraphe 2.4).

THÉORÈME 2.11. — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt où X est de dimension n . On suppose Δ grand/ Z et qu'il existe un \mathbf{R} -diviseur effectif D sur X tel que $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}, Z} D$. Alors $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal $(X_\bullet/Z, \varphi)$ où X_\bullet est de plus \mathbf{Q} -factorielle.*

Il faut souligner que le modèle minimal cherché n'est pas obtenu par un MMP pour la paire (X, Δ) ; l'argument est plus subtil.

Étape 3. — On remarque ensuite que les arguments donnés au paragraphe 2.3 permettent de prouver le cas particulier suivant du théorème de finitude des modèles nef.

THÉORÈME 2.12. — *Soient $X \rightarrow Z$ un morphisme projectif de variétés quasi-projectives normales où $\dim(X) = n$ et $P \subset Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ un polytope convexe tel que, pour tout $\Delta \in P$, Δ soit grand/ Z , la paire (X, Δ) klt et $K_X + \Delta$ grand/ Z . Alors, l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles nef des paires $(X/Z, \Delta)$ pour $\Delta \in P$ est fini.*

Étape 4. — On montre enfin le théorème de non-annulation en dimension n ; cela fait l'objet du paragraphe 2.5.

Étape 5 (Conclusion). — Le théorème d'existence de modèles minimaux en dimension n se déduit immédiatement des étapes 2 et 4.

La non-existence de suite infinie de flips dirigés est une conséquence du théorème de finitude des modèles nef (c'est essentiellement le contenu du corollaire 2.8) de sorte que les théorèmes d'existence de modèles minimaux et de finitude des modèles nef sont équivalents modulo l'existence des flips. L'hypothèse de récurrence est utilisée dans les étapes 2 et 4 sous la forme « finitude des modèles nef » en dimension $n - 1$.

2.3. Finitude des modèles nef

L'objet de ce paragraphe est d'expliquer comment le théorème de finitude des modèles nef en dimension n se déduit du théorème d'existence de modèles minimaux en dimension n où $n \geq 1$ est un entier fixé. On suppose le théorème 2.1 vrai en dimension n .

Il suffit de prouver le théorème de finitude des modèles nef lorsque P est un simplexe et, quitte à remplacer X par un modèle \mathbf{Q} -factoriel $\pi : X' \rightarrow X$ (voir corollaire 2.9⁽²¹⁾) et P par $(\pi^{-1})_*P$, on peut supposer X \mathbf{Q} -factorielle. Comme dans la preuve de la proposition 1.27, on se ramène au cas où il existe un \mathbf{R} -diviseur ample A tel que $\Delta \geq A$ pour tout $\Delta \in P$, quitte à modifier P convenablement.

Fixons maintenant une famille finie $(H_i)_{i \in I}$ de diviseurs amples et effectifs sur X dont les classes engendrent $N^1(X/Z)$. Quitte à remplacer les H_i par des multiples convenables, A par un diviseur qui lui est \mathbf{R} -linéairement équivalent et P par un translaté, on peut supposer que $A = A_0 + \sum_{i \in I} H_i$ où A_0 est ample/ Z . Soit $0 < t \leq 1$ tel que pour tout $\Delta = A + B \in P$ et tout $-t \leq t_i \leq t$, la paire $(X, \Delta + \sum_{i \in I} t_i H_i)$ soit klt.

Soit $(X_\bullet/Z, \varphi)$ un modèle nef de $(X/Z, \Delta)$ où $\Delta \in P$ est fixé. Montrons qu'il existe des réels $-t \leq t_i \leq t$ tels que $(X_\bullet/Z, \varphi)$ soit un modèle canonique de la paire $(X/Z, \Delta + \sum_{i \in I} t_i H_i)$. Supposons pour simplifier X_\bullet \mathbf{Q} -factorielle, le cas général étant à peine plus compliqué. Soit H' un diviseur très ample sur X_\bullet , général dans $|H'|$. Il existe des réels $(t_i)_{i \in I}$ tels que $(\varphi^{-1})_*H' \equiv_{\mathbf{R}, Z} \sum_{i \in I} t_i H_i$. Posons $H := \varphi_*(\sum_{i \in I} t_i H_i) \equiv_{\mathbf{R}, Z} H'$; le diviseur H est ample/ Z et $K_{X_\bullet} + \varphi_*\Delta + H$ l'est donc également. Quitte à remplacer H par un multiple convenable, on peut également supposer $-t \leq t_i \leq t$ et $(X_\bullet, \varphi_*\Delta + H)$ klt. Le diviseur H' étant supposé général, φ est $K_X + \Delta + \sum_{i \in I} t_i H_i$ négative et $(X_\bullet/Z, \varphi)$ est donc un modèle canonique de $(X/Z, \Delta + \sum_{i \in I} t_i H_i)$.

Il suffit donc de montrer que l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles canoniques des paires $(X/Z, \Delta)$ pour $\Delta \in P$ est fini, quitte à remplacer P par $P + \sum_{i \in I} [-t, t]H_i$ et A par A_0 .

Supposons avoir démontré l'existence d'applications birationnelles $\varphi_j : X/Z \dashrightarrow X_j/Z$, pour $j \in J$ fini, telles que, pour tout $\Delta \in P$ tel que $K_X + \Delta$ soit pseudo-effectif/ Z , il existe $j \in J$ tel que $(X_j/Z, \varphi_j)$ soit un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$. Fixons $j \in J$. L'ensemble

$$P_j := \{\Delta \in P \mid (X_j/Z, \varphi_j) \text{ soit un modèle nef de } (X/Z, \Delta)\}$$

⁽²¹⁾ Le corollaire 2.9 en dimension n est une conséquence du théorème 2.1 en dimension n .

est un polytope convexe (voir paragraphe 1.6). Soit $\Delta \in P_j$; si $K_X + \Delta$ est grand/ Z alors le modèle canonique de $(X/Z, \Delta)$ existe par le corollaire 2.6⁽²²⁾. Il reste alors à remarquer que si $\Delta \in P_j$ et $\Delta' \in P_j$ sont deux diviseurs dans l'intérieur d'une même face de P_j , $K_X + \Delta$ est grand/ Z si et seulement si $K_X + \Delta'$ l'est puisque $K_{X_j} + \varphi_{j*} \Delta$ et $K_{X_j} + \varphi_{j*} \Delta'$ sont semi-amplés/ Z par le théorème 1.18, auquel cas les modèles canoniques de $(X_j/Z, \varphi_{j*} \Delta)$ et $(X_j/Z, \varphi_{j*} \Delta')$ sont isomorphes.

Il faut maintenant prouver l'existence d'applications birationnelles φ_j comme ci-dessus. Il suffit, par compacité de P , de montrer l'assertion au voisinage d'un diviseur $\Delta_0 \in P$.

Supposons d'abord $K_X + \Delta_0 \sim_{\mathbf{R}, Z} 0$. Soit $\Delta_1 \in \partial P$. Posons $\Delta := \Delta_0 + t(\Delta_1 - \Delta_0)$ pour $0 \leq t \leq 1$. On a $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}, Z} t(K_X + \Delta_1)$ et, si $t > 0$ et $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif/ Z alors $K_X + \Delta_1$ est également pseudo-effectif/ Z et un modèle minimal pour (X, Δ_1) est un modèle minimal pour (X, Δ) . Il suffit donc, par récurrence sur la dimension du sous-espace affine de $Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ engendré par P , de montrer l'assertion pour $P = \{\Delta_0\}$, auquel cas, la conclusion cherchée est donnée par le théorème d'existence de modèles minimaux.

Il reste à expliquer comment se ramener au cas ci-dessus. Si $K_X + \Delta_0$ n'est pas pseudo-effectif/ Z alors la paire $(X/Z, \Delta_0)$ n'a pas de modèle minimal et c'est encore vrai pour $\Delta \in P$ proche de Δ_0 puisque le cône $\text{Pef}(X/Z)$ est fermé. On peut donc supposer $K_X + \Delta_0$ pseudo-effectif/ Z . En considérant un modèle minimal (à singularités \mathbf{Q} -factorielles) de $(X/Z, \Delta_0)$, on se ramène facilement au cas où $K_X + \Delta_0$ est nef/ Z . Soit $(X_{\bullet}/Z, \varphi_0)$ le modèle canonique de $(X/Z, \Delta_0)$; φ_0 est un morphisme et $K_X + \Delta_0 \sim_{\mathbf{R}, X_{\bullet}} 0$. Soient $\varphi_j : X/X_{\bullet} \dashrightarrow X_j/X_{\bullet}$, pour $j \in J$ fini, des applications birationnelles telles que, pour tout $\Delta \in P$ tel que $K_X + \Delta$ soit pseudo-effectif/ X_{\bullet} , il existe $j \in J$ tel que $(X_j/X_{\bullet}, \varphi_j)$ soit un modèle minimal de $(X/X_{\bullet}, \Delta)$. Le diviseur $K_{X_{\bullet}} + \varphi_{0*} \Delta_0$ étant ample/ Z , il reste à se convaincre que la proposition 1.27 entraîne que si Δ est assez proche de Δ_0 et $K_{X_j} + \varphi_{j*} \Delta$ est nef/ X_{\bullet} alors $K_{X_j} + \varphi_{j*} \Delta$ est nef/ Z , autrement dit, $(X_j/Z, \varphi_j)$ est un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$. \square

2.4. Existence de modèles minimaux pour les paires effectives

L'objet de ce paragraphe est de donner les grandes lignes de la preuve du théorème 2.11. On suppose le théorème d'existence de modèles minimaux vrai en dimension $n - 1$.

LEMME 2.13. — Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire dlt où X est \mathbf{Q} -factorielle de dimension n et $H \in Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tels qu'aucune composante irréductible de H ne soit contenue dans $\lfloor \Delta \rfloor$ et tels que $K_X + \Delta$ soit pseudo-effectif/ Z .

⁽²²⁾ Le corollaire 2.6 en dimension n est une conséquence du théorème 2.1 en dimension n .

- (H1) On suppose que pour toute composante irréductible S de $\lfloor \Delta \rfloor$ il existe $\Delta' \in Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ tel que $\Delta' \sim_{\mathbf{R}, Z} \Delta$, $(X, \Delta' + tH)$ soit plt pour tout $0 \leq t < 1$, $\lfloor \Delta' \rfloor = S$ et $(\Delta' - S)|_S$ grand/ Z .
- (H2) On suppose enfin que pour toute composante irréductible S de $\lfloor \Delta \rfloor$ il existe $\Delta'' \in Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ tel que $\Delta'' \sim_{\mathbf{R}, Z} \Delta + H$, (X, Δ'') soit plt, $\lfloor \Delta'' \rfloor = S$ et $(\Delta'' - S)|_S$ grand/ Z .

On considère un MMP dirigé par H pour (X, Δ) ⁽²³⁾. Alors, pour $i \gg 0$, le lieu exceptionnel de φ_i est disjoint de $\lfloor \Delta_i \rfloor$, les notations étant celles du paragraphe 1.5.

Preuve (esquisse). — Les contractions c_i sont toutes birationnelles puisque $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif/ Z . Supposons qu'il existe une composante irréductible S de $\lfloor \Delta \rfloor$ telle que le lieu exceptionnel de φ_i rencontre S_i pour une infinité d'entiers $i \geq 0$ où S_i est le transformé strict de S dans X_i ; en particulier, S n'est contractée par aucune des φ_i . Notons $\psi_i : S_i \dashrightarrow S_{i+1}$ les applications birationnelles induites par les φ_i et $\Theta_i := \text{Diff}_{S_i}(\Delta'_i - S_i)$ où Δ' est donné par l'hypothèse (H1) et Δ'_i est le transformé strict de Δ' dans X_i ; (S_i, Θ_i) est klt et Θ_i est grand/ Z .

On montre, nous ne le ferons pas, que pour un entier i_0 convenable et tout $i \geq i_0$, ψ_i^{-1} ne contracte pas de diviseur, $\psi_{i*} \Theta_i = \Theta_{i+1}$ et

$$a_F(S_i, \Theta_i) \leq a_F(S_{i+1}, \Theta_{i+1})$$

pour toute valuation algébrique v_F sur $\text{Rat}(S_i)$.

On montre ensuite que l'ensemble des classes d'isomorphie d'applications birationnelles $S_{i_1} \dashrightarrow S_i$ pour $i \geq i_1 \geq i_0$ est fini de la façon suivante.

Supposons $t_{i_1} < 1$ pour au moins un entier $i_1 \geq i_0$ et donc pour tout entier $i \geq i_1$. Les paires $(S_i/Z, \Theta_i + t_i H_{i|S_i})$ sont des modèles nef ⁽²⁴⁾ de paires $(S_{i_1}/Z, \Theta_{i_1} + t H_{i_1|S_{i_1}})$ pour des réels $t \in [0, t_{i_1}]$ convenables et puisque $(X, \Delta' + tH)$ est plt pour tout $0 \leq t < 1$, les paires $(S_{i_1}/Z, \Theta_{i_1} + t H_{i_1|S_{i_1}})$ pour $t \in [0, t_{i_1}]$ sont klt. Par le théorème de finitude des modèles nef, l'ensemble des classes d'isomorphie de ces modèles est fini et l'ensemble des classes d'isomorphie d'applications birationnelles $S_{i_1} \dashrightarrow S_i$ pour $i \geq i_1$ l'est donc également.

Si $t_i = 1$ pour tout $i \geq 0$, l'argument est analogue, en utilisant cette fois l'hypothèse (H2).

Il reste maintenant à exhiber une contradiction. Quitte à remplacer i_1 par un entier plus grand, on peut supposer que les φ_i sont des flips pour tout $i \geq i_1$. Notons T_i la normalisation de $c_i(S_i)$, $p_i : S_i \rightarrow T_i$ et $q_i : S_{i+1} \rightarrow T_i$ les restrictions des morphismes c_i et c_i^+ à S_i et S_{i+1} respectivement. Si S_i rencontre le lieu exceptionnel de φ_i alors

⁽²³⁾ On suppose l'existence des flips nécessaires.

⁽²⁴⁾ Je triche un peu ici; il faut encore vérifier que les applications birationnelles $\psi_{i-1} \circ \dots \circ \psi_{i_1}$ sont $K_{S_{i_1}} + \Theta_{i_1} + t_i H_{i_1|S_{i_1}}$ négatives, ce n'est pas très difficile.

ou bien p_i n'est pas un isomorphisme ou bien q_i n'en est pas un. En effet, si p_i est un isomorphisme alors $S_i \cdot R_i > 0$, $-S_{i+1}$ est donc ample/ Y_i et S_{i+1} contient le lieu exceptionnel de c_i^+ de sorte que q_i n'est pas un isomorphisme.

Soient maintenant $j > i \geq i_1$ deux entiers tels que $S_i \cap \text{Exc}(\varphi_i) \neq \emptyset$ et tels que l'application rationnelle induite $S_i \dashrightarrow S_j$ s'étende en un isomorphisme. Soit v_F une valuation algébrique sur $\text{Rat}(S_i)$ dont le centre est contenu dans le lieu exceptionnel de p_i ou celui de q_i , l'un des deux n'étant pas vide par la discussion qui précède; le lemme de négativité entraîne facilement

$$a_F(S_i, \Theta_i) < a_F(S_{i+1}, \Theta_{i+1}).$$

Enfin, puisque $i \geq i_1 \geq i_0$,

$$a_F(S_{i+1}, \Theta_{i+1}) \leq \dots \leq a_F(S_j, \Theta_j) = a_F(S_i, \Theta_i),$$

une contradiction. □

LEMME 2.14. — *On reprend les hypothèses du lemme 2.13. S'il existe $D \in Z^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif et un réel $t \geq 0$ tels que*

$$K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}, Z} D + tH \quad \text{et} \quad \text{Supp}(D) \subset \perp \Delta,$$

et si $K_X + \Delta + H$ est nef/ Z alors la paire $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal $(X_{\bullet}/Z, \varphi)$ où X_{\bullet} est de plus \mathbf{Q} -factorielle.

Preuve (esquisse). — Le modèle minimal cherché est obtenu au moyen d'un MMP dirigé par H pour $(X/Z, \Delta)$. Les notations sont celles du paragraphe 1.5. Notons que, pour tout $i \geq 0$, $K_{X_i} + \Delta_i \sim_{\mathbf{R}, Z} D_i + tH_i$. On en tire facilement $D_i \cdot R_i < 0$ puis que le lieu exceptionnel de la contraction c_i est contenu dans le support de $\perp D_i$. L'hypothèse (H1) entraîne ensuite que les flips nécessaires sont en fait des pl-flips dont l'existence est acquise à ce stade de la démonstration. La non-existence de suite infinie de flips est maintenant impliquée par le lemme 2.13. □

Remarque 2.15. — Les hypothèses (H1) et (H2) du lemme 2.13 sont satisfaites lorsque par exemple $(X, \Delta + H)$ est dlt et $\Delta \geq A$ où A est un \mathbf{R} -diviseur effectif ample/ Z . En effet, on peut toujours supposer, quitte à remplacer A par un diviseur qui lui est \mathbf{R} -linéairement équivalent, que $\Delta = S_1 + \dots + S_k + A + B$ où les S_i sont des diviseurs irréductibles et réduits deux à deux distincts, B un \mathbf{R} -diviseur effectif et $\perp \Delta = S_1 + \dots + S_k$. On écrit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\Delta = S_1 + (1 - \varepsilon)(S_2 + \dots + S_k + B) + A + \varepsilon(S_2 + \dots + S_k + B).$$

La paire $(X, S_1 + (1 - \varepsilon)(S_2 + \dots + S_k + B) + tH)$ est plt pour tout $0 \leq t < 1$ et tout $0 < \varepsilon \leq 1$ par la proposition 1.8; pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$, $A + \varepsilon(S_2 + \dots + S_k + B)$ est ample/ Z . Si $A'_\varepsilon \sim_{\mathbf{R}, Z} A + \varepsilon(S_2 + \dots + S_k + B)$ est général, la paire $(X, A'_\varepsilon + S_1 + (1 - \varepsilon)(S_2 + \dots + S_k + B) + tH)$ est encore plt pour tout $0 \leq t < 1$

et $\Delta' := A'_\varepsilon + S_1 + (1 - \varepsilon)(S_2 + \dots + S_k + B) \sim_{\mathbf{R},Z} \Delta$ convient. L'hypothèse (H2) s'obtient de la même façon.

La difficulté est d'utiliser le lemme 2.14 : si (X, Δ) est de plus klt alors $\lfloor \Delta \rfloor = 0$, $D = 0$ et $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R},Z} \frac{t}{t+1}(K_X + \Delta + tH)$ est nef/ Z par hypothèse.

LEMME 2.16. — Soit D un \mathbf{R} -diviseur de Weil effectif sur une variété normale X . Il existe des diviseurs irréductibles $(M_i)_{1 \leq i \leq k}$ dont des multiples entiers convenables sont mobiles⁽²⁵⁾, des réels positifs ou nuls $(r_i)_{1 \leq i \leq k}$ et un diviseur effectif F à support dans l'ensemble base stable $B(D)$ ⁽²⁶⁾ de D tels que

$$D \sim_{\mathbf{R}} \sum_{1 \leq i \leq k} r_i M_i + F.$$

Le résultat annoncé en début de paragraphe se déduit facilement de la proposition suivante⁽²⁷⁾.

PROPOSITION 2.17. — Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt et D un \mathbf{R} -diviseur de Weil effectif sur X tel que $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R},Z} D$. On suppose X lisse et que $\Delta + D$ est un diviseur dont le support est à croisements normaux simples. On suppose également qu'il existe un diviseur ample/ Z A sur X tel que $\Delta \geq A$, des diviseurs irréductibles $(M_i)_{1 \leq i \leq k}$ dont des multiples entiers convenables sont mobiles, des réels positifs ou nuls $(r_i)_{1 \leq i \leq k}$ et un diviseur effectif F à support dans $B(D)$ tels que $D = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i M_i + F$ et qu'aucun des M_i n'est une composante irréductible de Δ . Alors la paire $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal $(X_\bullet/Z, \varphi)$ où X_\bullet est de plus \mathbf{Q} -factorielle.

Preuve (esquisse). — Soit Δ^+ le \mathbf{R} -diviseur effectif sur X à coefficients inférieurs à 1 tel que $\Delta^+ \geq \Delta$ et $\text{Supp}(\lfloor \Delta^+ \rfloor)$ soit la partie divisorielle de $B(D)$. Posons $F^+ := F + \Delta^+ - \Delta$.

Étape 1. — Soit H^0 un diviseur ample sur X tel que $K_X + \Delta^+ + \sum_{1 \leq i \leq k} M_i + H^0$ soit nef/ Z et la paire $(X, \Delta^+ + \sum_{1 \leq i \leq k} M_i + H^0)$ dlt. Il vient

$$K_X + \Delta^+ + \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq k} M_i}_{=:\Delta^0} \sim_{\mathbf{R},Z} \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq k} (r_i + 1)M_i + F^+ + 0 \cdot H^0}_{=:D^0} \text{ et } \text{Supp}(D^0) \subset \lfloor \Delta^0 \rfloor.$$

On en déduit que la paire $(X/Z, \Delta^+ + \sum_{1 \leq i \leq k} M_i)$ a un modèle minimal $(X_1/Z, \varphi_0)$ par le lemme 2.14 appliqué à la paire $(X/Z, \Delta^0)$ et au diviseur H^0 .

⁽²⁵⁾ Un \mathbf{R} -diviseur B sur X est dit mobile si $\text{Fix}(B) = 0$.

⁽²⁶⁾ On rappelle que l'ensemble base stable $B(D)$ est le fermé $\bigcap_{D' \sim_{\mathbf{R}D} D'} \text{Supp}(D')$.

⁽²⁷⁾ La preuve présentée ici tient compte de quelques simplifications apportées par Kollár.

Étape 2. — Si $r_1 = \dots = r_k = 0$, on va directement à la dernière étape. Supposons $0 < r_1 \leq \dots \leq r_k$. On va construire successivement des modèles minimaux $(X_j/Z, \varphi_{j-1})$ de $(X_{j-1}/Z, \Delta_{j-1}^+ + \frac{1}{r_j} \sum_{1 \leq l \leq j-1} r_l M_{l,j-1} + \sum_{j \leq m \leq k} M_{m,j-1})$ pour $j \in \{1, \dots, k\}$, le premier étant le modèle construit à l'étape 1. Ici, Δ_j^+ (resp. F_j^+ , $M_{i,j}$) désigne le transformé strict de Δ^+ (resp. F^+ , M_i) dans X_j . Supposons déjà construit $(X_j/Z, \varphi_{j-1})$; en particulier $K_{X_j} + \Delta_j^+ + \frac{1}{r_j} \sum_{1 \leq l \leq j-1} r_l M_{l,j} + \sum_{j \leq m \leq k} M_{m,j}$ est nef/ Z . Si $r_j = r_{j+1}$ alors $X_{j+1}/Z := X_j/Z$ convient. Supposons $r_j < r_{j+1}$.

Écrivons

$$\begin{aligned} & K_{X_j} + \Delta_j^+ + \frac{1}{r_j} \sum_{1 \leq l \leq j-1} r_l M_{l,j} + \sum_{j \leq m \leq k} M_{m,j} \\ &= K_{X_j} + \Delta_j^+ + \frac{1}{r_j} \sum_{1 \leq l \leq j} r_l M_{l,j} + \sum_{j+1 \leq m \leq k} M_{m,j} \\ &= K_{X_j} + \Delta_j^+ + \frac{1}{r_{j+1}} \sum_{1 \leq l \leq j} r_l M_{l,j} + \sum_{j+1 \leq m \leq k} M_{m,j} + \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_{j+1}}\right) \sum_{1 \leq l \leq j} r_l M_{l,j}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} & K_{X_j} + \Delta_j^+ + \frac{1}{r_{j+1}} \sum_{1 \leq l \leq j} r_l M_{l,j} + \sum_{j+1 \leq m \leq k} M_{m,j} \\ & \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{=:\Delta^j} \\ & \sim_{\mathbf{R},Z} \underbrace{\sum_{j+1 \leq m \leq k} (r_m + 1)M_{m,j}}_{=:D^j} + F_j^+ + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{r_{j+1}}\right) \sum_{1 \leq l \leq j} r_l M_{l,j}}_{=:(1+\frac{1}{r_{j+1}})(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_{j+1}})^{-1}H^j} \text{ et } \text{Supp}(D^j) \subset \perp \Delta^j \perp \end{aligned}$$

Le lemme 2.14 appliqué à la paire $(X_j/Z, \Delta^j)$ et au diviseur H^j donne encore le modèle minimal cherché. Finalement, on obtient un modèle minimal $(X_k/Z, \varphi_{k-1})$ de la paire $(X_{k-1}/Z, \Delta_{k-1}^+ + \frac{1}{r_k} \sum_{1 \leq l \leq k} r_l M_{l,k-1})$. En particulier, $K_{X_k} + \Delta_k^+ + \frac{1}{r_k} \sum_{1 \leq l \leq k} r_l M_{l,k}$ est nef/ Z .

Étape 3. — On a

$$K_{X_k} + \underbrace{\Delta_k^+}_{=:\Delta^k} \sim_{\mathbf{R},Z} \underbrace{F_k^+}_{=:D^k} + \underbrace{r_1 M_{1,k} + \dots + r_k M_{k,k}}_{=:r_k H^k} \text{ et } \text{Supp}(D^k) \subset \perp \Delta^k \perp.$$

On en déduit que la paire $(X_k/Z, \Delta_k^+)$ a un modèle minimal $(X_{k+1}/Z, \varphi_k)$ par le lemme 2.14 appliqué à la paire $(X_k/Z, \Delta^k)$ et au diviseur H^k .

Étape 4. — Il reste à constater que $(X_{k+1}/Z, \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_0)$ est un modèle minimal de (X, Δ) . On montre pour commencer que l'application birationnelle $\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta$ strictement négative puis que toutes les composantes irréductibles de codimension 1 de $B(D)$ sont contractées dans X_{k+1} de sorte que $\Delta_{k+1}^+ = \Delta_{k+1}$ où Δ_{k+1} est le transformé strict de Δ dans X_{k+1} . \square

2.5. Non-annulation

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le théorème de non-annulation est vrai en dimension n . On suppose le théorème d'existence des modèles minimaux vrai en dimension $n - 1$.

On reprend les notations du théorème de non-annulation. On suppose X projective lisse et $\dim(Z) = 0$ pour simplifier. On se ramène à ce cas avec un peu de travail. L'idée est à nouveau de modifier la paire⁽²⁸⁾ (X, Δ) de façon à faire apparaître une composante irréductible dans Δ avec coefficient 1. La méthode est la suivante. Soit

$$K_X + \Delta = P(K_X + \Delta) + N(K_X + \Delta)$$

la décomposition de Zariski divisorielle de $K_X + \Delta$ (voir [5] et [22, Chapter 3]) où $N(K_X + \Delta)$ ⁽²⁹⁾ est un \mathbf{R} -diviseur effectif et $P(K_X + \Delta)$ un \mathbf{R} -diviseur nef en codimension 1⁽³⁰⁾ ⁽³¹⁾.

Supposons d'abord $P(K_X + \Delta) \equiv 0$ ou encore $K_X + \Delta \equiv N(K_X + \Delta)$. Quitte à perturber un peu Δ , on peut toujours supposer $\Delta \geq A$ où A est un \mathbf{R} -diviseur ample. Le \mathbf{R} -diviseur $A + N(K_X + \Delta) - (K_X + \Delta)$ est ample puisque l'amplitude est une propriété numérique et $A + N(K_X + \Delta) - (K_X + \Delta) \equiv A$ par hypothèse. Si $A' \sim_{\mathbf{R}} A + N(K_X + \Delta) - (K_X + \Delta)$ est général et $\Delta' := A' + \Delta - A$ alors (X, Δ') est klt et $K_X + \Delta' \sim_{\mathbf{R}} N(K_X + \Delta)$ est effectif. La paire (X, Δ') a donc un modèle minimal $(X_{\bullet}, \varphi_{\bullet})$ (voir paragraphe précédent) qui est aussi un modèle minimal pour (X, Δ) . Le corollaire 1.18 et la négativité de φ_{\bullet} (voir remarque 1.14) donnent le résultat cherché dans ce cas.

Supposons maintenant $P(K_X + \Delta) \not\equiv 0$. Il existe alors un diviseur ample A' et un réel $c > 0$ tels que pour tout $m \gg 0$ (voir [22, Chapter 5, Theorem 1.11]),

$$h^0(X, \lfloor m(K_X + \Delta) \rfloor + A') \geq c \cdot m.$$

On peut toujours supposer $\Delta \geq \frac{1}{k}A'$ pour un entier $k > 0$ convenable, quitte à remplacer Δ par un diviseur qui lui est \mathbf{R} -linéairement équivalent; posons $A := \frac{1}{k}A'$ et soit $x \in X$. On montre alors facilement qu'il existe un \mathbf{R} -diviseur effectif $G' \sim_{\mathbf{R}} m_0 k(K_X + \Delta) + A'$ tel que $\text{mult}_x G' > kn$ pour un entier $m_0 \gg 0$

⁽²⁸⁾ Il faut aussi modifier X .

⁽²⁹⁾ Le \mathbf{R} -diviseur $N(K_X + \Delta)$ ne dépend que de $K_X + \Delta$ à équivalence numérique près.

⁽³⁰⁾ Le lieu non nef $B_-(D) := \cup_{A \text{ ample}} B(D + A)$ d'un \mathbf{R} -diviseur D sur X est *a priori* réunion au plus dénombrable de fermés; D est dit nef en codimension 1 si $B_-(D)$ est réunion au plus dénombrable de fermés de codimension au moins 2 dans X .

⁽³¹⁾ Si D un \mathbf{R} -diviseur grand alors la décomposition de Zariski divisorielle est l'unique décomposition en somme de deux \mathbf{R} -diviseurs $P(D)$ et $N(D)$ respectivement nef en codimension un et effectif telle que l'application $H^0(X, \lfloor mP(D) \rfloor) \hookrightarrow H^0(X, \lfloor mD \rfloor)$ soit bijective pour tout entier $m \geq 0$. Soient maintenant D un \mathbf{R} -diviseur pseudo-effectif et A un \mathbf{R} -diviseur ample. Alors $D + \varepsilon A$ est grand pour tout $\varepsilon > 0$ et la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N(D + \varepsilon A)$ existe et ne dépend pas de A ; on pose $N(D) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} N(D + \varepsilon A)$ et $P(D) = D - N(D)$.

convenable; la paire (X, G) n'est pas lc au point x où $G := \frac{1}{k}G'$. Posons $\Delta_t = \frac{m_0-t}{m_0}A + \Delta - A + \frac{t}{m_0}G$. On a

$$(t+1)(K_X + \Delta) \sim_{\mathbf{R}} K_X + \Delta_t$$

et la paire (X, Δ) est donc effective si et seulement si (X, Δ_t) l'est. Par construction, la paire (X, Δ_0) qui n'est autre que (X, Δ) est klt et la paire (X, Δ_{m_0}) n'est pas lc en x . Il existe donc une valuation v_F sur $\text{Rat}(X)$ telle que $a_F(X, \Delta_{m_0}) < -1$. On en déduit l'existence d'une valuation $v_{F'}$ sur $\text{Rat}(X)$ telle que $a_{F'}(X, \Delta_t) = -1$ et $\text{discrep}(X, \Delta_t) \geq -1$ pour une certaine valeur du paramètre t : le diviseur F' est la composante avec coefficient 1 que nous cherchions à construire en début de paragraphe⁽³²⁾. Au prix de quelques efforts de plus, on montre que le résultat cherché se déduit de l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2.18. — *Soit (X, Δ) une paire plt où X est une variété projective lisse et Δ un diviseur dont le support est à croisement normaux simples. On suppose $K_X + \Delta$ pseudo-effectif et $\Delta \geq A$ où A est un \mathbf{Q} -diviseur effectif ample sur X . On suppose enfin que $S := \lfloor \Delta \rfloor$ est irréductible et n'est contenu ni dans le support de $N(K_X + \Delta)$, ni dans le support de A . La paire (X, Δ) est alors effective, i.e. il existe un \mathbf{R} -diviseur effectif D sur X tel que $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}, Z} D$.*

Preuve (esquisse). — Pour simplifier, nous allons supposer le diviseur Δ à coefficients rationnels. L'argument général est plus délicat.

Soit $H \sim_{\mathbf{Q}} A$ un \mathbf{Q} -diviseur ample tel que la paire $(X, \Delta + H)$ soit plt et $K_X + \Delta + H$ nef. Quitte à remplacer A par un \mathbf{Q} -diviseur qui lui est \mathbf{Q} -linéairement équivalent, on peut toujours supposer $A = \varepsilon H$ pour un rationnel $\varepsilon > 0$.

Un MMP dirigé par H pour la paire (X, Δ) ⁽³³⁾ produit des paires (X_i, Δ_i) , des réels $0 \leq t_i \leq 1$ et des applications birationnelles $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ où Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} tels que $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ soit nef.

Montrons que la suite $(t_i)_{i \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. Si $t_i > 0$ alors le diviseur $K_X + \Delta + t_i H$ est grand puisque $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif et H ample. Fixons un réel $t > 0$. Le théorème 2.12 et un argument de perturbation entraînent facilement que l'ensemble des classes d'isomorphie d'applications birationnelles $(X, \varphi_i \circ \dots \circ \varphi_0)$ pour i tel que $t_i \geq t > 0$ est fini. Les modèles nef (X_i, φ_i) et (X_j, φ_j) de $(X, \Delta + t_i H)$ et $(X, \Delta + t_j H)$ respectivement n'étant pas isomorphes si $i \neq j$ (par exemple par la remarque 1.22), l'ensemble des indices i tels que $t_i \geq t$ est donc fini, et on a bien $\lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = 0$.

⁽³²⁾ Il faut choisir x en dehors de $B_-(K_X + \Delta) = B_-(P(K_X + \Delta)) \cup \text{Supp}(N(K_X + \Delta))$.

⁽³³⁾ On vérifie, par un argument de perturbation, que les flips nécessaires sont en fait des pl-flips dont l'existence est acquise à ce stade de la démonstration.

Montrons ensuite que l'hypersurface S n'est contractée par aucune des applications birationnelles φ_i . Fixons $i \geq 1$ et supposons l'hypersurface S contractée par φ_{i-1} . Soit $t \in [0, t_i[\cap \mathbf{Q}$. Soient V une résolution commune des singularités de (X, Δ) et (X_i, Δ_i) , π et π_i les morphismes de V sur X et X_i respectivement et

$$E_i(t) := \sum_F (a_F(X_i, \Delta_i + tH_i) - a_F(X, \Delta + tH))F \sim_{\mathbf{Q}} \pi^*(K_X + \Delta + tH) - \pi_i^*(K_{X_i} + \Delta_i + tH_i)$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de V ; $E_i(t)$ est effectif, π_i -exceptionnel et son support contient les transformés stricts des diviseurs sur X contractés dans X_i puisque l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta + tH$ strictement négative (voir remarque 1.14). On en déduit que, pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $m(K_X + \Delta + tH)$ soit entier, toute section globale du faisceau $\mathcal{O}_V(m\pi^*(K_X + \Delta + tH))$ s'annule à l'ordre m le long de $E_i(t)$. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $m(K_X + \Delta + tH)$ soit entier et soit $B \sim_{\mathbf{Z}} m(K_X + \Delta + tH)$ un diviseur effectif. On a donc

$$\text{mult}_S(B) \geq m(a_S(X_i, \Delta_i + tH_i) - a_S(X, \Delta + tH)) > 0$$

et $N(K_X + \Delta + tH) \geq (a_S(X_i, \Delta_i + tH) - a_S(X, \Delta + tH))S$. Finalement, $N(K_X + \Delta) \geq (a_S(X_i, \Delta_i) - a_S(X, \Delta))S$, une contradiction.

Si $t_i = 0$ pour un entier $i \geq 0$ alors (X_i, Δ_i) est un modèle minimal de (X, Δ) et le résultat cherché se déduit à nouveau du théorème 1.18 par un argument de perturbation. Supposons donc maintenant $t_i > 0$ pour tout $i \geq 0$.

Soit S_i le transformé strict de S dans X_i . Le lemme 2.13 entraîne maintenant que S_i ne rencontre pas le lieu exceptionnel de φ_i pour $i \geq i_0 \gg 0$ de sorte que, pour $i \geq i_0$, φ_i induit un isomorphisme d'un voisinage ouvert de S_i dans X_i sur un voisinage ouvert de S_{i+1} dans X_{i+1} ; en particulier, $S_i \simeq S_{i+1}$ pour un tel i . Posons $\Theta_i := \text{Diff}_{S_i}(\Delta_i - S_i)$. Via les identifications $S_i \simeq S_{i+1}$, on a donc $\Theta_i = \Theta_{i+1}$ et, puisque $K_{S_i} + \Theta_i + t_i H_i|_{S_i}$ est nef et $\lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = 0$, $K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0}$ est nef. La paire (S_{i_0}, Θ_{i_0}) est klt puisque (X, Δ) est plt par hypothèse et $\Theta_{i_0} \geq A_{i_0}|_{S_{i_0}}$ est grand; un multiple entier convenable de $K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0}$ est donc effectif par le théorème 1.18. Fixons un entier k_0 tel que $k_0(K_{X_{i_0}} + \Delta_{i_0})$ soit un diviseur de Cartier et tel que $h^0(S_0, k_0(K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0})) \neq 0$.

Fixons $i \geq i_0$ tel que $(k_0 - 1)t_i \leq \varepsilon$. Écrivons

$$k_0(K_{X_i} + \Delta_i) - S_i = K_{X_i} + (1 - (k_0 - 1)t_i \varepsilon^{-1})A_i + \Delta_i - S_i - A_i + (k_0 - 1)(K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i)$$

où A_i est le transformé strict de A dans X_i .

La paire $(X_i, (1 - (k_0 - 1)t_i \varepsilon^{-1})A_i + \Delta_i - S_i - A_i)$ étant klt et $(k_0 - 1)(K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i)$ étant nef et grand, $h^1(X_i, k_0(K_{X_i} + \Delta_i) - S_i) = 0$ par le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg ([15, Theorem 1.2.5 et Remark 1.2.6]); la suite exacte longue de

cohomologie associée à la suite exacte courte⁽³⁴⁾

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i) - S_i) \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i)) \rightarrow \mathcal{O}_{S_i}(k_0(K_{S_i} + \Theta_i)) \rightarrow 0$$

donne ensuite la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i))) \rightarrow H^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(k_0(K_{S_i} + \Theta_i))).$$

Enfin, $H^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(k_0(K_{S_i} + \Theta_i))) \simeq H^0(S_{i_0}, k_0(K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0}))$ puisque $i \geq i_0$ et finalement $h^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i))) \neq 0$. D'où $h^0(X, \mathcal{O}_X(k_0(K_X + \Delta))) \neq 0$ puisque l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \dots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta$ négative. \square

2.6. Existence des pl-flips

Ici encore, *on suppose le théorème d'existence de modèles minimaux vrai en dimension $n - 1$* . L'objet de ce paragraphe est de donner les grandes lignes de la preuve du théorème 2.10.

La notion de pl-flip est introduite par Shokurov dans [26] où il montre que l'existence des flips en dimension n se déduit de l'existence des pl-flips en dimension n et du MMP en dimension $n - 1$ ⁽³⁵⁾. Shokurov propose dans [28] la stratégie suivante pour démontrer l'existence des pl-flips.

Les données sont celles du théorème 2.10. Fixons un entier $k_0 > 0$ tel que $k_0\Delta$ soit à coefficients entiers. L'existence du flip de c est locale sur Y et si *on suppose Y affine*, ce que nous ferons dans la suite de ce texte, est équivalente à montrer que l'algèbre

$$R(X, \Delta)_{(k_0)} := \bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta)))$$

est de type fini sur l'anneau $A := H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ ⁽³⁶⁾ (voir [15, Proposition 5.1.11]).

L'algèbre restreinte est définie, suivant Shokurov, par

$$R_S(X, \Delta)_{(k_0)} := \bigoplus_{m \geq 0} \text{Im}(H^0(X, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta))) \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta))|_S))$$

où les flèches sont les applications de restriction des sections.

LEMME 2.19 (Shokurov). — *L'algèbre $R(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A si et seulement si $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ l'est.*

⁽³⁴⁾ La suite de faisceaux est bien exacte puisque, S_i ne rencontrant pas le lieu exceptionnel de φ_i , le faisceau réflexif $\mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i))$ est localement libre au voisinage de S_i .

⁽³⁵⁾ La réduction n'est prouvée qu'en dimension 3; l'argument en toute dimension est donné dans [17, Chapter 4].

⁽³⁶⁾ On montre facilement que si $k_0 > 0$ et $k_1 > 0$ sont deux entiers tels que $k_0\Delta$ et $k_1\Delta$ soient à coefficients entiers alors $R(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A si et seulement si $R(X, \Delta)_{(k_1)}$ l'est.

Il suffit donc maintenant de montrer que l'algèbre $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A et le problème en dimension n est réduit à un énoncé du même type en dimension $n - 1$. Shokurov exhibe deux propriétés de ces algèbres⁽³⁷⁾, et conjecture grosso modo que toutes les algèbres de ce type sont de type fini (voir [28, Conjecture 4.39]). Il obtient ainsi une nouvelle preuve de l'existence des flips en dimension 3 et obtient également l'existence des flips en dimension 4 ([28]).

Hacon et McKernan suivent la même stratégie et mettent en évidence de nouvelles propriétés de l'algèbre $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ qui permettent ensuite de montrer que $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A : de façon plus précise, ils montrent qu'il existe une variété lisse T/Y et un diviseur D sur T , semi-ample, tels que l'algèbre $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ soit isomorphe à l'algèbre $\bigoplus_{k \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(kD))$ qui est classiquement de type fini sur A .

DÉFINITION 2.20. — Soient T une variété lisse et $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite sous-additive⁽³⁸⁾ de diviseurs entiers sur T telle que la suite $(\frac{B_m}{m})_{m \in \mathbf{N}^*}$ soit majorée⁽³⁹⁾.

1. La suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est dite adjointe s'il existe une suite de \mathbf{Q} -diviseurs effectifs $(\Theta_m)_{m \in \mathbf{N}}$ et un entier $k_0 > 0$ tels que
 - (a) $B_m = mk_0(K_T + \Theta_m)$ pour un diviseur canonique K_T sur T convenable et tout $m \in \mathbf{N}$ et
 - (b) (T, Θ) soit une paire klt où Θ est la limite de la suite $(\Theta_m)_{m \geq 1}$ ⁽⁴⁰⁾.
2. Posons $D_m = \frac{\text{Mob}(B_m)}{m}$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ ⁽⁴¹⁾. La suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est dite semi-ample si le \mathbf{R} -diviseur $\lim_{m \rightarrow +\infty} D_m$ est semi-ample.
3. La suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est dite saturée s'il existe un \mathbf{Q} -diviseur F sur T et un entier $s > 0$ tels que
 - (a) $\lceil F \rceil \geq 0$ et
 - (b) $\text{Mob}(\lceil jD_i + F \rceil) \leq jD_{sj}$ pour tous $i, j > 0$.

La saturation est une propriété de nature arithmétique ; supposons que T soit une courbe affine, $B_m = b_m \cdot t$ où t est un point de T et $b_m \in \mathbf{Q}$ et $F = a \cdot t$ où a est un rationnel > -1 . Posons $d_m = \frac{b_m}{m}$ pour $m > 0$ et $d = \lim_{m \rightarrow +\infty} d_m = \sup_{m \in \mathbf{N}} d_m \in \mathbf{R}$.

⁽³⁷⁾ Ce n'est pas tout à fait correct : ces propriétés sont satisfaites par une extension entière naturelle de $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ et on peut montrer qu'il est équivalent de prouver que l'une ou l'autre est de type fini sur A .

⁽³⁸⁾ Une suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de diviseurs sur T est dite sous-additive si $B_i + B_j \leq B_{i+j}$ pour tous $i, j \geq 0$.

⁽³⁹⁾ Une suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de diviseurs sur T est dite majorée s'il existe un diviseur B sur T tel que $B_m \leq B$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.

⁽⁴⁰⁾ La limite doit être comprise comme la limite coefficient par coefficient ; le diviseur Θ est à coefficients réels.

⁽⁴¹⁾ La partie mobile $\text{Mob}(B)$ d'un \mathbf{R} -diviseur B sur T est le \mathbf{R} -diviseur $B - \text{Fix}(B)$.

La condition de saturation est l'inégalité

$$\lceil jd_i + a \rceil \leq jd_{s_j}$$

et, en passant à la limite lorsque $i \rightarrow +\infty$,

$$\lceil jd + a \rceil \leq jd_{s_j}.$$

On peut supposer $a \leq 0$ quitte à remplacer a par $a - \lceil a \rceil$. Supposons $d \notin \mathbf{Q}$. Alors l'ensemble des parties fractionnaires $\{jd\}$ pour $j \in \mathbf{N}$ est dense dans $[0, 1]$ et il existe donc $j \in \mathbf{N}$ tel que $\{jd\} > -a$. Il vient

$$jd_{s_j} \leq jd < \lceil jd + a \rceil \leq jd_{s_j},$$

une contradiction. Il est facile de voir ensuite que $d_{s_j} = d$ si $jd \in \mathbf{Z}$. Un argument d'approximation diophantienne analogue donne le résultat suivant.

LEMME 2.21. — Soient T une variété lisse et $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite sous-additive de diviseurs entiers sur T telle que la suite $(\frac{B_m}{m})_{m \in \mathbf{N}^*}$ soit majorée. On suppose la suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ saturée et semi-ample. Soient $D_m = \frac{\text{Mob}(B_m)}{m}$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $D = \lim_{m \rightarrow +\infty} D_m$. Alors il existe un entier $m_0 > 0$ tel que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $D_{mm_0} = D$; en particulier, D est un \mathbf{Q} -diviseur.

Les données sont toujours celles du théorème 2.10. Soit $\pi : V \rightarrow X$ une résolution des singularités de (X, Δ) . Posons

$$\Gamma = \max(\pi^*(K_X + \Delta) - K_V, 0) = - \sum_{a_F(X, \Delta) < 0} a_F(X, \Delta) F \text{ et } E := K_V + \Gamma - \pi^*(K_X + \Delta)$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de V . On a

$$K_V + \Gamma = \pi^*(K_X + \Delta) + E,$$

Γ et E sont effectifs, E est π -exceptionnel et enfin, Γ et E n'ont aucune composante irréductible en commun. Soit T le transformé strict de S dans V . L'isomorphisme naturel $H^0(X, mk_0(K_X + \Delta)) \simeq H^0(V, mk_0(K_V + \Gamma))$ pour tout $m \geq 0$ induit un isomorphisme

$$R_S(X, \Delta)_{(k_0)} \simeq R_T(V, \Gamma)_{(k_0)}.$$

Le résultat observé par Hacon et McKernan est le suivant.

PROPOSITION 2.22. — Il existe une résolution des singularités $\pi : V \rightarrow X$ de (X, Δ) , une suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de diviseurs sur T adjointe et un entier $s' > 0$ tels que la

suite $(s'B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ soit semi-ample et saturée⁽⁴²⁾ et tels que les A -algèbres graduées $R_T(V, \Gamma)_{(k_0)}$ ⁽⁴³⁾ et $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(B_m))$ soient isomorphes⁽⁴⁴⁾.

Preuve du théorème 2.10. — On considère la suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ donnée par la proposition 2.22 : les algèbres $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ et $R_T(V, \Gamma)_{(k_0)}$ étant isomorphes, il suffit de montrer que l'algèbre $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(B_m))$ est de type fini sur A . Posons $M_m = \text{Mob}(B_m)$. La suite $(M_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est également sous-additive et l'algèbre graduée correspondante $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(M_m))$ est naturellement isomorphe à la précédente.

Supposons $s' = 1$ pour simplifier, l'argument général n'étant pas beaucoup plus difficile. La suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ étant semi-ample et saturée, il existe un entier $m_0 > 0$ et un \mathbf{Q} -diviseur D semi-ample tels que, pour tout $m \geq 0$, $M_{mm_0} = mm_0D$ (voir lemme 2.21). Quitte à remplacer m_0 par un multiple entier convenable, on peut toujours supposer m_0D entier et le système linéaire correspondant sans point base et enfin, quitte à remplacer k_0 par k_0m_0 , on peut supposer $m_0 = 1$. On a

$$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(M_m)) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(mD))$$

où $|D|$ est sans point base et toute algèbre de ce type est de type fini sur A (voir par exemple le lemme 2.2). \square

Nous terminons ce texte en donnant les grandes lignes de la preuve de la proposition 2.22.

Preuve de la proposition 2.22 (esquisse). — L'outil principal est un résultat d'extension des sections généralisant les travaux de Siu sur l'invariance des plurigenres ([29] et [30]).

THÉORÈME 2.23. — *Soit $(V/Y, \Gamma)$ une paire plt où Γ est un \mathbf{Q} -diviseur, Y affine, V lisse, $\text{Supp}(\Gamma)$ à croisements normaux simples et $T := \lfloor \Gamma \rfloor$ irréductible. Soit $k > 0$ un entier tel que $k\Gamma$ soit à coefficients entiers.*

1. *On suppose $\Gamma - T \sim_{\mathbf{Q}} A + B$ où A est ample, B effectif et $T \not\subset \text{Supp}(B)$.*
2. *On suppose, de plus, qu'aucune intersection non vide de composantes irréductibles de Γ n'est contenue dans l'ensemble base $\text{Bs}(k(K_V + \Gamma))$ du système linéaire $|k(K_V + \Gamma)|$.*

⁽⁴²⁾ Nous n'utiliserons que les deux dernières propriétés de la suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ pour démontrer le théorème 2.10.

⁽⁴³⁾ Je triche un peu ici, il faut éventuellement remplacer l'entier k_0 introduit en début de paragraphe par un multiple entier convenable.

⁽⁴⁴⁾ La structure d'algèbre sur $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(B_m))$ est induite par le produit sur $\text{Rat}(T)$: si $u, v \in \text{Rat}(T) \setminus \{0\}$ sont telles que $\text{div}(u) + B_i \geq 0$ et $\text{div}(v) + B_j \geq 0$ pour des entiers i et j convenables alors $\text{div}(uv) + B_{i+j} \geq \text{div}(u) + B_i + \text{div}(v) + B_j \geq 0$ par sous-additivité de la suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$.

Alors l'application $H^0(V, \mathcal{O}_V(k(K_V + \Gamma))) \rightarrow H^0(T, \mathcal{O}_V(k(K_V + \Gamma))|_T)$ de restriction des sections est surjective.

Fixons une forme différentielle méromorphe ω_X de degré maximal avec un pôle simple au point générique de S et posons $K_X = \text{div}(\omega_X)$ et $K_S = \text{div}(\omega_S)$ où ω_S est le résidu de Poincaré de ω_X au point générique de S ; ayant identifié les espaces vectoriels $H^0(X, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta)))$ et $H^0(S, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta))|_S)$ avec des sous-espaces vectoriels de $\text{Rat}(X)$ et $\text{Rat}(S)$ respectivement, l'application de restriction à S des sections s'identifie avec l'application de restriction des fonctions rationnelles régulières au point générique de S .

Quitte à perturber Δ , on peut toujours supposer $\Delta = S + A + B$ où A est un \mathbf{Q} -diviseur ample et B un \mathbf{Q} -diviseur effectif ne contenant pas S dans son support⁽⁴⁵⁾.

Soit $k_1 > 0$ un entier tel que $k_1 A$ soit très ample et $k_1 \Delta$ un diviseur entier et supposons, quitte à remplacer A par un \mathbf{Q} -diviseur qui lui est \mathbf{Q} -linéairement équivalent, que $k_1 A$ soit très général dans $|k_1 A|$ ⁽⁴⁶⁾.

Soit maintenant $\pi : V \rightarrow X$ une résolution des singularités de $(X, \Delta - A)$ telle que les composantes irréductibles du diviseur $\max(\pi^*(K_X + \Delta - A) - K_V, 0) - T$ soient disjointes (voir [12, Lemma 6.5]), où T désigne le transformé strict de S dans V et K_V le diviseur de ω_X sur V , vue comme forme différentielle méromorphe sur V .

Le diviseur $k_1 A$ étant très général dans $|k_1 A|$, π est une résolution des singularités de (X, Δ) , $\pi^* A$ le transformé strict de A et

$$\Gamma := \max(\pi^*(K_X + \Delta) - K_V, 0) = \max(\pi^*(K_X + \Delta - A) - K_V, 0) + \pi^* A.$$

Soit $(\Theta_m)_{m \in \mathbf{N}}$ la suite de \mathbf{Q} -diviseurs sur T définie de la façon suivante. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, le diviseur $mk_1 \Theta_m$ est le plus petit diviseur entier

$$0 \leq mk_1 \Theta_m \leq mk_1 (\Gamma - T) \cap T$$

tel que l'application de restriction

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(mk_1(K_V + \Gamma))) \rightarrow H^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + (\Gamma - T) \cap T)))$$

soit à valeurs dans⁽⁴⁷⁾

$$H^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + \Theta_m))) \subset H^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + (\Gamma - T) \cap T))).$$

On pose $\Theta_0 = 0$.

La suite $(m\Theta_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est sous-additive, la suite $(\Theta_m)_{m \in \mathbf{N}}$ majorée par $(\Gamma - T) \cap T$ et la paire (T, Θ) klt, où $\Theta := \lim_{m \rightarrow +\infty} \Theta_m$.

⁽⁴⁵⁾ Un diviseur premier sur X est mobile puisque Y est affine.

⁽⁴⁶⁾ Le diviseur A ne doit en particulier contenir aucune composante irréductible de l'ensemble base de l'un des systèmes linéaires $|mk_1(K_X + \Delta)|$ pour $m \geq 1$.

⁽⁴⁷⁾ Les diviseurs K_V et K_T sont les diviseurs sur V et T de ω_X et ω_S respectivement.

Nous allons maintenant vérifier que, pour tout $m \geq 0$, l'image de l'application de restriction est exactement $H^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + \Theta_m)))$ au moyen du théorème 2.23.

Fixons un entier $m \geq 1$. Montrons que la condition 2 du théorème d'extension est satisfaite quitte éventuellement à devoir modifier la paire (V, Γ) convenablement. Le diviseur k_1A étant très général dans $|k_1A|$ et T étant mobile, ni π^*A ni T ne sont contenus dans $\text{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma))$. Les seules intersections de composantes irréductibles de Γ éventuellement contenues dans $\text{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma))$ sont donc les composantes irréductibles de $\Gamma - \pi^*A - T$ et les composantes irréductibles de $T \cap (\Gamma - \pi^*A - T)$ puisque les composantes irréductibles de $\Gamma - \pi^*A - T$ sont disjointes par choix de $\pi : V \rightarrow X$.

Posons $F_m := \text{Fix}(mk_1(K_V + \Gamma))$ et $\Gamma_m = \max(\Gamma - \frac{F_m}{mk_1}, 0)$. On vérifie facilement que Γ_m et $\text{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$ n'ont aucune composante irréductible en commun puis que les composantes irréductibles de $\Gamma_m - \pi^*A - T$ sont encore disjointes car $\Gamma_m \leq \Gamma$ et enfin que si $u \in \text{Rat}(V) \setminus \{0\}$ satisfait $\text{div}(u) + mk_1(K_V + \Gamma) \geq 0$ alors $\text{div}(u) + mk_1(K_V + \Gamma_m) \geq 0$ puisque $mk_1(\Gamma - \Gamma_m) \leq \text{Fix}(mk_1(K_V + \Gamma))$. On peut donc remplacer Γ par Γ_m : aucune composante irréductible de Γ_m n'est maintenant contenue dans $\text{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$.

La méthode utilisée pour traiter les composantes irréductibles de $T \cap (\Gamma_m - \pi^*A - T)$ contenues dans $\text{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$ est analogue. Supposons donc que l'une des composantes irréductibles K de $T \cap (\Gamma_m - T)$ soit contenue dans $\text{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$ et considérons $\pi_{m,1} : V_{m,1} \rightarrow V$ l'éclatement de V le long de K .

Soit $\Phi'_{m,1} = \pi_{m,1}^*(K_V + \Gamma_m) - K_{V_{m,1}}$ ($\Phi'_{m,1}$ est effectif) et posons $\Phi_{m,1} = \max(\Phi'_{m,1} - \frac{F_{m,1}}{mk_1}, 0)$ où $F_{m,1} = \text{Fix}(mk_1(K_{V_{m,1}} + \Phi'_{m,1}))$.

Le transformé strict dans $V_{m,1}$ de la composante irréductible de $\Gamma_m - T$ contenant K est disjoint du transformé strict $T_{m,1}$ de T dans $V_{m,1}$ mais l'une des composantes irréductibles de $T_{m,1} \cap \pi_{m,1}^{-1}(K)$ ou $(\Phi_{m,1} - T_{m,1}) \cap \pi_{m,1}^{-1}(K)$ est éventuellement contenue dans $\text{Bs}(mk_1(K_{V_{m,1}} + \Phi_{m,1}))$; on montre, en répétant l'opération un nombre fini de fois, qu'il existe une suite finie d'éclatements $\pi_m : V_m \rightarrow V$ de centres lisses de dimension $n - 2$ contenus dans ou disjointes de T et ses transformés stricts successifs telle que $\text{Bs}(mk_1(K_{V_m} + \Phi_m))$ ne contienne aucune intersection non vide de composantes irréductibles de Φ_m , où $\Phi_m = \max(\Phi'_m - \frac{F_m}{mk_1}, 0)$ avec $\Phi'_m = \max(\pi_m^*(K_V + \Gamma_m) - K_{V_m}, 0)$ et $F_m = \text{Fix}(mk_1(K_{V_m} + \Phi'_m))$.

Notons T_m le transformé strict de T dans V_m . Le diviseur π_m^*A étant le transformé strict de A dans V_m , $\Phi_m \geq \pi_m^*A$. Soit E_m un diviseur effectif π_m -exceptionnel tel que $\pi_m^*A - E_m$ soit ample. On a $\Phi_m - T_m \geq (\pi_m^*A - E_m) + E_m$ et la condition 1 du théorème d'extension est également satisfaite.

En conclusion, l'image de l'application de restriction

$$H^0(V_m, \mathcal{O}_{V_m}(mk_1(K_{V_m} + \Phi'_m))) \rightarrow H^0(T_m, \mathcal{O}_{T_m}(mk_1(K_{T_m} + (\Phi'_m - T_m) \cap T_m)))$$

est exactement $H^0(T_m, \mathcal{O}_{T_m}(mk_1(K_{T_m} + (\Phi_m - T_m) \cap T_m)))$.

Le point essentiel est le suivant : T_m est isomorphe à T puisque V_m est obtenue en éclatant des hypersurfaces de T et de ses transformés stricts successifs et il n'est plus très difficile de se convaincre que l'image de l'application de restriction

$$H^0(V, \mathcal{O}_V(mk_1(K_V + \Gamma))) \rightarrow H^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + (\Gamma - T) \cap T)))$$

est le sous-espace $H^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + \Theta_m)))$. On pose $B_m := mk_1(K_T + \Theta_m)$ pour $m \geq 0$; la suite $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est adjointe et les A -algèbres graduées $R_T(V, \Gamma)_{(k_1)}$ et $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(T, \mathcal{O}_T(B_m))$ sont isomorphes.

L'hypothèse de récurrence n'est utilisée que pour prouver le résultat suivant.

LEMME 2.24. — *Il existe un morphisme birationnel projectif $T_1 \rightarrow T$ où T_1 est une variété lisse et un entier $s > 0$ tels que pour tout morphisme birationnel projectif $R \rightarrow T_1$ et tout entier $m \geq 1$,*

1. *le système linéaire $\text{Mob}(mk_1 s \varpi_R^*(K_T + \Theta_m))$ soit sans point base et*
2. *le \mathbf{R} -diviseur $D = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\text{Mob}(mk_1 s \varpi_R^*(K_T + \Theta_m))}{mk_1}$ semi-ample, où ϖ_R est le morphisme $R \rightarrow T$.*

On considère maintenant $\varpi : W \rightarrow V$ une résolution des singularités de (V, Γ) telle que, si R désigne le transformé strict de T dans W , le morphisme induit $\varpi_R : R \rightarrow T$ se factorise à travers $T_1 \rightarrow T$ et telle que les composantes irréductibles du diviseur $\max(\varpi^*(K_V + \Gamma - \pi^*A) - K_W, 0) - R$ soient disjointes. Posons

$$\Lambda = \max(\varpi^*(K_V + \Gamma) - K_W, 0).$$

Soit $(\Xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite de \mathbf{Q} -diviseurs sur R définie comme la suite $(\Theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ l'a été : pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, le diviseur $mk_1 \Xi_m$ est le plus petit diviseur entier $0 \leq mk_1 \Xi_m \leq mk_1(\Lambda - R) \cap R$ tel que l'application de restriction

$$H^0(W, \mathcal{O}_W(mk_1(K_W + \Lambda))) \rightarrow H^0(R, \mathcal{O}_R(mk_1(K_R + (\Lambda - R) \cap R)))$$

soit à valeurs dans $H^0(R, \mathcal{O}_R(mk_1(K_R + \Xi_m)))$ et on pose $\Xi_0 = 0$. On pose également $C_m = mk_1(K_R + \Xi_m)$ pour $m \geq 0$.

Il n'est pas très difficile de se convaincre que, par les arguments que nous venons de donner, les A -algèbres graduées $R_T(W, \Lambda)_{(k_1)}$ et $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(R, \mathcal{O}_R(C_m))$ sont isomorphes.

On montre ensuite facilement que pour tout $m \geq 0$

$$\text{Mob}(mk_1(K_R + \Xi_m)) = \text{Mob}(\varpi_R^*(mk_1(K_T + \Theta_m))).$$

Il s'ensuit que la suite $(sC_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est semi-ample par le point 2 du lemme 2.24. Au prix de quelques efforts de plus, on montre enfin que la suite $(sC_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est saturée, le diviseur F étant la restriction à R du diviseur

$$\sum_F a_F(X, \Delta)F - R$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de $W^{(48)}$ de la façon suivante. On montre, par un argument de « descente » utilisant le point 1 du lemme 2.24, qu'il suffit de vérifier la propriété sur un modèle birationnel convenable $R_{i,j}$ de R ; $R_{i,j}$ est en fait le transformé strict de R dans un modèle $W_{i,j}$ de W et, en utilisant le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, on montre finalement que la propriété recherchée se réduit à l'assertion facile suivante : une fonction rationnelle sur $W_{i,j}$ avec au pire des pôles le long du lieu exceptionnel de $W_{i,j} \rightarrow W$ est régulière. \square

RÉFÉRENCES

- [1] V. ALEXEEV, C. HACON & Y. KAWAMATA – Termination of (many) 4-dimensional log flips, *Invent. Math.* **168** (2007), p. 433–448.
- [2] F. AMBRO – Quasi-log varieties, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **240** (2003), p. 220–239.
- [3] C. BIRKAR – On existence of log minimal models, prépublication arXiv:0706.1792, 2007.
- [4] C. BIRKAR, P. CASCINI, C. HACON & J. M^cKERNAN – Existence of minimal models for varieties of log general type, prépublication arXiv:math/0610203, 2006.
- [5] S. BOUCKSOM – Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 45–76.
- [6] A. CORTI (éd.) – *Flips for 3-folds and 4-folds*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 35, Oxford Univ. Press, 2007.
- [7] O. DEBARRE – Classes de cohomologie positives dans les variétés kählériennes compactes (d'après Boucksom, Demailly, Nakayama, Păun, Peternell *et al.*), Séminaire Bourbaki, vol. 2004/2005, exposé n^o 943, *Astérisque* **307** (2006), p. 199–228.
- [8] R. ELKIK – Rationalité des singularités canoniques, *Invent. Math.* **64** (1981), p. 1–6.
- [9] O. FUJINO – Termination of 4-fold canonical flips, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004), p. 231–237.

⁽⁴⁸⁾ La condition $\lceil F \rceil \geq 0$ dans la définition 2.20 se déduit de l'hypothèse (X, Δ) plt.

- [10] ———, Notes on the log minimal model program, prépublication arXiv:0705.2076, 2007.
- [11] O. FUJINO & S. MORI – A canonical bundle formula, *J. Differential Geom.* **56** (2000), p. 167–188.
- [12] C. HACON & J. M^cKERNAN – On the existence of flips, prépublication arXiv:math/0507597, 2005.
- [13] Y. KAWAMATA – Termination of log flips for algebraic 3-folds, *Internat. J. Math.* **3** (1992), p. 653–659.
- [14] ———, On the cone of divisors of Calabi-Yau fiber spaces, *Internat. J. Math.* **8** (1997), p. 665–687.
- [15] Y. KAWAMATA, K. MATSUDA & K. MATSUKI – Introduction to the minimal model problem, in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, 1987, p. 283–360.
- [16] S. L. KLEIMAN – Toward a numerical theory of ampleness, *Ann. of Math.* **84** (1966), p. 293–344.
- [17] J. KOLLÁR – Flips and abundance for algebraic threefolds, *Astérisque* **211** (1992), p. 1–258.
- [18] ———, Singularities of pairs, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, p. 221–287.
- [19] J. KOLLÁR & S. MORI – *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [20] S. MORI – Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, *Ann. of Math.* **116** (1982), p. 133–176.
- [21] ———, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 117–253.
- [22] N. NAKAYAMA – *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, vol. 14, Mathematical Society of Japan, 2004.
- [23] M. REID – Minimal models of canonical 3-folds, in *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 1, North-Holland, 1983, p. 131–180.
- [24] ———, Young person’s guide to canonical singularities, in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987, p. 345–414.
- [25] V. V. SHOKUROV – A nonvanishing theorem, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **49** (1985), p. 635–651.
- [26] ———, Three-dimensional log perestroikas, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **56** (1992), p. 105–203.

- [27] ———, 3-fold log models, *J. Math. Sci.* **81** (1996), p. 2667–2699, Algebraic geometry, 4.
- [28] ———, Prelimiting flips, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **240** (2003), p. 82–219.
- [29] Y.-T. SIU – Invariance of plurigenera, *Invent. Math.* **134** (1998), p. 661–673.
- [30] ———, Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type, in *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, Springer, 2002, p. 223–277.
- [31] ———, A general non-vanishing theorem and an analytic proof of the finite generation of the canonical ring, prépublication arXiv:math/0610740, 2006.
- [32] E. SZABÓ – Divisorial log terminal singularities, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **1** (1994), p. 631–639.

Stéphane DRUEL

Institut Fourier

UMR 5582 du CNRS

Université de Grenoble I

BP 74

F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex

E-mail : `Stephane.Druel@ujf-grenoble.fr`

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(983) *Le problème de Kneser-Tits*

Philippe GILLE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LE PROBLÈME DE KNESER-TITS

par **Philippe GILLE**

1. INTRODUCTION

Soient k un corps et k_s une clôture séparable. Soit \mathbf{G}/k un k -groupe réductif (connexe). On note $\mathbf{G}(k)$ le groupe abstrait des k -points de \mathbf{G} . On note $\mathbf{G}(k)^+$ le sous-groupe (distingué) de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les $\mathbf{U}(k)$ pour \mathbf{U} parcourant l'ensemble des k -sous-groupes de \mathbf{G} isomorphes au groupe additif \mathbf{G}_a . Le quotient

$$W(k, \mathbf{G}) := \mathbf{G}(k) / \mathbf{G}(k)^+$$

est le groupe de Whitehead du groupe \mathbf{G}/k . Tits a montré que, si \mathbf{G}/k est presque k -simple (i.e. ne possède aucun sous- k -groupe distingué connexe) et isotrope, et si $\text{card}(k) \geq 4$, alors tout sous-groupe distingué propre de $\mathbf{G}(k)^+$ est central [96], englobant ainsi de nombreux résultats classiques de simplicité [36], [23], [17].

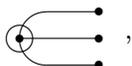
La conjecture originelle de Kneser-Tits (1964) énonce que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour de tels groupes \mathbf{G} simplement connexes et partant que $\mathbf{G}(k)$ est projectivement simple, c'est-à-dire que le quotient $\mathbf{G}(k)/Z(\mathbf{G}(k))$ de $\mathbf{G}(k)$ par son centre est simple. L'exposé 505 (1977) de J. Tits rend compte de nombreux cas où effectivement $W(k, \mathbf{G}) = 1$ mais aussi des contre-exemples de Platonov pour certains groupes de type ${}^1A_{n^2-1}$ [71]. Le problème de Kneser-Tits devient alors de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur un groupe \mathbf{G}/k pour que $W(k, \mathbf{G}) = 1$. Ce problème conduit en particulier aux deux questions suivantes selon que l'on privilégie les groupes ou les corps de base.

QUESTION 1.1. — *Peut-on caractériser les groupes \mathbf{G}/k tels que $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ? (On dit alors que le groupe \mathbf{G}/k est W -trivial.)*

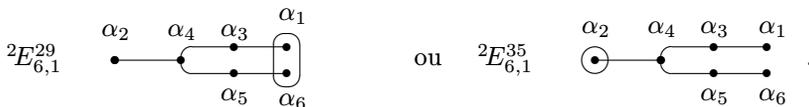
QUESTION 1.2. — *Peut-on déterminer des classes de corps k tels que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour tout k -groupe semi-simple presque simple simplement connexe et isotrope \mathbf{G}/k ? En particulier, est-ce le cas pour un corps global F ?*

La première question est plus algébrique et la seconde plus arithmétique, du moins pour les corps globaux. Pour la première question, le cas de $\mathbf{SL}_n(D)$, cas des contre-exemples de Platonov, est celui qui est le mieux compris grâce à Suslin, Rost et Merkurjev. Cet exemple (et celui des autres groupes classiques) fait le lien entre la rationalité du corps des fonctions de \mathbf{G} et le problème de Kneser-Tits. Ce lien est en fait de nature générale, ce qui permet de réunir dans un cadre commun la plupart des résultats connus de « W -trivialité ».

La seconde question pour les corps de nombres se décompose cas par cas. Depuis l'exposé de Tits [98, §1.2] et jusqu'à très récemment, il restait à traiter trois types de groupes exceptionnels. Il s'agit des groupes trialitaires de rang relatif un, i.e. d'indice de Tits



et les groupes extérieurs de type E_6 d'indice de Tits



Pour un corps de nombres F , la trivialité de $W(F, \mathbf{G})$ est due à G. Prasad et M.S. Raghunathan pour les groupes trialitaires [78] ; pour le type ${}^2E_{6,1}^{29}$, il s'agit d'un résultat récent de W -trivialité de S. Garibaldi [26]. Le dernier cas ${}^2E_{6,1}^{35}$ est établi dans la section 8 comme un avatar d'un théorème de Chernousov-Timoshenko sur la R -équivalence pour ces groupes [16], ce qui permet d'énoncer le

THÉORÈME 1.3. — *Soient F un corps global et \mathbf{G}/F un groupe semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope. Alors $W(F, \mathbf{G}) = 1$ et $\mathbf{G}(F)$ est un groupe projectivement simple.*

Remerciements. — En premier lieu, je tiens à remercier vivement Vladimir Chernousov et Jean-Louis Colliot-Thélène, leur expertise a été précieuse. Les commentaires d'Yves Benoist, Skip Garibaldi, Bruno Kahn, Arturo Pianzola et Gopal Prasad ont permis des améliorations substantielles d'une version préliminaire de cet exposé, c'est avec grand plaisir que je les remercie. J'ai bénéficié également des suggestions bienvenues de Boris Kunyavskii et de Fabien Morel.

Je remercie Adrian Wadsworth d'avoir relevé que la version plus forte de la proposition 5.1 (figurant dans la version distribuée de cet exposé) était canulée.

2. LE CAS DE $\mathbf{SL}_N(A)$

Soit A une algèbre simple centrale de dimension finie sur son centre k . On sait que $A = M_r(D)$ pour une (unique) algèbre simple centrale à division D et on note $\text{ind}_k(A) = \sqrt{\dim_k(D)}$ l'indice de A . Le groupe $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A) = \mathbf{SL}_r(D)$ des automorphismes spéciaux de D^r est un k -groupe semi-simple simplement connexe de type ${}^1A_{rd-1}$.

Si $r \geq 2$, \mathbf{G} est isotrope et on sait que $\mathbf{G}(k)^+ = [A^\times, A^\times]$. En particulier, le groupe $W(k, \mathbf{G})$ est abélien et on sait d'après Whitehead que

$$W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} SK_1(A) = \mathbf{SL}_1(A)(k)/[A^\times, A^\times] \xleftarrow{\sim} SK_1(D)$$

est indépendant de $r \geq 2$. Pour ce type de groupes, le problème de Kneser-Tits est donc l'étude du groupe $SK_1(A)$ ou $SK_1(D)$. Si l'on décompose $\text{ind}_k(D) = p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ en facteurs premiers, on rappelle la décomposition (unique) de Brauer $D \xrightarrow{\sim} D_1 \otimes \dots \otimes D_m$ où les D_i sont des algèbres à division de degrés respectifs $p_i^{e_i}$ (e.g. [33, §4.5]). L'identité

$$SK_1(D) \xrightarrow{\sim} SK_1(D_1) \oplus \dots \oplus SK_1(D_m)$$

réduit alors l'étude au cas d'une algèbre d'indice p -primaire pour un premier p .

2.1. Le théorème de Wang et la rétracte k -rationalité de $\mathbf{SL}_1(A)$

THÉORÈME 2.1 (Wang, 1950 [105], voir [33, §3]). — *On suppose $\text{ind}_k(D)$ sans facteurs carrés. Alors $SK_1(D) = 0$ et le groupe $\mathbf{SL}_r(D)$ est W -trivial pour $r \geq 2$.*

Nous allons mettre en regard ce résultat et la rétracte k -rationalité de $\mathbf{SL}_1(A)$.

DÉFINITION 2.2. — *Soit \mathbf{X}/k une k -variété (i.e. un k -schéma séparé de type fini) réduite et irréductible (intègre).*

1. \mathbf{X} est k -rationnelle si \mathbf{X} est k -birationnelle à un espace affine.
2. \mathbf{X} est stablement k -rationnelle s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathbf{X} \times_k \mathbf{A}_k^n$ est k -birationnelle à l'espace affine.
3. \mathbf{X} est facteur direct d'une variété k -rationnelle s'il existe une variété \mathbf{Y}/k telle que $\mathbf{X} \times_k \mathbf{Y}$ est k -birationnelle à l'espace affine.
4. \mathbf{X} est rétracte k -rationnelle s'il existe un ouvert non vide \mathbf{U} de \mathbf{X} tel que l'identité de \mathbf{U} factorise à travers un ouvert \mathbf{V} d'un espace affine \mathbf{A}_k^m , i.e. il existe des morphismes $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ et $r : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ tels que $r \circ f = \text{id}_{\mathbf{U}}$.

On a 1) \implies 2) \implies 3) \implies 4). La rétracte k -rationalité est la variante birationnelle d'un rétracte d'un espace affine.

LEMME 2.3. — (1) Soient A, B des algèbres simples centrales d'indices premiers entre eux. Alors $\mathbf{SL}_1(A \otimes_k B)$ est stablement k -birationnel à $\mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$.

(2) Soient D une k -algèbre simple centrale à division et $D \cong D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ sa décomposition de Brauer. Alors pour tout entier $r \geq 1$, $\mathbf{SL}_r(D)$ est stablement k -birationnel à $\mathbf{SL}_1(D_1) \times \cdots \times \mathbf{SL}_1(D_m)$.

Démonstration. — 1) On montre tout d'abord que

$$\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times = \mathrm{Nrd}(A^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B^\times).$$

On peut alors sans perte de généralité supposer momentanément A et B à division. Le groupe $\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times$ est le sous-groupe de k^\times engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ pour L/k parcourant les extensions finies de k trivialisant $A \otimes_k B$, c'est-à-dire trivialisant A et B . Ceci produit l'inclusion $\mathrm{Nrd}(A \otimes_k B)^\times \subset \mathrm{Nrd}(A^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B^\times)$. Dans l'autre sens, on se donne $x \in k^\times$ tel que $x = \mathrm{Nrd}_A(a) = \mathrm{Nrd}_B(b)$. On considère alors une décomposition de Bezout $1 = m \deg(A) + n \deg(B)$ et on constate que $\mathrm{Nrd}(a^n \otimes b^m) = \mathrm{Nrd}_A(a^n)^{\deg(B)} \mathrm{Nrd}_B(b^m)^{\deg(A)} = x^{n \deg(B) + m \deg(A)} = x$, montrant l'inclusion ci-dessus. On a donc $\mathrm{Nrd}(A_F \otimes_F B_F)^\times = \mathrm{Nrd}(A_F^\times) \cap \mathrm{Nrd}(B_F^\times)$ pour toute extension de corps F/k . On note $\mathbf{H} \subset \mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B)$ le sous-groupe défini par $\mathrm{Nrd}_A(a) = \mathrm{Nrd}_B(b) \neq 0$. Par construction, le groupe \mathbf{H} est donc muni d'un caractère $\chi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}_m$ tel que $\chi(\mathbf{H}(F)) = \mathrm{Nrd}(A_F \otimes_F B_F)^\times$ pour tout corps F/k . Selon une remarque de Chernousov-Merkurjev [55, prop. 4.5], ceci entraîne que les groupes $\mathbf{GL}_1(A \otimes B) \times \ker(\chi) = \mathbf{GL}_1(A \otimes B) \times \mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$ et $\mathbf{SL}_1(A \otimes B) \times \mathbf{H}$ sont k -birationnels. De plus, on a une suite exacte scindée de k -groupes $1 \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B) \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow 1$, donc $\mathbf{H} \times \mathbf{G}_m$ est k -isomorphe (comme k -variétés) à $\mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{GL}_1(B)$. On conclut que $\mathbf{SL}_1(A \otimes_k B)$ est stablement k -birationnel à $\mathbf{SL}_1(A) \times \mathbf{SL}_1(B)$.

2) On procède par récurrence sur m à partir de (1). □

PROPOSITION 2.4 (Colliot-Thélène et Sansuc). — On suppose $\mathrm{ind}_k(D)$ sans facteurs carrés. Alors pour tout entier $r \geq 1$, la variété $\mathbf{SL}_r(D)$ est rétracte k -rationnelle.

Démonstration. — Le lemme précédent permet de supposer que $r = 1$ et $\mathrm{ind}_k(D) = p$ pour p premier. On note \mathcal{T} la variété des tores maximaux du k -groupe $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(D)$. On dispose d'une application rationnelle dominante $\mathbf{G} \rightarrow \mathcal{T}$ qui associe à tout élément semi-simple régulier de \mathbf{G} son centralisateur [103, §4]. Ainsi $k(\mathbf{G}) = k(\mathcal{T})(\mathbf{T}_{\mathrm{gen}})$ où $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}/k(\mathcal{T})$ désigne le tore générique de \mathbf{G} . Selon Chevalley (*ibid.*), \mathcal{T} est une variété k -rationnelle. Ensuite, le tore $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}$ est un tore normique, c'est-à-dire qu'il existe une extension de corps séparable $F/k(\mathcal{T})$ de degré p telle que $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}} = \ker\left(R_{F/k(\mathcal{T})}(\mathbf{G}_m) \xrightarrow{N_{F/k(\mathcal{T})}} \mathbf{G}_{m,k(\mathcal{T})}\right)$. Suivant [21, cor. 9.12], on sait que $\mathbf{T}_{\mathrm{gen}}$ est facteur direct d'une $k(\mathcal{T})$ -variété rationnelle $V/k(\mathcal{T})$. Ainsi il existe un

morphisme rationnel $G \rightarrow \mathbf{A}^N \times_k \mathcal{J}$ qui admet une rétraction. On conclut que \mathbf{G} est rétracte k -rationnelle. \square

Aucun des deux résultats précédents ne s'étend au cas où l'indice a des facteurs carrés. En effet, Platonov a construit des algèbres D/k d'indice n^2 telles que $SK_1(D) \neq 0$ et telles que $\mathbf{SL}_r(D)$ ne soit pas rétracte k -rationnel pour aucun $r \geq 1$ [71]. De façon plus précise, ces algèbres sont construites de la façon suivante. On pose $F = k((t_1))((t_2))$. Etant données deux extensions de corps cycliques k_i/k de degré n et de groupe de Galois $\langle \sigma_i \rangle$, on considère le produit tensoriel de F -algèbres cycliques

$$A := A_1 \otimes_F A_2 = (k_1/k, \sigma_1, X) \otimes (k_2/k, \sigma_2, Y),$$

où $A_i = F \otimes_k k_i \oplus F \otimes_k k_i y_i \cdots \oplus F \otimes_k k_i y_i^{n-1}$ avec les relations $y_i^n = t_i$ et $\lambda y = y \sigma_i(\lambda)$ pour tout $\lambda \in F \otimes_k k_i$. On pose

$$N_1 = \left\{ x \in (k_1 \otimes k_2)^\times \mid N_{k_1 \otimes k_2/k}(x) = 1 \right\} \text{ et } M := I_\Gamma \cdot (k_1 \otimes k_2)^\times \subset N_1,$$

où $\Gamma = \mathcal{G}al(k_1.k_2/k)$. On a alors un invariant surjectif $SK_1(A) \rightarrow N_1/M$, qui est non trivial pour un bon choix des k_i/k . Cette classe de contre-exemples est reprise ou discutée notamment dans les références [24], [25], [91], [103, §18.3] et [104].

2.2. La conjecture de Suslin

CONJECTURE 2.5 (Suslin, 1991). — *Soit A une algèbre simple centrale. Soit $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))$ le point générique de $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(A)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\text{ind}_k(A)$ est sans facteurs carrés ;
2. $SK_1(A \otimes_k F) = 0$ pour tout corps F/k ;
3. $[\xi] = 1$ dans $SK_1(A_{k(\mathbf{G})})$;
4. \mathbf{G} est une variété stablement k -rationnelle.

Si $A = M_r(D)$ et $r \geq 2$, la seconde condition peut être formulée aussi de la façon suivante :

(2') *Le groupe $\mathbf{SL}_r(D)$ est W -trivial.*

La proposition 2.4 montre seulement la rétracte k -rationalité de \mathbf{G} lorsque $\text{ind}_k(A)$ est sans facteurs carrés. Telles quelles, du moins si $d \geq 5$, les implications (1) \implies (4) et (2) \implies (4) sont des problèmes ouverts. Le sens (4) \implies (2) est une conséquence de la propriété d'invariance

$$SK_1(A) \xrightarrow{\sim} SK_1(A_{k(t)})$$

par extension transcendante pure [71]. En effet, si \mathbf{G} est une variété stablement k -rationnelle, alors $SK_1(A) = SK_1(A_{k(\mathbf{G})}) = W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$ et un argument de spécialisation montre que $[\xi] = 0 \in SK_1(A_{k(\mathbf{G})})$ [74]. La conjecture porte donc principalement sur le sens (2) \implies (1). En d'autres mots, si $\text{ind}_k(A)$ contient un facteur carré, existe-t-il un corps F/k tel que $SK_1(A \otimes_k F) \neq 0$?

Nous suivons maintenant une approche chronologique mettant en évidence l'apparition des techniques motiviques à partir du milieu des années 1990.

2.3. Invariant de Suslin, 1991

On suppose ici que $d := \text{ind}_k(A)$ est inversible dans k et on note $[A] \in H^2(k, \mu_d) \subset \text{Br}(k)$ la classe de A dans le groupe de Brauer de k . On considère les groupes de cohomologie galoisienne $H^i(k, \mu_d^{\otimes j})$ [86] et on note $\beta : H^3(k, \mu_d^{\otimes 3}) \rightarrow H^4(k, \mu_d^{\otimes 3})$ le bord associé à la suite exacte de faisceaux galoisiens $1 \rightarrow \mu_d^{\otimes 3} \rightarrow \mu_{d^2}^{\otimes 3} \rightarrow \mu_d^{\otimes 3} \rightarrow 1$.

On suppose que k contient une racine primitive d^3 -ième de l'unité. Suslin définit un invariant (fonctoriel en k)

$$\rho_0 : SK_1(A) \rightarrow H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) / [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2}) + \text{Im}(\beta),$$

qui explique les contre-exemples de Platonov lorsque d est impair. De façon plus précise, pour un corps $K = \mathbf{Q}_p((X))(Y)$, on a $H^4(K, \mu_d^{\otimes 3}) = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ et l'invariant est alors non nul pour les algèbres de Platonov.

En outre, cet invariant devrait être non trivial pour le corps $k(\mathbf{G})$ lorsque d est divisible par un carré.

Remarque 2.6. — L'annulation du bord β est une conséquence de la conjecture de Bloch-Kato (en degré 3 et pour les facteurs premiers de d). Celle-ci a été démontrée par Voevodsky pour $p = 2$ (i.e. la conjecture de Milnor [100]) et annoncée par Rost et Voevodsky [101], [93], [82], [106]. L'invariant ρ_0 doit donc avoir valeur dans le groupe $H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) / [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2})$.

2.4. Algèbres de biquaternions et de degré 4

On suppose ici que $\text{car}(k) \neq 2$ et que A est une algèbre de biquaternions (cf. [48] [33]), c'est-à-dire que le produit tensoriel d'algèbres de quaternions $Q_1 \otimes_k Q_2$ où $Q_i = (a_i, b_i)$ est la k -algèbre de présentation

$$X^2 = a_i, \quad Y^2 = b_i, \quad YX + XY = 0$$

avec $a_i, b_i \in k^\times$. On associe à une telle présentation sa forme quadratique d'Albert

$$\varphi = a_1 x_1^2 + a_2 x^2 - a_1 a_2 x_3^2 - b_1 x_2^2 - b_2 y^2 + b_1 b_2 y_3^2$$

dont la classe de similitude est un invariant de A . De façon plus précise, il existe un isomorphisme « exceptionnel » $\mathbf{SO}(\varphi) \cong \mathbf{SL}_1(A)/\mu_2$ et, pour toute extension F/k , on a la propriété suivante :

la forme φ_F est isotrope $\iff A \otimes_k F$ n'est pas à division.

THÉORÈME 2.7 (Rost, 1992, [53, §2]). — *On note X la quadrique projective associée à φ . Alors il existe une suite exacte*

$$0 \rightarrow SK_1(A) \rightarrow H^4(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H^4(k(X), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

Les H^i sont des groupes de cohomologie galoisienne à coefficients $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ [86]. Une construction « élémentaire » (i.e. sans K -théorie) de cet invariant se trouve dans [48, §17]. Ce résultat est un des ingrédients principaux de la démonstration du cas particulier suivant de la conjecture de Suslin.

THÉORÈME 2.8 (Merkurjev, 1993, [52] [57]). — *Soit A une algèbre simple centrale d'indice multiple de 4. Alors il existe un corps F/k tel que $SK_1(A \otimes_k F) \neq 0$. En particulier, pour tout $n \geq 2$, $\mathbf{SL}_n(A)$ n'est pas W -trivial et n'est pas une variété stablement k -rationnelle.*

Remarque 2.9. — Si A est un corps gauche de degré 4 sur \mathbf{Q} (ou sur \mathbf{Q}_p), on sait que $SK_1(A) = 0$ [105] et le résultat ci-dessus montre que $SK_1(A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\mathbf{SL}_1(A))) \neq 0$.

Appliquant sa théorie des invariants de groupes algébriques à valeurs dans les modules de cycles [56], Merkurjev a étendu la construction de Rost aux algèbres de degré 4 et a donné une nouvelle démonstration, plus naturelle, du théorème 2.8.

THÉORÈME 2.10 ([56, th. 6.6]). — *Soit A une algèbre simple centrale de degré 4. Soit $Y = SB(A, 2)$ la variété des idéaux à droite de A de dimension 2. Alors il existe un isomorphisme*

$$SK_1(A) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H^4(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H^4(k(Y), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\right) / [A^{\otimes 2}] \cup H^2(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}).$$

2.5. Invariant de Suslin, 2006

On suppose toujours que $d = \text{ind}(A)$ est inversible dans k . Soit X la variété de Severi-Brauer de A , c'est-à-dire la variété des idéaux à droite de dimension $\text{deg}(A) = \sqrt{\dim_k(A)}$. Nous allons définir suivant Suslin [92] un nouvel invariant

$$(*) \quad \rho : SK_1(A) \rightarrow \ker\left(H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \rightarrow H^4(k(X), \mu_d^{\otimes 3})\right) / [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2})$$

au moyen de la théorie motivique étale de Voevodsky [51] ; ceci nécessite la conjecture de Bloch-Kato en degré 3. La comparaison des invariants ρ_0 et ρ est une tâche ardue non encore réalisée ; on s'attend cependant à la formule $\rho_0 = \pm 2\rho$. En d'autres mots, le nouvel invariant est (deux fois !) plus fin que celui de 1991, la cohomologie motivique

ayant permis ce raffinement. En caractéristique nulle, cet invariant a été construit indépendamment par B. Kahn [44].

À toute k -variété lisse Y , on associe des groupes de cohomologie motivique étale $H_{\text{ét}}^i(Y, \mathbf{Z}(j))$ ($i \geq 0, j \in \mathbf{Z}$). Pour le point $\text{Spec}(k)$, vu que $H_{\text{ét}}^i(k, \mathbf{Q}(j)) = 0$ pour $i > j$, on a des isomorphismes de bord

$$H^i(k, \mathbf{Q} / \mathbf{Z}(j)) = H_{\text{ét}}^i(k, \mathbf{Q} / \mathbf{Z}(j)) \cong H_{\text{ét}}^{i+1}(k, \mathbf{Z}(j)) \quad (i > j)$$

qui relie ces groupes à la cohomologie galoisienne. On considère le groupe

$$SH_{\text{ét}}^5(X, \mathbf{Z}(3)) := \ker\left(H_{\text{ét}}^5(X, \mathbf{Z}(3)) \rightarrow H_{\text{ét}}^5(X \times_k k(X), \mathbf{Z}(3))\right).$$

Par ailleurs, on utilise la cohomologie Zariski du faisceau \mathcal{K}_3 associé à la K -théorie de Quillen. De façon analogue, on pose

$$SH_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3) := \ker\left(H_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3) \rightarrow H_{\text{Zar}}^2(X \times_k k(X), \mathcal{K}_3)\right).$$

THÉORÈME 2.11 ([92, th. 1]). — *On suppose d inversible dans k , $\deg(A) \geq 3$ et que la conjecture de Bloch-Kato vaut en degré 3 pour les extensions de k . On a des isomorphismes*

$$SH_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3) \xrightarrow{\sim} SH_{\text{ét}}^5(X, \mathbf{Z}(3)) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \rightarrow H^4(k(X), \mu_d^{\otimes 3})\right) / [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2}).$$

Démonstration. — On se limite au cas de caractéristique nulle. Notons $V(X)$ le groupe de droite, il est isomorphe à

$$\ker\left(H^4(k, \mathbf{Q} / \mathbf{Z}(3)) \rightarrow H^4(k(X), \mathbf{Q} / \mathbf{Z}(3))\right) / [A] \cup H^2(k, \mathbf{Q} / \mathbf{Z}(2)).$$

Vu que X est une variété géométriquement cellulaire, la cohomologie motivique étale de X en poids 3 peut se calculer via la suite spectrale de B. Kahn [43]

$$E_2^{p,q} = H_{\text{ét}}^{p-q}(k, CH^q(X \times_k k_s) \otimes \mathbf{Z}(3-q)) \implies E_{\infty}^{p+q}$$

avec des flèches $E_{\infty}^{p+q} \rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbf{Z}(3))$ qui sont bijectives pour $p+q \leq 6$. Vu que $CH^q(X \times_k k_s) = \mathbf{Z}$ pour $q = 0, \dots, \deg(A) - 1$, et vaut 0 sinon, l'étude de cette suite

spectrale conduit au diagramme exact suivant (*ibid.*, §5.4 et §7)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H^4_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & K_2(k) & & \\
 & & & & \cup[A] \downarrow & & \\
 & & & & H^4(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & H^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3^M) & \longrightarrow & H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) & \longrightarrow & H^0_{\text{Zar}}(X, \mathcal{H}(4)). \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & k^\times & &
 \end{array}$$

Ce diagramme demande quelques explications. La flèche $H^4(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \rightarrow H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3))$ est le composé $H^4(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \cong H^5_{\text{ét}}(k, \mathbf{Z}(3)) \rightarrow H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3))$ qui est défini via l'isomorphisme rappelé précédemment. Les groupes $H^*_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3^M)$ désignent la cohomologie du module de cycles K_*^M , i.e. la K -théorie de Milnor [81]. D'ailleurs, on a un isomorphisme $H^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3^M) \xrightarrow{\sim} H^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3)$ qui se lit sur la définition compte tenu du théorème de comparaison de Matsumoto, i.e. $K_2^M(F) \xrightarrow{\sim} K_2(F)$ pour tout corps F/k . Enfin, $\mathcal{H}(4)$ désigne le faisceau Zariski sur X associé au préfaisceau $U \mapsto H^4_{\text{ét}}(U, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))$. On dispose d'un diagramme analogue pour $X_{k(X)}$; la compatibilité

$$\begin{array}{ccc}
 H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) & \longrightarrow & H^5_{\text{ét}}(X_{k(X)}, \mathbf{Z}(3)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 k^\times & \hookrightarrow & k(X)^\times
 \end{array}$$

produit par chasse au diagramme un isomorphisme $SH^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3^M) \xrightarrow{\sim} V(X)$. Vu que $X \times_k X$ est k -birationnelle à $\mathbf{P}^{d-1} \times_k X$, la flèche $H^4(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \rightarrow H^4(k(X \times X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))$ est injective. Le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & H^2_{\text{Zar}}(X, \mathcal{K}_3^M) & \longrightarrow & H^5_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}(3)) & \longrightarrow & H^0_{\text{Zar}}(X, \mathcal{H}(4)) \hookrightarrow H^4(k(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & H^2_{\text{Zar}}(X_{k(X)}, \mathcal{K}_3^M) & \longrightarrow & H^5_{\text{ét}}(X_{k(X)}, \mathbf{Z}(3)) & \longrightarrow & H^0_{\text{Zar}}(X_{k(X)}, \mathcal{H}(4)) \hookrightarrow H^4(k(X \times X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(3))
 \end{array}$$

permet de conclure que $SH_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3) \xrightarrow{\sim} SH_{\text{ét}}^5(X, \mathbf{Z}(3))$. □

On se souvient alors de la décomposition de Quillen (voir [94, §12])

$$K_1(X) = \bigoplus_{j=0}^{\text{deg}(A)-1} K_1(A^{\otimes j}).$$

de la K -théorie de X . La suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen

$$E_2^{p,q}(X) = H_{\text{Zar}}^{p+q}(X, \mathcal{K}_{-q}) \implies K_{-p-q}(X)$$

définit une filtration décroissante sur $K_1(X)$ avec $F^0(X) = K_1(X)$, $F^{p/p+1}(X) = E_{\infty}^{p,-1-p}$. La restriction du morphisme $K_1(X) \rightarrow E_{\infty}^{0,-1} = E_2^{0,-1} = H^0(X, \mathcal{K}_1) = k^\times$ sur le facteur $K_1(A) = A^\times/[A^\times, A^\times]$ n'est pas autre chose que la norme réduite $\text{Nrd} : K_1(A) \rightarrow k^\times$. Ainsi, on a une inclusion $SK_1(A) \subset F^2(X)$, d'où par composition une flèche

$$SK_1(A) \hookrightarrow F^2(X) \twoheadrightarrow F^{2/3}(X) = E_{\infty}^{2,-3} \hookrightarrow E_2^{2,-3} = H_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3).$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} SK_1(A) & \longrightarrow & H_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = SK_1(A_{k(X)}) & \longrightarrow & H_{\text{Zar}}^2(X_{k(X)}, \mathcal{K}_3) \end{array}$$

montre que l'on a en fait une flèche $SK_1(A) \rightarrow SH_{\text{Zar}}^2(X, \mathcal{K}_3)$. On peut alors combiner avec le théorème 2.11 pour définir l'invariant de Suslin (*)

$$\rho : SK_1(A) \rightarrow \ker \left(H^4(k, \mu_d^{\otimes 3}) \rightarrow H^4(k(X), \mu_d^{\otimes 3}) \right) / [A] \cup H^2(k, \mu_d^{\otimes 2}).$$

Dans le cas d'une algèbre de degré 4, Suslin montre que ρ est un isomorphisme et établit un théorème de comparaison avec les invariants de Rost et Merkurjev [92, §3.4].

QUESTION 2.12. — Si $d = p^2$, p premier impair, l'invariant ρ est-il injectif ?

Remarque 2.13. — Ce type de techniques permet de définir un invariant analogue pour le groupe $SK_2(A)$ [11] [44]. Le cas d'une algèbre de biquaternions donne lieu à une généralisation du théorème de Rost (Calmès, *loc. cit.*). De plus, Kahn et Levine sont allés plus loin dans le rapprochement de la décomposition de Quillen et de la cohomologie motivique de la variété de Severi-Brauer $X = SB(A)$ [45]. De façon plus précise, la filtration « de la tranche » de la K -théorie de A est explicitée en termes de complexes de faisceaux associés à A . Ceci donne une autre méthode pour définir des invariants de $SK_1(A)$ et $SK_2(A)$ (*loc. cit.*, §4.9).

2.6. Questions de finitude

De façon générale se pose la question de la finitude de $W(k, \mathbf{G})$ lorsque k est un corps de type fini sur son sous-corps premier. Le seul cas connu significatif est le théorème suivant de Colliot-Thélène dont les ingrédients sont le théorème 2.7 et la théorie du corps de classes supérieur.

THÉORÈME 2.14 ([18]). — *Soient F un corps et A/F une algèbre de biquaternions. Dans chacun des cas suivants :*

- (i) *F est un corps de fonctions d'au plus deux variables sur un corps de nombres,*
- (ii) *F est un corps de fonctions d'au plus trois variables sur un corps fini,*

le groupe $SK_1(A)$ est fini.

3. DÉVISSAGE DU GROUPE $W(K, \mathbf{G})$

Nous revenons à des généralités en fixant un k -groupe algébrique réductif (connexe) \mathbf{G} .

3.1. Réduction au cas simplement connexe absolument presque simple

On adopte ici une présentation légèrement différente de Borel-Tits [7, 6.5]. On sait que le groupe G admet une z -extension, c'est-à-dire une présentation

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \mathbf{G}^{\text{sc}} & \longrightarrow & D\mathbf{G} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{E} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{G}} & \longrightarrow & \mathbf{G} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{E}/\mu & \longrightarrow & \text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}}) & \longrightarrow & \text{corad}(\mathbf{G}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

où $\mathbf{G}^{\text{sc}} = D\widetilde{\mathbf{G}}$ est semi-simple simplement connexe, \mathbf{E} est un k -tore quasi-trivial (i.e. produit de restrictions des scalaires à la Weil $R_{L/k}\mathbf{G}_m$), $\text{corad}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}/D\mathbf{G}$ désignant le k -tore coradical de \mathbf{G} . Il y a des correspondances bijectives entre les k -sous-groupes additifs à un paramètre de \mathbf{G} , \mathbf{G}^{sc} et $\widetilde{\mathbf{G}}$. Le théorème 90 de Hilbert

implique que la flèche $\widetilde{\mathbf{G}}(k) \rightarrow \mathbf{G}(k)$ est surjective. Pour un k -tore \mathbf{T} , on a par définition $\mathbf{T}(k)^+ = 1$; on montre alors aisément que le diagramme précédent donne lieu au diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & W(k, \mathbf{G}^{\text{sc}}) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{E}(k) & \longrightarrow & W(k, \widetilde{\mathbf{G}}) & \longrightarrow & W(k, \mathbf{G}) \longrightarrow 1, \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})(k) & &
 \end{array}$$

permettant de calculer dans une certaine mesure le groupe $W(k, \mathbf{G})$ à partir de $W(k, \mathbf{G}^{\text{sc}})$. De façon plus précise, le groupe $W(k, \widetilde{\mathbf{G}})$ est extension de $\text{Im}(\widetilde{\mathbf{G}}(k) \rightarrow \text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})(k))$ par $W(k, \mathbf{G}^{\text{sc}})$.

Rappelons qu'un tel k -groupe \mathbf{G}^{sc} se décompose en un produit fini $\mathbf{G}^{\text{sc}} = \prod_i R_{k_i/k}(\mathbf{G}_i)$ de restrictions à la Weil où les k_i/k sont des extensions finies séparables de corps et les \mathbf{G}_i/k_i sont des k_i -groupes semi-simples simplement connexes absolument presque simples [97]. Vu que

$$(1) \quad W(k, \mathbf{G}^{\text{sc}}) \xrightarrow{\sim} \prod_i W(k_i, \mathbf{G}_i),$$

le problème de Kneser-Tits pour \mathbf{G}^{sc} se ramène au problème de Kneser-Tits pour les \mathbf{G}_i/k_i . Sans perte de généralité, il est donc loisible de considérer uniquement des k -groupes simplement connexes absolument presque simples, i.e. des k -groupes \mathbf{H} tels que $\mathbf{H} \times_k k_s$ soit un groupe de Chevalley presque simple \mathbf{SL}_{n+1} , \mathbf{Spin}_{2n+1} , \mathbf{Sp}_{2n} , etc.

3.2. Conséquence pour les groupes W -triviaux

PROPOSITION 3.1. — *On suppose que \mathbf{G} est W -trivial, c'est-à-dire que $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k . Alors \mathbf{G} est semi-simple simplement connexe et tous ses facteurs presque simples sont isotropes et W -triviaux.*

Démonstration. — (1) \mathbf{G} est semi-simple : on peut supposer que k est algébriquement clos. Alors la flèche $\mathbf{G}(k) \rightarrow \text{corad}(\mathbf{G})(k)$ est surjective et induit un morphisme surjectif $1 = W(k, \mathbf{G}) \rightarrow \text{corad}(\mathbf{G})(k)$. Le tore $\text{corad}(\mathbf{G})$ est trivial, donc le groupe \mathbf{G} est semi-simple.

(2) \mathbf{G} est semi-simple simplement connexe : on peut encore supposer que k est algébriquement clos. Le groupe \mathbf{G} est alors déployé, il est W -trivial (e.g. [89, lemma 64]).

En outre le tore $\text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})$ est déployé. Le diagramme ci-dessus produit les isomorphismes

$$\mathbf{E}(F) \xrightarrow{\sim} W(F, \widetilde{\mathbf{G}}) \xrightarrow{\sim} \text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})(F)$$

pour tout corps F/k . Si $\text{car}(k) = 0$, cela entraîne immédiatement (pour $F = k$) que $\mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})$. Pour le cas général, en prenant $F = k((t))$, on obtient un isomorphisme des groupes de cocaractères $\widehat{E}^0 \xrightarrow{\sim} \widehat{\text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})}_0$, d'où $\mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \text{corad}(\widetilde{\mathbf{G}})$.

(3) *Les facteurs presque simples de \mathbf{G} sont isotropes et W -triviaux* : on peut supposer \mathbf{G} presque k -simple. Si \mathbf{G} est anisotrope, on sait que \mathbf{G} n'a pas de sous-groupes à un paramètre. Ceci implique en particulier que le corps k est infini [5, §16]. Par définition, on a donc $W(k, \mathbf{G}) = \mathbf{G}(k)$, et ce groupe est non trivial [5, 18.3], ce qui contredit l'hypothèse de W -trivialité pour \mathbf{G} . La W -trivialité des facteurs simples de \mathbf{G} se voit avec la formule (1). □

3.3. Réduction aux groupes de rang relatif 1

Cette réduction, due à Prasad-Raghunathan [79] (voir aussi [75, §7.2]), complète la technique de Tits d'élimination des sommets négligeables du diagramme de Dynkin [98, §4.3]. Ici encore, \mathbf{G} désigne un groupe semi-simple simplement connexe, isotrope, et absolument presque simple. On note $\Gamma_k = \text{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu de k . Soient \mathbf{S} un k -tore maximal déployé de \mathbf{G} et \mathbf{T} un k -tore maximal contenant \mathbf{S} . Soit Δ une base du système de racines absolu $\Phi := \Phi(\mathbf{G}_{k_s}, \mathbf{T}_{k_s}) \subset \widehat{\mathbf{T}}(k_s)$ et $\Delta_k \subset \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ un ordre compatible [5, §20]. On note $\mathbf{P} \subset \mathbf{G}$ le sous-groupe parabolique minimal standard associé à \mathbf{S} et Δ_k ; le groupe $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un sous-groupe de Levi de \mathbf{P} . On pose

$$\Delta_0 = \left\{ \alpha \in \Delta \mid \alpha|_{\mathbf{S}} = 1 \right\}.$$

La $*$ -action de Γ_k sur Δ [6] stabilise Δ_0 et $\Delta \setminus \Delta_0$ consiste en r orbites galoisiennes, où $r = \text{rg}(\mathbf{S})$ est le rang relatif de \mathbf{G} .

Pour toute partie Γ_k -stable Θ de $\Delta \setminus \Delta_0$, on note \mathbf{P}_{Θ} le sous-groupe parabolique standard de \mathbf{G} associé à $\Delta_0 \cup \Theta$ et \mathbf{L}_{Θ} son sous-groupe de Levi standard. On pose alors $\mathcal{G}_{\Theta} := D\mathbf{L}_{\Theta}$, c'est un groupe semi-simple simplement connexe dont l'indice de Tits est le sous-diagramme de Dynkin de Δ de sommets $\Delta_0 \cup \Theta$.

Si Θ est une Γ_k -orbite de $\Delta \setminus \Delta_0$, le groupe \mathcal{G}_{Θ} se décompose de façon unique

$$\mathcal{G}_{\Theta} = \mathbf{G}_{\Theta} \times \mathbf{A}_{\Theta},$$

où \mathbf{G}_{Θ} est un k -groupe de rang relatif 1 absolument presque simple et \mathbf{A}_{Θ} est un k -groupe anisotrope. Ceci se montre en remarquant que l'indice de Tits de \mathbf{G}_{Θ} est la composante connexe de Θ dans le sous-diagramme de Δ dont les sommets sont $\Delta_0 \cup \Theta$.

THÉORÈME 3.2 ([79]). — Les $\mathbf{G}_\Theta(k)$, pour Θ parcourant les Γ_k -orbites de $\Delta \setminus \Delta_0$, engendrent $W(k, \mathbf{G})$.

Cette réduction est bien commode lorsque l'on s'intéresse à la question 1.2, c'est-à-dire lorsque l'on fixe le corps de base.

COROLLAIRE 3.3. — On suppose que $W(k, \mathbf{H}) = 1$ pour tout k -groupe semi-simple simplement connexe presque simple et de k -rang 1. Alors pour tout k -groupe \mathbf{G} semi-simple simplement connexe isotrope et presque simple, on a $W(k, \mathbf{G}) = 1$.

4. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES GROUPES DE WHITEHEAD

On suppose désormais, sauf mention expresse du contraire, que \mathbf{G}/k est semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope.

4.1. Faits pêle-mêle

Nous allons tirer quelques observations utiles du théorème de simplicité de Tits.

FAIT 4.1. — Pour tout corps F/k ayant au moins quatre éléments, on a

$$[\mathbf{G}(F)^+, \mathbf{G}(F)^+] = \mathbf{G}(F)^+.$$

En particulier, $\mathbf{G}(F)^+ \subset [\mathbf{G}(F), \mathbf{G}(F)]$ et on a alors une surjection naturelle

$$W(F, \mathbf{G}) \twoheadrightarrow \mathbf{G}(F)_{ab} = \mathbf{G}(F)/[\mathbf{G}(F), \mathbf{G}(F)]$$

du groupe de Whitehead sur l'abélianisé de $\mathbf{G}(F)$.

QUESTION 4.2. — A-t-on un isomorphisme $W(F, \mathbf{G}) \cong \mathbf{G}(F)_{ab}$? En d'autres termes, le groupe $W(F, \mathbf{G})$ est-il abélien?

La réponse est positive pour les groupes classiques, voir 7.7. Vu que l'on ne connaît pas de contre-exemples, il est tentant de penser que la réponse est positive. En étant encore plus optimiste, ce groupe $W(F, \mathbf{G})$ devrait être de torsion et même annulé par un petit entier, l'ordre du groupe de Weyl de \mathbf{G} par exemple (voir plus loin la remarque 7.6).

On rappelle que, si k est parfait, tout élément unipotent de $\mathbf{G}(k)$ est k -plongeable dans le radical unipotent d'un k -sous-groupe parabolique de \mathbf{G} ; le groupe $\mathbf{G}(k)^+$ coïncide alors avec le sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les éléments unipotents de $\mathbf{G}(k)$. Pour un corps de caractéristique $p > 0$, ceci vaut plus généralement dans les cas suivants : p n'est pas un entier de torsion de \mathbf{G} [88, §5] ou $[k : k^p] \leq p$ [30].

En pratique, on utilise la définition équivalente de $\mathbf{G}(k)^+$ en termes de k -sous-groupes paraboliques. Soient \mathbf{P} un k -sous-groupe parabolique propre de \mathbf{G} et \mathbf{P}^- un

k -sous-groupe parabolique opposé à \mathbf{P} . On note $R_u(\mathbf{P})$ le radical unipotent de \mathbf{P} , c'est un k -groupe unipotent déployé.

FAIT 4.3 ([7, 6.10]). — *On suppose k infini.*

1. $\mathbf{G}(k)^+$ est le sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les conjugués de $(R_u \mathbf{P})(k)$.
2. $\mathbf{G}(k)^+$ est le sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ engendré par $(R_u \mathbf{P})(k)$ et $(R_u \mathbf{P}^-)(k)$.

En effet, le sous-groupe de $\mathbf{G}(k)$ engendré par les conjugués de $(R_u \mathbf{P})(k)$ est un sous-groupe normal de $\mathbf{G}(k)$, donc aussi de $\mathbf{G}(k)^+$. Ce groupe n'est pas commutatif, donc est non central dans $\mathbf{G}(k)^+$. Le théorème de simplicité de Tits montre que les deux groupes coïncident. Pour la seconde assertion, le sous-groupe M de $\mathbf{G}(k)$ engendré par $(R_u \mathbf{P})(k)$ et $(R_u \mathbf{P}^-)(k)$ est normalisé par $(\mathbf{P} \cap \mathbf{P}^-)(k)$, donc aussi par $\mathbf{G}(k)$ puisque celui-ci est engendré par $(\mathbf{P} \cap \mathbf{P}^-)(k)$, $(R_u \mathbf{P})(k)$ et $(R_u \mathbf{P}^-)(k)$ (grosse cellule dans la décomposition de Bruhat). Le groupe M est un sous-groupe normal de $\mathbf{G}(k)^+$ qui contient $(R_u \mathbf{P})(k)$, la première assertion entraîne $M = \mathbf{G}(k)^+$.

Le groupe $\mathbf{G}(k)^+$ est assez « gros » au sens suivant.

FAIT 4.4. — *On suppose que k est un corps infini. Alors $\mathbf{G}(k)^+$ est Zariski-dense dans \mathbf{G} . En outre $Z(\mathbf{G}(k)^+) \subset Z(\mathbf{G})(k)$.*

Notons $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ le k -sous-groupe de \mathbf{G} engendré par $\mathbf{G}(k)^+$ [5, 2.1]. Alors $\mathbf{G}(k)$ normalise \mathbf{H} . Puisque $\mathbf{G}(k)$ est Zariski-dense dans \mathbf{G} [5, 18.3], le k -groupe \mathbf{H} est distingué dans \mathbf{G} . Par hypothèse, \mathbf{G} est presque k -simple et \mathbf{H} est non central, donc $\mathbf{H} = \mathbf{G}$. La remarque sur le centre est immédiate et amène à la question d'égalité des groupes $Z(\mathbf{G}(k)^+)$ et $Z(\mathbf{G})(k)$ que l'on peut formuler de la façon suivante. A-t-on l'inclusion

$$Z(\mathbf{G})(k) \subset \mathbf{G}(k)^+ \quad ?$$

L'article [61] de Monastyrniï étudie cette question pour les groupes classiques et la réponse est en général négative. En effet, il existe un groupe simplement connexe \mathbf{G} de type 1D_n dont le centre donne lieu à des éléments non triviaux de $W(k, \mathbf{G})$.

4.2. Flèche de relèvement

Soit O un anneau hensélien de valuation discrète, par exemple un anneau complet pour une valuation discrète. On note K son corps de fractions et κ son corps résiduel. Soit \mathfrak{H}/O un schéma en groupes semi-simples simplement connexes [1]. Alors $\mathfrak{H} \times_O K$ et $\mathbf{H} := \mathfrak{H} \times_O \kappa$ sont des groupes simplement connexes et ont même indice de Witt-Tits, c'est-à-dire même diagramme de Dynkin relatif. On suppose que \mathbf{H} est absolument presque simple et isotrope. La première décomposition ci-dessous rend compte du caractère « non-ramifié » du groupe de Whitehead.

LEMME 4.5. — 1) $\mathfrak{H}(K) = \mathfrak{H}(K)^+ \cdot \mathfrak{H}(O)$;

2) $\ker(\mathfrak{H}(O) \rightarrow \mathbf{H}(\kappa)) \subset \mathfrak{H}(K)^+$.

L'inclusion ci-dessus est une variante de la proposition 6.14 de Borel-Tits [7] portant sur les corps localement compacts. On considère les objets suivants. Soit \mathbf{P} un κ -sous-groupe parabolique minimal de \mathbf{H} . Puisque O est hensélien, \mathbf{P} se relève en un O -sous-groupe parabolique \mathfrak{P} . Soit \mathbf{S}/κ un κ -tore maximal déployé de \mathbf{P} , il se relève en un O -tore déployé maximal \mathfrak{S} de \mathfrak{P} [1, IX.7]. On sait alors que \mathfrak{S}_K est un K -tore maximal déployé de \mathfrak{H}_K [10, 4.6.4]. On note $Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})$ le centralisateur de \mathfrak{S} [1, XI.5.3]. Alors $\mathbf{P} = R_u(\mathbf{P}) \rtimes Z_{\mathbf{H}}(\mathbf{S})$ et $\mathfrak{P} = R_u(\mathbf{P}) \rtimes Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})$ [1, XXVI.1].

Démonstration. — (1) On rappelle que $W(K, \mathfrak{H}_K)$ est engendré par $Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})(K)$ [96, §3]. Vu que $Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ est un schéma en groupe réductif dont la fibre spéciale est anisotrope, la théorie de Bruhat-Tits montre que $(Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})(O) = (Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})(K)$ [10, 4.6.33]. Le O -tore \mathfrak{S} est déployé, donc la flèche $Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})(O) \rightarrow (Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})(O)$ est surjective. Ces deux faits combinés entraînent

$$Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})(K) = Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})(O) \cdot \mathfrak{S}(K).$$

Par ailleurs, il est bien connu que $\mathfrak{S}(K) \subset \mathfrak{H}(K)^+$ [7, prop. 6.11]. Par suite, le groupe $W(K, \mathfrak{H})$ est engendré par $Z_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{S})(O)$ et partant par $\mathfrak{H}(O)$.

(2) En considérant le radical unipotent de \mathfrak{P} , on sait qu'il existe un sous-groupe unipotent $\mathfrak{U} : \mathbf{G}_{a,O} \rightarrow \mathfrak{P}$. On note $U : \mathbf{G}_{a,\kappa} \rightarrow \mathbf{H}$ sa fibre fermée. On note \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de \mathbf{H} et $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{h}$ celle de U . On considère le κ -sous-groupe \mathbf{M} de \mathbf{H} engendré par les $({}^hU)_{h \in \mathbf{H}(\kappa)}$. Vu que $\mathbf{H}(\kappa)$ est Zariski-dense dans \mathbf{H} [5, 18.3], le groupe \mathbf{M} est distingué dans \mathbf{H} , donc égal à \mathbf{H} . Par suite les ${}^h\mathfrak{u}$, pour h parcourant $\mathbf{H}(\kappa)$, engendrent le κ -espace vectoriel \mathfrak{h} . Ainsi, il existe $h_1, \dots, h_d \in \mathbf{H}(\kappa)$ tels que

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1, \dots, d} {}^{h_i}\mathfrak{u} \quad \text{où } d = \dim(\mathbf{H}).$$

Le lemme de Hensel (e.g. [59, I.4.2]) permet de relever les h_i en des $\tilde{h}_i \in \mathfrak{H}(O)$. Par construction, la différentielle en $(0, \dots, 0)$ du morphisme

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_{a,O})^d &\xrightarrow{f} \mathfrak{H} \\ (x_1, \dots, x_d) &\longmapsto \tilde{h}_1 \mathfrak{U}(x_1) \tilde{h}_1^{-1} \cdots \tilde{h}_d \mathfrak{U}(x_d) \tilde{h}_d^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Ainsi f est étale en $(0, \dots, 0)$ et le lemme de Hensel permet de conclure que

$$\ker(\mathfrak{H}(O) \rightarrow \mathbf{H}(\kappa)) \subset f(O^d) \subset \mathfrak{H}(K)^+. \quad \square$$

Ce lemme montre que l'application composée $\mathfrak{H}(O) \rightarrow \mathfrak{H}(K) \rightarrow W(K, \mathfrak{H}_K)$ passe au quotient par le groupe $\ker(\mathfrak{H}(O) \rightarrow \mathbf{H}(\kappa))$ induisant un morphisme surjectif

$$\rho : \mathbf{H}(\kappa) \longrightarrow W(K, \mathfrak{H}_K).$$

Le lemme de Hensel montre que la spécialisation $R_u(\mathfrak{P})(O) \rightarrow R_u(\mathbf{P})(\kappa)$ est surjective. Ainsi les éléments de $\mathbf{H}(\kappa)^+$ se relèvent en des éléments de $\mathfrak{H}(K)^+$. La flèche ρ est donc nulle sur $\mathbf{H}(\kappa)^+$ et produit une flèche surjective

$$\bar{\rho} : W(\kappa, \mathbf{H}) \longrightarrow W(K, \mathfrak{H}_K),$$

appelée flèche de relèvement. Cette flèche est en fait un isomorphisme, voir plus loin le corollaire 7.3.

4.3. Lien avec le π_0 naïf

Soit \mathbf{F} un foncteur en ensembles de la catégorie des k -algèbres. On note $\pi_0(k, \mathbf{F})$ le quotient de $\mathbf{F}(k)$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation élémentaire suivante : deux éléments $f_0, f_1 \in \mathbf{F}(k)$ sont liés s'il existe $f \in \mathbf{F}(k[t])$ tels que $f(0) = f_0$ et $f(1) = f_1$.

En particulier, si \mathbf{F} est un foncteur en groupes, on note $H\mathbf{F}(k)$ le sous-groupe distingué de $\mathbf{F}(k)$ directement liés à e . On a alors un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{F}(k)/H\mathbf{F}(k) \xrightarrow{\sim} \pi_0(k, \mathbf{F}).$$

En effet, soient f et f' deux éléments de $\mathbf{F}(k)$ équivalents. Il existe une chaîne $f_0 = f, f_1, \dots, f_n = f'$ où f_i est directement équivalent à f_{i+1} pour $i = 0, \dots, n-1$. Par récurrence, on peut supposer $n = 2$ et $f_0 = e$. Il existe h_0 et h_1 dans $\mathbf{F}(k[t])$ satisfaisant $h_0(0) = e, h_0(1) = f_1, h_1(0) = f_1$ et $h_1(1) = f_2$. Posons $\phi(t) = h_1(t)(h_0(1-t))^{-1} \in \mathbf{F}(k[t])$. Alors $\phi(0) = e = f_0$ et $\phi(1) = f_2$. Donc f_0 et f_2 sont directement équivalents.

En particulier, pour le k -groupe algébrique \mathbf{G} , cette construction donne lieu au quotient $\pi_0(k, \mathbf{G})$ de $\mathbf{G}(k)$. B. Margaux a montré le résultat de comparaison suivant.

PROPOSITION 4.6 ([50]). — $W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(k, \mathbf{G})$.

Cet isomorphisme est une conséquence du résultat suivant de théorie géométrique des groupes.

FAIT 4.7 ([50]). — Soit \mathbf{P} un k -sous-groupe parabolique minimal de \mathbf{G} . Alors

$$\mathbf{G}(k[t]) = \left\langle \mathbf{G}(k), (R_u \mathbf{P})(k[t]) \right\rangle.$$

En effet, on dispose d'une présentation du groupe $\mathbf{G}(k[t])$ en terme d'amalgame qui provient de l'action de $\mathbf{G}(k[t])$ sur l'immeuble de Bruhat-Tits [10] du groupe $\mathbf{G}_{k((\frac{1}{t}))}$. Pour \mathbf{SL}_2 , cette présentation est un résultat de Nagao [68] (voir aussi [85, II.1.6]); pour \mathbf{G} déployé, il s'agit d'un résultat de Soulé [87]. Expliquons brièvement pourquoi le fait (4.7) entraîne l'isomorphisme (4.6). Il s'agit d'établir que la surjection $\mathbf{G}(k)/\mathbf{G}(k)^+ \rightarrow \pi_0(k, \mathbf{G})$ est injective, c'est-à-dire que $\mathbf{G}(k)^+ = H\mathbf{G}(k)$. Étant donné un élément $g \in H\mathbf{G}(k)$, il existe $h \in \mathbf{G}(k[t])$ satisfaisant $h(0) = e$ et $h(1) = g$. Selon le fait ci-dessus, un tel h s'écrit alors $h = g_1 u_1 g_1^{-1} \cdots g_n u_n g_n^{-1}$ avec $g_1, \dots, g_n \in \mathbf{G}(k)$ et $u_1, \dots, u_n \in (R_u \mathbf{P})(k[t])$ satisfaisant $u_1(0) = \cdots = u_n(0) = e$. Par suite, $g = h(1) = g_1 u_1(1) g_1^{-1} \cdots g_n u_n(1) g_n^{-1} \in \mathbf{G}(k)^+$.

Cette construction est faussement naïve (k est parfait ici) puisque

$$\pi_0(k, \mathbf{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(\mathrm{Spec}(k), \mathbf{G})$$

est le groupe des homomorphismes dans la catégorie homotopique des schémas $\mathcal{H}(k)$ de Morel-Voevodsky [67], [66, §3.1]. En outre, les groupes d'homotopie $\pi_i(k, \mathbf{G})$ ($i \geq 1$) de Morel-Voevodsky définissent des analogues supérieurs du groupe de Whitehead.

5. LIEN AVEC LES QUESTIONS DE RATIONALITÉ ET D'APPROXIMATION

Dans cette section, nous formalisons dans un cadre général ces liens établis pour les groupes classiques [72] [62] [74] [98].

5.1. Variétés de groupes rétractes k -rationnelles

On appelle corps valué la donnée (K, v) d'un corps K muni d'une valuation v (non nécessairement discrète, de rang arbitraire). On note alors K_v le complété de K pour la valuation v . Si K contient k et $v(k^\times) = 0$, on dit que (K, v) est une k -valuation.

PROPOSITION 5.1 (Saltman [83, theorem 3.9]; voir aussi [22, §1])

Soit \mathbf{X} une k -variété. On considère les propriétés suivantes⁽¹⁾ :

1. \mathbf{X} est rétracte k -rationnelle.
2. Il existe un ouvert non vide $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ tel que, pour toute k -algèbre locale A de corps résiduel κ , l'application $\mathbf{U}(A) \rightarrow \mathbf{U}(\kappa)$ soit surjective.
3. $k(X)$ est séparable sur k et il existe un ouvert non vide $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ tel que, pour tout corps K/k et toutes valuations v_1, \dots, v_n sur K deux à deux indépendantes, $\mathbf{U}(K)$ soit dense dans $\mathbf{U}(K_{v_1}) \times \cdots \times \mathbf{U}(K_{v_n})$.

⁽¹⁾ La version préliminaire de cet exposé présentait une démonstration canulée de (4) \implies (1). Ceci est une question ouverte.

4. $k(X)$ est séparable sur k et il existe un ouvert non vide $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ tel que, pour tout k -corps valué (K, v) , $\mathbf{U}(K)$ soit dense dans $\mathbf{U}(K_v)$.

Alors on a les implications $(1) \iff (2) \implies (3) \implies (4)$.

Nous appelons dans la suite de l'exposé « propriété de relèvement » la propriété 2). Dans les assertions 3) et 4), la topologie sur $\mathbf{U}(K_v)$ est la topologie v -adique définie par Weil [107, appendice III]. Si \mathbf{U} est affine, il s'agit de la topologie la plus fine telle que les applications $f : \mathbf{U}(K_v) \rightarrow K_v$ soient continues pour tout $f \in \Gamma(\mathbf{U}, \theta_{\mathbf{U}})$, voir [46, page 256].

Démonstration. — $1) \implies 2)$ est le sens facile. Pour la réciproque, on peut supposer que $\mathbf{U} = \text{Spec}(B)$ est affine. La k -algèbre B étant de type fini, on considère un morphisme surjectif d'anneaux $R = k[t_1, \dots, t_n] \rightarrow B = R/\mathfrak{P}$. Le corps de fonctions $k(X)$ est le corps résiduel de l'anneau local $R_{\mathfrak{P}}$. Par hypothèse, la flèche $\mathbf{U}(R_{\mathfrak{P}}) \rightarrow \mathbf{U}(k(X))$ est surjective. Le point générique ξ de \mathbf{U} se relève donc en un morphisme $f : \text{Spec}(R_{\mathfrak{P}}) \rightarrow \mathbf{U}$. Il s'étend en un voisinage \mathbf{V} de $[\mathfrak{P}]$ dans $\mathbf{A}_k^n = \text{Spec}(R)$ de sorte que l'on obtient un morphisme $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ qui admet une section rationnelle. Ainsi X est rétracte k -rationnelle.

$1) \implies 3)$: Si X est rétracte k -rationnelle, X est k -unirationnelle et $k(X)$ est une extension séparable de k . La seconde assertion se ramène au cas d'un ouvert d'un espace affine, donc au cas de l'espace affine de dimension d pour lequel la densité de K^d dans $K_{v_1}^d \times \dots \times K_{v_n}^d$ est une conséquence du théorème d'approximation [9, VI.7, corollaire 2].

$3) \implies 4)$ est évident. □

LEMME 5.2. — On suppose que le corps de base k est infini. Soit \mathbf{H} un k -groupe réductif. On note $\xi \in \mathbf{H}(k(\mathbf{H}))$ le point générique de \mathbf{H} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. le morphisme $\mathbf{H}(A) \rightarrow \mathbf{H}(\kappa)$ est surjectif pour toute k -algèbre locale A de corps résiduel κ ;
2. $\mathbf{H}(K)$ est dense dans $\mathbf{H}(K_v)$ pour tout k -corps valué (K, v) ;
3. \mathbf{H} est une variété rétracte k -rationnelle.

Remarque 5.3. — Le lemme vaut en fait un espace homogène \mathbf{H}/\mathbf{M} . En outre, si \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 sont deux k -groupes réductifs, le produit $\mathbf{H}_1 \times_k \mathbf{H}_2$ est rétracte k -rationnel si et seulement si \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 sont rétractes k -rationnels.

Démonstration. — 1) \implies 2) : c'est une conséquence immédiate de la proposition 5.1.

2) \implies 1) : la proposition 5.1 produit un ouvert \mathbf{V} de \mathbf{H} ayant la propriété de relèvement. Vu que $\mathbf{V}(k)$ est Zariski-dense dans \mathbf{H} , il existe $h_1, \dots, h_n \in \mathbf{V}(k)$ tel que $\bigcup h_i \mathbf{V} = \mathbf{H}$. Il est alors immédiat que \mathbf{G} vérifie la propriété de relèvement.

L'équivalence 1) \iff 3) se démontre de la même façon. □

Le cas des variétés de groupes simplement connexes isotropes est particulièrement intéressant.

PROPOSITION 5.4. — *On suppose que le corps de base k est infini. Soit \mathbf{G} un k -groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope. On note $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))$ le point générique de \mathbf{G} . On considère les propriétés suivantes :*

1. \mathbf{G} est W -trivial, i.e. $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ;
2. $[\xi] = 1 \in W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$;
3. \mathbf{G} est une variété rétracte k -rationnelle.

Alors on a les implications suivantes : 1) \iff 2) \implies 3).

Ainsi la rétracte k -rationalité de \mathbf{G} est une condition nécessaire pour que \mathbf{G} soit W -trivial. L'équivalence 2) \iff 3) est établie plus loin (5.9). En outre, l'implication 1) \implies 3) pour le groupe $\mathbf{SL}_r(D)$ pour une algèbre à division D d'indice sans facteurs carrés montre que le théorème de Wang implique la rétracte k -rationalité de $\mathbf{SL}_r(D)$. On retrouve ainsi par une autre méthode la proposition 2.4.

Démonstration. — L'implication 1) \implies 2) est triviale.

2) \implies 1) : on dispose de $k(G)$ -morphisms $u_i : \mathbf{G}_{a, k(G)} \rightarrow \mathbf{G}_{k(\mathbf{G})}$ ($i = 1, \dots, n$) et de fonctions rationnelles $f_1, \dots, f_n \in k(\mathbf{G})$ telles que

$$\xi = u_1(f_1) u_2(f_2) \cdots u_n(f_n).$$

Il existe un ouvert non vide $\mathbf{V} \subset \mathbf{G}$ tel que les u_i et les f_i soient définis sur \mathbf{V} . La relation précédente montre que l'on a le diagramme commutatif de \mathbf{V} -schémas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_k^n \times \mathbf{V} & \xrightarrow{u_1 \cdots u_n} & \mathbf{G} \times \mathbf{V} \\ & \searrow (f_1, \dots, f_n) & \uparrow \Delta \\ & & \mathbf{V}. \end{array}$$

Par spécialisation, il vient $\mathbf{V}(F) \subset \mathbf{G}(F)^+$ pour tout corps F/k . Vu que $\mathbf{V}(F)$ est Zariski-dense dans \mathbf{G}_F [5, 18.3], on a $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}(F) = \mathbf{G}$, d'où aussitôt $\mathbf{G}(F) = \mathbf{V}(F) \cdot \mathbf{V}(F) = \mathbf{G}(F)^+$.

1) \implies 3) : soient \mathbf{P} un k -sous-groupe parabolique propre de \mathbf{G} et \mathbf{P}^- un k -sous-groupe parabolique opposé. Le groupe $\mathbf{G}(\kappa)^+$ est engendré par $(R_u \mathbf{P})(\kappa)$ et $(R_u \mathbf{P}^-)(\kappa)$ (fait 4.3), donc on est ramené à voir que

$$R_u(\mathbf{P})(\kappa) \subset \text{Im}(\mathbf{G}(A) \rightarrow \mathbf{G}(\kappa)).$$

Mais la variété $R_u(\mathbf{P})$ est isomorphe à un espace affine, donc l'application

$$R_u(\mathbf{P})(A) \rightarrow R_u(\mathbf{P})(\kappa)$$

est surjective. On a bien établi l'inclusion $R_u(\mathbf{P})(\kappa) \subset \text{Im}(\mathbf{G}(A) \rightarrow \mathbf{G}(\kappa))$. \square

En appliquant ceci au corps $k(\mathbf{G})$, le théorème 3.2 entraîne immédiatement le

COROLLAIRE 5.5. — *On suppose que k est infini. Avec les notations du théorème 3.2, on suppose que le groupe \mathbf{G}_Θ est W -trivial pour toute Γ_k -orbite Θ de $\Delta \setminus \Delta_0$. Alors \mathbf{G} est W -trivial.*

5.2. Lien avec l'approximation forte

Le problème de Kneser-Tits intervient de façon cruciale dans la preuve du théorème d'approximation forte pour les corps de nombres (Kneser [47], Platonov [70]) et dans le cas général (Prasad [77]). On note ici le lien suivant à la Kneser-Harder.

LEMME 5.6. — *Soit A un anneau de Dedekind de corps des fractions K . Soit \mathbf{H}/K un groupe simplement connexe absolument presque simple et isotrope. Soit \mathfrak{H}/A un modèle de \mathbf{H}/K , i.e. un A -schéma en groupes affine, plat de type fini sur A , et de fibre générique \mathbf{H}/K . Soit $\Sigma \subset \text{Spec}(A)$ un ensemble fini de points fermés de complémentaire $U = \text{Spec}(A) \setminus \Sigma$.*

1. $\mathfrak{H}(V) \cap \mathbf{H}(K)^+$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})^+$.
2. Si $\mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})^+ = \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \Sigma$, alors $\mathfrak{H}(U)$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$.

Remarque 5.7. — Rappelons que la densité de $\mathfrak{H}(U)$ dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$ est indépendante du modèle choisi [35, §2.1]. On dit alors que l'approximation forte vaut pour le groupe \mathbf{H}/K en Σ .

Démonstration. — (1) On continue à voir $\mathbf{H}(K)^+$ comme le sous-groupe de $\mathbf{H}(K)$ engendré par $(R_u \mathbf{P})(K)$ et $(R_u \mathbf{P}^-)(K)$ pour des K -sous-groupes paraboliques propres \mathbf{P} et \mathbf{P}^- opposés de \mathbf{H}/K (4.3). Quitte à décomposer les éléments de $\mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})^+$ en un produit fini d'éléments de $(R_u \mathbf{P})(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$ et $(R_u \mathbf{P}^-)(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$, on est ramené à voir que $\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (R_u \mathbf{P})(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$ se trouve dans l'adhérence de $\mathfrak{H}(U) \cap \mathbf{H}(K)^+$. La K -variété $R_u(\mathbf{P})$ est

isomorphe à un espace affine, donc satisfait l'approximation forte (cf. [47, 2.4]). Ainsi $(R_u \mathbf{P})(K) \cap \mathfrak{H}(U)$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (R_u \mathbf{P})(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$, ce qui achève la démonstration.

(2) C'est une conséquence immédiate. □

5.3. Invariance pour les extensions transcendentes pures

Le résultat suivant donne une forme générale aux énoncés de Platonov [71], Yanchevskii et Monastyrnii-Yanchevskii [64] pour tous les groupes classiques.

THÉORÈME 5.8. — *On suppose que \mathbf{G} est semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope. Alors on a un isomorphisme*

$$W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} W(k(t), \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} W(k((t)), \mathbf{G}).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la surjectivité de $W(k, \mathbf{G}) \rightarrow W(k(t), \mathbf{G})$ et le second isomorphisme.

Passage de k à $k(t)$: on note F le corps $k(t)$; il faut donc montrer que $\mathbf{G}(F) = \mathbf{G}(k) \cdot \mathbf{G}(F)^+$. Pour tout point fermé M de \mathbf{A}_k^1 , on note \widehat{F}_M le complété de F pour la valuation associée. Le lemme 4.5 appliqué aux anneaux de valuations \widehat{O}_M des corps \widehat{F}_M montre que l'on a $\mathbf{G}(\widehat{F}_M) = \mathbf{G}(\widehat{F}_M)^+ \cdot \mathbf{G}(\widehat{O}_M)$ pour tout point fermé M de \mathbf{A}_k^1 .

Soit $g \in \mathbf{G}(F)$. On note $\mathbf{U} \subset \mathbf{A}_k^1$ l'ouvert de définition de g et $\Sigma = \mathbf{A}_k^1 \setminus \mathbf{U}$ son complémentaire. Il existe $h_M \in \mathbf{G}(\widehat{F}_M)^+$ et $g_M \in \mathbf{G}(\widehat{O}_M)$ tel que

$$g = h_M g_M \quad (M \in \mathbf{A}^1).$$

Le lemme 5.6 montre que $\mathbf{G}(U) \cap \mathbf{G}(F)^+$ est dense dans $\prod_{M \in \Sigma} \mathbf{G}(\widehat{F}_M)^+$. Par suite, il existe $g' \in \mathbf{G}(U) \cap \mathbf{G}(F)^+$ tel que

$$g'^{-1} h_M \in \mathbf{G}(\widehat{O}_M) \quad \forall M \in \Sigma.$$

Ainsi

$$g'^{-1} g \in \mathbf{G}(\widehat{O}_M) \quad \forall M \in \Sigma,$$

d'où $g'^{-1} g \in \mathbf{G}(k[t])$. Mais $\mathbf{G}(k[t]) \subset \mathbf{G}(k) \cdot \mathbf{G}(F)^+$ (4.7), d'où aussitôt $g \in \mathbf{G}(k) \cdot \mathbf{G}(F)^+$.

Passage de k à $k((t))$: soient \mathbf{P} un k -sous-groupe parabolique propre de \mathbf{G} et \mathbf{P}^- un sous-groupe parabolique opposé. Suivant le §4.2, l'application $W(k, \mathbf{G}) \rightarrow W(k((t)), \mathbf{G})$ est la flèche de relèvement associée à $\mathbf{G} \times_k k[[t]]$, elle est donc surjective.

Pour l'injectivité, il convient d'établir que $\mathbf{G}(k)^+ = \mathbf{G}(k) \cap \mathbf{G}(k((t)))^+$. On se donne donc $g_0 \in \mathbf{G}(k)$ tel que

$$g_0 = u_1 \cdots u_n$$

avec $u_i \in R_u(\mathbf{P}^\pm)(k((t)))$ pour $i = 1, \dots, n$, l'indice \pm dépendant de i . On note $R = k[t, \frac{1}{t}]$ l'anneau des polynômes de Laurent. Vu que $R_u(\mathbf{P}^\pm)(R)$ est dense dans $R_u(\mathbf{P}^\pm)(k((t)))$, il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in R_u(\mathbf{P}^\pm)(R)$ satisfaisant

$$\prod u_i \prod f_i^{-1} \in \ker(\mathbf{G}(k[[t]]) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{G}(k)).$$

Puisque $g_0 = \prod u_i$, il vient $\prod f_i \in \mathbf{G}(R) \cap \mathbf{G}(k[[t]]) = \mathbf{G}(k[t])$, d'où

$$g_0 \prod f_i^{-1} \in \ker(\mathbf{G}(k[t]) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{G}(k)).$$

Suivant le fait 4.7, on sait que le groupe $\ker(\mathbf{G}(k[t]) \xrightarrow{ev_0} \mathbf{G}(k))$ est constitué d'éléments $g_1 h_1 \dots g_m h_m$ avec $h_i \in R_u(\mathbf{P})(k[t])$ et $g_i \in \mathbf{G}(k)$. En reportant ci-dessus, on obtient

$$g_0 \prod f_i^{-1} = g_1 h_1 \dots g_m h_m.$$

Il reste à spécialiser en 1 pour obtenir $g_0 \in \mathbf{G}(k)^+$. □

Ceci nous permet de compléter la proposition 5.4.

THÉORÈME 5.9. — *Sous les hypothèses du théorème 5.8, on note $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))$ le point générique de \mathbf{G} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. \mathbf{G} est W -trivial, i.e. $W(F, \mathbf{G}) = 1$ pour tout corps F/k ;
2. $[\xi] = 1 \in W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$;
3. \mathbf{G} est une variété rétracte k -rationnelle.

Démonstration. — Quitte à remplacer k par $k(t)$, le théorème 5.8 permet de supposer le corps de base infini. Au vu de la proposition 5.4, il reste à montrer que, si \mathbf{G} est une variété rétracte k -rationnelle, alors $[\xi] = 1 \in W(k(\mathbf{G}), \mathbf{G})$. Par hypothèse, il existe un ouvert \mathbf{U} de \mathbf{G} tel que l'identité de \mathbf{U} factorise à travers un ouvert \mathbf{V} d'un espace affine \mathbf{A}_k^m , i.e. il existe des morphismes $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ et $r : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$ tels que $r \circ f = id_{\mathbf{U}}$. Ainsi le morphisme

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) \xrightarrow{r^*} \mathbf{G}(\mathbf{V}) \xrightarrow{f^*} \mathbf{G}(\mathbf{U})$$

est l'identité. Le théorème 5.8 montre que $W(k, \mathbf{G}) = W(k(\mathbf{V}), \mathbf{G})$. Par suite, quitte à restreindre \mathbf{U} et \mathbf{V} , il existe $g_0 \in \mathbf{G}(k)$ et des éléments $g_i \in \mathbf{G}(\mathbf{V})$ et $u_i \in (R_u \mathbf{P})(\mathbf{V})$ tels que

$$r^*(\xi|_{\mathbf{U}}) = g_0 g_1 u_1 g_1^{-1} \dots g_n u_n g_n^{-1}.$$

En appliquant f^* , il vient

$$\xi = g_0 \quad \text{mod } \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))^+.$$

On utilise maintenant que le groupe $\mathbf{G}(k)^+$ est Zariski-dense dans \mathbf{G} (4.4). En spécialisant en un k -point convenable de $\mathbf{G}(k)^+$, on obtient $g_0 \in \mathbf{G}(k)^+$, d'où $\xi \in \mathbf{G}(k(\mathbf{G}))^+$. □

On obtient donc un élément de réponse à la question 1.1.

COROLLAIRE 5.10. — Soit \mathbf{H} un k -groupe réductif. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. \mathbf{H} est W -trivial ;
2. \mathbf{H} est semi-simple simplement connexe et tous ses facteurs presque k -simples sont isotropes et rétractes k -rationnels.

Démonstration. — (1) \implies (2) : on suppose le groupe \mathbf{H} W -trivial. La proposition 3.1 montre que \mathbf{H} est semi-simple simplement connexe, et que ses facteurs presque simples sont isotropes et W -triviaux. Notons $\mathbf{H} = R_{k_i/k}(\mathbf{H}_i)$ la décomposition de \mathbf{H} en facteurs presque simples. Suivant la formule (1), il revient au même de dire que \mathbf{H}_i/k_i est W -trivial pour tout i . Le théorème 5.9 montre que \mathbf{H}_i est rétracte k_i -rationnel pour tout i . Alors $R_{k_i/k}(\mathbf{H}_i)$ est rétracte k -rationnel pour tout i et il en est de même de \mathbf{H} . La réciproque est immédiate. \square

Par ailleurs, le théorème 5.8 a une conséquence pour l'approximation forte.

COROLLAIRE 5.11. — Sous les hypothèses de la proposition 5.6, on suppose que la variété de groupe \mathbf{H}/K est rétracte K -rationnelle. Alors pour tout ensemble fini $\Sigma \subset \text{Spec}(A)$, l'approximation forte vaut pour le groupe \mathbf{H}/K en Σ .

Démonstration. — En effet, le théorème 5.9 montre que $\mathbf{H}(E)^+ = \mathbf{H}(E)$ pour toute extension E/K . En particulier, $\mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})^+ = \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$ pour tout $[\mathfrak{p}] \in \Sigma$. Posant $U = \text{Spec}(A) \setminus \Sigma$, et notant \mathfrak{H}/A un modèle de \mathbf{H}/K , le lemme 5.6 montre que $\mathfrak{H}(U)$ est dense dans $\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathbf{H}(\widehat{K}_{\mathfrak{p}})$. \square

6. GROUPES W -TRIVIAUX

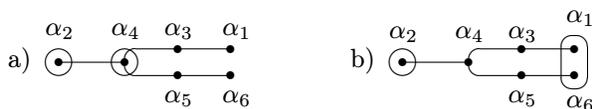
Pour de nombreux groupes, on sait que la variété \mathbf{G} est stablement k -rationnelle et donc que \mathbf{G} est W -trivial suivant le théorème 5.9. C'est par exemple le cas classique du groupe $\mathbf{Spin}(q)$ d'une forme quadratique non dégénérée isotrope (voir ci-dessous §7.3). Sur cette thématique, mentionnons ici l'exposé de Merkurjev [55]. Comme le montre la conjecture de Suslin, on est très loin de savoir décider si une variété de groupe est stablement k -rationnelle.

6.1. Groupes k -rationnels

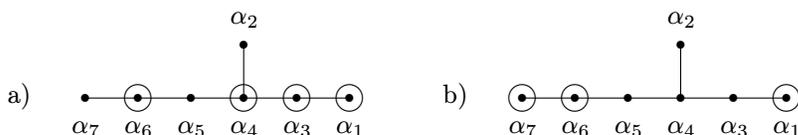
La liste ci-dessous est essentiellement due à Chernousov-Platonov.

THÉORÈME 6.1 ([15]). — Soit \mathbf{G} un groupe semi-simple simplement connexe isotrope absolument presque simple. Alors \mathbf{G} est une variété k -rationnelle dans les cas suivants :

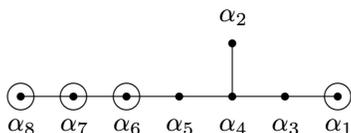
1. \mathbf{G} est quasi-déployé ;
2. les composantes du noyau anisotrope de \mathbf{G} sont de rang au plus 2 ;
3. \mathbf{G} est de type B_n, C_n ;
4. $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(q)$ pour une forme quadratique non dégénérée et isotrope q de dimension paire ;
5. $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(D, h)$ où D/k est une algèbre à division centrale de degré ≤ 4 munie d'une involution de première espèce de type orthogonal et h est une forme hermitienne (non dégénérée) isotrope ;
6. \mathbf{G} est de type ${}^3,6D_4, {}^1E_6$ ou F_4 ;
7. \mathbf{G} est de type 2E_6 avec l'un des indices de Tits suivants



8. \mathbf{G} est de type E_7 avec l'un des indices de Tits suivants



9. \mathbf{G} est de type E_8 avec l'indice de Tits suivant



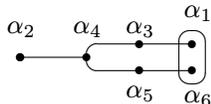
Notons que le cas 5) porte sur certains groupes de type 1D_n (resp. 2D_n). Rappelons l'argument pour le cas quasi-déployé 1). Si \mathbf{G} est quasi-déployé, on note \mathbf{B} et \mathbf{B}^- des sous-groupes de Borel opposés. La décomposition de Bruhat permet de voir que \mathbf{G} est birationnel à $\mathbf{B} \times R_u(\mathbf{B}^-)$, c'est-à-dire à $R_u(\mathbf{B}) \times \mathbf{T} \times R_u(\mathbf{B}^-)$ où $\mathbf{T} = \mathbf{B} \cap \mathbf{B}^-$. Les variétés $R_u(\mathbf{B}^\pm)$ sont des espaces affines et le tore \mathbf{T} est quasi-trivial [35, §1.4], donc k -rationnel. Ainsi \mathbf{G} est k -rationnel.

Cette liste (non disjointe) permet non seulement de retrouver les résultats connus de W -trivialité mais donne aussi de nouveaux cas, notamment sur les groupes exceptionnels. Par exemple, on retrouve ainsi un résultat de Jacobson pour les groupes de type F_4 de rang relatif 1 [37], [98, 4.4.3].

Un cas nouveau significatif est la W -trivialité des groupes tripartites (i.e. de type 3,6D_4), produisant ainsi une autre démonstration du théorème de Prasad-Raghunathan pour les corps de nombres [78].

6.2. Groupes d'indice ${}^2E_6^{29}$

THÉORÈME 6.2 (Garibaldi, 2006, [26]). — *On suppose $\text{car}(k) \neq 2, 3$. Soit \mathbf{G}/k un groupe simplement connexe d'indice de Tits*



Alors $\mathbf{G}(k)$ est projectivement simple et \mathbf{G} est une variété stablement k -rationnelle.

La première étape est de décrire ces groupes de façon explicite (Garibaldi-Petersson [27]). Ces groupes des transformations ont été étudiés par Veldkamp en 1968 qui a établi, transcrit dans le langage de cet exposé, que $\mathbf{G}(k)/Z(\mathbf{G})(k)$ est le sous-groupe engendré par des « transvections », i.e. $\mathbf{G}(k) = Z(\mathbf{G})(k) \cdot \mathbf{G}(k)^+$ [99, theorem 9.5]. Garibaldi a interprété les calculs de Veldkamp sur les transvections en termes du groupe \mathbf{G} de type E_6 et de ses sous-groupes algébriques. Cet article établit ensuite la stable k -rationalité de ces groupes, complétant la liste ci-dessus. Le théorème 5.9 permet de voir les choses dans l'autre sens, c'est-à-dire de montrer d'abord la stable k -rationalité, ce qui est plus facile, et d'en déduire ensuite la W -trivialité (ce qui est légèrement plus précis). Observons de plus que l'hypothèse sur la caractéristique peut être levée en tenant compte de la remarque technique 7.4.

De façon plus précise, soit \mathbf{G} un k -groupe simplement connexe d'indice de Tits ${}^2E_6^{29}$ muni d'un k -tore déployé maximal $\mathbf{S} \cong \mathbf{G}_m$. On note $K = k(\alpha)$ l'extension quadratique associée à la $*$ -action. L'article [27] met en évidence une algèbre d'octonions C , non déployée par K/k , telle que le noyau anisotrope $DZ_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ de \mathbf{G} soit isomorphe à $\mathbf{Spin}(C^K)$, groupe des spineurs de la forme quadratique

$$C^K = \langle 1 \rangle \perp \langle \alpha \rangle \widetilde{N}_C,$$

où \widetilde{N}_C est définie par $N_C = \langle 1 \rangle \perp \widetilde{N}_C$, N_C désignant la norme octonionique.

Disons quelques mots sur la démonstration de la stable k -rationalité pour ce type de groupes. Selon la décomposition de Bruhat généralisée, \mathbf{G} et $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ sont stablement rationnellement équivalents. Le centre connexe \mathbf{S}' de $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un tore quasi-trivial $R_{K/k}(\mathbf{G}_m)$. Suivant le théorème 90 de Hilbert, la fibration $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) \rightarrow Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}'$ admet une section rationnelle, donc $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ et $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}'$ sont stablement rationnellement équivalents. On est donc ramené à l'étude du groupe $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}'$ qui est semi-simple, anisotrope et de type quasi-déployé 2D_4 . Or $Z_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})/\mathbf{S}' \cong \mathbf{PSO}(C^K)$, le point étant que cette forme quadratique C^K est remarquable. En effet, C^K est Witt équivalente à $\langle \alpha \rangle N_C \perp \langle 1, -\alpha \rangle$ et N_C est une 3-forme de Pfister. On montre alors que pour ce type particulier de formes quadratiques, le groupe $\mathbf{PSO}(C^K)$ est stablement k -rationnel [26, prop. 61].

7. LIEN AVEC LA R -ÉQUIVALENCE

Dans cette section, on montre que la R -équivalence est la bonne généralisation du groupe de Whitehead à des groupes réductifs arbitraires.

7.1. Définition

La R -équivalence est une relation d'équivalence sur les points rationnels d'une variété algébrique introduite par Manin [49]. Soit \mathbf{X}/k une variété algébrique définie sur un corps k . On note \mathcal{O} l'anneau semi-local en 0 et 1 de la droite affine. La R -équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $\mathbf{X}(k)$ de \mathbf{X} engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x et y de $\mathbf{X}(k)$ sont dits directement R -équivalents s'il existe $\phi \in \mathbf{X}(\mathcal{O})$ tel que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. Cette définition s'étend à tout foncteur \mathbf{F} de la catégorie des k -algèbres.

Soit \mathbf{F} un foncteur en groupes de la catégorie des k -algèbres ; on note $R\mathbf{F}(k)$ le sous-groupe (distingué) formé des éléments $f \in \mathbf{F}(k)$ directement R -équivalents à $e \in \mathbf{F}(k)$. Alors l'ensemble des classes $\mathbf{F}(k)/R$ est muni d'une structure naturelle de groupes. On sait que $R\mathbf{F}(k)$ est formé des éléments $f \in \mathbf{F}(k)$ pour lesquels il existe $h \in \mathbf{F}(\mathcal{O})$ satisfaisant $h(0) = e$ et $h(1) = f$ (même démonstration qu'en 4.3). On a alors un morphisme surjectif canonique $\pi_0(k, \mathbf{F}) \rightarrow \mathbf{F}(k)/R$. En particulier, pour tout k -groupe algébrique \mathbf{H} , cette construction donne lieu à la flèche $\pi_0(k, \mathbf{H}) \rightarrow \mathbf{H}(k)/R$. Si k est infini, il est immédiat que $\mathbf{H}(k)/R \cong \mathbf{H}(k(t))/R$ [103, §16.2]. On dit que \mathbf{H} est R -trivial si $\mathbf{H}(F)/R = 1$ pour toute extension F/k . Si \mathbf{H} est rétracte k -rationnelle (et k infini), on sait que \mathbf{H} est R -trivial [20, prop. 8].

7.2. Comparaison

Selon Voskresenskiï [102], la R -équivalence étend le groupe de Whitehead pour les groupes linéaires spéciaux anisotropes (i.e. le cas $r = 1$ ci-dessous).

THÉOREME 7.1. — *Soit D une algèbre simple centrale à division. Alors pour tout entier $r \geq 1$, on a un isomorphisme*

$$SK_1(D) \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_r(D)(k)/R.$$

En particulier, si $r \geq 2$, on a un isomorphisme

$$W(k, \mathbf{SL}_r(D)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_r(D)(k)/R.$$

La démonstration utilise la stabilité de $SK_1(D)$ par passage de k à $k(t)$ et $k((t))$. La même démonstration permet de généraliser ce résultat de comparaison entre groupe de Whitehead et la R -équivalence, relation d'équivalence a priori plus grossière. Ici aussi, le cas des groupes classiques était connu [64], [62], [60].

THÉORÈME 7.2. — Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque simple et isotrope. Alors on a un isomorphisme

$$W(k, \mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(k)/R.$$

Démonstration. — Il faut montrer l'injectivité. On se donne donc un élément $g_1 \in \mathbf{G}(k)$ qui est R -équivalent à e . Alors il existe $g \in \mathbf{G}(\ell)$ satisfaisant $g(0) = e$ et $g(1) = g_1$. La propriété d'invariance par extension transcendante pure produit une décomposition $\mathbf{G}(k(t)) = \mathbf{G}(k) \cdot \mathbf{G}(k(t))^+$. Ainsi $g = g_0 g'$ avec $g_0 \in \mathbf{G}(k)$ et $g' \in \mathbf{G}(k(t))^+$. Mais $W(k, \mathbf{G}) \cong W(k((t)), \mathbf{G})$, donc $e = g(0) = g_0 \pmod{\mathbf{G}(k)^+}$ et de même $g_1 = g(1) = g_0 \pmod{\mathbf{G}(k)^+}$. On conclut que $g_1 \in \mathbf{G}(k)^+$. \square

On peut appliquer alors ce que l'on sait pour la R -équivalence. Si k est infini, l'ensemble $\mathbf{H}(k)/R$ définit un invariant birationnel pour les k -groupes réductifs [20, cor. de la prop. 11]. En particulier, si \mathbf{H} est rétracte k -rationnel, on sait alors que $\mathbf{H}(k)/R = 1$. Ces faits combinés avec le théorème 5.8 produisent une autre démonstration du théorème 5.9.

Par ailleurs, on a pour la R -équivalence un isomorphisme de relèvement pour un schéma en groupes réductifs sur un anneau hensélien de valuation discrète [31]. En particulier $\mathbf{H}(k)/R \cong \mathbf{H}(k((t)))/R$ pour tout groupe réductif \mathbf{H} , ce qui est cohérent avec le théorème 5.8. La conséquence suivante du théorème 7.2 complète le §4.2.

COROLLAIRE 7.3. — Soit O un anneau hensélien de valuation discrète de corps de fractions K et de corps résiduel κ . Soit \mathfrak{H}/O un schéma en groupes semi-simples simplement connexes. On suppose que \mathbf{H} est absolument presque simple et isotrope. Alors la flèche de relèvement (§4.2) est un isomorphisme

$$W(\kappa, \mathbf{H}) \xrightarrow{\sim} W(K, \mathfrak{H}_K).$$

Remarque 7.4. — Cet énoncé permet parfois de s'affranchir de la caractéristique positive. En effet, si $\text{car}(k) = p > 0$, on considère un anneau O complet pour une valuation discrète et de corps résiduel k . On sait que le groupe \mathbf{G}/k se relève alors de façon unique en un O -schéma en groupes semi-simples simplement connexes \mathfrak{G} [1, XXIV.8]. L'isomorphisme $W(k, \mathbf{G}) \cong W(K, \mathfrak{G}_K)$ ramène le calcul du groupe de Whitehead de \mathbf{G} à celui de \mathfrak{G}_K .

La R -équivalence permet de généraliser à tous les groupes réductifs les questions sur le groupe de Whitehead.

QUESTIONS 7.5. — Soit \mathbf{H} un k -groupe réductif.

- 1) Le groupe $\mathbf{H}(k)/R$ est-il abélien ?
- 2) A-t-on l'équivalence

$$\mathbf{H} \text{ est } R\text{-trivial} \iff \mathbf{H} \text{ est une variété rétracte } k\text{-rationnelle ?}$$

3) Si k est de type fini sur le corps premier, le groupe $\mathbf{H}(k)/R$ est-il fini ?

Pour les tores algébriques, la théorie de Colliot-Thélène et Sansuc répond positivement à ces questions ([20] pour 1) et 3), [21] pour 2)). De façon plus précise, on sait qu'un tore \mathbf{T} est R -trivial si et seulement s'il est facteur direct d'un tore quasi-trivial (un tel tore n'est pas nécessairement stablement k -rationnel). Une version plus optimiste de la seconde question est

(2') \mathbf{H} est R -trivial $\stackrel{?}{\iff}$ \mathbf{H} est facteur direct d'une variété k -rationnelle.

En fait, on ne connaît aucun exemple de variété rétracte k -rationnelle non facteur direct d'une variété k -rationnelle.

Remarque 7.6. — On suppose k infini. Le cas des tores permet de voir que tout élément de $\mathbf{G}(k)/R$ est annulé par l'ordre du groupe des automorphismes $A(\Phi)$ du système de racines absolu Φ de \mathbf{G} . En effet, le groupe $R\mathbf{G}(k)$ est Zariski-dense, ainsi tout élément de $\mathbf{G}(k)$ est R -équivalent à un élément semi-simple régulier. Par suite,

$$\mathbf{G}(k)/R = \bigcup \text{Im}(\mathbf{T}(k)/R \rightarrow \mathbf{G}(k)/R)$$

pour \mathbf{T} parcourant l'ensemble des k -tores maximaux de \mathbf{G} . Un tel tore est déployé par une $A(\Phi)$ -algèbre étale. On sait alors que $\sharp A(\Phi) \cdot \mathbf{T}(k)/R = 0$ par un argument de restriction-corestriction.

La commutativité de $\mathbf{G}(k)/R$ est connue dans les cas suivants.

THÉORÈME 7.7 ([13, 1.2], Chernousov-Merkurjev). — *Soit \mathbf{G} un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k -simple et classique (i.e. de type A, B, C, D non trialitaire). Alors le groupe $\mathbf{G}(k)/R$ est commutatif.*

Pour le type D , ce résultat est énoncé en caractéristique $\neq 2$ mais la remarque 7.4 montre qu'il vaut en général.

Enfin, la finitude 3) est connue pour les corps globaux [28] et pour quelques cas assez particuliers (théorème 2.14 et [4]).

7.3. Le groupe $\text{Spin}(q)$

Il s'agit de l'exemple nouveau le plus important concernant la R -équivalence, au sens qu'il va au-delà du problème de Kneser-Tits. On suppose ici que $\text{car}(k) \neq 2$. Soit

q une k -forme quadratique (non dégénérée). On rappelle que le groupe de Clifford pair $\Gamma^+(q)$ s'insère dans le diagramme commutatif [84, §9]

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \mathbf{Spin}(q) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(q) \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \Gamma^+(q) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(q) \rightarrow 1. \\
 & & \times 2 \downarrow & & \text{Ns} \downarrow & & \\
 & & \mathbf{G}_m & = & \mathbf{G}_m & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

La flèche Ns : $\Gamma^+(q) \rightarrow \mathbf{G}_m$ est la norme spinorielle, elle est scindée si et seulement si q est isotrope (e.g. [54, §6]). Si q est isotrope, on sait que $\mathbf{Spin}(q)$ est alors stablement k -rationnelle. En effet, $\mathbf{Spin}(q) \times \mathbf{G}_m$ est birationnellement équivalent à $\Gamma^+(q)$, lui-même stablement équivalent au groupe k -rationnel $\mathbf{SO}(q)$. Dans ce cas, $\mathbf{Spin}(q)$ est donc stablement k -rationnel (même k -rationnel [73]), et a fortiori W -trivial. Le cas intéressant est donc lorsque la forme quadratique q est anisotrope.

Le théorème 2.7 traite en fait aussi du groupe $\mathbf{Spin}(\varphi)$ pour une forme d'Albert φ associée à une algèbre de biquaternions D puisque l'on a alors l'isomorphisme exceptionnel $\mathbf{Spin}(\varphi) \cong \mathbf{SL}_1(D)$ [48, §16].

Notre but ici est d'énoncer le théorème de Chernousov-Merkurjev-Rost qui compare le groupe $\mathbf{Spin}(q)/R$ à la K -cohomologie de la quadrique projective \mathbf{X} définie par q [14]. On considère l'application suivante

$$\partial : \bigoplus_{x \in \mathbf{X}_{(1)}} K_2^M(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in \mathbf{X}_{(0)}} k(x)^\times$$

construite à partir du symbole modéré de Bass-Tate [33, §7.1] (où la notation $\mathbf{X}_{(i)}$ signifie l'ensemble des points de X de dimension i). Son conoyau est noté $A_0(\mathbf{X}, K_1) = \text{coker}(\partial)$. La quadrique \mathbf{X} étant propre, la norme

$$N : \bigoplus_{x \in \mathbf{X}_{(0)}} k(x)^\times \rightarrow k^\times$$

s'annule sur $\text{Im}(\partial)$. Ceci donne lieu à une application $A_0(\mathbf{X}, K_1) \rightarrow k^\times$ dont le noyau est noté $\overline{A}_0(\mathbf{X}, K_1)$.

Une grande partie du travail est de définir la flèche de Rost $\rho : \Gamma^+(q)(k) \rightarrow A_0(\mathbf{X}, K_1)$ au moyen de la norme spinorielle. En effet, le groupe $\Gamma^+(q)(k)$ est le

sous-groupe du groupe $\mathbf{C}(q)^\times$ (i.e. le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford de q) engendré par les produits pairs de vecteurs anisotropes v . Le candidat pour ρ est alors donné par

$$\rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{2m}) = [(\cdots, q(v_i), \cdots)] \in A_0(\mathbf{X}, K_1)$$

avec $q(v_i)$ placé en $[v_i]$. La démonstration de Rost [80] [42] de l'existence de ρ est fondée sur une réduction au cas d'une forme de degré 3, celle de Chernousov-Merkurjev est tout à fait différente et nécessite une marche d'approche assez longue [13], [14]. En outre le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^+(q)(k) & \xrightarrow{\rho} & A_0(\mathbf{X}, K_1) \\ \text{Ns} \downarrow & & \text{N} \downarrow \\ k^\times & = & k^\times \end{array}$$

commute, induisant un invariant $\bar{\rho} : \mathbf{Spin}(q)(k) \rightarrow \bar{A}_0(\mathbf{X}, K_1)$.

THÉORÈME 7.8 (Chernousov-Merkurjev-Rost [14]). — *L'invariant $\bar{\rho}$ induit un isomorphisme*

$$\bar{\rho} : \mathbf{Spin}(q)(k)/R \xrightarrow{\sim} \bar{A}_0(\mathbf{X}, K_1).$$

En général, ces groupes ne sont pas R -triviaux [55, 9.2]. Le théorème est appliqué à travers le corollaire suivant, qui n'utilise que la surjectivité de l'invariant précédent.

COROLLAIRE 7.9. — *Si $\mathbf{Spin}(q)$ est une variété stablement k -rationnelle, alors $\bar{A}_0(\mathbf{X}, K_1) = 0$.*

Le groupe $\mathbf{Spin}(q)$ est stablement k -rationnel dans les cas suivants [55, 6.4].

THÉORÈME 7.10. — *Supposons que q soit une voisine de Pfister (i.e. une sous-forme d'une forme de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ de dimension $> 2^{n-1}$). Soit p une k -forme quadratique de rang au plus 2. Alors pour la forme quadratique $q \perp p$, on a $\mathbf{Spin}(q \perp p)(k)/R = \bar{A}_0(\mathbf{X}_{q \perp p}, K_1) = 0$.*

L'annulation du groupe $\bar{A}_0(\mathbf{X}, K_1)$ pour certaines quadriques est un ingrédient essentiel dans la preuve de Voevodsky de la conjecture de Milnor [100] [42]. Enfin, il est à noter que les questions 2) et 3) ci-dessus (7.5) sont ouvertes pour $\mathbf{Spin}(q)$.

8. LE PROBLÈME DE KNESER-TITS SUR CERTAINS CORPS

8.1. Corps globaux

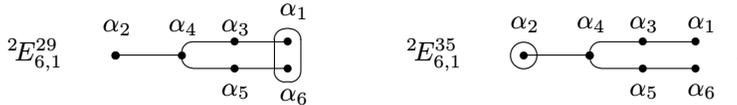
THÉORÈME 8.1. — *Soient F un corps global et \mathbf{G}/F un groupe semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope. Alors $W(F, \mathbf{G}) = 1$ et $\mathbf{G}(F)$ est projectivement simple.*

Démonstration. — Les réductions usuelles (§3.1) permettent de supposer \mathbf{G}/F absolument presque simple. Pour une synthèse sur le cas des groupes classiques, nous renvoyons à [75, §7.2]. On se concentre donc sur les groupes exceptionnels. Selon la réduction 3.3, on peut supposer que \mathbf{G} est un groupe exceptionnel de rang relatif 1, ce qui écarte d'emblée le type G_2 et le cas 1E_6 , i.e. les groupes de type E_6 intérieurs. De plus, sur le corps global F , les tables d'indices de Tits [97] montrent que le type de \mathbf{G} n'est ni E_7 , ni E_8 .

Type F_4 : c'est un résultat de Jacobson [37] en caractéristique $\neq 2, 3$ complété par Tits dans le cas général [98, 4.4.3].

Groupes trialitys, i.e. de type ${}^{3,6}D_4$: il s'agit du résultat de Prasad-Ragunathan ([78, theorem 6.1] et §6.1).

Type 2E_6 : on retrouve les deux cas de l'introduction, i.e.



Pour le cas ${}^2E_{6,1}^{29}$, c'est un cas particulier du théorème 6.2 de Garibaldi. Dans le cas ${}^2E_{6,1}^{35}$, Chernousov et Timoshenko ont montré que $\mathbf{G}(F)/R = 1$ [16, 2.12]. Le théorème 7.2 permet de conclure que $W(F, \mathbf{G}) = 1$. □

Remarque 8.2. — La démonstration repose en grande partie sur la classification des groupes semi-simples sur les corps globaux. Les groupes discutés dans la démonstration sont en fait W -triviaux pour les indices de Tits $F_{4,1}^{2,1}$, ${}^{3,6}D_{4,1}^9$ et ${}^2E_{6,1}^{29}$. On ignore si c'est le cas pour les groupes d'indices ${}^2E_{6,1}^{35}$.

Ce résultat permet la réactualisation de la liste pour la R -équivalence.

THÉORÈME 8.3. — *Soient F un corps global et \mathbf{G}/F un groupe semi-simple simplement connexe presque simple. On suppose que \mathbf{G} n'est pas anisotrope de type E_6 . Alors $\mathbf{G}(F)/R = 1$.*

Démonstration. — On peut supposer \mathbf{G} anisotrope et absolument presque F -simple. On commence par le type A .

Type A : si \mathbf{G} est de type 1A_n , alors $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_1(D)$ et on sait que $\mathbf{G}(F)/R = SK_1(D) = 0$. Si \mathbf{G} est de type 2A_n , alors il existe une extension quadratique séparable L/F , une algèbre simple centrale à division D/L munie d'une involution de seconde espèce τ , un D -espace vectoriel (à droite) V et une forme hermitienne h sur V telle que $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(V, h)$. Suivant [13, theorem 6.4], $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(V, h)$ et $\mathbf{G} = \mathbf{SU}(V', h')$ sont stablement F -birationnels. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que h est isotrope, c'est-à-dire que \mathbf{G} est isotrope. Le théorème 8.1 permet de conclure que $\mathbf{G}(F)/R = 1$.

Pour les autres types, l'anisotropie de \mathbf{G} impose que F est un corps de nombres. Suivant [79, th.5 et 9.7], on sait que si \mathbf{G} est de type $B, C, {}^{1,2}D, E_7, E_8, F_4$ ou G_2 , alors $\mathbf{G}(F)$ est un groupe projectivement simple et donc $\mathbf{G}(F)/R = 1$. Il reste donc les groupes trialityraires ${}^{3,4}D_6$ et les groupes de type ${}^{1,2}E_6$, exclus par hypothèse.

Type ${}^{3,6}D_4$: la trivialité de $\mathbf{G}(F)/R$ est un résultat de Chernousov-Timoshenko [16, théorème 3.1]. □

8.2. Corps de dimension cohomologique 2

On suppose k parfait et de dimension cohomologique ≤ 2 , c'est-à-dire que $H^i(k, A) = 0$ pour tout module galoisien fini A et pour tout $i \geq 3$. Selon la conjecture II de Serre [86, III.3.1], on a $H^1(k, \mathbf{G}) = 1$ pour tout k -groupe semi-simple simplement connexe \mathbf{G} . Ceci produit alors une classification des groupes semi-simples [32]. De façon plus précise, si \mathbf{G} est un groupe semi-simple simplement connexe, on note \mathbf{G}^{qd} sa forme quasi-déployée [48, 31.4] et μ son centre. On dispose alors de la classe de Tits $t_{\mathbf{G}} \in H^2(k, \mu)$ qui est un invariant de \mathbf{G} [48, 31.6]. Si la conjecture II vaut pour k et pour \mathbf{G} , le groupe \mathbf{G} est classifié par \mathbf{G}^{qd} et $t_{\mathbf{G}}$, c'est-à-dire par sa forme quasi-déployée et sa classe de Tits.

Pour les groupes $\mathbf{SL}_1(D)$, la conjecture II signifie que $\text{Nrd}(D^\times) = k^\times$, i.e. la norme réduite est surjective, ce qui est un théorème de Merkurjev-Suslin [91, 24.8]. Pour les groupes classiques (et de type G_2, F_4), la conjecture II a été démontrée par Bayer-Parimala [3] et on dispose de résultats partiels pour les autres groupes exceptionnels [29], [12]. Revenons au problème de Kneser-Tits.

THÉORÈME 8.4 (Yanchevskiĭ, 1975, [39] et [38, th. 1]). — *Le corps k est supposé parfait et de dimension cohomologique ≤ 2 .*

1. Si A/k est une algèbre simple centrale, alors $SK_1(A) = 0$.
2. Si \mathbf{G} est un groupe semi-simple simplement connexe isotrope de type 2A_n , alors $W(k, \mathbf{G}) = 1$.

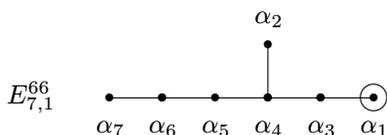
Ce résultat a été étendu par le même auteur lorsque le corps k est virtuellement de dimension cohomologique ≤ 2 , i.e. $cd(k(\sqrt{-1})) \leq 2$ [108, §3].

QUESTION 8.5. — *Le corps k étant comme ci-dessus, est-ce que $W(k, \mathbf{G}) = 1$ pour tout k -groupe \mathbf{G} semi-simple simplement connexe presque simple et isotrope ?*

Plus généralement, est-ce que $\mathbf{G}(k)/R = 1$ pour tout k -groupe \mathbf{G} semi-simple simplement connexe presque simple ?

Il ne reste alors ici qu'un seul cas pour le problème de Kneser-Tits.

THÉORÈME 8.6. — *Soit k un corps de caractéristique nulle de dimension cohomologique ≤ 2 . Soit \mathbf{G}/k un groupe semi-simple simple simplement connexe absolument presque k -simple et isotrope. On suppose que l'indice de Tits de \mathbf{G} est distinct de*



Alors $W(k, \mathbf{G}) = 1$.

Démonstration. — Comme dans le cas des corps globaux, on peut supposer \mathbf{G} de rang relatif un et faire une discussion cas par cas qui écarte d'emblée le type G_2 et le type 1E_6 . Le type A est le théorème 8.4, les types B et C , ${}^{3,6}D_4$ et F_4 résultent du théorème 6.1. Sur k de dimension cohomologique 2, on sait qu'un groupe isotrope de type E_8 est déployé; cela résulte de la conjecture II de Serre prouvée pour tous les autres groupes déployés [29], [12]. Il reste donc à traiter les types ${}^{1,2}D_n$, 2E_6 et E_7 .

Type ${}^{1,2}D_n$: on sait que $\mathbf{G} = \mathbf{Spin}(A, \sigma)$ où A est une algèbre simple centrale de degré $2n$ et σ une involution orthogonale. On note \mathbf{H} le sous-groupe de $\mathbf{GL}_1(A) \times \mathbf{G}_m$ formé des (a, x) satisfaisant $\text{Nrd}(a) = x^2$. Suivant [55, prop. 8.3], \mathbf{G} étant isotrope, on dispose d'un isomorphisme de groupes $\mathbf{H}(F)/R \cong \mathbf{G}(F)/R$ pour tout corps F/k . On est donc ramené à montrer que $\mathbf{H}(k)/R = 1$. On a une suite exacte $1 \rightarrow \mathbf{SL}_1(A) \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}_m \rightarrow 1$. Suivant [8, appendix], cette suite induit une suite exacte

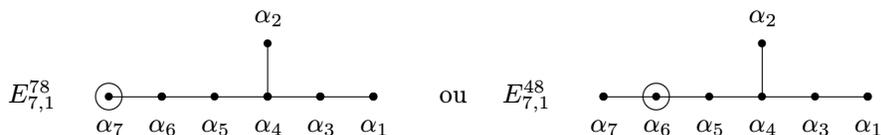
$$\mathbf{SL}_1(A)(k)/R \rightarrow \mathbf{H}(k)/R \rightarrow \mathbf{G}_m(k)/R \rightarrow 1.$$

Le terme de gauche est nul suivant le théorème 8.4 et le terme de droite est trivialement nul. On conclut que $\mathbf{H}(k)/R = 1$.

Type 2E_6 : si \mathbf{G} est d'indice de Tits ${}^2E_{6,1}^{29}$, alors on applique le théorème 6.2. On peut donc supposer que \mathbf{G} est d'indice de Tits ${}^2E_{6,1}^{35}$. Nous prétendons que cet indice est exclu. La classe de Tits $t_{\mathbf{G}} \in H^2(k, \mu_3)$ est représentée par une algèbre simple centrale A de degré 27, l'algèbre de Tits de \mathbf{G} . Suivant [58, table 8A page 156],

l'isotropie de \mathbf{G} implique $\text{ind}_k(A) = 1$ ou 3 . Suivant [29, th. 4 et 9], le groupe \mathbf{G} est de rang relatif ≥ 2 , contradiction.

Type E_7 : excluant par hypothèse l'indice de Tits $E_{7,1}^{66}$, on peut supposer que \mathbf{G} est d'indice de Tits⁽²⁾



Ces indices sont en fait exclus, et l'argument est le même que pour 2E_6 . Notant A l'algèbre de Tits de \mathbf{G} , celle-ci est d'indice 1 ou 2 selon [58, table 8B page 166]. Alors \mathbf{G} est de rang relatif ≥ 4 suivant [29, th. 4 et 10]. \square

Sous une hypothèse additionnelle sur les k -algèbres simples centrales, on peut contrôler non seulement le groupe de Whitehead, mais aussi la R -équivalence suivant les investigations de Colliot-Thélène, Parimala et du rapporteur.

THÉORÈME 8.7 ([19, th. 4.3]). — *On suppose k de caractéristique nulle et de dimension cohomologique ≤ 2 . On suppose que, pour toute extension finie k'/k et pour toute k' -algèbre simple centrale de période 2^α ou 3^β (i.e. l'exposant dans le groupe de Brauer), son indice est égal à sa période. Soit \mathbf{G} un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque simple de type distinct de A_n et de E_8 . Alors \mathbf{G} est un groupe isotrope, est une variété k -rationnelle et \mathbf{G} est W -trivial.*

THÉORÈME 8.8 ([19, th. 4.5]). — *Sous les hypothèses du théorème 8.7, soit \mathbf{G}/k un groupe semi-simple simplement connexe sans facteurs de type E_8 . Alors $\mathbf{G}(k)/R = 1$.*

Remarque 8.9. — En étant plus optimiste, on peut poser la même question que (8.5) en dimension cohomologique ≤ 3 . Pour le cas $\mathbf{SL}_n(D)$, cette question est due à Suslin (voir [18]). Les contre-exemples de Platonov étant sur des corps de dimension cohomologique quatre, on ne peut certainement pas espérer plus.

8.3. Corps C_2

Nous nous intéressons maintenant au cas où k satisfait la propriété C_2 , c'est-à-dire que, pour tout système (f_1, \dots, f_r) de polynômes homogènes à n variables, avec $n > \deg(f_1)^2 + \dots + \deg(f_r)^2$, il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \setminus \{0\}$ tel que $f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0$ [69, §5]. En particulier, toute k -forme quadratique de rang ≥ 5 est isotrope. La théorie de Tsen-Lang montre que les corps de fonctions de surfaces sur un corps algébriquement clos sont de classe C_2 (*ibid.*).

⁽²⁾ Le second type avait été oublié dans la version distribuée.

Supposons k de caractéristique nulle. Suivant Merkurjev-Suslin, on sait alors que le corps k de classe C_2 est un corps de dimension cohomologique ≤ 2 [86, II.4.5].

La propriété C_2 est nettement plus forte que la propriété $\dim(k) \leq 2$. Tout d'abord, un corps p -adique n'est pas C_2 [95], même si toute forme quadratique de rang ≥ 5 est isotrope. Une autre classe de contre-exemples est celle construite par Merkurjev ; pour tout entier $n \geq 1$, il existe un corps de dimension cohomologique 2 avec une forme anisotrope de dimension $2n$ [53, th. 3].

Sous l'hypothèse C_2 , pour toute extension finie k'/k , les k' -algèbres simples centrales de périodes 2^α ou 3^β sont d'indice égal à leur exposant (Artin, [2]). Les théorèmes 8.7 et 8.8 donnent donc une réponse complète au problème de Kneser-Tits dans ce cas.

8.4. Corps de fonctions de surfaces

On suppose que $k = k_0(X)$ est le corps de fonctions d'une surface sur un corps k_0 algébriquement clos (de caractéristique arbitraire), c'est un corps C_2 . J. de Jong, X. He et J. Starr ont annoncé en mai 2007 la preuve complète de la conjecture II de Serre pour ces corps [41]. Ceci permet de s'affranchir du cas de E_8 .

COROLLAIRE 8.10. — *On suppose que $k = k_0(X)$ comme ci-dessus. Soit \mathbf{G}/k un groupe semi-simple simplement connexe presque simple.*

1. $\mathbf{G}(k)/R = 1$.
2. Si \mathbf{G} n'est pas de type A , alors \mathbf{G} est isotrope, est une variété k -rationnelle et \mathbf{G} est W -trivial.

RÉFÉRENCES

- [1] Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.É.S., 1963-1964, Schémas en groupes – (M. Demazure & A. Grothendieck, éd.), *Lecture Notes in Math.*, vol. 151–153, Springer, 1970.
- [2] M. ARTIN – Brauer-Severi varieties, in *Brauer groups in ring theory and algebraic geometry (Wilrijk, 1981)*, *Lecture Notes in Math.* **917** (1982), p. 194–210.
- [3] E. BAYER-FLUCKIGER & R. PARIMALA – Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2 , *Invent. Math.* **122** (1995), p. 195–229.
- [4] G. BERHUY – Finiteness of R -equivalence groups of some adjoint classical groups of type 2D_3 , *J. Algebra* **309** (2007), p. 360–366.
- [5] A. BOREL – *Linear algebraic groups*, 2^e éd., Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer, 1991.

- [6] A. BOREL & J. TITS – Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.É.S.* **27** (1965), p. 55–150.
- [7] ———, Homomorphismes “abstrait” de groupes algébriques simples, *Ann. of Math.* **97** (1973), p. 499–571.
- [8] M. BOROVI, B. KUNYAVSKIĪ & P. GILLE – Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields, *J. Algebra* **276** (2004), p. 292–339.
- [9] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative, chapitres 5 à 7*, Masson, 1985, réimpression Springer, 2007.
- [10] F. BRUHAT & J. TITS – Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.É.S.* **60** (1984), p. 197–376.
- [11] B. CALMÈS – The group SK_2 of a biquaternion algebra, *J. reine angew. Math.* **605** (2007), p. 193–235.
- [12] V. CHERNOUSOV – The kernel of the Rost invariant, Serre’s conjecture II and the Hasse principle for quasi-split groups ${}^{3,6}D_4, E_6, E_7$, *Math. Ann.* **326** (2003), p. 297–330.
- [13] V. CHERNOUSOV & A. MERKURJEV – R -equivalence and special unitary groups, *J. Algebra* **209** (1998), p. 175–198.
- [14] ———, R -equivalence in spinor groups, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 509–534.
- [15] V. CHERNOUSOV & V. PLATONOV – The rationality problem for semisimple group varieties, *J. reine angew. Math.* **504** (1998), p. 1–28.
- [16] V. CHERNOUSOV & L. M. TIMOSHENKO – On the group of R -equivalence classes of semisimple groups over arithmetic fields, *Algebra i Analiz* **11** (1999), p. 191–221 ; traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.* **11** (2000), 1097–1121.
- [17] C. CHEVALLEY – Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.* **7** (1955), p. 14–66.
- [18] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – Quelques résultats de finitude pour le groupe SK_1 d’une algèbre de biquaternions, *K-Theory* **10** (1996), p. 31–48.
- [19] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, P. GILLE & R. PARIMALA – Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, *Duke Math. J.* **121** (2004), p. 285–341.
- [20] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE & J.-J. SANSUC – La R -équivalence sur les tores, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **10** (1977), p. 175–229.
- [21] ———, Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications, *J. Algebra* **106** (1987), p. 148–205.

- [22] ———, The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group), in *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., 2007, p. 113–186.
- [23] J. DIEUDONNÉ – *Sur les groupes classiques*, Hermann, 1973, 3^e édition revue et corrigée, Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, VI, Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1040.
- [24] P. DRAXL – SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiscohomologie abelscher Körpererweiterungen, *J. reine angew. Math.* **293/294** (1977), p. 116–142.
- [25] ———, *Skew fields*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 81, Cambridge Univ. Press, 1983.
- [26] S. GARIBALDI – Kneser-Tits for a rank 1 form of E_6 (after Veldkamp), *Compos. Math.* **143** (2007), p. 191–200.
- [27] S. GARIBALDI & H. P. PETERSSON – Groups of outer type E_6 with trivial Tits algebras, *Transform. Groups* **12** (2007), p. 443–474.
- [28] P. GILLE – La R -équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, *Publ. Math. I.H.É.S.* **86** (1997), p. 199–235.
- [29] ———, Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2 , *Compositio Math.* **125** (2001), p. 283–325.
- [30] ———, Unipotent subgroups of reductive groups in characteristic $p > 0$, *Duke Math. J.* **114** (2002), p. 307–328.
- [31] ———, Spécialisation de la R -équivalence pour les groupes réductifs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), p. 4465–4474.
- [32] ———, Serre’s conjecture II : a survey, à paraître dans les actes de la conférence « Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology » (2009), University of Hyderabad, *Developments in Mathematics*, Springer.
- [33] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 101, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [34] A. GROTHENDIECK – Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I, *Publ. Math. I.H.É.S.* **20** (1964), p. 5–259.
- [35] G. HARDER – Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen, *Invent. Math.* **4** (1967), p. 165–191.
- [36] K. IWASAWA – Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **17** (1941), p. 57–59.
- [37] N. JACOBSON – Some groups of transformations defined by Jordan algebras. II. Groups of type F_4 , *J. reine angew. Math.* **204** (1960), p. 74–98.

- [38] V. I. JANČEVSKIĀ – Simple algebras with involutions, and unitary groups, *Mat. Sb. (N.S.)* **93 (135)** (1974), p. 368–380, 487 ; traduction anglaise : *Sb. Math.* **22** (1974), 372–385.
- [39] ———, Commutants of simple algebras with a surjective reduced norm, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975), p. 1056–1058.
- [40] ———, Reduced unitary K -theory. Applications to algebraic groups, *Mat. Sb. (N.S.)* **110 (152)** (1979), p. 579–596.
- [41] A. J. DE JONG, X. HE & J. M. STARR – Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups, prépublication, 2008.
- [42] B. KAHN – La conjecture de Milnor (d’après V. Voevodsky), Séminaire Bourbaki, vol. 1996/97, exposé n° 834, *Astérisque* **245** (1997), p. 379–418.
- [43] ———, Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties, in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, p. 149–174.
- [44] ———, Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras, notes, http://www.institut.math.jussieu.fr/~kahn/preprints/SK_i-talca.pdf, 2002.
- [45] B. KAHN & M. LEVINE – Motives of Azumaya algebras, prépublication, 2007.
- [46] K. KATO & S. SAITO – Unramified class field theory of arithmetical surfaces, *Ann. of Math.* **118** (1983), p. 241–275.
- [47] M. KNESER – Starke Approximation in algebraischen Gruppen. I, *J. reine angew. Math.* **218** (1965), p. 190–203.
- [48] M.-A. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST & J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998.
- [49] Y. I. MANIN – *Cubic forms*, North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., 1986.
- [50] B. MARGAUX – The structure of the group $\mathbf{G}(k[t])$: Variations on a theme of Soulé, à paraître dans *Algebra Number Theory*, 2009.
- [51] C. MAZZA, V. VOEVODSKY & C. WEIBEL – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, Amer. Math. Soc., 2006.
- [52] A. MERKURJEV – Generic element in SK_1 for simple algebras, *K-Theory* **7** (1993), p. 1–3.
- [53] ———, K -theory of simple algebras, in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 65–83.
- [54] ———, The norm principle for algebraic groups, *Algebra i Analiz* **7** (1995), p. 77–105 ; traduction anglaise : *St. Petersburg Math. J.* **7** (1996), 236–264.

- [55] ———, K -theory and algebraic groups, in *European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996)*, Progr. Math., vol. 169, Birkhäuser, 1998, p. 43–72.
- [56] ———, Invariants of algebraic groups, *J. reine angew. Math.* **508** (1999), p. 127–156.
- [57] ———, The group SK_1 for simple algebras, *K-Theory* **37** (2006), p. 311–319.
- [58] A. MERKURJEV, I. A. PANIN & A. R. WADSWORTH – Index reduction formulas for twisted flag varieties. II, *K-Theory* **14** (1998), p. 101–196.
- [59] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton Univ. Press, 1980.
- [60] A. P. MONASTYRNYĪ – Spinor quotient groups and R -equivalence, *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **35** (1991), p. 9–13, 92.
- [61] ———, Whitehead groups and the kernel of a universal covering, *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **35** (1991), p. 969–974, 1052.
- [62] A. P. MONASTYRNYĪ & V. I. YANCHEVSKIĪ – On the Whitehead groups and the Kneser-Tits conjecture for spinor groups, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **307** (1989), p. 31–35; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **40** (1990), 23–27.
- [63] ———, Whitehead groups of algebraic groups of classical type, and R -equivalence, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **314** (1990), p. 110–114; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **42** (1991), 351–355.
- [64] ———, Whitehead groups of spinor groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54** (1990), p. 60–96, 221; traduction anglaise : *Math. USSR Izv.* **36** (1991), 61–100.
- [65] ———, The Whitehead groups of algebraic groups and applications to some problems of algebraic group theory, in *Algebra and analysis (Irkutsk, 1989)*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 163, Amer. Math. Soc., 1995, p. 127–134.
- [66] F. MOREL – An introduction to \mathbb{A}^1 -homotopy theory, in *Contemporary developments in algebraic K-theory*, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, p. 357–441.
- [67] F. MOREL & V. VOEVODSKY – \mathbb{A}^1 -homotopy theory of schemes, *Publ. Math. I.H.É.S.* **90** (1999), p. 45–143.
- [68] H. NAGAO – On $GL(2, K[x])$, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A* **10** (1959), p. 117–121.
- [69] A. PFISTER – *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [70] V. PLATONOV – The problem of strong approximation and the Kneser-Tits hypothesis for algebraic groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **33** (1969), p. 1211–1219; traduction anglaise : *Math. USSR Izv.* **3** (1969), 1139–1147.

- [71] ———, On the Tannaka-Artin problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **221** (1975), p. 1038–1041; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **16** (1975), 468–471.
- [72] ———, The Tannaka-Artin problem, and groups of projective conorms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **222** (1975), p. 1299–1302.
- [73] ———, On the problem of the rationality of spin varieties, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **248** (1979), p. 524–527; traduction anglaise : *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 1027–1031.
- [74] ———, Birational properties of the reduced Whitehead group, *AMS Translations* **154** (1992), p. 7–9.
- [75] V. PLATONOV & A. RAPINCHUK – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., 1994.
- [76] V. PLATONOV & V. I. YANCHEVSKIĬ – Dieudonné’s conjecture on the structure of unitary groups over a skew-field and Hermitian K -theory, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **48** (1984), p. 1266–1294.
- [77] G. PRASAD – Strong approximation for semi-simple groups over function fields, *Ann. of Math.* **105** (1977), p. 553–572.
- [78] ———, On the Kneser-Tits problem for triality forms, *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), p. 913–925.
- [79] G. PRASAD & M. S. RAGHUNATHAN – On the Kneser-Tits problem, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), p. 107–121.
- [80] M. ROST – On the spinor norm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics, prépublication <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rost/spinor.html>, 1988.
- [81] ———, Chow groups with coefficients, *Doc. Math.* **1** (1996), p. 319–393.
- [82] ———, On the basic correspondence of a splitting variety, prépublication <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rost/basic-corr.html>, 2007.
- [83] D. J. SALTMAN – Retract rational fields and cyclic Galois extensions, *Israel J. Math.* **47** (1984), p. 165–215.
- [84] W. SCHARLAU – *Quadratic and Hermitian forms*, Grund. Math. Wiss., vol. 270, Springer, 1985.
- [85] J-P. SERRE – Arbres, amalgames, SL_2 , *Astérisque* **46** (1977).
- [86] ———, Cohomologie galoisienne, *Lecture Notes in Math.* **5** (1997).
- [87] C. SOULÉ – Chevalley groups over polynomial rings, in *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 36, Cambridge Univ. Press, 1979, p. 359–367.
- [88] T. A. SPRINGER & R. STEINBERG – Conjugacy classes, in *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1968/69)*, Lecture Notes in Math., vol. 131, Springer, 1970, p. 167–266.

- [89] R. STEINBERG – *Lectures on Chevalley groups, notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson*, Yale University, New Haven, Conn., 1968.
- [90] A. SUSLIN – Algebraic K -theory and the norm-residue homomorphism, *Journal of Math. Sciences* **30** (1985), p. 2556–2611.
- [91] ———, SK_1 of division algebras and Galois cohomology, in *Algebraic K-theory*, Adv. Soviet Math., vol. 4, Amer. Math. Soc., 1991, p. 75–99.
- [92] ———, SK_1 of division algebras and Galois cohomology revisited, in *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 219, Amer. Math. Soc., 2006, p. 125–147.
- [93] A. SUSLIN & S. JOUKHOVITSKI – Norm varieties, *J. Pure Appl. Algebra* **206** (2006), p. 245–276.
- [94] R. G. SWAN – Higher algebraic K -theory, in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 247–293.
- [95] G. TERJANIAN – Un contre-exemple à une conjecture d’Artin, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **262** (1966), p. A612.
- [96] J. TITS – Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 313–329.
- [97] ———, Classification of algebraic semisimple groups, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, Amer. Math. Soc., 1966, p. 33–62.
- [98] ———, Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps (d’après V. P. Platonov et al.), Séminaire Bourbaki, vol. 1976/77, exposé n° 505, *Lecture Notes in Math.* **677** (1978), p. 218–236.
- [99] F. D. VELDKAMP – Unitary groups in projective octave planes, *Compositio Math.* **19** (1968), p. 213–258.
- [100] V. VOEVODSKY – Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$ -coefficients, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), p. 59–104.
- [101] ———, Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$ -coefficients, K -theory, Preprint Archives, No. 639, 2003.
- [102] V. E. VOSKRESENSKIĬ – The reduced Whitehead group of a simple algebra, *Uspehi Mat. Nauk* **32** (1977), p. 247–248.
- [103] ———, *Algebraic groups and their birational invariants*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 179, Amer. Math. Soc., 1998.
- [104] A. R. WADSWORTH – Valuation theory on finite dimensional division algebras, in *Valuation theory and its applications, Vol. I (Saskatoon, SK, 1999)*, Fields Inst. Commun., vol. 32, Amer. Math. Soc., 2002, p. 385–449.

- [105] S. WANG – On the commutator group of a simple algebra, *Amer. J. Math.* **72** (1950), p. 323–334.
- [106] C. WEIBEL – Patching the norm residue isomorphism theorem, prépublication, 2007.
- [107] A. WEIL – *Foundations of algebraic geometry*, Amer. Math. Soc., 1962.
- [108] V. I. YANCHEVSKIĪ – Whitehead groups and groups of R -equivalence classes of linear algebraic groups of non-commutative classical type over some virtual fields, in *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., 2004, p. 491–505.

Philippe GILLE

École normale supérieure

Département de Mathématiques et Applications

UMR CNRS 8553

45 rue d'Ulm

F-75230 Paris Cedex 05

E-mail : `gille@ens.fr`

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(984) *Covolume des groupes S -arithmétiques
et faux plans projectifs*

Bertrand RÉMY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**COVOLUME DES GROUPES S -ARITHMÉTIQUES
ET FAUX PLANS PROJECTIFS**
[d'après Mumford, Prasad, Klingler, Yeung, Prasad-Yeung]

par **Bertrand RÉMY**

À la fin des années 1980, G. Prasad a mis en évidence une formule calculant le covolume (convenablement normalisé) d'un groupe S -arithmétique dans le groupe topologique (produit de groupes algébriques) qui le contient naturellement [49]. Il y a un peu plus d'un an, G. Prasad et S.K. Yeung ont prouvé que les possibilités de construction de faux plans projectifs (des surfaces de type général définies par des conditions topologiques simples) étaient extrêmement restreintes, tout en exhibant de nouveaux exemples [50]. Le but de cet exposé est d'expliquer le lien entre ces deux résultats et de faire un résumé succinct de chacune de leurs preuves. Autrement dit, c'est l'occasion d'aborder des mathématiques assez variées : groupes algébriques sur les corps locaux, géométrie complexe, arithmétique des corps de nombres... ayant néanmoins toutes un rapport avec les sous-groupes discrets des groupes de Lie, ou les généralisations obtenues en considérant le groupe fondamental de variétés particulières. On revient notamment sur la formule de G. Prasad, publiée peu de temps après le calcul des nombres de Tamagawa des groupes réductifs sur les corps de nombres [35]. On évoque aussi des problèmes encore ouverts en matière de réseaux de groupes de Lie [37, Appendix C], ainsi que d'autres résultats de finitude et de comptage, concernant par exemple le nombre de classes des groupes algébriques sur les corps globaux et le comptage asymptotique (suivant le volume) des variétés couvertes par un espace symétrique donné.

Commençons par les considérations géométriques. Un *faux plan projectif* est une surface analytique complexe lisse, compacte et avec les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, mais non homéomorphe à celui-ci. Des arguments classiques permettent de voir qu'un faux plan projectif est une variété projective (2.1). En outre, les travaux de S.-T. Yau sur les métriques de Kähler-Einstein permettent de voir que c'est aussi une variété localement symétrique (le revêtement universel est la boule hyperbolique complexe). Les faux plans projectifs existent : D. Mumford a construit le premier exemple par uniformisation non archimédienne (3.5) ; ils sont en nombre fini : on peut

le déduire d'arguments de rigidité (2.2). Soit donc X une telle surface. Le groupe fondamental Γ de X est un sous-groupe discret, cocompact et sans torsion de $\mathrm{PU}(2, 1)$. Le lien entre la formule de covolume des groupes S -arithmétiques (1.2) et les faux plans projectifs est bien sûr fourni par Γ . Encore faut-il savoir que c'est un groupe arithmétique. Ceci signifie, en gros, qu'on peut le voir comme un groupe de matrices à coefficients dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres. C'est un problème difficile, qui a été résolu il y a peu par B. Klingler et S.K. Yeung, indépendamment (voir le théorème 2.9 pour une mise en contexte).

THÉORÈME 0.1 (B. Klingler [34] et S.K. Yeung [71]). — *Les faux plans projectifs sont des quotients arithmétiques de la boule hyperbolique complexe $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$.*

La réduction de ce résultat d'arithmécité à la preuve de résultats de super-rigidité est classique, et due à G.A. Margulis. La *super-rigidité*, pour une classe d'homomorphismes d'un sous-groupe discret donné (contenu dans un groupe algébrique donné) vers des groupes de Lie simples, est le phénomène selon lequel tout homomorphisme dans cette classe ou bien est d'image relativement compacte, ou bien s'étend en un homomorphisme de groupes algébriques. Les démonstrations de super-rigidité pour le théorème ci-dessus utilisent la notion d'application harmonique qui a été présentée par P. Pansu dans un précédent séminaire Bourbaki [45]. B. Klingler et S.K. Yeung doivent utiliser de récents développements dans lesquels les espaces d'arrivée des applications harmoniques sont des complexes simpliciaux. Ici les espaces singuliers en question sont des immeubles de Bruhat-Tits, c'est-à-dire des analogues d'espaces symétriques pour les groupes de Lie semi-simples non archimédiens.

Passons au volume des quotients de groupes algébriques par des sous-groupes discrets. Un problème proche est celui du calcul des nombres de Tamagawa [69] : il porte sur les quotients de groupes adéliques. Nous nous intéressons au problème analogue, mais avec un groupe ambiant qui est un produit fini de groupes de points rationnels d'un groupe algébrique sur un corps global. Précisément, soit \mathbf{G} un groupe algébrique défini sur un corps de nombres k . On note V_f (resp. V_∞) l'ensemble des places finies (resp. infinies) de k et $G_S = \prod_{v \in V_S} \mathbf{G}(k_v)$ le produit des points de \mathbf{G} aux places $v \in S$, pour S une partie finie de places telle que $V_\infty \subseteq S$. On suppose que \mathbf{G} est *absolument presque simple*, i.e. $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ n'a pas de sous-groupe normal non trivial, fermé et connexe pour la topologie de Zariski. Pour chaque $v \notin S$, la théorie de Bruhat-Tits distingue une famille de sous-groupes compacts et ouverts, les sous-groupes parahoriques, qui possèdent de bonnes propriétés combinatoires (1.1). Un sous-groupe *S -arithmétique principal* de G_S est par définition la projection dans G_S d'un groupe $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \notin S} P_v$ pour une famille $(P_v)_{v \notin S}$ de sous-groupes parahoriques $P_v \subset \mathbf{G}(k_v)$ telle que $G_S \times \prod_{v \notin S} P_v$ soit ouvert dans le groupe adélique $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$.

THÉORÈME 0.2 (G. Prasad [49]). — *On suppose que le k -groupe algébrique \mathbf{G} est simplement connexe. Alors, pour une normalisation convenable des mesures de Haar, il existe une formule explicite pour le volume du quotient de G_S par un sous-groupe S -arithmétique principal.*

Cette formule, qui est valide aussi pour les corps de fonctions (voir le théorème 1.1 pour les détails techniques), est un produit de cinq facteurs. Tous ces facteurs sont de nature arithmétique (via les valeurs absolues des discriminants de k et d'une extension de déploiement, ou les nombres de Tamagawa) ou relèvent de la théorie de Lie (via divers systèmes de racines liés à \mathbf{G}). L'un d'eux est un produit infini indexé par les $v \notin S$, dont les facteurs sont liés au volume des sous-groupes parahoriques ; il peut s'interpréter en termes de fonctions ζ et de fonctions L d'extensions du corps de base k . C'est le facteur le plus intéressant et le plus difficile à appréhender ; dans le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_2$ et $k = \mathbf{Q}$, il vaut $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Le comptage des faux plans projectifs utilise les deux théorèmes déjà cités. Le lien entre ces surfaces complexes et la théorie de Lie est une formule de Gauss-Bonnet mise en évidence par J.-P. Serre dans le cadre général des variétés localement symétriques [58] : la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface peut être interprétée comme le covolume (convenablement normalisé) du groupe fondamental dans le groupe des isométries du revêtement universel. Il s'agit donc de compter les corps de nombres k et les k -groupes algébriques dont les points aux places réelles sont des groupes compacts, sauf en une place où l'on obtient $\mathrm{PU}(2, 1) = \mathrm{Isom}(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2)$. Il s'agit aussi de dénombrer, par des méthodes de théorie des nombres, les familles de sous-groupes parahoriques $(P_v)_{v \in V_\infty}$ qui donnent lieu à des groupes arithmétiques sans torsion et de covolume imposé par la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface. Voici un résumé du résultat final (voir le théorème 3.5 pour les détails techniques).

THÉORÈME 0.3 (G. Prasad et S.K. Yeung [50], [51]). — *Il y a exactement 22 classes de faux plans projectifs construits grâce à des formes de $\mathrm{SU}(2, 1)$ définies par des algèbres à involutions cubiques sur un corps de nombres. Tout autre faux plan projectif proviendrait de l'autre type possible de forme de $\mathrm{SU}(2, 1)$; il y a au plus 3 telles possibilités.*

L'intérêt de ce théorème réside tout autant dans sa partie constructive que dans la classification qu'il énonce : on connaissait très peu d'exemples auparavant, tous construits par une méthode détournée (3.5). On s'attend en fait à ce que les faux plans projectifs se répartissent dans les 22 classes déjà répertoriées, et dans elles seules. Le fait de pouvoir décrire ces surfaces par la construction arithmétique explicite de leur groupe fondamental permet de prouver de nombreuses propriétés géométriques

inconnues auparavant : homologie entière, groupes d'automorphismes, plongements dans des espaces projectifs...

Nous avons pris la liberté d'ajouter quelques pages à ce rapport (déjà bien long) en survolant rapidement d'autres problèmes de comptage. Il s'agit d'une part des propriétés de finitude liées aux groupes algébriques et arithmétiques, qu'A. Borel et G. Prasad avaient déduites au moment où ce dernier avait démontré la formule du covolume. L'une des finitudes est une conjecture de J. Tits très forte sur la finitude, sans fixer le corps de base, du nombre de situations donnant lieu à des groupes S -arithmétiques principaux de covolume majoré par une constante donnée ; l'autre porte sur des estimations effectives du nombre de classes des groupes algébriques. L'autre série de résultats évoqués est le problème du comptage asymptotique des variétés couvertes par un espace symétrique donné, en fonction du volume riemannien. Il s'agit de travaux de M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et Sh. Mozes dans le cas des variétés hyperboliques réelles et de T. Gelander dans le cas symétrique (presque) général. Évoquer ces travaux est l'occasion de démontrer que le spectre des mathématiques couverts par les questions de covolumes de groupes arithmétiques est bien large (le cas limite, non couvert par les résultats de comptage de géométrie différentielle ci-dessus, s'explique par des arguments de géométrie hyperbolique de dimension 3).

Terminons par deux remarques. Tout d'abord, nous imaginons que pour un spécialiste de réseaux de groupes de Lie, il sera plaisant de se pencher sur l'exemple très spécifique des faux plans projectifs pour au moins une raison. Cette classification est en effet l'occasion de revenir de façon quantitative, ou tout du moins précise, sur des outils ordinairement utilisés de façon qualitative en théorie des groupes : lemme de Selberg pour les sous-groupes d'indice fini sans torsion, finitude des groupes d'automorphismes de variétés localement symétriques... Enfin, nous espérons que bien qu'elle n'ait pas fait l'objet ici d'une présentation isolée et construite, la théorie de Bruhat-Tits des groupes réductifs sur les corps locaux apparaîtra comme un outil important, au-delà de la théorie des groupes. Cette théorie apparaît en effet à plusieurs endroits : sous forme algébrique, à travers les structures entières des sous-groupes parahoriques utilisées pour calculer le volume de ces derniers (1.4), et sous forme géométrique, en voyant des immeubles euclidiens comme espaces d'arrivée d'applications harmoniques (2.5) et comme « squelettes » d'espaces analytiques rigides dans la construction de D. Mumford du premier faux plan projectif (3.5).

Ce rapport est construit de la façon suivante. Dans la section 1, on énonce précisément la formule du covolume et on esquisse sa preuve. Dans la section 2, c'est la preuve de l'arithméticité des groupes fondamentaux des faux plans projectifs qui est résumée ; on y cite aussi des résultats utiles à l'explication des résultats géométriques de la section 4. Dans la section 3, on explique la stratégie générale pour classer les

faux plans projectifs. Enfin la section 4 évoque les autres comptages, relevant de la géométrie différentielle et des groupes algébriques ; on y mentionne aussi les généralisations en cours portant sur les analogues en dimension supérieure des faux plans projectifs.

Introduisons enfin quelques notations et conventions valables dans tout ce rapport.

- *Corps de base* : nous désignons par k un corps global, c'est-à-dire un corps de nombres ou le corps des fonctions rationnelles d'une courbe définie sur un corps fini. On désigne par D_k la valeur absolue du discriminant de k et par V l'ensemble de toutes les places de k . L'ensemble des places archimédiennes est noté V_∞ et celui des places finies est noté V_f . Pour chaque place $v \in V$, on désigne par $|\cdot|_v$ la valeur absolue associée et par k_v le corps local complété de k en v . Si $v \in V_f$, on note \mathcal{O}_v l'anneau de valuation et ϖ_v une uniformisante de k_v , et κ_v le corps résiduel $\mathcal{O}_v/(\varpi_v)$. On désigne par k_v^{nr} une extension non ramifiée maximale de k_v et on normalise les valeurs absolues de façon à disposer de la formule du produit [68]. Sauf mention du contraire (e.g. pour l'approximation forte), S désigne un ensemble fini de places de k tel que $V_\infty \subseteq S$, et on note $S_f = V_f \cap S$.
- *Espaces symétriques* : un espace symétrique général sera désigné par \widetilde{X} afin de souligner le fait que nous le voyons comme revêtement universel. Nous notons en particulier $(\mathbb{B}_{\mathbf{C}}^n, g_{\text{hyp}})$ l'espace symétrique consistant en la boule unité de \mathbf{C}^n munie de la métrique hyperbolique g_{hyp} à courbure sectionnelle pincée entre -4 et -1 ; le groupe des isométries de $(\mathbb{B}_{\mathbf{C}}^n, g_{\text{hyp}})$ est le groupe de Lie réel $\text{PU}(n, 1)$.
- *Variétés* : sauf mention expresse du contraire, les variétés évoquées dans ce texte, y compris les variétés algébriques, sont supposées lisses.
- *Réseaux* : rappelons finalement qu'un sous-groupe discret Γ dans un groupe topologique localement compact G est appelé un *réseau* de G si l'espace homogène G/Γ porte une mesure invariante de volume total fini. Quand le groupe ambiant G est un groupe de Lie, les références standard pour ces notions sont [53], [37] et [72].

Remerciements. — Je remercie avec grand plaisir D. Harari et V. Maillot pour leur aide bibliographique, M. Bourdon et A. Thuillier pour leur relecture de ce texte. Je dois enfin des remerciements tout particuliers à G. Prasad pour sa patience, sa disponibilité et son indulgence à l'égard de mes erreurs et imprécisions.

1. COVOLUME DES GROUPES S -ARITHMÉTIQUES

Dans cette première section, on décrit les grandes lignes de la démonstration de la formule calculant le covolume d'un groupe S -arithmétique (1.2). On s'attache surtout à expliquer l'apparition de chacun des facteurs. C'est aussi l'occasion de mentionner des résultats bien connus, mais utiles pour la suite : finitude du covolume et approximation forte (1.5). Dans toute cette section, \mathbf{G} est un groupe algébrique absolument presque simple, simplement connexe [62, 8.1.11] et défini sur le corps global k .

1.1. Notations et normalisations

Rappelons un certain nombre de notations de [49, § 0] et quelques points de théorie de Bruhat-Tits.

D'après la classification de J. Tits [65], il existe un groupe algébrique \mathcal{G} défini et quasi-déployé sur k , et un isomorphisme $\varphi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}$ défini sur une extension galoisienne k'/k , tels que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(k'/k)$ l'automorphisme $\varphi^{-1} \circ \sigma \varphi$ de \mathbf{G} soit intérieur [62, 12.3.7]. On choisit ω une forme extérieure invariante de degré maximal sur \mathcal{G} et définie sur k , ce qui fournit une forme extérieure de degré maximal $\omega^* = \varphi^*(\omega)$ sur \mathbf{G} qui est elle aussi définie sur k . Pour chaque $v \in V$, on note ω_v^* (resp. ω_v) la forme extérieure invariante de degré maximal sur $\mathbf{G}(k_v)$ (resp. sur $\mathcal{G}(k_v)$) déduite de ω^* (resp. de ω) par extension des scalaires.

Rappelons qu'à isomorphisme sur k près, il existe une plus petite extension ℓ de k qui déploie le groupe \mathcal{G} ; cette extension est de degré ≤ 3 sauf pour les groupes trialitaires (auquel cas le degré est 6). Dans [49, 0.4], G. Prasad associe à \mathcal{G} un entier $\mathfrak{s}(\mathcal{G})$, nul par définition si \mathcal{G} est déployé et qui autrement, à une exception près, est la somme du nombre des racines courtes et du nombre des racines courtes simples de \mathcal{G} . L'exception, qui sera le cas pertinent pour les faux plans projectifs, est le cas des systèmes de racines non réduits $\text{BC}_{\frac{r}{2}}$ avec r pair; on pose alors $\mathfrak{s}(\mathcal{G}) = \frac{1}{2}r(r+3)$. Dans ce rapport, on peut se contenter de retenir que $\mathfrak{s}(\mathcal{G})$ est un nombre entier qui ne dépend que du système de racines relatif de \mathcal{G} .

Pour la théorie de Bruhat-Tits des groupes tels que $\mathbf{G}(k_v)$, notamment pour les immeubles euclidiens associés à ces groupes, la référence est [66] (nous citerons également quelques points techniques de [15] et [16]).

Rappelons que la classe des *sous-groupes d'Iwahori* de $\mathbf{G}(k_v)$ peut être caractérisée, sans recours à l'immeuble de Bruhat-Tits de \mathbf{G} sur k_v , comme la classe des normalisateurs des pro- p sous-groupes maximaux de $\mathbf{G}(k_v)$ [46, Theorem 3.10]. Un sous-groupe *parahorique* de $\mathbf{G}(k_v)$ est un sous-groupe compact contenant un sous-groupe d'Iwahori. C'est un sous-groupe compact et ouvert, par conséquent deux sous-groupes parahoriques sont toujours *commensurables* : ils partagent un sous-groupe qui

est d'indice fini dans chacun d'eux. La classe des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}(k_v)$ coïncide avec la classe des sous-groupes parahoriques maximaux.

L'immeuble de Bruhat-Tits Δ de $\mathbf{G}(k_v)$ est un produit direct de complexes simpliciaux, avec un facteur par facteur simple de \mathbf{G} , admettant une $\mathbf{G}(k_v)$ -action cellulaire naturelle. Le complexe cellulaire Δ admet une métrique $\mathbf{G}(k_v)$ -invariante qui en fait un espace complet à courbure ≤ 0 ; il est la réunion des $\mathbf{G}(k_v)$ -transformés d'un pavage euclidien décrit par le *groupe de Weyl affine* W^{aff} de \mathbf{G} [12, §V], extension du groupe de Weyl sphérique par un groupe abélien libre de rang la dimension de Δ (qui est aussi le k_v -rang de \mathbf{G}). Ces sous-complexes, appelés *appartements*, sont en bijection avec les tores k_v -déployés maximaux de \mathbf{G} . Une conséquence de la courbure ≤ 0 est que la classe des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}(k_v)$ coïncide avec celle des fixateurs de sommets [15, §3].

Un sommet v , ou le sous-groupe compact maximal P_v qui lui est associé (le fixateur de v), est dit *spécial* si une chambre de Weyl d'un appartement peut être choisie comme domaine fondamental pour l'action de P_v sur Δ tout entier. Notons $\widehat{\Delta}$ l'immeuble de \mathbf{G} sur l'extension non ramifiée maximale k_v^{nr} ; cet immeuble contient naturellement Δ . Si le groupe \mathbf{G} se déploie sur k_v^{nr} , un sommet spécial de Δ qui reste un sommet spécial dans $\widehat{\Delta}$, est appelé *hyperspécial*. Quand ils existent, les sous-groupes parahoriques hyperspéciaux sont les sous-groupes parahoriques de volume maximal pour une mesure de Haar donnée sur $\mathbf{G}(k_v)$.

Un des points délicats de la théorie de Bruhat-Tits est que l'on peut associer à chaque sous-groupe parahorique P_v (resp. \mathcal{P}_v) de $\mathbf{G}(k_v)$ (resp. de $\mathcal{G}(k_v)$) un schéma en groupes affine sur \mathcal{O}_v , noté \mathbf{G}_{P_v} (resp. $\mathcal{G}_{\mathcal{P}_v}$), de fibre générique \mathbf{G} (resp. \mathcal{G}) et tel que $\mathbf{G}_{P_v}(\mathcal{O}_v) = P_v$ (resp. $\mathcal{G}_{\mathcal{P}_v}(\mathcal{O}_v) = \mathcal{P}_v$). Nous nous intéresserons notamment à des calculs de volume de sous-groupes parahoriques au moyen de ces structures entières.

1.2. La formule du covolume

Voici la formule pour le volume des espaces homogènes naturellement associés aux groupes S -arithmétiques [49, Theorem 3.7]. Notons qu'on suppose le groupe \mathbf{G} simplement connexe.

Pour chaque place v , on choisit convenablement un sous-groupe parahorique P_v dans $\mathbf{G}(k_v)$ et \mathcal{P}_v dans $\mathcal{G}(k_v)$. Précisément, on choisit des familles $(P_v)_{v \in V_f}$ et $(\mathcal{P}_v)_{v \in V_f}$ *cohérentes* dans le sens où $(\prod_{v \in V_\infty} \mathbf{G}(k_v)) \cdot (\prod_{v \in V_f} P_v)$ est ouvert dans le groupe adélique $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ et $(\prod_{v \in V_\infty} \mathcal{G}(k_v)) \cdot (\prod_{v \in V_f} \mathcal{P}_v)$ est ouvert dans le groupe adélique $\mathcal{G}(\mathbf{A}_k)$. Pour la famille $(\mathcal{P}_v)_{v \in V_f}$, on a besoin de faire des hypothèses techniques supplémentaires [49, 1.2].

Pour chaque $v \in V_f$, on choisit $c_v \in k_v^\times$ ajusté de sorte que $c_v \omega_v$ soit définie sur \mathcal{O}_v , mais de réduction $\neq 0$ modulo ϖ_v (par rapport au \mathcal{O}_v -schéma en groupes $\mathcal{G}_{\mathcal{P}_v}$). On note $\gamma_v = |c_v|_v$: ce nombre réel > 0 ne dépend pas du choix de c_v . Par ailleurs, les

sous-groupes d'Iwahori sont ouverts et conjugués dans $\mathbf{G}(k_v)$; on peut donc définir une mesure $\mathbf{G}(k_v)$ -invariante privilégiée, notée $\mu_{\mathbf{T},v}$ et appelée *mesure de Tits*, en partant de n'importe quelle mesure de Haar sur $\mathbf{G}(k_v)$ et en la normalisant de sorte que le volume pour $\mu_{\mathbf{T},v}$ de tout sous-groupe d'Iwahori soit égal à 1. Pour ce qui est des mesures aux places archimédiennes, pour chaque $v \in V_\infty$, on note c_v le nombre réel > 0 tel que le volume de tout sous-groupe compact maximal de la restriction de Weil $\mathcal{R}_{k_v/\mathbf{R}}(\mathcal{G})(\mathbf{C})$ soit égal à 1 pour la mesure associée à $c_v\omega_v$; on pose : $\gamma_v = |c_v|_v$ et on appelle mesure de Tits en $v \in V_\infty$ la mesure donnée par $c_v\omega_v$.

Les fibres spéciales, i.e. réductions modulo ϖ_v , des schémas en groupes \mathbf{G}_{P_v} et $\mathcal{G}_{\mathcal{P}_v}$ de 1.1 ne sont pas des groupes réductifs en général. Cependant, des facteurs de Lévi de ces fibres spéciales, disons $\overline{\mathbf{M}}_v$ et $\overline{\mathcal{M}}_v$ respectivement, sont des groupes réductifs finis sur le corps résiduel κ_v . Ces groupes ont une interprétation géométrique agréable : si P_v est le fixateur de la facette σ dans l'immeuble Δ de \mathbf{G} sur k_v , alors les facettes fermées de Δ contenant σ forment un immeuble fini, qui n'est autre que celui de $\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)$ [16, § 5]. Pour chaque $v \in V_f$, notons $\overline{\mathbf{T}}_v$ (resp. $\overline{\mathcal{T}}_v$) un centralisateur de sous-tore déployé maximal de $\overline{\mathbf{M}}_v$ (resp. de $\overline{\mathcal{M}}_v$). Enfin, désignons par r_v le rang absolu du groupe $\overline{\mathcal{M}}_v$ (on donnera d'autres interprétations de cet entier par la suite).

THÉORÈME 1.1 (G. Prasad). — *Soit \mathbf{G} un groupe algébrique absolument presque simple, simplement connexe, défini sur le corps global k . Soit S un ensemble fini de places de k tel que $V_\infty \subseteq S$. On note $G_S = \prod_{v \in S} \mathbf{G}(k_v)$ et Λ la projection naturelle de $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \notin S} P_v$ dans G_S . On suppose G_S non compact. Soit μ_S la mesure produit des mesures de Tits pour $v \in S$. Alors, on a la formule suivante :*

$$\mu_S(G_S/\Lambda) = D_k^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathcal{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v\right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \mathcal{E}.$$

où :

- D_k désigne la valeur absolue du discriminant du corps global k ,
- D_ℓ désigne la valeur absolue du discriminant du corps global ℓ ,
- $\mathfrak{s}(\mathcal{G})$ est le nombre entier défini ci-dessus à partir du système de racines de \mathcal{G} ,
- m_i est le i -ième exposant du groupe de Weyl absolu de \mathbf{G} ,
- $\tau_k(\mathbf{G})$ est le nombre de Tamagawa de \mathbf{G} ,
- \mathcal{E} est le produit infini défini comme suit :

$$\mathcal{E} = \prod_{v \in S_f} \frac{q_v^{\frac{1}{2}(r_v + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)} \cdot \prod_{v \notin S_f} \frac{q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}$$

à partir des sous-groupes parahoriques P_v dans $\mathbf{G}(k_v)$ et \mathcal{P}_v dans $\mathcal{G}(k_v)$ ci-dessus.

Remarque 1.2. — Dans le cas où k est un corps de nombres et où \mathbf{H} est un k -groupe réductif, $\tau_k(\mathbf{H})$ est égal au rapport de l'ordre du groupe de Picard sur celui du groupe de Shafarevich $\text{III}(\mathbf{H})$ (voir [35], et aussi [57], notamment pour la structure de groupe sur $\text{III}(\mathbf{H})$). En particulier, si \mathbf{H} est semi-simple simplement connexe, on a $\tau_k(\mathbf{H}) = 1$. Voir le séminaire Bourbaki de L. Clozel [20] pour un rapport plus complet sur cet autre problème de calcul de volume d'espace homogène, et voir (1.5) pour une formule pour $\tau_k(\mathbf{G})$.

L'exemple le plus simple de calcul de facteur eulérien \mathcal{E} est le suivant. Choisissons pour \mathbf{G} le groupe SL_2 sur le corps \mathbf{Q} des nombres rationnels et prenons $S = \{\infty\}$. Puisque SL_2 est déployé, on a aussi $\mathcal{G} = \text{SL}_2$ (et les discriminants impliqués dans la formule, ainsi que le nombre de Tamagawa, sont tous égaux à 1). Pour chaque place finie, i.e. pour chaque nombre premier p , on a $\overline{\mathbf{M}}_p = \text{SL}_2$ et donc $\#\overline{\mathbf{M}}_p(\kappa_p) = \#\text{SL}_2(p) = (p-1)p(p+1)$. Finalement, on trouve que dans ce cas $\mathcal{E} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^3}{(p-1)p(p+1)} = \zeta(2)$. C'est un fait bien connu qu'on peut calculer le volume du quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^2$ par $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ en termes de la fonction ζ de Riemann.

Avant de revenir sur la preuve de cette formule, nous allons mentionner deux résultats intermédiaires, précisément les deux ingrédients principaux qui serviront dans l'esquisse de démonstration du résultat ci-dessus.

1.3. Formes volumes sur les groupes quasi-déployés

Le premier résultat intermédiaire [49, Theorem 1.6] relève d'un contexte assez proche du calcul des nombres de Tamagawa (du moins de leur définition [69]). Il s'agit du calcul du produit des facteurs de normalisation γ_v (1.1).

THÉORÈME 1.3. — *On a :*

$$\prod_{v \in V} \gamma_v = \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[l:k]}} \right)^{\frac{1}{2} \mathfrak{s}(\mathcal{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v \right).$$

Preuve (esquisse). — L'idée est d'utiliser plusieurs formes volumes en étant attentif aux divers facteurs de normalisation. Dans ces facteurs apparaissent les constantes γ_v qui nous intéressent. On désigne par \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de \mathcal{G} et on note $n = \dim(\mathcal{G})$. On va travailler avec diverses bases de $\mathfrak{g}_\ell = \mathfrak{g} \otimes_k \ell$.

Première étape. — Mise en place de deux premières formes volumes.

Puisque ℓ déploie \mathcal{G} , on dispose de la base duale $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^n$ d'une base $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n$ d'un réseau de Chevalley de \mathfrak{g}_ℓ , et donc d'une forme volume

$$\omega^{\text{Ch}} = \mathcal{X}^1 \wedge \mathcal{X}^2 \wedge \dots \wedge \mathcal{X}^n.$$

On peut aussi choisir une k -base X_1, X_2, \dots, X_n de \mathfrak{g} , et en notant X^1, X^2, \dots, X^n sa base duale, définir la forme volume

$$\omega^{\text{Ta}} = X^1 \wedge X^2 \wedge \dots \wedge X^n.$$

qui est définie sur k . Puisque $\dim(\Lambda^n \mathfrak{g}^*) = 1$, il existe $\alpha \in \ell$ tel que $\omega^{\text{Ch}} = \alpha \cdot \omega^{\text{Ta}}$. Par conjugaison des réseaux de Chevalley, pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\ell/k)$ on a : $\sigma(\omega^{\text{Ch}}) = \pm \omega^{\text{Ch}}$, et donc $\sigma(\alpha)\omega^{\text{Ta}} = \pm \alpha \cdot \omega^{\text{Ta}}$; ceci prouve que α^2 appartient à k .

Deuxième étape (archimédienne). — Volumes de groupes compacts.

C'est l'étape qui fait apparaître le facteur $\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v$. On travaille aux places archimédiennes; soit $v \in V_\infty$ une telle place. On va comparer des mesures en calculant des volumes de groupes compacts. Rappelons que si $k_v = \mathbf{R}$ (resp. si $k_v = \mathbf{C}$), tout sous-groupe compact maximal des points complexes $\mathcal{R}_{k_v/\mathbf{R}}(\mathcal{G})(\mathbf{C})$ de la restriction de Weil $\mathcal{R}_{k_v/\mathbf{R}}(\mathcal{G})$ est isomorphe à une copie (resp. à deux copies) de la forme compacte du groupe complexe de même type que \mathcal{G} . On choisit $Y_1^v, Y_2^v, \dots, Y_n^v$ une base la « plus orthonormale possible » pour la forme de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g} \otimes_k k_v$ [49, p. 97]. Notons m la valeur absolue du déterminant de la matrice $[(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$. La base duale $Y_1^v, Y_2^v, \dots, Y_n^v$ donne lieu elle aussi à une forme volume ω_v^{Ki} sur $\mathbf{G}(k_v)$ pour laquelle un calcul, classique en topologie, dit que le volume du sous-groupe compact maximal est :

$$\left| \sqrt{m} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{(2\pi)^{m_i+1}}{m_i!} \right|_v.$$

Or $\omega_v^{\text{Ki}} \otimes \omega_v^{\text{Ki}} = \pm \mathfrak{d} \cdot (\omega_v^{\text{Ta}} \otimes \omega_v^{\text{Ta}})$ avec $\mathfrak{d} = \det([\text{tr}(\text{ad}X_i \circ \text{ad}X_j)]_{i,j})$, donc le facteur de normalisation archimédien γ_v (1.1) est :

$$\gamma_v = \left(\sqrt{|\mathfrak{d}|_v} \right) \cdot \left(\left| \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v \right).$$

On tire de $\omega^{\text{Ch}} = \alpha \cdot \omega^{\text{Ta}}$ l'égalité : $|m \cdot \alpha^2|_v = |\mathfrak{d}|_v$, ce qui permet d'écrire :

$$\gamma_v = \left(\sqrt{|\alpha^2|_v} \right) \cdot \left(\left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v \right)$$

pour chaque place archimédienne v . Finalement, on a :

$$\prod_{v \in V} \gamma_v^2 = \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v^2 \right) \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} |\alpha^2|_v \right) \cdot \left(\prod_{v \in V_f} \gamma_v^2 \right).$$

On a pris soin de passer au carré, ce qui permet d'utiliser la formule du produit pour α^2 et d'écrire :

$$\prod_{v \in V} \gamma_v^2 = \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v^2 \right) \cdot \left(\prod_{v \in V_f} |\alpha^2|_v^{-1} \gamma_v^2 \right).$$

Troisième étape (non archimédienne). — Usage de structures entières.

Nous ne détaillerons pas cette étape, mais c'est la plus longue et la plus technique. Il s'agit de voir que le produit aux places finies $\prod_{v \in V_f} (|\alpha^2|_v^{-1} \gamma_v^2)$ est égal à la contribution des discriminants. Dans un premier temps, G. Prasad montre qu'aux places $v \in V_f$ où \mathcal{G} est déployé sur l'extension non ramifiée maximale de k_v , on a : $|\alpha^2|_v = \gamma_v^2$ (la constante α réalise la normalisation locale en v dans la définition de la mesure de Tamagawa). Il reste à considérer ensuite les places v (en nombre fini) où \mathcal{G} ne se déploie sur aucune extension non ramifiée de k_v ; dans ce cas, il faut faire des ajustements de bases de Chevalley pour obtenir des formes volumes explicites. Les distinctions de cas sur le type des systèmes de racines apparaissent à cet endroit, et les valeurs absolues des discriminants s'expriment en termes des constantes d'ajustement. \square

1.4. Volumes des sous-groupes parahoriques

Le second résultat intermédiaire [49, Proposition 2.10] relève d'une partie assez subtile de la théorie de Bruhat-Tits (les structures entières associées aux facettes d'un immeuble [16]). Nous travaillons ici avec les points rationnels de \mathbf{G} sur une complétion non archimédienne fixée k_v . Un des arguments pour le théorème ci-dessous est de calculer des indices pour des inclusions de sous-groupes d'Iwahori dans des sous-groupes parahoriques, en se ramenant à des indices pour des inclusions analogues de groupes algébriques finis. Cela se fait grâce aux structures entières associées aux facettes des immeubles de \mathbf{G} et \mathcal{G} sur k_v . Soit I_v (resp. \mathcal{I}_v) un sous-groupe d'Iwahori de \mathbf{G} (resp. \mathcal{G}) contenu dans P_v (resp. \mathcal{P}_v) : on note \mathbf{G}_{I_v} (resp. $\mathcal{G}_{\mathcal{I}_v}$) le schéma en groupes sur \mathcal{O}_v qui lui est associé par la théorie de Bruhat-Tits (1.1).

Voici un cas très simple. Dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$, un exemple de sous-groupe d'Iwahori est donné par exemple l'image réciproque \mathcal{I}_n du groupe $B_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ (des matrices $n \times n$ triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) par l'homomorphisme de réduction $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p) \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. La mesure de Tits μ_p (1.1) sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$ est la mesure de Haar pour laquelle \mathcal{I}_n est de volume 1. On a alors : $\mu_p(\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)) = [\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p) : \mathcal{I}_n] = [\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) : B_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})]$. Ce dernier indice est le cardinal d'une variété de drapeaux finie, et peut se calculer par décomposition de Bruhat dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

THÉORÈME 1.4. — *En notant $|\omega|$ la mesure de Haar associée à une forme extérieure invariante de degré maximal ω sur un groupe de Lie, on a dans notre situation :*

$$\mathrm{Vol}(I_v, \gamma_v \cdot |\omega_v^*|) = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{q_v^{\frac{1}{2}(r_v + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(P_v, \gamma_v \cdot |\omega_v^*|) = \frac{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}{q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))}}.$$

Preuve (esquisse). — La preuve est une jolie combinaison de l'usage d'une formule de volume en termes de structure entière de forme extérieure de degré maximal, de l'usage de structures entières pour les sous-groupes parahoriques et de comptage

dans les groupes réductifs finis. Les deux premiers arguments permettent de faire une comparaison de mesures avec le cas quasi-déployé, connue sans doute de bien des spécialistes de formes automorphes : les techniques sont similaires à celles qu'utilise R. Kottwitz [35, Theorem 1] quand il travaille avec les mesures d'Euler-Poincaré (2.2). On va aussi utiliser plusieurs fois le fait que le cardinal d'un radical unipotent de dimension d sur un corps fini de cardinal q est égal à q^d .

Première étape. — Compatibilité de mesures sur $\mathbf{G}(k_v)$ et $\mathcal{G}(k_v)$.

Puisque le corps résiduel κ_v est fini, un théorème de R. Steinberg implique que le groupe \mathbf{G} se quasi-déploie sur k_v^{nr} [63]; autrement dit, \mathbf{G} et \mathcal{G} sont isomorphes sur k_v^{nr} et donc $\dim(\overline{\mathcal{T}}_v) = \dim(\overline{\mathbf{T}}_v) = k_v^{\text{nr}}\text{-rg}(\mathbf{G}) = k_v^{\text{nr}}\text{-rg}(\mathcal{G})$. On dispose aussi d'un isomorphisme $\varphi_v : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{G}$ défini sur k_v^{nr} tel que pour tout $\sigma \in \text{Gal}(k_v^{\text{nr}}/k_v)$ l'automorphisme $\varphi_v^{-1} \circ \sigma \circ \varphi_v$ de \mathbf{G} soit intérieur. En outre, $\omega_v^* = \varphi_v^*(\omega_v)$ est définie sur k_v . Notons $\mathcal{O}_v^{\text{nr}}$ l'anneau de valuation de k_v^{nr} ; alors les groupes $\mathbf{G}_{I_v}(\mathcal{O}_v^{\text{nr}})$ et $\mathcal{G}_{\mathcal{I}_v}(\mathcal{O}_v^{\text{nr}})$ sont encore des sous-groupes d'Iwahori de \mathbf{G} et \mathcal{G} , respectivement. Par conjugaison de ces sous-groupes, on se ramène à avoir $\varphi_v(\mathbf{G}_{I_v}(\mathcal{O}_v^{\text{nr}})) = \mathcal{G}_{\mathcal{I}_v}(\mathcal{O}_v^{\text{nr}})$, quitte à composer φ_v par un automorphisme convenable. On en déduit que φ_v est défini sur $\mathcal{O}_v^{\text{nr}}$. Ceci prouve, voir la preuve de [49, Prop 2.3], que

$$|\omega_v^*|(I_v) = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathcal{T}}_v(\kappa_v)} |\omega_v|(\mathcal{I}_v).$$

Deuxième étape. — Comptage de points dans les groupes finis.

En ce qui concerne les sous-groupes parahoriques P_v et \mathcal{P}_v , on déduit de la formule ci-dessus que : $\frac{|\omega_v^*|(P_v)}{|\omega_v|(\mathcal{P}_v)} = \frac{[P_v : I_v]}{[\mathcal{P}_v : \mathcal{I}_v]} \cdot \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathcal{T}}_v(\kappa_v)}$. En passant aux facteurs de Lévi $\overline{\mathbf{M}}_v$ et $\overline{\mathcal{M}}_v$ des fibres spéciales des structures entières de P_v et \mathcal{P}_v , et en introduisant des sous-groupes de Borel $\overline{\mathbf{B}}_v$ et $\overline{\mathcal{B}}_v$, on obtient : $[P_v : I_v] = [\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v) : \overline{\mathbf{B}}_v(\kappa_v)]$ et $[\mathcal{P}_v : \mathcal{I}_v] = [\overline{\mathcal{M}}_v(\kappa_v) : \overline{\mathcal{B}}_v(\kappa_v)]$, ce qui permet d'utiliser la structure des groupes réductifs pour calculer des indices de sous-groupes d'Iwahori dans des sous-groupes parahoriques.

Par ailleurs, une formule bien connue pour les nombres de Tamagawa [44, I.2.5], appliquée à \mathcal{P}_v fournit :

$$|c_v \cdot \omega_v|(\mathcal{P}_v) = \#\overline{\mathcal{M}}_v(\kappa_v) \cdot q_v^{-\dim(\overline{\mathcal{M}}_v)}.$$

Alors on peut écrire :

$$|c_v \cdot \omega_v^*|(I_v) = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathcal{T}}_v(\kappa_v)} \cdot \frac{|c_v \cdot \omega_v|(\mathcal{P}_v)}{[\mathcal{P}_v : \mathcal{I}_v]} = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathcal{T}}_v(\kappa_v)} \cdot \frac{\#\overline{\mathcal{B}}_v(\kappa_v)}{q_v^{\dim(\overline{\mathcal{M}}_v)}}.$$

Ce qui permet de passer de cette égalité aux formules de l'énoncé est essentiellement le fait que la dimension d'un groupe réductif fini est la somme de la dimension d'un

tore maximalement déployé et de deux fois la dimension du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel. \square

1.5. Stratégie du calcul

Rappelons tout d'abord deux résultats généraux, et en quelque sorte complémentaires, concernant les inclusions de groupes obtenues en évaluant un k -groupe algébrique donné sur divers anneaux définis à partir de k (tels que k lui-même, des anneaux de S -entiers de k , les adèles \mathbf{A}_k de k). Le théorème de Mostow-Tamagawa, contemporain du théorème de Borel-Harish Chandra [7], traite de l'inclusion du groupe des k -points dans le groupe des points adéliques ; la version Behr-Harder traite du cas des corps de fonctions.

THÉORÈME 1.5 (Borel-Harish Chandra [7], Mostow-Tamagawa [40], Behr-Harder [4], [29])

Soit \mathbf{H} un groupe réductif défini sur le corps global k . Alors :

- (i) *la mesure invariante sur $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{H}(k)$ est de volume total fini si, et seulement si, le groupe \mathbf{H} n'a pas de caractère défini sur k ;*
- (ii) *l'espace homogène $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{H}(k)$ est compact si, et seulement si, le groupe \mathbf{H} est anisotrope sur k .*

La condition de (i) est automatiquement satisfaite si le groupe \mathbf{H} est semi-simple, et (ii) est une version adélique de ce qu'on appelle souvent le *critère de compacité de Godement*. Dire que le k -groupe \mathbf{H} est *anisotrope* sur k signifie qu'il ne contient pas de tore déployé sur k non trivial. L'anisotropie a une interprétation plus concrète quand on travaille avec un corps local plutôt qu'un corps global : le groupe \mathbf{H} est anisotrope sur un complété k_v (archimédien ou non) si, et seulement si, le groupe topologique $\mathbf{H}(k_v)$ est compact (pour le cas réel, c'est un résultat d'É. Cartan ; pour le cas non archimédien, voir [56] ou [48]).

Dans la situation précédente, on a considéré le plongement diagonal (discret) du groupe $\mathbf{H}(k)$ dans le groupe adélique $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)$, produit restreint $\prod'_v \mathbf{H}(k_v)$ des points rationnels de \mathbf{H} en toutes les complétions de k . Le résultat suivant se place dans la situation où l'on considère le sous-groupe $\mathbf{H}(k) \cdot \prod_{v \in S} \mathbf{H}(k_v)$ de $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)$, produit du sous-groupe diagonal $\mathbf{H}(k)$ avec un nombre fini de facteurs $\mathbf{H}(k_v)$, $v \in S$. Par rapport à la situation précédente, si le produit $\prod_{v \in S} \mathbf{H}(k_v)$ est non compact, i.e. s'il contient un facteur isotrope, alors l'inclusion change complètement de nature topologique.

THÉORÈME 1.6 (Approximation forte – M. Kneser, V. Platonov, G. Prasad et autres)

Soit \mathbf{H} un groupe presque simple simplement connexe défini sur le corps global k . Soit S un ensemble de places tel que $\prod_{v \in S} \mathbf{H}(k_v)$ soit non compact. Alors le groupe $\mathbf{H}(k) \cdot \prod_{v \in S} \mathbf{H}(k_v)$ est dense dans $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)$.

Une preuve élégante de ce théorème, utilisant une définition dynamique des sous-groupes paraboliques et valable en toute caractéristique, est donnée dans [47].

Nous pouvons maintenant esquisser la preuve de la formule du covolume au moyen de ces quelques rappels et des deux sous-sections précédentes. Nous en utilisons d'ailleurs librement toutes les notations.

Preuve de la formule du covolume (esquisse). — Nous sommes en position d'appliquer le théorème d'approximation forte. On a :

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}_k) = G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v \cdot \mathbf{G}(k).$$

Notons $p_S : G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v \rightarrow G_S$ la projection associée à S et $\Lambda = p_S((G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) \cap \mathbf{G}(k))$ le sous-groupe S -arithmétique principal de G_S qu'elle permet de définir. Composons l'isomorphisme d'approximation forte :

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k) \simeq (G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) / \left((G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) \cap \mathbf{G}(k) \right)$$

avec l'homomorphisme surjectif

$$(G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) / \left((G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) \cap \mathbf{G}(k) \right) \rightarrow G_S/\Lambda,$$

afin d'obtenir une fibration principale $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k) \rightarrow G_S/\Lambda$ de fibre compacte $\prod_{v \notin S} P_v$. Prenons alors la mesure adélique du premier espace homogène :

$$\omega_{\mathbf{A}(k)}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k)) = \omega_S^*(G_S/\Lambda) \cdot \prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v).$$

En se rappelant la définition du nombre de Tamagawa de \mathbf{G} sur k , à savoir que l'on a $\tau_k(\mathbf{G}) = D_k^{-\frac{1}{2} \dim(\mathbf{G})} \cdot \omega_{\mathbf{A}(k)}(\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k))$, nous obtenons :

$$\omega_S^*(G_S/\Lambda) = D_k^{\frac{1}{2} \dim(\mathbf{G})} \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v)^{-1}.$$

Rappelons que la normalisation qui permet de déduire la mesure μ_S de ω_S^* est la suivante :

$$\mu_S(G_S/\Lambda) = \left(\prod_{v \in V_\infty} |c_v|_v \right) \cdot \left(\prod_{v \in S_f} \omega_v^*(I_v)^{-1} \right) \cdot \omega_S^*(G_S/\Lambda).$$

Ainsi, en reprenant la notation $\gamma_v = |c_v|_v$ (1.1), nous obtenons :

$$\mu_S(G_S/\Lambda) = D_k^{\frac{1}{2} \dim(\mathbf{G})} \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \frac{\prod_{v \in V_\infty} \gamma_v}{\left(\prod_{v \in S_f} \omega_v^*(I_v) \right) \cdot \left(\prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v) \right)}$$

en vertu de ce qui précède.

Travaillons enfin sur le produit des trois derniers facteurs. En faisant apparaître les facteurs γ_v aux places finies et en les compensant au dénominateur, nous obtenons :

$$\frac{\prod_{v \in V_\infty} \gamma_v}{\left(\prod_{v \in S_f} \omega_v^*(I_v)\right) \cdot \left(\prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v)\right)} = \frac{\prod_{v \in V} \gamma_v}{\left(\prod_{v \in S_f} \gamma_v \omega_v^*(I_v)\right) \cdot \left(\prod_{v \notin S} \gamma_v \omega_v^*(P_v)\right)}.$$

Le numérateur du membre de droite vaut $\left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2} s(\mathcal{G})} \cdot \prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v$ par le théorème 1.3. Pour le dénominateur, c'est-à-dire pour le facteur eulérien de la formule, il reste à appliquer les formules du théorème 1.4. \square

2. FAUX PLANS PROJECTIFS : ARITHMÉTICITÉ

Dans cette section, on présente les faux plans projectifs et on esquisse la preuve du fait que le groupe fondamental d'une telle surface complexe est un sous-groupe arithmétique du groupe des isométries $\text{PU}(2, 1)$ de $(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2, g_{\text{hyp}})$ (2.3). Nous faisons aussi quelques digressions sur le comptage des variétés localement symétriques générales (2.2), ce qui nous sera utile pour la dernière partie de ce rapport.

2.1. Géométrie des faux plans projectifs

Présentons d'abord les variétés complexes qui nous intéressent, en partant de conditions très faibles, c'est-à-dire topologiques, dans la définition.

DÉFINITION 2.1. — *Un faux plan projectif est une surface analytique complexe lisse, compacte et avec les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, mais non homéomorphe à celui-ci.*

Historiquement, F. Severi a conjecturé qu'une surface complexe homéomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ doit lui être isomorphe en tant que variété algébrique. Cette conjecture n'a été démontrée qu'après les travaux de S.-T. Yau concernant l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés compactes à première classe de Chern négative (preuve de la conjecture de Calabi [70]). On a d'ailleurs le renforcement suivant : une surface compacte avec les mêmes nombres de Betti que le plan projectif est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dès lors que son groupe fondamental est fini [3, V.1]. Quelques années plus tard, D. Mumford a introduit les faux plans projectifs comme dans la définition ci-dessus [41, Introduction] et a construit un exemple explicite, mais issu d'un raisonnement assez détourné (3.5). Il s'agit de belles surfaces complexes dans la mesure où elles cumulent les propriétés d'être algébriques et localement symétriques ; en outre, ce sont des surfaces de type général de caractéristique d'Euler topologique minimale.

Donnons-nous maintenant un faux plan projectif X . Par hypothèse, la caractéristique d'Euler topologique $\chi_{\text{top}}(X)$ de X vaut 3 et n'est autre que la classe de Chern $c_2(X)$ puisque X est compacte ; autrement dit : $c_2(X) = 3$. Concernant les classes caractéristiques de X , la formule de Todd-Hirzebruch (formule de Noether), implique d'ailleurs :

$$c_1^2(X) + c_2(X) \in 12\mathbf{Z},$$

soit

$$(*) \quad c_1^2(X) = -3 \text{ modulo } 12.$$

En outre, une égalité formelle entre classes caractéristiques [30, 4.6.1] implique que $c_1^2(X) - 2c_2(X)$ n'est autre que la classe de Pontryagin $p_1(X)$, et une égalité de cobordisme (formule de Thom-Hirzebruch [30, 8.2.2]) fournit :

$$p_1(X) = 3\tau(X),$$

où $\tau(X)$ est la signature de X , c'est-à-dire la signature de la forme d'intersection $H^2(X, \mathbf{R}) \times H^2(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^4(X, \mathbf{R})$. Étant donné que $b_2(X) = 1$, on a $\tau(X) = \pm 1$, et finalement :

$$(**) \quad c_1^2(X) = 6 + 3 \times \text{signe}(\tau(X)).$$

En combinant (*) et (**), on en conclut que $c_1^2(X) = 9$, ce qui implique que X est une variété projective.

Remarque 2.2. — Dans le même registre, essentiellement grâce à la formule de Noether et à la formule d'adjonction, on peut prouver qu'une surface algébrique, avec les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et de fibré canonique négatif ou nul, est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ [25, pp. 487-488].

Désormais, nous allons plutôt voir un faux plan projectif sous le point de vue de la géométrie différentielle, c'est-à-dire comme une variété localement symétrique.

2.2. Finitude non quantitative : un premier usage de la rigidité

Une première façon d'utiliser les outils de la théorie des réseaux de groupes de Lie pour étudier les faux plans projectifs consiste à prouver que les classes d'isomorphisme de ces surfaces sont en nombre fini. Nous allons expliquer que c'est une conséquence d'un théorème de H.-C. Wang et du théorème de rigidité forte de Mostow.

THÉORÈME 2.3 (H.-C. Wang). — *Soit G un groupe de Lie sans facteur compact, non localement isomorphe à $\text{SL}_2(\mathbf{R})$ ou $\text{SL}_2(\mathbf{C})$. On fixe une mesure de Haar sur G . Pour tout nombre réel $C > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de réseaux irréductibles de G dont le covolume soit majoré par C .*

Remarque 2.4. — L'énoncé de [67, 8.1] est erroné car il n'exclut pas les groupes localement isomorphes à $SL_2(\mathbf{C})$, comme cela est signalé dans [6, 8.3]. L'interprétation en géométrie hyperbolique de dimension 3 éclaire cette dernière situation (4.3). A. Borel, en étudiant dans [loc. cit.] les valeurs de la fonction volume sur les variétés riemanniennes couvertes par des espaces $(\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^2)^m \times (\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^3)^n$, rectifie l'énoncé. Il utilise notamment la notion de réseau *irréductible* (i.e. à projections denses sur les facteurs simples), voir [23, 13.4] et (4.4).

La démonstration est une astucieuse combinaison du théorème de rigidité locale de Calabi-Weil, de l'existence d'une présentation finie pour les réseaux des groupes de Lie connexes [67, 7.1] et du principal argument, dû à D. Kazhdan et G. Margulis, prouvant l'existence d'une borne inférieure strictement positive sur le covolume des réseaux d'un groupe de Lie semi-simple donné.

Preuve (esquisse). — Précisément :

(i) un théorème de Weil dit que les petites déformations de l'inclusion d'un réseau Γ dans G sont des conjugaisons de Γ (voir [53, 6.7] et [37, VII.5.25] pour les énoncés précis) ;

(ii) un théorème de Kazhdan-Margulis fournit un voisinage, disons U , de l'élément neutre 1_G tel que pour tout sous-groupe discret Δ de G on ait $g\Delta g^{-1} \cap U = \{1_G\}$ pour un $g \in G$ convenable [53, 11.8].

On raisonne par l'absurde. Par compacité, et au prix de quelques extractions, on dispose d'une suite $\{\Gamma_n\}_{n \geq 0}$ de réseaux de G , deux à deux non conjugués, intersectant trivialement U et tels que :

1. la suite des covolumes $\{\text{Vol}(G/\Gamma_n)\}_{n \geq 0}$ est convergente, de limite $b > 0$;
2. la suite $\{\Gamma_n\}_{n \geq 0}$ est convergente pour la topologie (compacte) de Chabauty sur les sous-groupes fermés de G [13, VIII.5].

Notons Γ le sous-groupe limite : en utilisant U on voit que Γ est discret dans G . Par semi-continuité du covolume [53, 1.20], on a $\text{Vol}(G/\Gamma) \leq b$. En particulier Γ est un réseau ; il admet donc une présentation finie, disons de générateurs $h^{(i)}$, $1 \leq i \leq r$, et de relateurs $w_j(h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(r)})$, $1 \leq j \leq s$. Par définition de la convergence de Chabauty, on a des suites $\{h_n^{(i)}\}_{n \geq 0}$, avec $h_n^{(i)} \in \Gamma_n$, telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{(i)} = h^{(i)}$. Pour n assez grand, les mots $w_j(h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(r)})$ sont dans $\Gamma_n \cap U = \{1\}$, ce qui permet de définir une suite d'homomorphismes $r_n : \Gamma \rightarrow \Gamma_n$, qui converge (dans la variété des homomorphismes de Γ dans G) vers l'inclusion $\Gamma \subset G$. Par rigidité locale, pour n assez grand l'homomorphisme r_n est une conjugaison. Ceci implique que la suite $\left\{ \frac{\text{Vol}(G/\Gamma)}{\text{Vol}(G/\Gamma_n)} = \frac{\text{Vol}(G/r_n(\Gamma))}{\text{Vol}(G/\Gamma_n)} \right\}_{n \geq 0}$ est une suite stationnaire de nombres entiers positifs, de limite $\frac{\text{Vol}(G/\Gamma)}{b} \geq 1$. Ainsi $\text{Vol}(G/\Gamma) = b$ et donc $[\Gamma_n : r_n(\Gamma)] = 1$ pour n

assez grand. Ceci implique que les sous-groupes Γ_n sont conjugués entre eux à partir d'un certain rang : contradiction. \square

Revenons à la géométrie différentielle et donnons-nous un espace symétrique \widetilde{X} de type non compact sans facteur euclidien, i.e. dont le groupe d'isométries $H = \text{Isom}(\widetilde{X})$ est semi-simple, sans facteur compact. La variété \widetilde{X} est à courbure sectionnelle ≤ 0 , donc est contractile. Soit X une variété revêtue par \widetilde{X} . Par le lemme de point fixe de Bruhat-Tits [15, 3.2], dû à É. Cartan pour les espaces symétriques, le groupe fondamental Γ de X (agissant librement sur \widetilde{X}) est sans torsion ; on peut donc parler de sa caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ et on a $\chi(\Gamma) = \chi(X)$. En fait, il est possible et très utile de définir la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ d'un réseau quelconque Γ de H , en posant : $\chi(\Gamma) = \frac{\chi(\Delta)}{[\Gamma:\Delta]}$ où Δ est un sous-groupe d'indice fini sans torsion de Γ (un tel sous-groupe existe car Γ est de type fini et linéaire en caractéristique 0 : c'est le *lemme de Selberg*).

Comme dans la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces, il y a un lien entre volume et caractéristique d'Euler-Poincaré. Étant donné un groupe de Lie réductif connexe H , il existe une unique mesure invariante μ sur H (éventuellement nulle) telle que pour tout sous-groupe Γ discret, cocompact et sans torsion de H , on ait : $\chi(\Gamma) = \mu(H/\Gamma)$ [58, §3]. On parle de *mesure d'Euler-Poincaré* pour H ; cette mesure est non nulle si, et seulement si, le rang de H est égal au rang de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal de H .

Le problème de comptage des faux plans projectifs est un problème de comptage de variétés localement symétriques à caractéristique d'Euler fixée. Par le paragraphe précédent, ce problème se généralise en celui de compter des variétés localement symétriques à volume normalisé majoré. Le théorème de H.-C. Wang ci-dessus assure que dans H , il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de groupes fondamentaux de variétés localement symétriques revêtues par \widetilde{X} et de volume (normalisé) majoré par une constante donnée. Le théorème fondamental qui permet de passer du type d'homotopie au type d'isométrie d'une variété localement symétrique est le théorème de *rigidité forte* de G.D. Mostow [39] :

THÉORÈME 2.5 (G.D. Mostow). — *Soient X, X' des variétés localement symétriques complètes à courbure ≤ 0 , de dimension ≥ 3 , de même volume fini et irréductibles. On suppose qu'il existe un isomorphisme abstrait $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X')$. Alors X et X' sont isométriques.*

Revenons enfin aux faux plans projectifs et donnons-nous X et X' deux telles surfaces non isomorphes en tant que variétés algébriques. La structure complexe d'un espace symétrique hermitien étant naturellement associée à la métrique riemannienne, on peut voir X et X' comme des variétés de même volume (car $\chi(X) = \chi(X') = 3$),

toutes deux revêtues par $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$, mais non isométriques. Par rigidité de Mostow, cela fournit deux réseaux (cocompacts, sans torsion) de $\mathrm{PU}(2, 1)$, de même covolume mais non isomorphes (en particulier non conjugués). Le théorème de H.-C. Wang implique donc la finitude du nombre de classes d'isomorphisme de faux plans projectifs.

Remarque 2.6. — Dans [3, V.1.2], un argument de composantes connexes de schéma de Chow est donné pour prouver la finitude des classes d'isomorphisme de faux plans projectifs, mais il faut commencer par utiliser le théorème de Calabi-Vesentini qui a été la motivation du théorème de rigidité locale d'A. Weil. Nous avons choisi un traitement relevant complètement des réseaux de groupes de Lie car c'est le bon contexte pour les comptages géométriques qu'on veut présenter en 4.3 et 4.4.

L'article de G. Prasad et S.K. Yeung [50] fournit une version quantitative très précise de cette finitude. Le point de départ est bien entendu le lien entre caractéristique d'Euler et covolume du groupe fondamental. Pour être effectif, il s'agit de calculer précisément le covolume en question, et c'est ce qui est permis par la formule de 1.2. Mais il faut auparavant s'assurer que le groupe fondamental d'un faux plan projectif est un groupe arithmétique. C'est ce qui a été prouvé indépendamment par B. Klingler et S.K. Yeung. Jusqu'à la fin de cette section, nous allons revenir rapidement sur la démonstration de ce fait.

2.3. Arithméticité du groupe fondamental

Commençons par rappeler ce qu'est un réseau arithmétique dans un groupe de Lie réel.

DÉFINITION 2.7. — *Un réseau Γ d'un groupe algébrique réel semi-simple G est dit arithmétique s'il existe un sous-groupe algébrique \mathbf{H} d'un groupe SL_m , défini sur \mathbf{Q} , et pour lequel il existe un homomorphisme $p : \mathbf{H}(\mathbf{R}) \rightarrow G$ surjectif, à noyau compact et tel que Γ et $p(\mathbf{H}(\mathbf{Q}) \cap \mathrm{SL}_m(\mathbf{Z}))$ soient commensurables.*

La réduction de la preuve de l'arithméticité d'un groupe discret à celle de diverses super-rigidités, aujourd'hui classique, est une des plus belles idées des travaux de Margulis sur les réseaux de groupes de Lie [37, IX.2]. Rappelons aussi ce qu'est la super-rigidité, et pour cela revenons justement à la rigidité de Mostow (2.2). Voyons l'isomorphisme de groupes fondamentaux $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X')$ comme une représentation linéaire de $\pi_1(X)$ dans le groupe de Lie $\mathrm{Isom}(\tilde{X}')$, où \tilde{X}' est le revêtement universel de X' . Le groupe $\mathrm{Isom}(\tilde{X}')$ est un groupe algébrique réel, disons \mathbf{H} , adjoint (et simple vu l'hypothèse d'irréductibilité faite sur X'). La flèche $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{R})$ ainsi obtenue est d'image discrète, mais surtout elle est non compacte pour la topologie forte et dense pour la topologie de Zariski. La densité pour la topologie de Zariski des sous-groupes fermés de covolume fini est non triviale, c'est un théorème d'A. Borel

(une jolie preuve mesurable de cela est due à H. Furstenberg [72, 3.2]). Bref, on peut se placer dans une situation plus générale : on considère des homomorphismes de groupes $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{H}(F)$, où Γ est un réseau des points réels d'un \mathbf{R} -groupe algébrique simple \mathbf{G} , où \mathbf{H} est un groupe algébrique simple adjoint défini sur un corps local F (archimédien ou non) et où l'image $\varphi(\Gamma)$ est Zariski-dense, mais non nécessairement discrète. On dit que l'inclusion du réseau Γ dans $\mathbf{G}(\mathbf{R})$ est *super-rigide* si pour toute flèche $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{H}(F)$ d'image Zariski-dense, ou bien $\varphi(\Gamma)$ est relativement compact, ou bien F est archimédien et φ se prolonge en un homomorphisme de groupes algébriques $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$. Si seule l'arithméticité est en vue, on peut en réalité se limiter à prouver que certaines flèches bien spécifiques vers des formes de \mathbf{G} sont super-rigides.

Expliquons maintenant pourquoi la géométrie hyperbolique complexe est le cas limite (et encore ouvert) de bien des résultats de théorie des groupes et de géométrie. Tout d'abord, les résultats de super-rigidité de Margulis sont valides en rang supérieur, ce qui implique que du point de vue de l'arithméticité, le cas des réseaux (irréductibles) de tous les groupes de Lie de rang ≥ 2 est élucidé. Il reste donc le cas des espaces symétriques de rang 1, c'est-à-dire des espaces hyperboliques. Pour ceux-ci, on peut constater toute une gradation de phénomènes de rigidité et d'arithméticité, les géométries les plus rigides étant celles des espaces hyperboliques quaternioniques et le plan des octaves de Cayley (il s'agit des géométries de rang 1 dont le groupe d'isométrie possède la propriété (T) de Kazhdan [72, § 7]). Dans ce cas, les réseaux sont super-rigides (donc arithmétiques) d'après K. Corlette [21] pour le cas archimédien et d'après M. Gromov et R. Schoen [28] pour le cas non archimédien. Contrairement au cas du rang supérieur, les techniques ne sont pas ergodiques mais font appel à la notion d'application harmonique [45] ; on y reviendra (2.4 et 2.5). Le fait que la courbure sectionnelle soit constante en géométrie hyperbolique réelle rend assez faciles les recollements de variétés modelées sur ces espaces. C'est ce qui a permis à M. Gromov et I. Piatetski-Shapiro d'utiliser une ingénieuse technique d'hybridation de (demi-)variétés hyperboliques arithmétiques à bord, construites à partir de réseaux non commensurables. Le résultat est la preuve de l'existence, en toute dimension, de variétés complètes de volume fini à courbure -1 et à groupe fondamental non arithmétique [27].

Il reste donc le cas des espaces hyperboliques complexes $(\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^n, g_{\text{hyp}})$ qui sont encore difficiles à comprendre finement (voir toutefois [24]). Aussi bien du point de vue de la théorie des groupes que de la géométrie, ces espaces soulèvent beaucoup de questions et de problèmes. Par exemple, les hyperplans médiateurs ne sont pas totalement géodésiques, mais surtout la géométrie riemannienne de ces espaces est compliquée par le fait que la courbure sectionnelle n'est pas constante (du point de vue des groupes de Lie, le système de racines de $\text{PU}(n, 1)$ est non réduit). Les recollements sont beaucoup plus difficiles et d'ailleurs la question de l'existence de variétés à groupe fondamental

non arithmétique en toute dimension est largement ouverte (on ne connaît de tels exemples qu'en basse dimension [22]).

Ceci étant dit, il est bien tentant de combiner des techniques de géométrie complexe avec les outils des réseaux de groupes de Lie pour approfondir la connaissance des réseaux de $\mathrm{PU}(n, 1)$. Dans cet esprit, énonçons maintenant la conjecture de J. Rogawski [54], qui est le fil conducteur de beaucoup de travaux portant sur les groupes fondamentaux de surfaces hyperboliques complexes.

CONJECTURE 2.8 (J. Rogawski). — *Soit X une surface algébrique complexe revêtue par la boule hyperbolique complexe $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$. On fait les hypothèses cohomologiques suivantes :*

- *le premier nombre de Betti $b_1(X)$ est nul ;*
- *on a $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Q})) = 1$.*

Alors le groupe fondamental de X est un sous-groupe arithmétique du groupe de Lie réel $\mathrm{PU}(2, 1)$ et il se construit à partir d'une algèbre à division involutive de dimension 3 sur \mathbb{Q} .

L'idée générale qui sous-tend cette conjecture est qu'il faut faire des hypothèses supplémentaires et définir certaines classes spécifiques de réseaux hyperboliques complexes pour espérer prouver des résultats d'arithméticité. Les hypothèses sont de nature cohomologique. Par exemple, l'annulation du premier nombre de Betti peut être vue comme une version faible de la propriété (T) de Kazhdan, qui elle-même est équivalente à l'annulation de la 1-cohomologie à coefficients dans toute représentation unitaire du groupe considéré. Le résultat le plus frappant dans cette direction est bien entendu celui des faux plans projectifs, dû indépendamment à B. Klingler [34] et S.K. Yeung [71]. Chacun de ces auteurs isole dans son travail d'intéressants résultats intermédiaires. Voici donc le résultat qui va être l'objet des deux prochaines sous-sections.

THÉORÈME 2.9 (B. Klingler et S.K. Yeung). — *Soit X un faux plan projectif et soit Γ son groupe fondamental. Alors Γ est un sous-groupe arithmétique de $\mathrm{PU}(2, 1)$.*

Remarque 2.10. — Finissons par mentionner un autre domaine reliant théorie des groupes discrets et géométrie complexe : l'étude des groupes de Kähler, c'est-à-dire des groupes fondamentaux de variétés kählériennes compactes (pour lesquels la première question ouverte est de savoir s'ils forment une classe plus vaste que celle des groupes fondamentaux de variétés projectives). Les problèmes sont un peu différents puisque D. Toledo construit dans ce cadre des groupes de type fini non linéaires (car non résiduellement finis). Une référence est [1], mais elle ne rend pas compte de travaux récents de F. Campana, Th. Delzant, M. Gromov...

Désormais, nous nous intéressons essentiellement aux super-rigidités du groupe fondamental Γ d'un faux plan projectif X .

2.4. Super-rigidité archimédienne du groupe fondamental

Dans cette partie, il s'agit de travailler sur des représentations linéaires de Γ à valeurs dans les points d'un groupe algébrique archimédien qui est une forme du groupe PSL_3 . En effet le groupe Γ est un sous-groupe de $\mathrm{PU}(2, 1)$, et ce groupe de Lie simple est de type A_2 . En fait, la partie archimédienne des super-rigidités qui nous intéressent est la suivante :

Soit X un faux plan projectif. Soit $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ une représentation d'image Zariski-dense. Alors ρ se prolonge en une représentation algébrique $\mathrm{PU}(2, 1) \rightarrow \mathrm{PSL}_3$.

On va voir que cette situation ressemble un peu à celle où l'on regarde un réseau d'un groupe de Lie simple et où l'on cherche à le déformer dans un groupe de Lie plus gros (par exemple, le résultat n'est pas le même suivant qu'on déforme un réseau de $\mathrm{SO}(n, 1)$ dans $\mathrm{SO}(n+1, 1)$, ou un réseau de $\mathrm{SU}(n, 1)$ dans $\mathrm{SU}(n+1, 1)$). Cependant, le problème n'est pas ici de démontrer des résultats de rigidité, mais plutôt de contrôler les déformations en distinguant au départ une bonne classe de représentations des groupes de Kähler ; cette classe de représentations provient de la théorie de Hodge.

Plus précisément, B. Klingler [34, § 3] utilise des *domaines de Griffiths* [26]. Il s'agit d'espaces homogènes G/V où G est le groupe unitaire d'un \mathbf{C} -espace vectoriel H de dimension finie muni d'une forme hermitienne h , et où V est un sous-groupe compact, en fait le stabilisateur d'une somme directe $H = \bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} H^r$ sur les termes de laquelle h est un produit scalaire hermitien (au signe près). En termes de théorie de Lie, on associe à $H = \bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} H^r$ un drapeau. Le groupe de Lie complexe $Q_{\mathbf{C}}$ stabilisateur de ce drapeau est un sous-groupe parabolique du groupe de Lie complexifié $G_{\mathbf{C}}$ et $V_{\mathbf{C}}$ est un facteur de Lévi de $Q_{\mathbf{C}}$. L'espace $D = G/V$ est la base d'une fibration $G/K \rightarrow G/V$ où K est un sous-groupe compact maximal de G bien déterminé par V ; c'est aussi la source d'un plongement ouvert $D \hookrightarrow \check{D}$ où \check{D} est la variété de drapeaux $G_{\mathbf{C}}/Q_{\mathbf{C}}$. Si M est une variété kählérienne compacte, une *représentation de Hodge* de $\pi_1(M)$ dans H est une représentation $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ munie d'une application holomorphe ρ -équivariante $f : \tilde{M} \rightarrow D$, de source le revêtement universel \tilde{M} de M et satisfaisant à une certaine condition de transversalité (on aurait pu aussi adopter le point de vue des variations de structures de Hodge complexes sur M).

L'intérêt des représentations de Hodge a été mis en avant par les travaux fondamentaux de C. Simpson selon lesquels toute représentation de groupe fondamental d'une variété projective peut être déformée en une telle représentation [59, § 4]. C'est A. Reznikov qui, semble-t-il le premier, a pensé à utiliser la théorie de C. Simpson

pour la conjecture de J. Rogawski [54]. À ce stade, il reste à comprendre les représentations de Hodge dans les cas particuliers qui nous intéressent. B. Klingler, plutôt que de faire des calculs de fibrés de Higgs comme A. Reznikov, a introduit les domaines de Griffiths, ce qui lui permet de prouver les résultats suivants [34, Proposition 3.3] :

PROPOSITION 2.11. — *Soit X une surface projective satisfaisant les hypothèses de la conjecture de Rogawski, de groupe fondamental Γ et de revêtement universel \widetilde{X} .*

(i) *Soit $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{PU}(p, q)$ une représentation de Hodge avec $p + q = 3$. Alors, ou bien ρ est unitaire, ou bien son image est conjuguée à $\mathrm{PU}(2, 1)$ dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$. Dans ce dernier cas, il existe une application holomorphe, localement immersive et ρ -équivariante de \widetilde{X} vers $\mathbb{B}_{\mathbf{C}}^2$.*

(ii) *Si le revêtement universel \widetilde{X} est $\mathbb{B}_{\mathbf{C}}^2$ et si le groupe de Néron-Severi modulo torsion $H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbf{Z})/\mathrm{tors}$ est engendré par la classe de la métrique de Kähler à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -2 , alors ρ est conjuguée dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ à l'inclusion naturelle $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$.*

Pour l'instant, nous n'avons pas fait d'hypothèse de densité de Zariski concernant l'image des représentations $\Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$. L'étape suivante fait justement cette hypothèse [34, Proposition 3.4] : si X est un faux plan projectif et si $\Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ est Zariski-dense, alors la représentation est rigide dans l'espace de représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C}))$, i.e. toute déformation de cette représentation est une conjugaison [53, VI]. Pour la super-rigidité archimédienne, on conclut alors de la façon suivante. Si X est un faux plan projectif et si $\Gamma \rightarrow \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ est Zariski-dense, alors cette représentation se déforme (par Simpson) sur une représentation de Hodge ; mais comme elle est rigide par ce qui précède, elle est elle-même de Hodge. Par le point (ii) de la proposition 2.11, elle se prolonge en une représentation algébrique $\mathrm{PU}(2, 1) \rightarrow \mathrm{PSL}_3$.

2.5. Super-rigidité non archimédienne du groupe fondamental

La partie non archimédienne des super-rigidités qui nous intéressent est la suivante :

Soit X un faux plan projectif. Soient F un corps local et \mathbf{G} une forme sur F de PSL_3 . On se donne $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \mathbf{G}(F)$ une représentation d'image Zariski-dense. Alors ρ est d'image relativement compacte dans $\mathbf{G}(F)$.

Remarque 2.12. — Dans les groupes algébriques non archimédiens, il n'y a pas de contradiction pour un sous-groupe entre être relativement compact et être Zariski-dense, comme l'illustre l'inclusion de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$. Dans les points réels d'un groupe algébrique défini sur \mathbf{R} , les semi-groupes compacts ne sont jamais denses pour la topologie de Zariski.

La principale technique est celle des applications harmoniques à valeurs dans des espaces singuliers, qui a été inaugurée par M. Gromov et R. Schoen [28]. L'idée est de considérer les applications ρ -équivariantes du revêtement universel \widetilde{X} vers l'immeuble de Bruhat-Tits Δ de \mathbf{G} sur F . L'immeuble affine Δ admet une métrique pour laquelle il est complet et à courbure ≤ 0 (techniquement, on parle d'espace complet, géodésique et CAT(0) [14], en référence semble-t-il à Cartan-Alexandrov-Toponogov). Alors qu'ils sont originellement définis par Bruhat-Tits à partir des tores F -déployés maximaux de \mathbf{G} , on peut caractériser métriquement les *appartements* de Δ comme les sous-espaces plats (i.e. isométriques à des espaces euclidiens) maximaux de Δ ; c'est une analogie de plus avec les espaces symétriques du cas archimédien. On définit sur l'espace des applications ρ -équivariantes $\widetilde{X} \rightarrow \Delta$ localement lipschitziennes, une fonctionnelle d'énergie, qui est convexe parce que l'espace but est à courbure ≤ 0 . L'hypothèse de Zariski-densité de l'image de ρ implique l'existence d'une application, disons f , qui est ρ -équivariante, lipschitzienne et qui minimise localement l'énergie : une telle application est dite *harmonique*. Dans le cas d'un espace d'arrivée lisse, on retrouve la définition différentielle classique [45]. Quand on suppose que ρ est non bornée, l'application f est non constante, hypothèse sous laquelle on travaille désormais afin d'aboutir à une contradiction.

Voici maintenant une notion propre au cas où l'espace d'arrivée est singulier. Un point de $x \in \widetilde{X}$ est dit *régulier* pour f s'il admet un voisinage U tel que $f(U)$ soit contenu dans un appartement de Δ , sinon il est dit *singulier*. On note $R(\widetilde{X}, \rho)$ le lieu des points réguliers pour f . C'est une partie ouverte dans \widetilde{X} et stable par Γ . On note $R(X, \rho)$ l'image de $R(\widetilde{X}, \rho)$ dans X : d'après [28, Theorem 6.4] le complémentaire $S(X, \rho)$ de $R(X, \rho)$ dans X est de codimension de Hausdorff ≥ 2 , ce qui autorise beaucoup de calcul différentiel classique dans cette situation.

Ce qu'on vient de décrire dans le paragraphe précédent peut être construit sans que X porte une structure complexe. En revanche, dans le cas (qui est le nôtre) où X est une variété projective complexe, il existe un revêtement de X , appelé *revêtement spectral*, dont la définition est assez technique et met en jeu le système des racines de \mathbf{G} vues comme formes affines sur un appartement. Ce revêtement permet de prouver que le lieu singulier $S(X, \rho)$ est une sous-variété algébrique de X [32, Lemma 2.1]. B. Klingler travaille au début avec des surfaces complexes, non nécessairement couvertes par $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$, mais satisfaisant les hypothèses cohomologiques de la conjecture de Rogawski (2.3); sous ces hypothèses plus générales, il peut démontrer que le lieu $S(X, \rho)$ des points singuliers est en fait une réunion finie de points.

En revanche, S.K. Yeung travaille dès le début avec des réseaux Γ de $\mathrm{PU}(2, 1)$, ce qui lui permet d'utiliser une conséquence de la rigidité de Weil impliquant que le groupe Γ est contenu dans les points rationnels d'une forme \mathbf{H} de PSL_3 sur un corps de nombres, disons K (ce raisonnement, dû à A. Weil, qui consiste à déduire une

propriété d'algébricité d'un résultat de rigidité [53, 6.6] est en quelque sorte l'ancêtre de celui qui prouve l'arithméticité à partir de super-rigidités). Il s'agit ensuite de démontrer que Γ est en fait formé de matrices à coefficients dans les entiers \mathcal{O}_K de K , ce qu'on appelle un réseau *entier*. Cette notion permet de bien comprendre le rôle de la super-rigidité non-arithmétique : le fait pour Γ de ne pas être entier dans $\mathbf{H}(K)$ est équivalent à l'existence d'une place non archimédienne pour laquelle l'inclusion de Γ dans $\mathbf{H}(K_v)$ est non bornée. Enfin, un réseau entier $\Gamma \subset \mathbf{H}(\mathcal{O}_K)$ est arithmétique si le seul facteur non compact de la restriction de Weil $\mathcal{B}_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{H})$ est le facteur non tordu, voir par exemple [72, pp. 120-121]. C'est à ce stade, pour passer de l'intégralité à l'arithméticité d'un réseau, que la super-rigidité archimédienne est utile.

Voici une partie du principal résultat énoncé par S.K. Yeung [71] (l'orateur n'a pas eu le temps de vérifier les détails de sa preuve). On a en outre omis les énoncés portant sur la construction arithmétique explicite du groupe fondamental, i.e. la dernière partie de la conjecture de Rogawski (2.3).

THÉORÈME 2.13. — *Soit Γ un réseau sans torsion cocompact de $\mathrm{PU}(2, 1)$ tel que la surface $X = \Gamma \backslash \mathbb{B}_{\mathbf{C}}^2$ satisfasse aux hypothèses de la conjecture de Rogawski. Alors Γ est un réseau entier. Si en outre le fibré canonique K_X est positif et égal à 3 fois un générateur du groupe de Néron-Severi modulo torsion $H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbf{Z})/\mathrm{tors}$, alors Γ est arithmétique.*

S.K. Yeung utilise le revêtement spectral, et sa définition usuelle, tout au long de son article. B. Klingler définit ce revêtement $p : Z \rightarrow X$ en partant d'un point de vue plus naturel en géométrie différentielle [38], qui consiste à tirer en arrière le fibré tangent de la variété cible en un fibré sur la variété de départ. Qu'est-ce que le fibré tangent de l'immeuble Δ ? C'est, en gros, la donnée en chaque point intérieur à une alcôve (i.e. non contenu dans un mur) de l'unique appartement le contenant. Notons W le groupe de Weyl sphérique de \mathbf{G} (c'est un groupe fini, isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou au groupe symétrique \mathcal{S}_3 suivant que \mathbf{G} est de rang 1 ou 2 ; en fait, le groupe de Weyl affine W_{aff} est le quotient du stabilisateur d'un appartement quelconque par son fixateur, et W est le quotient de W_{aff} par son sous-groupe de translations). Par la définition même des points réguliers et le point de vue des cocycles, B. Klingler construit un fibré plat $F_{\mathbf{R}}(X, \rho)$ de base $R(X, \rho)$ et de fibre l'espace vectoriel $V_{\mathbf{R}}$ sous-jacent à un appartement, muni d'une application d'holonomie $\tau : \pi_1(R(X, \rho)) \rightarrow W$. Le revêtement $p : Z \rightarrow X$ est le revêtement de X de groupe de Galois $\mathrm{Im}(\tau)$ qui trivialise $F(X, \rho) = F_{\mathbf{R}}(X, \rho) \otimes \mathbf{C}$; il existe naturellement sur Z une 1-forme holomorphe $\mu_Z \in H^0(Z, \Omega_Z^1 \otimes V)$ où $V = V_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$. Les principaux résultats sur p et μ_Z sont les suivants [34, Théorème 5 et Proposition 2.3].

THÉORÈME 2.14. — *On pose : $V^* \cdot \mu_Z = \{\alpha \circ \mu_Z : \alpha \in V^*\}$.*

- (i) *Le revêtement $p : Z \rightarrow X$ est non ramifié.*
- (ii) *Si le rang de \mathbf{G} sur F vaut 2, alors $H^0(Z, \Omega_Z^1) = V^* \cdot \mu_Z$.*

Dans la situation de (ii), le \mathbf{C} -espace vectoriel V est de dimension 2 car les appartements de Δ sont des pavages du plan euclidien par des triangles équilatéraux. La fin de la démonstration de super-rigidité non archimédienne est alors un joli raisonnement de courbes elliptiques tracées sur des variétés d'Albanese. Au départ, on utilise (ii) pour voir que la variété d'Albanese $\text{Alb}(Z) = H^0(Z, \Omega_Z^1)/H_1(Z, \mathbf{Z})$ est une surface abélienne admettant, quitte à changer le point base, le groupe \mathcal{S}_3 comme sous-groupe d'automorphismes. Cela impose de très fortes restrictions sur la géométrie de $\text{Alb}(Z)$ et permet d'aboutir à la contradiction cherchée depuis qu'on suppose que l'application harmonique f est non constante.

Remarque 2.15. — La difficulté de la question de super-rigidité non archimédienne qu'on vient d'aborder tient au fait que la variété X est de dimension 2 et que le rang des groupes cibles est 2. Intuitivement, on s'attend à ce que les preuves de super-rigidité soient facilitées dans les situations où le groupe cible est « trop petit » par rapport à la variété dont on considère le groupe fondamental. Le cas typique est celui où la dimension de la variété est supérieure au rang du groupe cible ; on dispose alors de théorèmes de factorisation (d'ailleurs utilisés par B. Klingler et S.K. Yeung quand les immeubles de Bruhat-Tits à l'arrivée sont des arbres [60]).

3. FAUX PLANS PROJECTIFS : COMPTAGE

Dans cette section, on explique rapidement le principe du comptage des faux plans projectifs : on spécialise la formule du covolume de G. Prasad au cas d'une forme anisotrope de SL_3 (3.2) et on utilise des estimées issues de la théorie analytique des nombres pour restreindre l'ensemble des corps de base possibles pour ces formes. On évoque également des constructions précédant la classification de Prasad-Yeung (3.5).

3.1. Réduction aux groupes arithmétiques principaux

Soit X un faux plan projectif. Le principal objectif de cette sous-section est de se mettre en position d'appliquer la formule du covolume (1.2). Une des hypothèses de cette formule est que le groupe algébrique ambiant soit simplement connexe (au sens des groupes algébriques) et une autre est que nous travaillions avec des groupes arithmétiques principaux. Comme il n'est pas anodin, quand on veut calculer précisément des covolumes, de raisonner à commensurabilité près, nous avons besoin d'introduire divers sous-groupes discrets. Ceci va nous conduire à utiliser des notations éventuellement différentes de ce qui précède.

Écrivons d'abord $X = \Pi \backslash \mathbb{B}_{\mathbf{C}}^2$, où $\Pi = \pi_1(X)$ est un sous-groupe discret et cocompact de $\mathrm{PU}(2,1) = \mathrm{Isom}(\mathbb{B}_{\mathbf{C}}^2, g_{\mathrm{hyp}})$. Les groupes d'isométries des espaces symétriques irréductibles sont des groupes algébriques sur \mathbf{R} simples et adjoints (i.e. à centre trivial). En fait, le groupe algébrique qui est le revêtement simplement connexe de $\mathrm{PU}(2,1)$ est $\mathrm{SU}(2,1)$, et on a une suite exacte : $1 \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rightarrow \mathrm{SU}(2,1) \rightarrow \mathrm{PU}(2,1) \rightarrow 1$. Notons $\tilde{\Pi}$ l'image réciproque de Π par l'homomorphisme surjectif de cette suite exacte. Par définition d'un faux plan projectif, on a $\chi(\Pi) = 3$ et par les propriétés élémentaires de la caractéristique d'Euler-Poincaré [58, § 1], on a donc $\chi(\tilde{\Pi}) = 1$.

Les résultats de la section 2 impliquent que le groupe $\tilde{\Pi}$ est un sous-groupe arithmétique (au sens de 2.3) de $\mathrm{SU}(2,1)$. En effet, même si dans cette dernière section on considère des flèches dont le groupe de départ est le groupe fondamental Π , pour prouver l'arithméticité de $\tilde{\Pi}$, par la réduction même de l'arithméticité à diverses super-rigidités, il suffit de considérer des homomorphismes Zariski-denses de $\tilde{\Pi}$ dans les points rationnels de formes du groupe adjoint $\mathrm{PU}(2,1)$. Or par Zariski-densité de l'image, toutes ces flèches se factorisent à travers $\mathrm{SU}(2,1) \rightarrow \mathrm{PU}(2,1)$. Nous sommes donc amenés à comparer précisément le sous-groupe discret, cocompact $\tilde{\Pi}$ de $\mathrm{SU}(2,1)$ à un sous-groupe arithmétique principal, c'est-à-dire pour lequel il existe un corps de nombres k , une k -forme \mathbf{G} de $\mathrm{SU}(2,1)$ et une famille $P = (P_v)_{v \in V_f}$ de sous-groupes parahoriques (avec $P_v \subset \mathbf{G}(k_v)$) tels que $\tilde{\Pi}$ soit commensurable à $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$. En outre, il existe une place archimédienne v_0 telle que $\mathbf{G}(k_{v_0})$ soit isomorphe à $\mathrm{SU}(2,1)$ et que pour toute autre $v \in V_\infty \setminus \{v_0\}$ le groupe $\mathbf{G}(k_v)$ soit compact. Par le critère de Godement (1.5), le groupe algébrique \mathbf{G} est donc anisotrope sur k .

Nous avons besoin de savoir que le k -groupe algébrique \mathbf{G} peut être décrit assez précisément. Par la classification de J. Tits et A. Weil des groupes semi-simples [65], une telle k -forme est donc une forme extérieure de SL_3 et on a deux possibilités, chacune faisant intervenir une extension quadratique imaginaire ℓ de k . Ou bien \mathbf{G} est le groupe spécial unitaire d'une forme hermitienne sur ℓ^3 anisotrope sur k (on parle de *k -forme de première espèce* de SL_3), ou bien \mathbf{G} est décrit au moyen d'une algèbre à division cubique \mathcal{D} munie d'une involution de seconde espèce σ et de centre ℓ (on parle de *k -forme de seconde espèce*). Construisons maintenant un sous-groupe arithmétique principal Λ à partir de cela, en construisant une famille convenable de sous-groupes parahoriques P_v , $v \in V_f$. Si v est ramifiée (resp. non ramifiée) dans ℓ , on choisit un sous-groupe parahorique P_v qui est normalisé par $\tilde{\Pi}$ et maximal (resp. minimal) pour cette propriété. Alors $\prod_{v \in V_f} P_v$ est ouvert dans $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ et le groupe qui nous intéresse est le sous-groupe arithmétique principal $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$. Notons enfin Γ le normalisateur de Λ dans $\mathbf{G}(k_{v_0})$. Par [8, § 1], on a $N_{\mathbf{G}(k)}(\Lambda) = \Lambda$, et donc $\Gamma \cap \mathbf{G}(k) = \Lambda$. Remarquons finalement que, puisque Γ contient $\tilde{\Pi}$:

On vient de construire naturellement, à partir du groupe fondamental $\Pi \subset \text{PU}(2, 1)$, un sous-groupe arithmétique $\Gamma \subset \mathbf{G}(k_{v_0}) \simeq \text{SU}(2, 1)$ dont la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ est l'inverse d'un nombre entier.

Ceci, interprété en termes de covolume, constitue une première contrainte de classification et de construction. On renvoie à [50, 1.2-1.3] pour plus de détails.

3.2. Application de la formule de covolume

Avec les notations précédentes, rappelons maintenant la formule du covolume (1.2), que nous pouvons justement appliquer au sous-groupe arithmétique principal Λ du groupe simplement connexe $\mathbf{G}(k_{v_0})$:

$$\mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda) = D_k^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}} \right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathcal{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v \right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \mathcal{E}.$$

Remarque 3.1. — Dès [49, 3.11], G. Prasad distingue le cas où $S = V_\infty$ par le fait que la relation avec les fonctions L des corps de nombres est plus immédiate dans cette situation.

Il s'agit de rendre encore un peu plus explicite cette formule dans notre situation bien spécifique. Le groupe \mathbf{G} est une k -forme extérieure anisotrope de SL_3 , où k est un corps de nombres totalement réel. On en déduit déjà que $\dim(\mathbf{G}) = 8$ et que $\#V_\infty = [k : \mathbf{Q}]$; notons d'ailleurs d le degré de l'extension k/\mathbf{Q} . Le groupe \mathcal{G} est lui aussi une k -forme extérieure de SL_3 , mais il est de rang 1 car quasi-déployé. Nous travaillons avec des sous-groupes arithmétiques de $\text{SU}(2, 1)$ et nous sommes dans le cas exceptionnel de la définition du nombre $\mathfrak{s}(\mathcal{G})$ puisque le système de racines absolu est de type A_2 (le système de racines relatif est BC_1). Précisément, nous avons : $\mathfrak{s}(\mathcal{G}) = 5$. Les exposants du groupe de Weyl sphérique sont $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$ [12, V.6 et planches]. On a donc :

$$\mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda) = D_k^4 \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^2} \right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{1}{16\pi^5} \right)^d \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \mathcal{E}.$$

Comme le groupe \mathbf{G} est simplement connexe, on a $\tau_k(\mathbf{G}) = 1$ par [35], et donc :

$$\mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda) = \frac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{D_k} \cdot \frac{1}{(16\pi^5)^d} \cdot \mathcal{E}.$$

Par ailleurs, par proportionnalité de Hirzebruch [30, § 22], on a :

$$\chi(\Lambda) = 3 \cdot \mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda),$$

donc si nous revenons à des considérations de caractéristique d'Euler-Poincaré, en nous rappelant que $\chi(\Gamma) = \frac{\chi(\Lambda)}{[\Gamma:\Lambda]}$ est l'inverse d'un nombre entier (3.1), nous obtenons déjà la contrainte que

$$\frac{3}{[\Gamma : \Lambda]} \cdot \frac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{D_k} \cdot \frac{1}{(16\pi^5)^d} \cdot \overline{\mathcal{E}}$$

doit être l'inverse d'un nombre entier.

À ce stade, on peut ajouter que des arguments de cohomologie galoisienne avaient permis à A. Borel et G. Prasad [8, 2.9 et 5.3-5.5] de démontrer que l'indice $[\Gamma : \Lambda]$ est une puissance de 3 et qu'il est majoré par 3 fois l'ordre du sous-groupe du groupe $\text{Cl}(\ell)$ des classes de ℓ formé des éléments d'ordre 1 ou 3 [50, 2.3].

Ainsi, il reste à travailler sur le produit eulérien \mathcal{E} de la formule, qui vaut $\prod_{v \in V_f} e(P_v)$ où le facteur local $e(P_v)$ est $\frac{q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}$. Commençons par une remarque naïve.

Remarque 3.2. — Remplaçons le groupe \mathbf{G} par SL_3 et considérons la formule du covolume pour le choix de sous-groupes parahoriques maximaux $P_v = \text{SL}_3(\mathcal{O}_v)$ pour toute $v \in V_f$. Alors nous avons : $\overline{\mathbf{M}}_v = \overline{\mathcal{M}}_v = \text{SL}_3$ pour toute $v \in V_f$; en particulier $q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))} = q_v^8$. Par ailleurs, $\text{SL}_3(q_v)$ est d'ordre $q_v^3 \cdot (q_v - 1)^2 \cdot (1 + 2q_v + 2q_v^2 + q_v^3) = q_v^3 \cdot (1 - q_v^{-2}) \cdot (1 - q_v^{-3})$. Par conséquent, dans ce cas le produit eulérien \mathcal{E} est égal à $\prod_{v \in V_f} (1 - \frac{1}{q_v^2})^{-1} \cdot (1 - \frac{1}{q_v^3})^{-1} = \zeta_k(2) \cdot \zeta_k(3)$.

D'après un résultat classique de cohomologie galoisienne, le groupe \mathbf{G} , qui est une k -forme du groupe SL_3 , est quasi-déployé en presque toutes les places v . Cependant, on doit prendre garde au comportement de chaque place par rapport à l'extension ℓ de k ; en effet, le facteur local $e(P_v)$ n'est pas le même suivant que v est décomposée ou inerte dans ℓ . Ceci explique en particulier le fait que la valeur $L_{\ell/k}(3)$ remplace $\zeta_k(3)$ par rapport à la remarque naïve ci-dessus. On a besoin d'être un peu technique pour expliquer cela précisément : aux places où le sous-groupe parahorique P_v de $\mathbf{G}(k_v)$ est hyperspécial, on a

- $e(P_v) = (1 - \frac{1}{q_v^2})^{-1} \cdot (1 - \frac{1}{q_v^3})^{-1}$ si v se décompose dans ℓ ;
- $e(P_v) = (1 - \frac{1}{q_v^2})^{-1} \cdot (1 + \frac{1}{q_v^3})^{-1}$ si v est inerte dans ℓ .

Pour utiliser ultérieurement des estimations de théorie analytique des nombres, G. Prasad et S.K. Yeung font apparaître \mathcal{E} comme une modification de $\zeta_k(2) \cdot L_{\ell/k}(3)$ en un nombre fini de facteurs. La modification est indexée par l'ensemble noté \mathcal{T} dans [50, 2.2] et défini par : $\mathcal{T} = \{v \in V_f : v \text{ est non ramifiée en } \ell \text{ et } P_v \text{ n'est pas hyperspécial}\}$.

3.3. Usage de théorie analytique des nombres

Première intervention de la théorie des nombres : majorations de discriminant à partir de majorations de covolume. Partons d'une toute dernière inégalité obtenue par des arguments de groupes algébriques [50, 2.6 (2)] :

$$\frac{1}{3} \geq \frac{D_\ell^{\frac{5}{2}} \cdot \zeta_k(2) \cdot L_{\ell/k}(3)}{3(16\pi^5)^d \cdot h_{\ell,3} \cdot D_k} \cdot \prod_{v \in \mathcal{T}} e''(P_v).$$

On a simplement besoin d'expliquer ici que h_ℓ est l'ordre du groupe des classes $\text{Cl}(\ell)$ de ℓ et que $h_{\ell,3}$ est l'ordre du sous-groupe de $\text{Cl}(\ell)$ formé des éléments d'ordre 1 ou 3. En outre les facteurs $e''(P_v)$ sont des modifications des facteurs $e(P_v)$ (bien interprétables en termes de volumes de sous-groupes parahoriques) introduites pour compenser le fait qu'on force les valeurs $\zeta_k(2)$ et $L_{\ell/k}(3)$ à apparaître dans la formule du covolume. Il est important de noter que $e''(P_v) \geq 1$ pour tout $v \in \mathcal{T}$. Des calculs directs permettent par ailleurs de vérifier que $\zeta_k(2) \cdot L_{\ell/k}(3) > 1$ et nous obtenons déjà une majoration de $\frac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{h_{\ell,3} \cdot D_k}$, et donc de $\frac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{h_\ell \cdot D_k}$, par une constante.

Ensuite, il s'agit de majorer h_ℓ . G. Prasad et S.K. Yeung le font en utilisant l'estimation de Brauer-Siegel :

$$h_\ell \cdot \frac{R_\ell}{w_\ell} \leq s(s-1)\Gamma(s)^d \left((2\pi)^{-2d} D_\ell \right)^{\frac{s}{2}} \zeta_\ell(s),$$

valable pour tout $s > 1$ et où R_ℓ est le régulateur de ℓ [11, Chap. 2, 4.4] et w_ℓ est l'ordre du groupe des racines d -ièmes de l'unité dans ℓ . Ils combinent cette inégalité à une minoration de $\frac{R_\ell}{w_\ell}$ en fonction du degré $d = [k : \mathbf{Q}] = \frac{1}{2}[\ell : \mathbf{Q}]$ due à R. Zimmert (ils utilisent aussi par la suite des améliorations dues à I.Sh. Slavutskii, puis à E. Friedman). L'estimation initiale de R. Zimmert est [73] :

$$\frac{R_\ell}{w_\ell} \geq 0,02e^{0,1d},$$

et utiliser l'estimation d'I.Sh. Slavutskii [61] permet finalement d'obtenir :

$$D_k^{\frac{1}{d}} \leq D_\ell^{\frac{1}{2d}} < f(\delta, d)$$

où $\delta \in]0; 2]$ et $f(\delta, d) = \left(\frac{\delta(1+\delta)}{0,00136} \right)^{\frac{1}{(3-\delta)d}} (2^{3-\delta} \pi^{4-\delta} \Gamma(1+\delta) \zeta(1+\delta)^2 e^{-0,57})^{\frac{1}{3-\delta}}$.

Deuxième intervention de la théorie des nombres : minoration du discriminant en fonction du degré du corps de nombres. Dans la section 6 de leur article, G. Prasad et S.K. Yeung utilisent les travaux d'A. Odlyzko pour minorer $D_k^{\frac{1}{d}}$ en fonction de d [42]. Si l'on note $M_r(d)$ (resp. $M_c(d)$) le minimum des $D_F^{\frac{1}{d}}$ lorsque F parcourt l'ensemble des corps de nombres totalement réels (resp. totalement imaginaires) de

degré d , on peut trouver [50, 6.3] une fonction explicite $\mathfrak{N}(d)$ de d , croissante, telle que

$$M_r(d) \geq \mathfrak{N}(d) \text{ pour tout } d > 1$$

qui améliore notablement l'inégalité de Minkowski : $M_r(d) \geq \left(\frac{d^d}{d!}\right)^{\frac{2}{d}}$. En outre, une minoration de $M_c(d)$ est également obtenue grâce aux tables disponibles sur la page personnelle d'A. Odlyzko [43].

Troisième intervention de la théorie des nombres : majoration du degré du corps de base. C'est bien entendu ce qui est en vue, compte tenu des deux premières étapes. Bien que ce soit la première chose à faire, l'argument complet de [50, §7] n'est pas une simple combinaison de celles-ci. Mais commençons par cela : d'une part on évalue $f(\delta, d)$ en $\delta = 0, 9$ et $d = 20$, ce qui donne $D_k^{\frac{1}{d}} < 16, 38$; d'autre part, par calcul direct impliquant l'expression explicite de \mathfrak{N} , on a : $M_r(d) \geq \mathfrak{N}(20) > 16, 4$. Cela permet déjà de voir que le corps de base k du groupe algébrique \mathbf{G} satisfait $d = [k : \mathbf{Q}] < 20$. Les valeurs de d entre 15 et 20 sont exclues à nouveau au moyen des tables de [43]. Enfin, un argument astucieux de corps de classes de Hilbert, distinguant deux cas suivant la valeur de h_ℓ , permet d'obtenir : $d \leq 7$ [50, 7.2]. De manière générale, pour les raisonnements avancés, le nombre de classes est l'invariant immédiatement utilisé après le discriminant ; c'est notamment ce qui permet de conclure, au terme de la section 7 de [loc. cit.], que $d \leq 5$.

Remarque 3.3. — En supposant que le corps de base est \mathbf{Q} — ce qui est *a posteriori* la majorité des cas — des arguments similaires prouvent dans un premier temps qu'une borne sur le discriminant D_ℓ est 461. Ensuite, par examen de tables numériques, G. Prasad et S.K. Yeung prouvent que le corps quadratique ℓ doit être de la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{-a})$ avec $a \in \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 11; 15; 19; 23; 31\}$. Au moyen de l'équation fonctionnelle $L_{\ell/\mathbf{Q}}(3) = -2\pi^3 D_\ell^{-\frac{5}{2}} L_{\ell/\mathbf{Q}}(-2)$ et de certaines tables numériques pour les fonctions $L_{\ell/\mathbf{Q}}$, certains covolumes peuvent être calculés explicitement [50, 3.6].

Maintenant que la nature des principaux arguments arithmétiques a été évoquée, voici pour aider le lecteur intéressé à lire [50], un résumé de la progression ultérieure dans les contraintes sur le corps de base k et son extension quadratique imaginaire ℓ .

1. Au terme du §7 dans [loc. cit.], on sait que le corps de base k de la forme \mathbf{G} est totalement réel et de degré ≤ 5 .
2. Dans la première partie du §8, les possibilités pour les (k, ℓ) avec $[k : \mathbf{Q}] > 1$ sont restreintes à une liste de 40 couples \mathcal{C}_i .
3. Dans la seconde partie du §8, des arguments de théorie des groupes sont utilisés pour prouver que si \mathbf{G} est une forme de seconde (resp. de première) espèce de SL_3 (3.1), le nombre de couples \mathcal{C}_i possibles est réduit à 6 (resp. 5).

4. Les §§ 3 à 5 traitent du cas $k = \mathbf{Q}$: toutes les possibilités de constructions sont classées ; les \mathbf{Q} -formes de première espèce de SL_3 y sont notamment exclues.
5. Dans le § 9, les constructions où $[k : \mathbf{Q}] > 1$ et \mathbf{G} est une k -forme de seconde espèce sont classées.

Remarque 3.4. — L'étape 2 est menée à son terme grâce à des calculs sur ordinateur de valeurs de fonctions ζ_k et L aux entiers négatifs. Ces calculs sont contrôlés par des résultats théoriques de C.L. Siegel. Une contribution importante pour cette partie du travail est due à G. Malle.

3.4. Les classes de faux plans projectifs

Rappelons qu'en 3.1 nous avons commencé à raisonner par condition nécessaire, c'est-à-dire que nous sommes partis d'un faux plan projectif X , et que nous avons défini un sous-groupe arithmétique principal $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ tel que le normalisateur $\Gamma = N_{\mathbf{G}(k_{v_0})}(\Lambda)$ contienne l'image réciproque $\tilde{\Pi}$ par $\mathrm{SU}(2, 1) \rightarrow \mathrm{PU}(2, 1)$ du groupe fondamental Π . Nous avons alors abouti à la condition : $\chi(\Gamma) \leq 1$.

On s'intéresse désormais aux k -formes anisotropes \mathbf{G} de SL_3 et aux familles cohérentes de sous-groupes parahoriques $(P_v)_{v \in V_f}$ telles que le sous-groupe arithmétique principal $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ soit de covolume assez petit pour que $\chi(\Gamma) \leq 1$. Grâce au § 3 (pour $k = \mathbf{Q}$) et à la première moitié du § 8 (pour $[k : \mathbf{Q}] > 1$) de [50], on est déjà ramené à un nombre fini de couples (k, ℓ) qui rendent ceci possible. Il s'agit ensuite de restreindre les possibilités de groupes algébriques \mathbf{G} . En faisant une liste de tous les volumes possibles de sous-groupes parahoriques [50, 2.5], on constate que le facteur local du produit eulérien \mathcal{L} en une place v où \mathbf{G} est anisotrope sur k_v est assez gros pour réduire considérablement les possibilités de telles places. En fait, pour les k -formes de seconde espèce, i.e. provenant d'algèbres à involution \mathcal{D} de dimension 3 sur k et de centre ℓ , on aboutit aux contraintes suivantes [50, 4.4 et 8.6] :

Si \mathbf{G} est un groupe provenant d'une algèbre cubique \mathcal{D} comme ci-dessus, alors \mathbf{G} est anisotrope (i.e. \mathcal{D} est ramifiée) en exactement une place $v \in V_f$; en outre v divise un petit nombre premier.

Supposons maintenant donnée une k -forme \mathbf{G} admissible du point de vue des critères d'anisotropie ci-dessus et introduisons \mathbf{G}_{ad} le quotient adjoint de \mathbf{G} . Pour tout sous-groupe $H \subset \mathbf{G}$, nous notons \overline{H} son image dans \mathbf{G}_{ad} . Pour finir, il s'agit de déterminer les familles $(P_v)_{v \in V_f}$ pour lesquelles, dans le groupe Γ défini comme ci-dessus à partir de $(P_v)_{v \in V_f}$, il existe Δ tel que :

1. le groupe $\overline{\Delta}$ soit sans torsion ;
2. la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\overline{\Delta})$ soit égale à 3 ;
3. on ait $b_1(\overline{\Delta}) = 0$ (et donc $b_3(\overline{\Delta}) = 0$ par dualité de Poincaré).

La condition 1 est nécessaire pour que $\bar{\Delta}$ soit groupe fondamental d'une variété à courbure ≤ 0 [15, 3.2]. Pour la condition 2, on calcule $\chi(\Gamma) = \frac{\chi(\Lambda)}{[\Gamma:\Lambda]}$ grâce à la formule du covolume pour Λ ; on en tire $\chi(\bar{\Gamma})$, et l'on voit que cette condition revient à prescrire l'indice du groupe $\bar{\Delta}$ dans $\bar{\Gamma}$: on doit avoir $[\bar{\Gamma}:\bar{\Delta}] = \frac{3}{\chi(\bar{\Gamma})}$. La condition 3 se reformule en requérant que l'abélianisé $\bar{\Delta}/[\bar{\Delta}, \bar{\Delta}]$ soit fini. Pour ce dernier point, G. Prasad et S.K. Yeung se ramènent, dans le cas des sous-groupes de congruence, à un théorème d'annulation de J. Rogawski [55, 15.3.1]. Finalement, si un groupe $\bar{\Delta}$ comme ci-dessus satisfait 1 à 3, alors la surface complexe $\bar{\Delta} \backslash \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$ est un faux plan projectif.

Le paragraphe précédent explique donc la stratégie générale de [50, 1.5] pour décider si un groupe Γ , défini par une famille cohérente $(P_v)_{v \in V_f}$, permet ou non de construire des faux plans projectifs. Les sous-groupes arithmétiques maximaux tels que $\bar{\Gamma}$ ont en général une présentation raisonnable (qui permet notamment de travailler avec un domaine fondamental dans $\mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$). On dresse ensuite la liste de tous les sous-groupes d'indice $\frac{3}{\chi(\bar{\Gamma})}$ dans $\bar{\Gamma}$ et on détermine lesquels sont sans torsion et d'abélianisé fini. C'est ce principe général qui a guidé D. Cartwright et T. Steger pour éliminer certaines familles potentielles de faux plans projectifs [19]. Certains arguments font un usage très contrôlé de l'ordinateur.

À ce stade, on peut donc préciser l'étape 3 de 3.3 : il s'agit d'arguments de torsion ou de calcul de commutateurs. Par exemple, la présence d'éléments d'ordre fini élimine certains couples (k, ℓ) . La torsion dans des groupes tels que $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ se contrôle au moyen des deux groupes intersectés : on peut chercher à la comprendre dans les points rationnels $\mathbf{G}(k)$ (voir par exemple [50, 5.6 et 9.2]) ou on peut la comprendre dans les sous-groupes parahoriques.

Voici enfin le résultat qui résume la situation actuelle en matière de construction de faux plans projectifs. Cet énoncé tient compte des modifications apportées par un addendum [51] qui rectifie la classification pour $k = \mathbf{Q}$, suite à une omission relevée par T. Steger dans [50].

THÉORÈME 3.5. — *Il existe exactement 22 quadruplets $(k, \ell, \mathbf{G}, (P_v)_{v \in V_f})$ tels que :*

- (i) *k soit un corps de nombres totalement réel;*
- (ii) *ℓ soit une extension quadratique imaginaire de k ;*
- (iii) *il existe \mathcal{D} une k -algèbre cubique à involution, notée σ , de centre ℓ et de norme réduite Nrd qui décrit \mathbf{G} par $\mathbf{G}(k) = \{z \in \mathcal{D}^\times : z\sigma(z) = 1 \text{ et } \text{Nrd}(z) = 1\}$;*
- (iv) *il existe une place archimédienne v_0 telle que l'on ait $\mathbf{G}(k_{v_0}) \simeq \text{SU}(2, 1)$ et $\mathbf{G}(k_{v_0}) \simeq \text{SU}(3)$ pour toute $v \in V_\infty \setminus \{v_0\}$;*
- (v) *notant Λ le groupe arithmétique principal $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$, l'image du normalisateur $N_{\mathbf{G}(k_{v_0})}(\Lambda)$ dans $\text{PU}(2, 1)$ contienne des sous-groupes d'indice fini Π tels que $\Pi \backslash \mathbb{B}_{\mathbb{C}}^2$ soit un faux plan projectif.*

Pour seize quadruplets, on a $k = \mathbf{Q}$ et, pour les cinq autres, k est quadratique. En outre, la seule possibilité éventuelle de construire un autre groupe fondamental de faux plan projectif est l'analogie de la construction ci-dessus, mais où \mathbf{G} est une forme de première espèce de SL_3 ; il ne reste plus que deux couples (k, ℓ) envisageables à ce jour.

Cette classification dit que deux groupes fondamentaux obtenus à partir de quadruplets $(k, \ell, \mathbf{G}, (P_v)_{v \in V_f})$ distincts donnent des faux plans projectifs non isomorphes ; cependant, pour un même quadruplet, c'est-à-dire pour un même groupe $\bar{\Gamma}$, plusieurs sous-groupes peuvent satisfaire les conditions 1 à 3 ci-dessus. Dans ce cas, les faux plans projectifs correspondants sont isomorphes si et seulement si les groupes sont conjugués par $\bar{\Gamma}$.

Remarque 3.6. — En ce qui concerne les faux plans projectifs construits à partir de formes de première espèce de SL_3 , il reste à exclure \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_{11} dans la nomenclature de [50]. Ceci revient à démontrer la dernière assertion de la conjecture de Rogawski (conjecture 2.8) dans le cas où la surface complexe est un faux plan projectif. Les trois autres classes évoquées dans l'étape 3 ci-dessus et non éliminées par [50], à savoir \mathcal{C}_8 , \mathcal{C}_{18} et \mathcal{C}_{21} , ont été exclues entre temps par D. Cartwright et T. Steger [19].

Finissons en mentionnant des conséquences géométriques très intéressantes, qu'il n'avait pas été possible de prouver avant les constructions et classification de l'article de G. Prasad et S.K. Yeung [50] – tous les exemples précédents étaient en effet obtenus par uniformisation non archimédienne (3.5). Soit X un faux plan projectif.

(i) On a $H_1(X, \mathbf{Z}) \neq 0$ [50, Theorem 10.1] ; il est d'ailleurs envisageable de calculer ces groupes et donc remplir une case vierge du tableau présentant quelques surfaces de type général dans [3, Table 14, pp. 304-305].

(ii) Pour 18 classes de faux plans projectifs sur 22, on sait qu'il existe un fibré en droites L tel que $K_X = 3L$. Cette assertion est équivalente au fait que la suite exacte $0 \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \rightarrow \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi \rightarrow 1$ est scindée, et ceci implique que X admet un plongement comme surface de degré 49 dans $\mathbb{P}^{14}(\mathbf{C})$ [50, Theorem 10.5].

(iii) Le groupe des automorphismes de X est d'ordre 1, 3, 7, 9 ou 21.

Remarque 3.7. — Grâce aux résultats déjà évoqués sur les réseaux, la finitude du groupe des isométries d'une variété localement symétrique est facile à démontrer. Soit X une telle variété, de groupe fondamental Γ et de revêtement universel \tilde{X} ; notons $G = \mathrm{Isom}(\tilde{X})$. Par rigidité de Mostow (théorème 2.5), on a $\mathrm{Isom}(X) = N_G(\Gamma)/\Gamma$; il suffit donc de voir que $N_G(\Gamma)$ est discret dans G , car comme il contient Γ ce sera un réseau de G et on aura $[N_G(\Gamma) : \Gamma] < \infty$. Le groupe Γ admet un système générateur fini, disons S (2.2). Soit $\{n_j\}_{j \geq 1}$ une suite dans $N_G(\Gamma)$ qui converge vers l'élément

neutre. Comme $n_j \cdot s \cdot n_j^{-1}$ est dans Γ (discret) pour tout $j \geq 1$ et tout s dans S (fini), l'élément n_j centralise S et donc Γ pour j assez grand. Le groupe G est un groupe algébrique réel à centre trivial, donc par densité de Γ pour la topologie de Zariski dans G (théorème de densité de Borel, voir 2.3) l'élément n_j est trivial pour j assez grand.

3.5. Des exemples de faux plans projectifs

Le premier exemple de faux plan projectif est dû à D. Mumford [41]. L'idée est assez indirecte ; elle consiste :

1. à interpréter les contraintes sur les nombres de Betti en termes d'invariants de géométrie algébrique ;
2. à construire une variété projective avec les bons invariants algébriques sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0 ;
3. à prendre les points complexes de cette variété.

Bien entendu, l'étape 3 n'a rien de canonique puisqu'il faut passer de F à \mathbf{C} , et c'est l'étape 2 qui est la plus difficile. D'après l'étape 1, on cherche une surface Σ sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0 (sur lequel on a une certaine liberté de choix dans un premier temps), de fibré canonique K_X ample tel que $(K_X^2) = 9$, et dont le *genre géométrique* $p_g(X) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X))$ et l'*irrégularité* $q(X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1)$ soient tous deux nuls.

On dit que D. Mumford a construit le premier faux plan projectif par *uniformisation non archimédienne* car il ramène le problème à chercher une variété projective comme quotient de l'espace symétrique non archimédien Ω_F^3 par un sous-groupe discret, cocompact et sans torsion Δ de $\mathrm{PGL}_3(F)$. L'espace Ω_F^3 est une variété rigide analytique qui peut être obtenue par un recollement dont la combinatoire est décrite par l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_3(F)$, un immeuble dont les appartements sont des plans pavés par des triangles équilatéraux (1.1). Partons d'un réseau cocompact sans torsion $\Delta \subset \mathrm{PGL}_3(F)$. Par des arguments de géométrie algébrique sur des anneaux locaux, D. Mumford vérifie la nullité de l'irrégularité de $\Delta \backslash \Omega_F^3$ et calcule les classes de Chern en fonction du cardinal q du corps résiduel de F et du nombre N de Δ -orbites de sommets dans l'immeuble de $\mathrm{PGL}_3(F)$. Le résultat est qu'une surface $\Delta \backslash \Omega_F^3$ donne une surface complexe avec les nombres de Betti suivants : $b_0 = b_4 = 0$, $b_1 = b_3 = 1$ et $b_2 = N(q-1)^2(q+1) - 2$. On en déduit que la seule possibilité pour que cette méthode donne lieu à un faux plan projectif est que F soit égal à \mathbf{Q}_2 et que le réseau Δ agisse transitivement (et librement puisqu'il est sans torsion et que Δ est à courbure ≤ 0) sur l'immeuble. Mais réciproquement, tout réseau de la sorte convient.

D. Mumford construit alors un réseau qui remplit les conditions ci-dessus. Il le fait en partant d'une forme hermitienne à 3 variables sur un corps quadratique imaginaire contenu dans l'extension cyclotomique des racines 7-ièmes de l'unité. Dans ce passage, on voit fonctionner de la théorie des réseaux de façon complètement « quantitative » : le groupe arithmétique est explicitement décrit comme le stabilisateur d'un réseau de l'espace vectoriel sous-jacent à la forme hermitienne, on dispose de 4 matrices formant un système générateur explicite et le sous-groupe sans torsion est parfaitement compris comme noyau d'une réduction non moins explicite. Dans la classification de [50], le faux plan projectif de D. Mumford est un de ceux obtenus à partir d'une algèbre à involution cubique \mathcal{D} sur \mathbf{Q} , de centre $\ell = \mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ et pour laquelle la seule place $v \in V_f$ de ramification est 2 [50, 5.11].

Remarque 3.8. — Par la suite, l'approche non archimédienne ci-dessus a été réutilisée par M.-N. Ishida et F. Kato [31] pour construire d'autres faux plans projectifs. En effet, d'autres réseaux cocompacts d'immeubles de GL_n , simplement transitifs sur les sommets, avaient été construits entre temps par D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger et A. Zappa [18].

Finissons en remarquant que cette construction par uniformisation est bien troublante au premier abord. En effet, il est amusant de voir que D. Mumford utilise le critère de Godement (1.5) pour justifier la cocompacité de son réseau en vérifiant la compacité du groupe algébrique ambiant en une place archimédienne : ce qui l'intéresse est de construire un réseau non archimédien. Cette interversion du rôle habituel des places archimédiennes et non archimédiennes est devenue courante (notamment pour construire des graphes finis comme quotients d'arbres par des réseaux de PGL_2 [36]) mais dans ce cas précis, on sait que D. Mumford passera de F à \mathbf{C} pour construire une surface algébrique complexe ! D'ailleurs ce changement de corps a pour autre conséquence qu'il ne reste *a priori* rien du groupe Δ dans le groupe fondamental du faux plan projectif X obtenu : le groupe Δ possède la propriété (T) de Kazhdan (donc est d'abélianisé fini [72, 7.1.11], ce qui au passage sert à prouver la nullité de l'irrégularité de X), alors que ce n'est pas le cas de $\pi_1(X)$ (qui est un réseau de rang 1 complexe).

4. D'AUTRES COMPTAGES NON MOINS INTÉRESSANTS

Nous finissons par le passage en revue d'autres comptages et finitudes. Les deux premiers paragraphes portent sur les groupes algébriques et leurs sous-groupes arithmétiques, les deux suivants sur des comptages asymptotiques de variétés localement

symétriques suivant leur volume riemannien. Le dernier paragraphe évoque une généralisation en cours de la description de tous les faux plans projectifs à celle de certaines « fausses grassmanniennes arithmétiques ».

4.1. Nombres de classes de groupes algébriques

Considérons un groupe \mathbf{G} comme dans la formule du covolume (1.2) et supposons en outre que ce groupe est anisotrope sur son corps de base k . En fait, si k est un corps de nombres nous faisons une hypothèse plus forte, en supposant que le groupe $G_\infty = \prod_{v \in V_\infty} \mathbf{G}(k_v)$ est compact ; ceci implique que k est totalement réel. Nous choisissons en outre une famille cohérente $P = (P_v)_{v \in V_f}$ de sous-groupes parahoriques. Le sous-groupe $G_\infty \cdot \prod_{v \in V_f} P_v$ est compact et ouvert dans $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$. Nous nous intéressons à l'ensemble de doubles classes

$$(G_\infty \cdot \prod_{v \in V_f} P_v) \backslash \mathbf{G}(\mathbf{A}_k) / \mathbf{G}(k).$$

Le cardinal de cet ensemble est fini (voir [5] pour la caractéristique 0 et [29] pour la caractéristique $p > 0$) ; il est appelé le *nombre de classes* de \mathbf{G} par rapport à la famille P et noté $\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P)$.

Remarque 4.1. — La définition a un sens également dans le cas du groupe multiplicatif \mathbf{G}_m sur un corps de nombres. Bien que ce cas ne soit pas couvert par le théorème ci-dessous, le nombre entier ainsi défini n'est autre que le nombre de classes d'idéaux du corps en question (pour le corps ℓ de 3.3, il apparaît sous la notation h_ℓ).

Si k est un corps de nombres, des arguments de groupes analytiques permettent de prouver que la borne supérieure des ordres des sous-groupes finis de $\mathbf{G}(k)$ est finie ; ce nombre entier est noté $\mathfrak{f}(\mathbf{G})$. Par des arguments très proches de ceux utilisés pour la formule du covolume, G. Prasad démontre les estimations suivantes [49, Theorem 4.3].

THÉORÈME 4.2. — Posons $\zeta(P) = \prod_{v \in V_f} \frac{q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathcal{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}$.

(i) On a la minoration suivante pour le nombre de classes de \mathbf{G} par rapport à P :

$$\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) \geq D_k^{\frac{1}{2} \dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}} \right)^{\frac{1}{2} \mathfrak{s}(\mathcal{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v \right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \zeta(P).$$

(ii) On a la majoration suivante pour le nombre de classes de \mathbf{G} par rapport à P :

$$\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) \leq \mathfrak{f}(\mathbf{G}) \cdot D_k^{\frac{1}{2} \dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}} \right)^{\frac{1}{2} \mathfrak{s}(\mathcal{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} \left| \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \right|_v \right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \zeta(P).$$

Remarque 4.3. — L'approximation forte (Théorème 1.6) rend les questions précédentes sans intérêt si G_∞ est non compact, puisqu'alors $\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) = 1$.

Ces estimations ont été utilisées immédiatement après par A. Borel et G. Prasad pour démontrer le théorème de finitude suivant [8, Theorem B].

THÉORÈME 4.4. — *Pour tout nombre entier $n \in \mathbf{N}$, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence de corps de nombres k , de k -groupes absolument presque simples simplement connexes \mathbf{G} et de familles cohérentes P de sous-groupes parahoriques tels que G_∞ soit compact et $\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) \leq n$.*

4.2. Conjecture de Tits

Dans une veine plus algébrique que le comptage de variétés, le théorème de finitude de Wang (2.2) peut suggérer des résultats de finitude beaucoup plus forts sur les groupes algébriques et arithmétiques. Ainsi J. Tits a posé la question de savoir si la finitude des classes de conjugaison de réseaux arithmétiques, de covolume majoré par une constante donnée, était encore valide si l'on considère en même temps tous les groupes algébriques définis sur tous les corps de nombres. Pour que la question ait un sens, il faut faire un choix cohérent pour toutes les mesures de Haar des groupes de Lie simples, archimédiens ou non. A. Borel et G. Prasad normalisent les mesures aux places non archimédiennes de sorte que les sous-groupes d'Iwahori soient tous de volume 1 dans le cas d'un k -groupe simplement connexe, et ramènent le cas général à ce cas au moyen d'isogénies centrales. Pour cette normalisation universelle de mesures, ils répondent par l'affirmative à la question de J. Tits [8, Theorem A].

THÉORÈME 4.5 (A. Borel et G. Prasad). — *Soit $C > 0$ un nombre réel positif. Il n'existe qu'un nombre fini de corps de nombres k , de classes de k -isomorphismes de k -groupes absolument presque simples \mathbf{G} et de rang absolu au moins 2, d'ensembles finis S de places contenant les places archimédiennes de k et de classes de conjugaison de groupes arithmétiques Γ dans $G_S = \prod_{v \in S} \mathbf{G}(k_v)$, tels que le covolume de Γ dans G_S soit majoré par C .*

Le complément [9] au papier ci-dessus illustre notamment le fait que les corps de fonctions soulèvent des problèmes supplémentaires.

Remarque 4.6. — Le point de départ de la question de J. Tits est un résultat géométrique très joli : la description de toutes les actions discrètes de groupes sur des immeubles affines, qui sont transitives sur les chambres [33]. Imposer une taille de domaine fondamental dans un immeuble de Bruhat-Tits est un analogue géométrique du fait d'imposer une majoration de covolume.

4.3. Comptage de variétés hyperboliques suivant leur volume

Si l'on revient aux problèmes de comptages géométriques (2.2), on imagine que les idées combinant la finitude de Wang et la rigidité de Mostow devraient permettre de couvrir des situations différentes de celle de certaines classes de surfaces complexes. Dans [17], il est question des variétés hyperboliques réelles de dimension ≥ 4 .

THÉORÈME 4.7 (M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et Sh. Mozes)

Pour tout nombre entier $n \geq 4$ et tout nombre réel $V > 0$, notons $\rho_{\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^n}(V)$ le nombre de classes d'isométrie de variétés hyperboliques complètes de dimension n et de volume $\leq V$. Alors il existe des constantes $a_n, b_n > 0$ telles que pour V assez grand on ait :

$$a_n V \log(V) \leq \log \left(\rho_{\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^n}(V) \right) \leq b_n V \log(V).$$

Remarque 4.8 (en rapport avec la remarque 2.4). — La dimension 3 est exclue dans cet énoncé ; l'ensemble des volumes de 3-variétés hyperboliques a des points d'accumulation. Ce phénomène d'accumulation est compris grâce à une construction géométrique due à Jørgensen-Thurston [64, § 5].

Nous repoussons au prochain paragraphe la discussion de quelques idées pour la majoration de cet encadrement. La minoration est obtenue par un usage astucieux des variétés hyperboliques réelles non arithmétiques de Gromov-Piatetski Shapiro (2.3). Ces variétés possèdent beaucoup de revêtements en vertu du raisonnement suivant.

Preuve (esquisse, pour la minoration). — On part d'un sous-groupe non arithmétique $\tilde{\Delta}$ de $\mathrm{PO}(n, 1)$ construit par Gromov-Piatetski Shapiro. Guidé par une conjecture géométrique de Thurston sur le premier nombre de Betti des variétés hyperboliques, A. Lubotzky a prouvé que pour cette classe spécifique de groupes, il existe un sous-groupe Δ d'indice fini sans torsion dans $\tilde{\Delta}$ qui admet un homomorphisme surjectif sur le groupe libre \mathbb{F}_2 à deux générateurs. On note $M = \Delta \backslash \mathbb{H}_{\mathbf{R}}^n$ la variété hyperbolique de dimension n définie par Δ . D'après G. Margulis [72, 6.2], un réseau Λ dans un groupe de Lie simple G est arithmétique si, et seulement si, son commensurateur $\mathrm{Comm}_G(\Lambda) = \{g \in G : \Lambda \cap g\Lambda g^{-1} \text{ est d'indice fini dans } \Lambda \text{ et } g\Lambda g^{-1}\}$ est dense dans G ; si tel n'est pas le cas, comme dans notre situation, alors $\mathrm{Comm}_G(\Lambda)$ est un réseau de G . Notons donc m le nombre entier $[\mathrm{Comm}_{\mathrm{PO}(n,1)}(\Delta) : \Delta]$. Chaque sous-groupe d'indice $\leq r$ de \mathbb{F}_2 (il y en a au moins $r \cdot r!$) donne lieu à un revêtement à au plus r feuillets de M ; il suffit donc de contrôler les isométries entre ces revêtements. Par rigidité de Mostow (Théorème 2.5), si un revêtement à au plus r feuillets de M est isométrique à un autre tel revêtement, les groupes fondamentaux correspondants sont conjugués dans $\mathrm{PO}(n, 1)$ et un élément qui les conjugue est dans $\mathrm{Comm}_{\mathrm{PO}(n,1)}(\Delta)$. Cela prouve qu'il y a au plus $r \cdot m$ identifications possibles entre

revêtements à au plus r feuillet de M , et donc au moins $\frac{r!}{m}$ classes d'isométrie de variétés hyperboliques de dimension n et de volume $\leq \text{Vol}(M) \cdot r$. \square

4.4. Comptage de variétés à revêtement universel symétrique fixé

Nous considérons maintenant des généralisations en rang supérieur, dues à T. Gelander, du comptage précédent. La ligne directrice de ses travaux est la conjecture suivante [23, Conjecture 1.3] :

CONJECTURE 4.9 (T. Gelander). — *Soit \widetilde{X} un espace symétrique riemannien sans facteur compact ni euclidien. Alors, il existe des constantes $a_{\widetilde{X}}$ et $d_{\widetilde{X}}$ telles que toute variété riemannienne irréductible, revêtue par \widetilde{X} , et supposée arithmétique si $\dim(\widetilde{X}) = 3$, soit homotopiquement équivalente à un complexe simplicial avec au plus $\text{Vol}(X) \cdot a_{\widetilde{X}}$ sommets et en chaque sommet duquel la valence est $\leq d_{\widetilde{X}}$.*

Cette conjecture couvre aussi bien des énoncés de théorie géométrique des groupes que de comptage de variétés localement symétriques. Voici tout d'abord une importante généralisation de la majoration du théorème 4.7, voir [23, Theorem 1.11].

THÉORÈME 4.10. — *Soit \widetilde{X} un espace symétrique riemannien sans facteur compact ni euclidien. On suppose en outre que \widetilde{X} est de dimension ≥ 4 et qu'il n'est isométrique ni à $\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^2 \times \mathbb{H}_{\mathbf{R}}^2$, ni à $\text{SL}_3(\mathbf{R})/\text{SO}_3(\mathbf{R})$. Pour tout nombre réel $V > 0$, on note $\rho_{\widetilde{X}}(V)$ le nombre de classes d'isométrie de variétés riemanniennes complètes irréductibles localement isométriques à \widetilde{X} et de volume $\leq V$. Alors il existe une constante $c_{\widetilde{X}} > 0$ telle que pour tout $V > 0$ on ait :*

$$\log(\rho_{\widetilde{X}}(V)) \leq c_{\widetilde{X}} V \log(V).$$

Il n'est pas question de minoration dans cet énoncé ; en fait, T. Gelander pense que la majoration n'est pas du tout optimale en rang ≥ 2 .

Un outil important de la preuve est la décomposition en parties fine et épaisse d'une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle ≤ 0 . Soit X une telle variété. Le rayon d'injectivité $\text{inj}_X(x)$ de X en x est le plus grand rayon pour lequel l'exponentielle riemannienne est injective sur la boule correspondante de l'espace tangent en x . Pour $\varepsilon > 0$, la partie ε -épaisse $X_{\geq \varepsilon}$ de X est $\{x \in X : \text{inj}_X(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$; la partie ε -fine est le complémentaire $X_{\leq \varepsilon}$ de l'intérieur de $X_{\geq \varepsilon}$. Par ailleurs, le lemme de Margulis [2, Theorem 8.3] dit que pour toute dimension $n \in \mathbf{N}$, il existe des constantes $\varepsilon_n > 0$ et $I_n \in \mathbf{N}$ telles que pour toute variété riemannienne \widetilde{X} de dimension n , complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle normalisée entre -1 et 0 , pour tout groupe discret $\Gamma \subset \text{Isom}(\widetilde{X})$ et tout $x \in X$, le groupe $\langle \gamma \in \Gamma : d(x, \gamma.x) \leq \varepsilon_n \rangle$ contient un sous-groupe nilpotent d'indice $\leq I_n$. La constante ε_n est très appropriée pour le découpage en parties fine et épaisse. Les arguments de T. Gelander précisent grandement l'idée selon laquelle la topologie d'une variété localement symétrique de

volume fini est « contenue » dans sa partie ε_n -épaisse. En effet, il construit dans chaque variété X comme dans le théorème 4.10 une sous-variété à bord de $X_{\geq \varepsilon_n}$ admettant une triangulation dont le nombre de simplexes est majoré par $C_{\tilde{X}} \cdot \text{Vol}(X)$. Les techniques sont différentes suivant que X est compacte ou non, et montrent que des problèmes d'arithmétique classiques (e.g. la conjecture de Lehmer et des questions apparentées) ont des implications importantes pour les questions géométriques qu'on vient de survoler.

Remarque 4.11. — En dimension 3, la partie épaisse ne capture pas toute la topologie de la variété, car le bord de la partie épaisse est constitué de tores que l'on doit ensuite « boucher » par des tores solides pour obtenir toute la variété. Dans cette opération, des lacets non contractiles de la partie épaisse le deviennent dans la variété (le groupe fondamental d'un tore est \mathbf{Z}^2 , celui d'un tore solide \mathbf{Z}). Par contre, en dimension plus grande le bord de la partie épaisse est constitué de produits d'un cercle et d'une sphère de dimension au moins 2; on ne change pas le groupe fondamental dans l'opération analogue.

Remarque 4.12. — Le lemme de Margulis implique également le résultat suivant : pour chaque dimension $n \geq 1$, il existe une constante $V(n) > 0$ telle que pour toute variété riemannienne X complète, à courbure sectionnelle normalisée entre -1 et 0 , on ait $\text{Vol}(X) \geq V(n)$. C'est une vaste généralisation du théorème de Kazhdan-Margulis sur les réseaux des groupes de Lie semi-simples (2.2).

Pour finir avec de la théorie des groupes, voici une version quantitative [23, Theorem 1.7] de la propriété de présentation finie des réseaux de groupes de Lie semi-simples (utilisée dans l'esquisse de la preuve du théorème 2.3).

THÉORÈME 4.13. — *Soit \tilde{X} un espace symétrique riemannien sans facteur compact ni euclidien. On suppose que \tilde{X} n'est isométrique ni à $\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^2 \times \mathbb{H}_{\mathbf{R}}^2$, ni à $\mathbb{H}_{\mathbf{R}}^3$, ni à $\text{SL}_3(\mathbf{R})/\text{SO}(\mathbf{R})$. Alors il existe une constante $\eta_{\tilde{X}} > 0$ telle que le groupe fondamental de toute variété riemannienne X complète, irréductible, couverte par \tilde{X} admette une présentation avec au plus $\eta_{\tilde{X}} \cdot \text{Vol}(X)$ générateurs et au plus $\eta_{\tilde{X}} \cdot \text{Vol}(X)$ relations, qu'on peut en outre toutes supposer de longueur ≤ 3 .*

4.5. Élaborations sur les faux plans projectifs

Finissons maintenant par les généralisations de la classification et de la construction des faux plans projectifs à certaines variétés complexes de dimension supérieure. Soit \tilde{X} un espace symétrique, irréductible, à courbure ≤ 0 et soit X_u son dual compact. G. Prasad et S.K. Yeung appellent *faux X_u arithmétique* une variété $\Pi \backslash \tilde{X}$ où Π est un réseau cocompact, sans torsion et arithmétique de $G = \text{Isom}(\tilde{X})$, et ayant les mêmes nombres de Betti que X_u . On s'intéresse surtout au cas où X est hermitien.

Cette définition prend en compte le fait que, dès le début de la généralisation se pose le problème de l'uniformisation des variétés avec les mêmes nombres de Betti que X_u . En général, rien n'assure avec cette seule hypothèse topologique que le revêtement universel soit un espace symétrique ; la définition suppose également que le groupe fondamental est un groupe arithmétique.

En fait, les motivations pour définir ces variétés relèvent autant de la géométrie complexe que de la théorie des formes automorphes. Choisissons un sous-groupe compact maximal K dans G et notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . La (\mathfrak{g}, K) -cohomologie $H^*(\mathfrak{g}, K; \mathbf{C})$ [10] est isomorphe à $H^*(X_u, \mathbf{C})$ et se plonge dans $H^*(\Pi \backslash \widetilde{X}, \mathbf{C})$. Ainsi, un quotient $\Pi \backslash \widetilde{X}$ est un faux X_u arithmétique si et seulement si Π est un sous-groupe arithmétique de $G = \text{Isom}(\widetilde{X})$ et si l'homomorphisme $H^*(\mathfrak{g}, K; \mathbf{C}) \rightarrow H^*(\Pi \backslash \widetilde{X}, \mathbf{C})$ est surjectif.

THÉORÈME 4.14 (G. Prasad et S.K. Yeung [52]). — *Les faux $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ arithmétiques n'existent que pour $n = 2$ et $n = 4$. Le premier groupe d'homologie entière d'un faux $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ arithmétique est toujours non nul, et il existe au moins 4 classes de telles variétés.*

Des résultats similaires concernant les fausses grassmanniennes arithmétiques et les faux produits de plans projectifs arithmétiques sont annoncés dans la même publication.

RÉFÉRENCES

- [1] J. AMORÓS, M. BURGER, K. CORLETTE, D. KOTSCHICK & D. TOLEDO – *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 44, Amer. Math. Soc., 1996.
- [2] W. BALLMANN, M. GROMOV & V. SCHROEDER – *Manifolds of nonpositive curvature*, Progress in Math., vol. 61, Birkhäuser, 1985.
- [3] W. P. BARTH, K. HULEK, C. A. M. PETERS & A. VAN DE VEN – *Compact complex surfaces*, 2^e éd., Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 4, Springer, 2004.
- [4] H. BEHR – Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern, *Invent. Math.* **7** (1969), p. 1–32.
- [5] A. BOREL – Some finiteness properties of adèle groups over number fields, *Publ. Math. I.H.É.S.* **16** (1963), p. 5–30.
- [6] ———, Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3-manifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **8** (1981), p. 1–33.
- [7] A. BOREL & HARISH-CHANDRA – Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.* **75** (1962), p. 485–535.

- [8] A. BOREL & G. PRASAD – Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **69** (1989), p. 119–171.
- [9] ———, Addendum to : “Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups” [*Publ. Math. I.H.É.S.* **69** (1989), p. 119–171], *Publ. Math. I.H.É.S.* **71** (1990), p. 173–177.
- [10] A. BOREL & N. WALLACH – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, 2^e éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 67, Amer. Math. Soc., 2000.
- [11] A. I. BOREVICH & I. R. SHAFAREVICH – *Number theory*, Translated from the Russian by Newcomb Greenleaf. Pure and Applied Mathematics, vol. 20, Academic Press, 1966.
- [12] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie - Chapitres 4–6*, Springer, 2007.
- [13] ———, *Éléments de mathématique. Intégration - Chapitres 7 et 8*, Springer, 2007.
- [14] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.
- [15] F. BRUHAT & J. TITS – Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.É.S.* **41** (1972), p. 5–251.
- [16] ———, Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.É.S.* **60** (1984), p. 197–376.
- [17] M. BURGER, T. GELANDER, A. LUBOTZKY & S. MOZES – Counting hyperbolic manifolds, *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), p. 1161–1173.
- [18] D. I. CARTWRIGHT, A. M. MANTERO, T. STEGER & A. ZAPPA – Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type A_2 , I et II, *Geom. Dedicata* **47** (1993), p. 143–166, 167–223.
- [19] D. I. CARTWRIGHT & T. STEGER – en préparation.
- [20] L. CLOZEL – Nombres de Tamagawa des groupes semi-simples (d’après Kottwitz), Séminaire Bourbaki, vol. 1988/89, exposé n^o 702, *Astérisque* **177-178** (1989), p. 61–82.
- [21] K. CORLETTE – Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry, *Ann. of Math.* **135** (1992), p. 165–182.
- [22] P. DELIGNE & G. D. MOSTOW – *Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$* , Annals of Math. Studies, vol. 132, Princeton Univ. Press, 1993.
- [23] T. GELANDER – Homotopy type and volume of locally symmetric manifolds, *Duke Math. J.* **124** (2004), p. 459–515.
- [24] W. M. GOLDMAN – *Complex hyperbolic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford Univ. Press, 1999.

- [25] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 1978.
- [26] P. GRIFFITHS & W. SCHMID – Locally homogeneous complex manifolds, *Acta Math.* **123** (1969), p. 253–302.
- [27] M. GROMOV & I. PIATETSKI-SHAPIRO – Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces, *Publ. Math. I.H.É.S.* **66** (1988), p. 93–103.
- [28] M. GROMOV & R. SCHOEN – Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one, *Publ. Math. I.H.É.S.* **76** (1992), p. 165–246.
- [29] G. HARDER – Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern, *Invent. Math.* **7** (1969), p. 33–54.
- [30] F. HIRZEBRUCH – *Topological methods in algebraic geometry*, Classics in Mathematics, Springer, 1995.
- [31] M.-N. ISHIDA & F. KATO – The strong rigidity theorem for non-Archimedean uniformization, *Tohoku Math. J.* **50** (1998), p. 537–555.
- [32] J. JOST & K. ZUO – Harmonic maps into Bruhat-Tits buildings and factorizations of p -adically unbounded representations of π_1 of algebraic varieties. I, *J. Algebraic Geom.* **9** (2000), p. 1–42.
- [33] W. M. KANTOR, R. A. LIEBLER & J. TITS – On discrete chamber-transitive automorphism groups of affine buildings, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **16** (1987), p. 129–133.
- [34] B. KLINGLER – Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l’arithmécité des réseaux hyperboliques complexes, et les “faux plans projectifs”, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 105–143.
- [35] R. E. KOTTWITZ – Tamagawa numbers, *Ann. of Math.* **127** (1988), p. 629–646.
- [36] A. LUBOTZKY – *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Math., vol. 125, Birkhäuser, 1994.
- [37] G. A. MARGULIS – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse Math. Grenz., vol. 17, Springer, 1991.
- [38] N. MOK, Y. T. SIU & S.-K. YEUNG – Geometric superrigidity, *Invent. Math.* **113** (1993), p. 57–83.
- [39] G. D. MOSTOW – *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton Univ. Press, 1973, Annals of Mathematics Studies, No. 78.
- [40] G. D. MOSTOW & T. TAMAGAWA – On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, *Ann. of Math.* **76** (1962), p. 446–463.
- [41] D. MUMFORD – An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$, *Amer. J. Math.* **101** (1979), p. 233–244.

- [42] A. M. ODLYZKO – Some analytic estimates of class numbers and discriminants, *Invent. Math.* **29** (1975), p. 275–286.
- [43] ———, Discriminant bounds, tables disponibles sur <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/unpublished/index.html>.
- [44] J. OESTERLÉ – Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p , *Invent. Math.* **78** (1984), p. 13–88.
- [45] P. PANSU – Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité, Séminaire Bourbaki, vol. 1993/94, exposé n° 778, *Astérisque* **227** (1995), p. 69–105.
- [46] V. PLATONOV & A. RAPINCHUK – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., 1994.
- [47] G. PRASAD – Strong approximation for semi-simple groups over function fields, *Ann. of Math.* **105** (1977), p. 553–572.
- [48] ———, Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits-Rousseau and of a theorem of Tits, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), p. 197–202.
- [49] ———, Volumes of S -arithmetic quotients of semi-simple groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **69** (1989), p. 91–117.
- [50] G. PRASAD & S.-K. YEUNG – Fake projective planes, *Invent. Math.* **168** (2007), p. 321–370.
- [51] ———, Addendum to “Fake projective planes”, à paraître.
- [52] ———, Arithmetic fake projective spaces and arithmetic fake grassmannians, prépublication de l’Institut Max Planck de Bonn.
- [53] M. S. RAGHUNATHAN – *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer, 1972, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68*.
- [54] A. REZNIKOV – Simpson’s theory and superrigidity of complex hyperbolic lattices, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), p. 1061–1064.
- [55] J. D. ROGAWSKI – *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, *Annals of Math. Studies*, vol. 123, Princeton Univ. Press, 1990.
- [56] G. ROUSSEAU – Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux, Thèse, Université Paris XI, Orsay, 1977, *Publications Mathématiques d’Orsay*, No. 221-77.68.
- [57] J.-J. SANSUC – Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, *J. reine angew. Math.* **327** (1981), p. 12–80.
- [58] J.-P. SERRE – Cohomologie des groupes discrets, in *Prospects in mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970)*, Princeton Univ. Press, 1971, p. 77–169. *Ann. of Math. Studies*, No. 70.
- [59] C. SIMPSON – Higgs bundles and local systems, *Publ. Math. I.H.É.S.* **75** (1992), p. 5–95.

- [60] ———, Lefschetz theorems for the integral leaves of a holomorphic one-form, *Compositio Math.* **87** (1993), p. 99–113.
- [61] I. S. SLAVUT-SKIĬ – On the Zimmert estimate for the regulator of an algebraic field, *Mat. Zametki* **51** (1992), p. 153–155.
- [62] T. A. SPRINGER – *Linear algebraic groups*, 2^e éd., Progress in Math., vol. 9, Birkhäuser, 1998.
- [63] R. STEINBERG – Regular elements of semisimple algebraic groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **25** (1965), p. 49–80.
- [64] W. P. THURSTON – The geometry and topology of three-manifolds, <http://www.msri.org/publications/books/gt3m>.
- [65] J. TITS – Classification of algebraic semisimple groups, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, Amer. Math. Soc., 1966, p. 33–62.
- [66] ———, Reductive groups over local fields, in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, p. 29–69.
- [67] H. C. WANG – Topics on totally discontinuous groups, in *Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970)*, Dekker, 1972, p. 459–487.
- [68] A. WEIL – *Basic number theory*, 3^e éd., Die Grund. Math. Wiss., vol. 144, Springer, 1974.
- [69] ———, *Adeles and algebraic groups*, Progress in Math., vol. 23, Birkhäuser, 1982.
- [70] S. T. YAU – On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), p. 339–411.
- [71] S.-K. YEUNG – Integrality and arithmeticity of co-compact lattice corresponding to certain complex two-ball quotients of Picard number one, *Asian J. Math.* **8** (2004), p. 107–129.
- [72] R. J. ZIMMER – *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Math., vol. 81, Birkhäuser, 1984.
- [73] R. ZIMMERT – Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung, *Invent. Math.* **62** (1981), p. 367–380.

Bertrand RÉMY

Université de Lyon

Université Lyon 1

CNRS UMR 5208

Institut Camille Jordan

Bâtiment du Doyen Jean Braconnier

43, blvd du 11 novembre 1918

F-69622 Villeurbanne Cedex – France

E-mail : `remy@math.univ-lyon1.fr`

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(985) *o-minimal structures*

Alex J. WILKIE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

O-MINIMAL STRUCTURES

by Alex J. WILKIE

1. INTRODUCTION AND MOTIVATION

The notion of an o-minimal expansion of the ordered field of real numbers was invented by L. van den Dries [2] as a framework for investigating the model theory of the real exponential function $exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow e^x$, and thereby settle an old problem of Tarski. More on this later, but for the moment it is best motivated as being a candidate for Grothendieck’s idea of “tame topology” as expounded in his *Esquisse d’un programme* [6]. It seems to me that such a candidate should satisfy (at least) the following criteria.

- (A) It should be a framework that is flexible enough to carry out many geometrical and topological constructions on real functions and on subsets of real euclidean spaces.
- (B) But at the same time it should have built in restrictions so that we are a priori guaranteed that pathological phenomena can never arise. In particular, there should be a meaningful notion of dimension for all sets under consideration and any that can be constructed from these by use of the operations allowed under (A).
- (C) One must be able to prove finiteness theorems that are uniform over fibred collections.

None of the standard restrictions on functions that arise in elementary real analysis satisfies both (A) and (B). For example, there exists a *continuous* function $G : (0, 1) \rightarrow (0, 1)^2$ which is surjective, thereby destroying any hope of a dimension theory for a framework that admits all continuous functions. Restricting to the smooth (i.e. C^∞) environment fares no better. For every closed subset of any euclidean space, in particular, the subset $graph(G)$ of \mathbb{R}^3 , is the set of zeros of some

smooth function. So by the use of a few simple constructions that we would certainly wish to allow under (A), we soon arrive at dimension-destroying phenomena. The same is even true (though this is harder to prove) if we start from just those smooth functions that are everywhere real analytic (i.e. equal the sum of their Taylor series on a neighbourhood of every point), although, as we shall see, this class of functions is *locally* well-behaved and as such can serve as a model for the three criteria above.

Rather than enumerate analytic conditions on sets and functions sufficient to guarantee the criteria (A), (B) and (C) however, we shall give one succinct axiom, the o-minimality axiom, which *implies* them. Of course, this is a rather open-ended (and currently flourishing) project because of the large number of questions that one can ask under (C). One must also provide concrete examples of collections of sets and functions that satisfy the axiom and this too is an active area of research. In this talk I shall survey both aspects of the theory.

Our formulation of the o-minimality axiom makes use of definability theory from mathematical logic. We begin with a collection \mathcal{F} of real valued functions of real variables (not necessarily all of the same number of arguments). We consider the ordered field structure on \mathbb{R} augmented by the functions in \mathcal{F} . This gives us a *first-order structure* (or *model*) $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} := \langle \mathbb{R}; +, \cdot, -, <, \mathcal{F} \rangle$, and we denote the corresponding first-order logical language by $L(\mathcal{F})$. We then call the structure $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *o-minimal* if whenever $\phi(x)$ is an $L(\mathcal{F})$ -formula (with parameters) then the subset of \mathbb{R} defined by $\phi(x)$ is a finite union of open intervals and points (i.e. it is the union of finitely many connected sets). I shall elucidate what is meant by an $L(\mathcal{F})$ -formula and by the subset of \mathbb{R} (and, more generally, of \mathbb{R}^n) *defined* by such a formula in the next two sections. However, I should emphasize at this stage that such a formula not only defines a subset, denoted $\phi(\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$, of \mathbb{R}^n , but also a subset $\phi(\mathcal{R})$ of \mathcal{R}^n where \mathcal{R} is any ordered ring augmented by a collection of functions, \mathcal{F}^* say, such that \mathcal{F} and \mathcal{F}^* are in correspondence via a bijection that preserves the number of places (arity) of the functions. One can, and should, define the notion o-minimality for such structures $\langle \mathcal{R}; \mathcal{F}^* \rangle$ and it was at (rather more than) this level of generality that the true foundations of the subject were laid by Pillay and Steinhorn in [9], shortly after van den Dries' work on the real field. Indeed, it turned out that the solution to Tarski's problem on the real exponential function (the case $\mathcal{F} = \{exp\}$ in the above notation) relied heavily on the Pillay-Steinhorn theory of o-minimality for structures based on ordered fields other than the reals. This having been said, I shall concentrate in this lecture on the real case, alluding only occasionally to the more general situation, and leave the reader to adapt the definitions and theorems to the setting of o-minimal expansions of arbitrary ordered fields.

2. THE SEMI-ALGEBRAIC CASE

2.1. Formulas and the sets they define

In this section I shall describe the logical formalism for the case $\mathcal{F} = \emptyset$, i.e. where the structure is just that of the ordered field of real numbers $\overline{\mathbb{R}} := \langle \mathbb{R}; <, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$. The corresponding language $L(\emptyset)$, which we denote from now on by just L , consists of formal symbols for variables X_i (for $i = 1, 2, \dots$) together with some formal system of notation for polynomials in these variables (with integer coefficients). It must also contain a symbol for the ordering and some *logical* symbols as will be explained in (v) and (vi) below.

The fact that we are concentrating on one particular structure here allows us to make several shortcuts in the description of logical concepts. In particular one can, in fact, dispense with the formal language and the notion of L -formula altogether and simply specify the definable sets by the following inductive procedure:

- (i) For $p(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, the sets $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{a}) = 0\}$ and $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{a}) > 0\}$ are both definable subsets of \mathbb{R}^n ;
- (ii) If A and B are definable subsets of \mathbb{R}^n then so are $A \cap B$, $A \cup B$ and $\mathbb{R}^n \setminus A$;
- (iii) If A is a definable subset of \mathbb{R}^n , then $\pi_n[A]$ is a definable subset of \mathbb{R}^{n-1} , where $\pi_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} : \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mapsto \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ is the projection map onto the first $n-1$ coordinates.

It is, however, very difficult, even in our present limited situation, to do any model theory without the notion of L -formula, and almost impossible to give examples. So I give the definition. An L -formula is a formal string of symbols that codes the inductive construction of a definable set as follows:

- (iv) Expressions of the form $p(X_1, \dots, X_n) = 0$ and $p(X_1, \dots, X_n) > 0$ (for $p(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$) are L -formulas. These are known as *atomic* L -formulas. If ϕ is such a formula then $\phi(\overline{\mathbb{R}})$ denotes the corresponding subset of \mathbb{R}^n as given in (i). We say that $\phi(\overline{\mathbb{R}})$ is the subset of \mathbb{R}^n *defined by the* L -formula ϕ .
- (v) If ϕ, ψ are L -formulas, with $\phi(\overline{\mathbb{R}}) = A \subseteq \mathbb{R}^n$ and $\psi(\overline{\mathbb{R}}) = B \subseteq \mathbb{R}^n$, then the expressions $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ and $\neg \phi$ are also L -formulas. Then $(\phi \wedge \psi)(\overline{\mathbb{R}}) := A \cap B$, $(\phi \vee \psi)(\overline{\mathbb{R}}) := A \cup B$ and $\neg \phi(\overline{\mathbb{R}}) := \mathbb{R}^n \setminus A$.
- (vi) If ϕ is an L -formula, with $\phi(\overline{\mathbb{R}}) = A \subseteq \mathbb{R}^n$, then the expression $\exists X_n \phi$ is also an L -formula and we set $\exists X_n \phi(\overline{\mathbb{R}}) := \pi_n[A] \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$. (The symbol “ \exists ” is called the *existential quantifier*.)

2.2. Examples

(1) Let α be the expression $\exists X_3(X_3^2 + X_1 \cdot X_3 + X_2 = 0)$. Then α is an L -formula and $\alpha(\mathbb{R})$ consists of all pairs $\langle b, c \rangle \in \mathbb{R}^2$ such that the quadratic equation $x^2 + bx + c = 0$ has a real solution. (Actually, to be perfectly precise, α is not an L -formula because the parentheses should not be there. But I prefer to err on the side of clarity.)

(2) Let β be the expression $\exists X_5 \exists X_6 \exists X_7 \exists X_8 (((X_1 \cdot X_5 + X_2 \cdot X_7 - 1 = 0 \wedge X_1 \cdot X_6 + X_2 \cdot X_8 = 0) \wedge X_3 \cdot X_5 + X_4 \cdot X_7 = 0) \wedge X_3 \cdot X_6 + X_4 \cdot X_8 - 1 = 0)$. Then β is an L -formula and $\beta(\mathbb{R})$ consists of all quadruples $\langle a, b, c, d \rangle \in \mathbb{R}^4$ such that the matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ has an inverse.

The idea behind the notion of L -formula should now be clear. Let ϕ be an L -formula with $\phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^n$ and let $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Then “reading” ϕ using the dictionary $\wedge =$ “and”, $\vee =$ “or”, $\neg =$ “not”, $\exists X_i =$ “there exists $X_i \in \mathbb{R}$ such that” and replacing the variables X_1, \dots, X_n by a_1, \dots, a_n , we arrive at a statement of (mathematical) English expressing “ $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \phi(\mathbb{R})$ ”. We therefore often write ϕ as $\phi(X_1, \dots, X_n)$ to emphasize the fact that it should be read as “the n -tuple $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ has the property expressed by ϕ ”.

It is in this way that the formula ϕ also defines a subset $\phi(\mathcal{R})$ of \mathcal{R}^n for any ordered ring \mathcal{R} . More rigorously, just follow those construction steps 2.1(i)-2.1(iii) coded by ϕ , but replace \mathbb{R} everywhere by (the underlying set of the) ring \mathcal{R} and interpret the formal polynomials $p(X_1, \dots, X_n)$ in 2.1(i) by using the addition and multiplication of the ring \mathcal{R} . The careful reader might now question whether such a set $\phi(\mathcal{R})$ is well defined, that is, whether a given formula ϕ *uniquely* determines such a construction procedure. It does, and the proof of this result (known as the Unique Readability Theorem) and of many other syntactic properties of formulas (such as the conditions under which variables may be permuted or expressions substituted for variables) occupy endless pages in many introductory texts on logic. The student encountering such texts for the first time needs to be patient: very little happens for a long time. In this lecture I am, of course, neglecting such tiresome details. My aim is to convey, as quickly and efficiently as possible, the role played by logical definability in the foundations of o-minimality and especially in how the three criteria for a tame topology set out in section 1 are justified. So I proceed by presenting more examples. They are intended to familiarise the reader with the flexibility of logical definability and thereby justify criterion (A) for the class of L -definable sets and functions.

2.3. More examples (and exercises)

(1) Fix $n \geq 1$. Then the set of $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ such that the polynomial $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ is positive definite, is L -definable. The defining formula is

$\forall X_{n+1}(X_{n+1}^n + X_1 \cdot X_{n+1}^{n-1} + \dots + X_n > 0)$, where the *universal* quantifier “ $\forall X_{n+1}$ ” is an abbreviation for “ $\neg \exists \neg X_{n+1}$ ” and therefore may be read as “for all X_{n+1} ”. Another abbreviation that will prove useful in the sequel is the symbol \rightarrow (read as “implies”): $(\phi \rightarrow \psi)$ is an abbreviation for $(\neg \phi \vee \psi)$.

(2) The class of L -definable sets is closed under many standard topological operations. For example, if $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is L -definable then so is \overline{S} , the closure of S in the ambient space \mathbb{R}^n . To see this, let ϕ be an L -formula defining the set S , i.e. $S = \phi(\mathbb{R})$. We must find an L -formula $\psi(X_1, \dots, X_n)$ so that $\psi(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{S}$. To do this we simply use the naive definition of closure: $\mathbf{a} \in \overline{S}$ if and only if $\forall \epsilon (\epsilon > 0 \rightarrow \exists \mathbf{y} (\mathbf{y} \in S \wedge \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 < \epsilon))$.

To turn this into an L -formula we must perform some of the syntactic operations referred to above. We increase the subscripts of *all* the variables in ϕ by $n + 1$. The result of doing this may be written, by the convention described above, as $\phi(X_{n+2}, \dots, X_{2n+1})$. (So this formula expresses “ $\langle X_{n+2}, \dots, X_{2n+1} \rangle \in S$ ”.) The required formula ψ is: $\forall X_{n+1}(X_{n+1} > 0 \rightarrow \exists X_{n+2}, \dots, \exists X_{2n+1}(\phi(X_{n+2}, \dots, X_{2n+1}) \wedge (X_1 - X_{n+2})^2 < X_{n+1} \wedge \dots \wedge (X_n - X_{2n+1})^2 < X_{n+1}))$. (For polynomials p, q we often prefer to write $p < q$ for $q - p > 0$.) I leave it to the reader to translate the usual definitions of, say, the interior of S and of the boundary of S by use of the L -dictionary and hence show that these sets are also L -definable.

(3) We say that a function $F : S \rightarrow \mathbb{R}$, where S is a non-empty subset of \mathbb{R}^n , is L -definable if its graph $\{\langle \mathbf{x}, y \rangle \in S \times \mathbb{R} : F(\mathbf{x}) = y\}$ is an L -definable subset of \mathbb{R}^{n+1} . Suppose that S is open in \mathbb{R}^n . Then by translating the usual $\epsilon - \delta$ definition one sees that the set X of points in S at which F is differentiable is an L -definable set and that each partial derivative of F is an L -definable function on X . We may repeat this process (on F restricted to the interior of X) to see that all partial derivatives of F , of all orders, are L -definable functions (on their appropriate domains which, as we shall see later, are always non-empty).

2.4. The o-minimality of $\overline{\mathbb{R}}$

So far we have only introduced the *parameter-free* concept of an L -formula and of the sets and functions that they define. Now consider a definable subset, A say, of \mathbb{R}^{n+m} . For each $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ let $A_{\mathbf{a}}$ denote the fibre $\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \in A\}$. We say that the subset $A_{\mathbf{a}}$ of \mathbb{R}^n is *definable with parameters* (or, with parameters \mathbf{a} if we need to be precise). We shall also call the collection $\{A_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\}$ a *definable collection* of subsets of \mathbb{R}^n . It is rather easy to see that if we change, in 2.1(i) and 2.1(iv), the polynomial ring $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ to $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, then the resulting class of formulas (called *L -formulas with parameters*) defines exactly those sets definable with parameters in the sense described above. We have now made precise the definition of o-minimality (for the structure $\overline{\mathbb{R}}$) stated in section 1: every subset of \mathbb{R} definable by an L -formula with parameters is a finite union of open intervals and points. The

fact that this is indeed the case follows from Tarski's famous quantifier elimination theorem [12] (also known as the Tarski-Seidenberg algorithm).

THEOREM 2.1. — *Every L -formula is equivalent (over $\overline{\mathbb{R}}$) to one containing no occurrences of quantifiers. That is, for each n , every definable subset of \mathbb{R}^n can be obtained from sets of type 2.1(i) by applications of the boolean operations 2.1(ii).*

Subsets of \mathbb{R}^n that can be expressed as boolean combinations of zero-sets and positivity sets of real polynomials are called *semi-algebraic* and their study, *semi-algebraic geometry*. The essential point of Tarski's theorem is that the class of all semi-algebraic sets is closed under projection maps. The theorem can, in some cases, be seen as a manifestation of facts of elementary algebra. For example, the formulas α, β of 2.2 are equivalent to $(X_1^2 - 4 \cdot X_2 > 0 \vee X_1^2 - 4 \cdot X_2 = 0)$ and $\neg(X_1 \cdot X_3 - X_2 \cdot X_4 = 0)$ respectively. To see that the sets of examples 2.3(ii) are semi-algebraic (for semi-algebraic S) is, however, more challenging. (One should perhaps mention here that there exist polynomials $p(\mathbf{X})$, irreducible ones even, such that the closure of the positivity set $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{a}) > 0\}$ of $p(\mathbf{X})$ is definitely not the set $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : p(\mathbf{a}) \geq 0\}$.) However, such considerations are not relevant to our present concerns. Our only interest here in Tarski's theorem is that it implies the o-minimality of the structure $\overline{\mathbb{R}}$. For clearly the zero-set and the positivity set of any univariate, real polynomial are both finite unions of open intervals and points, and the class of such sets is closed under the boolean operations. Hence *all* L -definable subsets of \mathbb{R} have this form. (Tarski himself explicitly observed this consequence of his theorem but he did not pursue it.) Van den Dries' key insight was that the most fruitful way to generalize semi-algebraic geometry to transcendental analytic situations was not to focus on quantifier elimination theorems (which, he observed, rarely hold), but rather on the o-minimality axiom for sets definable by *arbitrary* formulas.

3. THE GENERAL CASE

We return to the situation of section 1: \mathcal{F} is some collection of real functions, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ denotes the structure $\langle \mathbb{R}; +, \cdot, -, <, \mathcal{F} \rangle$ and $L(\mathcal{F})$ its language. The definition of an $L(\mathcal{F})$ -definable subset of \mathbb{R}^n follows the same inductive procedure as in the semi-algebraic case, the only difference being that in 2.1(i) we replace $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ by the compositional closure of the collection of functions $\{+, \cdot, -, 0, 1, X_1, \dots, X_n, \mathcal{F}\}$. We proceed similarly for the definition of an $L(\mathcal{F})$ -formula. (Strictly speaking we should introduce a fixed *symbol* F_f (of specified number of places) for each function $f \in \mathcal{F}$ and a system of notation for the compositional closure.) Also, the notion of a set being $L(\mathcal{F})$ -definable *with parameters*, and of a definable *collection* of sets, is

just as in 2.4 except that we replace $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ by the compositional closure of $\{+, \cdot, -, \mathbb{R}, X_1, \dots, X_n, \mathcal{F}\}$, where \mathbb{R} is here being regarded as the set of all constant functions. We have thus made precise the formulation of the o-minimality axiom given in section 1. The claim of this talk is that if \mathcal{F} is such that $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ is o-minimal, then the collection of $L(\mathcal{F})$ -definable sets and functions (with or without parameters) satisfies the three criteria for a framework for tame topology.

Regarding (A), let us just observe for the moment that examples 2.3(2) and (3) apply with “ $L(\mathcal{F})$ -definable” in place of “ L -definable”: one simply constructs the formula for, say, \overline{S} out of one for S . In the next section I shall present more of the general theory of o-minimality as justification for the claim above, but first let me present one of the most important examples of an o-minimal structure. It was (re)discovered in this context by van den Dries [3] as a consequence of a theorem of Gabrielov [5].

3.1. The globally subanalytic sets

We consider the collection \mathcal{F}_{an} of all those functions $f : [-1, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ (for all $n \geq 1$) that are the restrictions to $[-1, 1]^n$ of a real analytic function with domain some open subset $U \subseteq \mathbb{R}^n$ with $[-1, 1]^n \subseteq U$. The structure $\mathbb{R}_{\mathcal{F}_{an}}$ is usually denoted just \mathbb{R}_{an} . (Strictly speaking the functions should be total in order to fit in with our previous account, so we set $f(\mathbf{a}) = 0$ if $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus [-1, 1]^n$.) Then \mathbb{R}_{an} is o-minimal ([1], [5]). The $L(\mathcal{F}_{an})$ -definable sets are closely related to the much studied and widely used subanalytic sets. In fact the bounded $L(\mathcal{F}_{an})$ -definable sets are precisely the bounded subanalytic sets. However, the set of integers, for example, is a subanalytic (in fact, semi-analytic) subset of \mathbb{R} which is obviously not definable in any o-minimal structure. The precise characterization is this: a subset A of \mathbb{R}^n is $L(\mathcal{F}_{an})$ -definable if and only if $\theta[A]$ is a subanalytic subset of \mathbb{R}^n for some semi-algebraic homeomorphism $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow (-1, 1)^n$.

Thus o-minimality is a common generalization of both semi-algebraic and subanalytic geometry and, indeed, most of the topological and geometrical finiteness theorems that were originally established separately have now been proved for o-minimal structures in general. I shall now discuss such theorems and then present more examples of o-minimal structures in section 5.

4. SOME GENERAL THEORY FOR O-MINIMAL STRUCTURES

Let us fix an o-minimal structure $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. The proofs of all the results listed below may be found in [3]. They exemplify criterion (A) and, especially, criterion (C) for tame topology.

4.1. Connectivity

For each $n \geq 1$, every $L(\mathcal{F})$ -definable subset of \mathbb{R}^n is a finite union of connected sets (each of which is also $L(\mathcal{F})$ -definable). For $n = 1$ this is just the definition of o-minimality. In fact, there is also a generalization of ‘points’ and ‘open intervals’ to higher dimensions, giving rise to a cylindrical cell-decomposition theorem for $L(\mathcal{F})$ -definable subsets of \mathbb{R}^n . This in turn implies a uniformity, as required for criterion (C), in fibred collections: if \mathcal{C} is a definable collection of subsets of \mathbb{R}^n , then there exists a positive integer N such that each set in \mathcal{C} is the union of at most N connected sets.

4.2. Dimension

Indeed, for each $p \geq 1$, any $L(\mathcal{F})$ -definable subset A of \mathbb{R}^n is a finite union of connected C^p submanifolds of \mathbb{R}^n and this leads to a well behaved notion $\dim(A)$, the *dimension* of A . Once more, there is a uniform bound on the number of such submanifolds required for sets in a definable collection. Further, the (integer valued) function $\mathbf{a} \mapsto \dim(A_{\mathbf{a}})$ is $L(\mathcal{F})$ -definable, whenever $\{A_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\}$ is a definable collection of subsets of \mathbb{R}^n .

4.3. Differentiability

Let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be an $L(\mathcal{F})$ -definable function, where U is a non-empty, open subset of \mathbb{R}^n . Then for each $p \geq 1$, there exists an $L(\mathcal{F})$ -definable, open set $V \subseteq U$ with $\dim(U \setminus V) < n$ such that $f|_V$ is of class $C^{(p)}$ (cf. 2.3(3)). In all *known* o-minimal structures we may even take $p = \infty$ here, but this seems unlikely to be true in general⁽¹⁾.

4.4. Homeomorphism types

Let $\mathcal{C} := \{A_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\}$ be a definable collection of subsets of \mathbb{R}^n . Then there exists a *finite* subset Δ of \mathbb{R}^m such that every set $A_{\mathbf{a}}$ is homeomorphic to some $A_{\mathbf{c}}$ with $\mathbf{c} \in \Delta$ (and the homeomorphisms are themselves also (uniformly) $L(\mathcal{F})$ -definable).

Thus, for example, with $\mathcal{F} = \emptyset$ and fixed $n, d \geq 1$, we may take \mathcal{C} to be the collection of all zero sets (or positivity sets) of polynomials in n variables and of total degree at most d (so we take m to be the number of monomials of degree at most d in n variables). The conclusion is that there exists a positive integer $N = N(n, d)$ such that there are at most N homeomorphism types of such sets.

⁽¹⁾ Added in proof: indeed it is not. A counterexample has been constructed recently by Robin and Le Gal.

5. MORE EXAMPLES OF O-MINIMAL STRUCTURES

5.1. Quasi-analytic classes

Let $\overline{M} = \langle M_0, M_1, \dots \rangle$ be an increasing sequence of real numbers with $M_0 \geq 1$. For $n \geq 1$, let $\mathcal{C}_n(\overline{M})$ denote the collection of all C^∞ functions $f : [-1, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $|f^{(\alpha)}(\mathbf{x})| \leq c^{|\alpha|} \cdot M_{|\alpha|}$ for all $\mathbf{x} \in [-1, 1]^n$ and for all multi-indices $\alpha \in \mathbb{N}^n$, where $c > 0$ is a constant that may depend on f , but not on α or \mathbf{x} . (For $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ and $f^{(\alpha)}$ denotes the α 'th partial derivative of f with respect to \mathbf{x} .)

We now say that the sequence \overline{M} *determines a quasi-analytic class* if for all $n \geq 1$, all $f \in \mathcal{C}_n(\overline{M})$ and all $\mathbf{a} \in [-1, 1]^n$, either f is identically zero or else there exists $\alpha \in \mathbb{N}^n$ such that $f^{(\alpha)}(\mathbf{a}) \neq 0$. In other words, the map sending a function in $\mathcal{C}_n(\overline{M})$ to its formal Taylor series at a point $\mathbf{a} \in [-1, 1]^n$ is injective.

THEOREM 5.1 (Rolin-Speissegger-Wilkie [10]). — *Suppose that the sequence \overline{M} determines a quasi-analytic class and set $\mathcal{G} = \bigcup \{f \in \mathcal{C}_n(\overline{M}) : n \geq 1\}$ (with functions being set to 0 outside the unit box). Then $\mathbb{R}_{\mathcal{G}}$ is o-minimal.*

In the case $M_p = p!$ each $\mathcal{C}_n(\overline{M})$ consists of precisely the functions that have real analytic continuations to some open set containing the box $[-1, 1]^n$, and then $\mathbb{R}_{\mathcal{G}} = \mathbb{R}_{an}$. However, there are larger quasianalytic classes. For by a theorem of Denjoy and Carleman, \overline{M} determines a quasianalytic class if and only if the series $\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{M_p}{M_{p+1}}$ diverges, and this can be used in conjunction with theorem 5.1 to construct new o-minimal structures. However, such structures are more for theoretical interest than practical use in that they can illustrate the limitations of the general theory. For example, one can construct a sequence \overline{M} satisfying the Denjoy–Carleman condition such that there exists a function $f \in \mathcal{C}_1(\overline{M})$ which is nowhere analytic. (Every example of an o-minimal structure constructed prior to [10] had the property that every definable function was piecewise analytic.) Also, there exist two sequences \overline{M} and \overline{K} , both satisfying the Denjoy–Carleman condition, such that the structure $\mathbb{R}_{\mathcal{C}_1(\overline{M}) \cup \mathcal{C}_1(\overline{K})}$ is not o-minimal. So there is no maximum o-minimal structure.

5.2. Tarski's problem on the real exponential function

Tarski asked whether his work on the ordered field of real numbers could be extended to the structure $\mathbb{R}_{\{\exp\}}$. (Of course, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is real analytic, but it is not definable in the structure \mathbb{R}_{an} because its graph is not *globally* analytic.) In fact, he was interested in questions of effectivity in the sense that his own procedure for producing a quantifier-free formula equivalent to a given arbitrary formula of L was completely effective. We still do not have any complete answers in this direction for the structure $\mathbb{R}_{\{\exp\}}$, although we do now know enough about the $L(\{\exp\})$ -definable

sets to reduce the problem to a purely number-theoretic one (see [8]). This arose out of the work in my paper [13] where I showed that any $L(\{\text{exp}\})$ -definable set is a projection of a set definable by a quantifier-free formula. Since Khovanski had already shown ([7]) that such sets have only finitely many connected components, we also obtain the following result.

THEOREM 5.2. — *The structure $\mathbb{R}_{\{\text{exp}\}}$ is o-minimal.*

Soon after this, van den Dries, Macintyre and Marker ([4]), by rather different methods, managed to add the full exponential function to \mathbb{R}_{an} . That is, they showed that the structure $\mathbb{R}_{\mathcal{G}^*}$ is o-minimal (and much more besides), where $\mathcal{G}^* := \mathcal{G}_{\text{an}} \cup \{\text{exp}\}$, and this is probably the most useful tame topology for the working mathematician. (See for example [11], where functions of the form $f(x_1, \dots, x_n, \log x_1, \dots, \log x_n)$ (where f is globally analytic) arise. Schmid and Vilonen must control the behaviour of the zero set, Z say, of such a function near a positive coordinate plane, P say. This may be studied by analysing the intersection $\overline{Z} \cap \overline{P}$ of their closures, which is $L(\mathbb{R}_{\mathcal{G}^*})$ -definable (cf. the remarks concerning 2.3(2) in section 3), and hence the representations described in 4.1 and 4.2 apply.)

6. NEW FIBRED COLLECTIONS OF POLYNOMIALS

In this short final section I present a result (due to Coste and van den Dries, and motivated by work of Risler) that concerns a uniformity in certain collections of semi-algebraic sets but does not seem to be provable by considering the real ordered field $\overline{\mathbb{R}}$ alone. Further, unlike the result discussed in 4.4, which may be formulated, and is in fact true, for the complex field (just split a complex polynomial into its real and imaginary parts and apply the real result to the sum of their squares) this result is definitely false there.

Fix positive integers n, d and consider the collection $\mathcal{P}_{n,d}$ of zero sets of polynomials in n variables that can be written as the sum of at most d monomials (of any degree). The result states that there is a bound $l = l(n, d)$ on the number of homeomorphism types of sets in $\mathcal{P}_{n,d}$. (For $n = 1$ this is a consequence of Descartes' Rule of Signs: one may take $l = 2d + 1$.)

Now of course, each set in $\mathcal{P}_{n,d}$ is an L -definable subset of \mathbb{R}^n . However, it follows easily from quantifier elimination that for $n > 1$, $\mathcal{P}_{n,d}$ is not contained in any definable collection of subsets of \mathbb{R}^n relative to the structure $\overline{\mathbb{R}}$. So the argument of 4.4 seems not to apply. The idea of Coste and van den Dries is based on the observation that a monomial function becomes a definable function of both the n given variables and their exponents if we pass to the structure $\mathbb{R}_{\{\text{exp}\}}$.

To simplify the argument, I consider the collection $\{Z \cap Q^+ : Z \in \mathcal{P}_{n,d}\}$, where Q^+ denotes the positive quadrant of \mathbb{R}^n , rather than $\mathcal{P}_{n,d}$. We introduce $d+1$ n -tuples of variables $\mathbf{t}, \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(d)}$ and a d -tuple of variables \mathbf{u} and consider the function

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) := \sum_{i=1}^d u_i \exp(\mathbf{y}^{(i)} \cdot \mathbf{t})$$

of the $d + nd + n$ variables displayed. (The \cdot denotes scalar product.)

If $P(x_1, \dots, x_n)$ is the sum of d monomials with real coefficients, then we may clearly find $\alpha \in \mathbb{R}^d$ and $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{nd}$ ($\subseteq \mathbb{R}^{nd}$) such that $P(\exp(t_1), \dots, \exp(t_n)) = g(\alpha, \mathbf{k}, \mathbf{t})$ for all $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

But note that $\{\langle \exp(t_1), \dots, \exp(t_n) \rangle \in Q^+ : g(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = 0\} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{R}^{d+nd}$ is a definable collection of subsets of \mathbb{R}^n over the structure $\mathbb{R}_{\{\exp\}}$. The result now follows as in 4.4 after noting that the exponential map on each coordinate induces a homeomorphism from \mathbb{R}^n to Q^+ .

REFERENCES

- [1] J. DENEFF & L. VAN DEN DRIES – “ p -adic and real subanalytic sets”, *Ann. of Math.* **128** (1988), p. 79–138.
- [2] L. VAN DEN DRIES – “Remarks on Tarski’s problem concerning $(\mathbf{R}, +, \cdot, \exp)$ ”, in *Logic colloquium ’82 (Florence, 1982)*, Stud. Logic Found. Math., vol. 112, North-Holland, 1984, p. 97–121.
- [3] ———, *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 248, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [4] L. VAN DEN DRIES, A. MACINTYRE & D. MARKER – “The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation”, *Ann. of Math.* **140** (1994), p. 183–205.
- [5] A. M. GABRIËLOV – “Projections of semianalytic sets”, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **2** (1968), p. 18–30.
- [6] A. GROTHENDIECK – “Esquisse d’un programme”, notes, 1984.
- [7] A. KHOVANSKI – “On a class of systems of transcendental equations”, *Soviet Math. Doklady* **22** (1980), p. 762–765.
- [8] A. MACINTYRE & A. J. WILKIE – “On the decidability of the real exponential field”, in *Kreiseliana*, A K Peters, 1996, p. 441–467.
- [9] A. PILLAY & C. STEINHORN – “Definable sets in ordered structures. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), p. 565–592.
- [10] J.-P. ROLIN, P. SPEISSEGER & A. J. WILKIE – “Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality”, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 751–777.

- [11] W. SCHMID & K. VILONEN – “Characteristic cycles of constructible sheaves”, *Invent. Math.* **124** (1996), p. 451–502.
- [12] A. TARSKI – *A decision method for elementary algebra and geometry*, second ed., Rand Corporation, 1951.
- [13] A. J. WILKIE – “Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function”, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), p. 1051–1094.

Alex J. WILKIE

School of Mathematics,
The Alan Turing Building
University of Manchester
MANCHESTER M13 9PL
(United Kingdom)

E-mail : `awilkie@maths.man.ac.uk`

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(986) *Ramanujan's mock theta functions
and their applications*

Don ZAGIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**RAMANUJAN'S MOCK THETA FUNCTIONS
AND THEIR APPLICATIONS**
[d'après Zwegers and Ono–Bringmann]

by **Don ZAGIER**

INTRODUCTION

One of the most romantic stories in the history of mathematics is that of the friendship between Hardy and Ramanujan. It began and ended with two famous letters. The first, sent by Ramanujan to Hardy in 1913, presents its author as a penniless clerk in a Madras shipping office who has made some discoveries that “are termed by the local mathematicians as ‘startling’.” Hardy spent the night with Littlewood convincing himself that the letter was the work of a genius and not of a fraud and promptly invited Ramanujan to come to England for what was to become one of the most famous mathematical collaborations in history. The other letter was sent in 1920, also by Ramanujan to Hardy, just three months before his death at the age of 32 in India, to which he had returned after five years in England. Here he recovers briefly from his illness and depression to tell Hardy excitedly about a new class of functions that he has discovered and that he calls “mock theta functions.”

This letter has become celebrated, not only because of the tragic circumstances surrounding it, but also because it was mathematically so mysterious and intriguing. Ramanujan gives no definition of mock theta functions but only a list of 17 examples and a qualitative description of the key property that he had noticed: that these functions have asymptotic expansions at every rational point of the same type as those of theta functions (Ramanujan used the word “theta functions” where we would say “modular forms” today, so that “mock theta functions” meant something like “fake modular forms”), but that there is no single theta function whose asymptotic expansion agrees at all rational points with that of the mock theta function. Obviously, this is a basic property, but far from a complete definition.

In the years since 1920, many papers have been written, including many by famous mathematicians like Watson, Selberg and Andrews, studying the 17 specific examples Ramanujan had given, proving the identities that he had stated, and finding further identities of the same type. But no natural definition was known that

described what these functions are intrinsically and hence could give a natural explanation of the identities between them and a method to construct further examples at will. The breakthrough came in 2002 with the thesis of a Dutch doctoral student, Sander Zwegers, who finally found the missing intrinsic characterization of mock theta functions. In fact, he did this in three different ways! Specifically, he observed that various known identities from the literature could be interpreted as saying that each of Ramanujan's examples belongs to at least one (and presumably to all, although probably not all 51 verifications have been carried out explicitly) of three infinite families of functions:

(A) "Lerch sums"

(B) "Quotients of indefinite binary theta series by unary theta series"

(C) "Fourier coefficients of meromorphic Jacobi forms"

(We will define and discuss these families in more detail below.) For each of these classes he was able to prove a specific type of near-modular behavior which therefore held in particular for Ramanujan's examples. What's more, this near-modularity property turned out to be the same for each of the three classes, so that the original problem was not only triply solved, but in a way that made it quite convincing that the essential property of these functions really had been correctly identified.

In this talk we will describe Ramanujan's letter and the 17 original examples, describe each of the classes (A)–(C) and the nature of their modularity, formulate a general definition of mock modular forms, and describe further examples. In the final section, we will also discuss some of the beautiful recent work of Kathrin Bringmann and Ken Ono, based on these ideas, that has led to the solution of several well-known open problems in combinatorics and the theory of q -series.

Before beginning the main story, there are two points that I would like to emphasize. The first is that one of the reasons for the great usefulness (or "unreasonable effectiveness," to coin a phrase) of classical modular forms in number theory is that each modular form has calculable invariants—its weight, level, and a (known) finite number of its first Fourier coefficients—that suffice to characterize it uniquely. This means that to prove any conjectured identity between modular forms, like the famous formulas

$$q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{n} \right) q^{n^2/24}, \quad \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-q)^{n^2} \right)^4 + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} q^{n^2} \right)^4 = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^4$$

of Euler and Jacobi, respectively, it suffices to calculate the invariants on both sides and check that they are the same; one does not need to know any further properties of the functions involved or even where they come from. Precisely the same principle will apply also to the larger class of mock modular forms motivated by and containing

Ramanujan's examples, as soon as we know their modular transformation properties, so that here, too, identities which previously required lengthy computations and great ingenuity for their proofs can now be established by an essentially automatic procedure.

The second point is that all 17 of Ramanujan's mock theta functions were given in the form of q -hypergeometric series. (We recall that a q -hypergeometric series is a sum of the form $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(q)$ where each $A_n(q) \in \mathbb{Q}(q)$ and $A_{n+1}(q)/A_n(q) = R(q, q^n)$ for all $n \geq 1$ for some fixed rational function $R(q, r) \in \mathbb{Q}(q, r)$.) Some modular forms are q -hypergeometric series, classical examples being the theta series and Eisenstein series

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{and} \quad \frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1 + q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2},$$

respectively, but this is very rare and there is no known criterion for deciding whether a given q -hypergeometric series is modular or not. (There are fascinating conjectures due to Werner Nahm relating this question to deep questions of conformal field theory and algebraic K -theory [18, 25].) Ramanujan loved and was a supreme connoisseur of q -hypergeometric series, and his examples all quite naturally belonged to this category, but it is a complete red herring from the point of view of understanding the intrinsic modular transformation properties that make these functions special. It is perhaps precisely for this reason that it took so long for these transformation properties to be found, just as the theory of ordinary modular forms would have developed much more slowly if for some reason one had focused only on the rare q -hypergeometric examples.

1. RAMANUJAN'S LETTER

Ramanujan divided his seventeen examples into four of order 3, ten of order 5, and three of order 7, though he gave no indication what these "orders" were. (We'll see later that they are related to the levels of the corresponding mock modular forms.) We will discuss most of these functions here to illustrate various points involved.

The mock theta functions of order 3 were denoted f , ϕ , ψ and χ . We give only the first three (changing q to $-q$ in ϕ and ψ in order to simplify the relations):

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2 \cdots (1+q^n)^2},$$

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)^{n^2}}{(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2n})},$$

$$\psi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-q)^{n^2}}{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})}.$$

Ramanujan gives two relations among these functions (as well as a further relation involving f and χ), all proved later by Watson:

$$2\phi(q) - f(q) = f(q) + 4\psi(q) = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots},$$

where the expression on the right-hand side is, up to a factor $q^{-1/24}$, a modular form of weight $\frac{1}{2}$. Already in this first example we see three points:

- there are linear relations among the mock theta functions (here, $\phi = f + 2\psi$);
- the space they span contains a subspace of ordinary modular forms;
- one must multiply by suitable powers of q to get the correct modular behavior.

Ramanujan also describes the asymptotics of $f(q)$ as q tends to any root of unity, a typical result being

$$e^{\pi t/24} f(-e^{-\pi t}) = -\frac{1}{\sqrt{t}} e^{\pi/24t} + 4 + o(1) \quad \text{as } t \rightarrow 0.$$

Notice that, as Ramanujan asserts, this is similar to the type of expansion which we would have if $q^{-1/24}f(q)$ were a true modular form of weight $\frac{1}{2}$, except that then the subleading terms would have a form like $t^{-1/2} \sum_{n \geq 0} a_n e^{-\pi n/24t}$ rather than $4 + o(1)$.

The ten mock theta functions of order 5 have similar features, but are considerably more complicated. We discuss this case in more detail since it is quite typical. The functions come in five groups of two each, denoted f_j , ϕ_j , ψ_j , χ_j and F_j with $j \in \{1, 2\}$. (These are Ramanujan's notations, except that he omits the indices.) The five functions with index $j = 1$ are given by

$$\begin{aligned} f_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)\cdots(1+q^n)}, \\ \phi_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1}), \\ \psi_1(q) &= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n(n+1)/2} (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{n-1}), \\ \chi_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^{n+1})\cdots(1-q^{2n})}, \\ F_1(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2n-1})}, \end{aligned}$$

and the five with index $j = 2$ are very similar, e.g.,

$$f_2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1+q) \cdots (1+q^n)},$$

$$\chi_2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^{n+1}) \cdots (1-q^{2n+1})}.$$

Again Ramanujan gives a number of linear relations among these functions or between them and classical modular forms (multiplied by suitable powers of q). These relations, later proved by Watson, can be summarized in the form

$$\begin{pmatrix} f_1(\sqrt{q}) & f_1(-\sqrt{q}) & \chi_1(q) - 2 & \phi_1(-q) & \psi_1(\sqrt{q}) & \psi_1(-\sqrt{q}) & F_1(q) - 1 \\ f_2(\sqrt{q}) & -f_2(-\sqrt{q}) & \chi_2(q)\sqrt{q} & -\phi_2(-q)/\sqrt{q} & \psi_2(\sqrt{q}) & -\psi_2(-\sqrt{q}) & F_2(q)\sqrt{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(q) & V_1(q) & W_1(q) \\ U_2(q) & V_2(q) & W_2(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

where U_j and V_j , multiplied by $q^{-1/120}$ for $j = 1$ and by $q^{11/120}$ for $j = 2$, are quotients of classical theta series and only W_1 and W_2 are functions of the new “mock” type. We thus see the same points as above, but in a more complicated setting: we have seven vectors, each consisting of two q -hypergeometric series, which span a space of dimension only 3 rather than 7, and this 3-dimensional space contains a 2-dimensional subspace of (weakly holomorphic) classical modular forms after multiplication by suitable rational powers of q . Again there are also asymptotic formulas as q tends to any root of unity.

Finally, the three mock theta functions of order 7 are much simpler, since they form in a natural way a single 3-vector, with no linear relations. The three functions are

$$\mathcal{F}_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2}) \cdots (1-q^{2n})},$$

$$\mathcal{F}_2(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q^n)(1-q^{n+1}) \cdots (1-q^{2n-1})},$$

$$\mathcal{F}_3(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)}}{(1-q^n)(1-q^{n+1}) \cdots (1-q^{2n-1})}.$$

Since there are no relations, either among these functions or between them and classical modular forms, it is less apparent here than in the other cases what is special about these particular q -hypergeometric series. One answer (which was Ramanujan’s) is that they again satisfy asymptotic formulas at roots of unity of the same type as for order 3

and 5. Another will appear later when we state identities relating the functions $\mathcal{F}_j(q)$ to indefinite theta series and to mock Eisenstein series. But a third answer, which we can already state here, is simply at the level of the q -expansions themselves. If we calculate to high order, we find that the coefficients of these expansions grow very rapidly, the coefficient of q^{5000} in $\mathcal{F}_1(q)$, for instance, being 194522493757188413627772966. But if we multiply any of the series $\mathcal{F}_j(q)$ by the infinite product $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{7n})$, which up to a rational power of q is a modular form, then in each case the first 5000 coefficients are all at most 10 in absolute value, suggesting that the functions $\mathcal{F}_j(q)$ are indeed related in some non-trivial way with modular forms.

2. LERCH–APPELL SUMS AND MORDELL INTEGRALS

In his famous lecture “The Final Problem” given on the occasion of his retirement as president of the London Mathematical Society in 1935, Watson [23] considered the mock theta functions from Ramanujan’s last letter and in particular proved all of the identities and asymptotic expansions which Ramanujan had given for the functions of order 3. To do this, he first established a number of new identities—not actually all that new, as it transpired when Ramanujan’s “lost notebooks” were discovered later—relating the mock theta functions to q -hypergeometric series of a much simpler form, a typical example being the identity

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \cdot f(q) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(3n+1)/2}}{1 + q^n}$$

for the first mock theta function of order 3.

In the first chapter of his thesis [28], Zwegers studies sums of the type appearing on the right-hand side of this formula, which he calls “Lerch sums” after M. Lerch, who studied functions of this kind in two papers [15, 16] (one in Czech and one in German) in 1892, though in fact they had been introduced some years earlier by Appell [3]. The transformation properties of these functions were studied by both Lerch and Appell and also by modern authors [19, 21], but Zwegers’s analysis is very complete and we will follow his exposition here.

It turns out to be convenient to normalize the Lerch sums, which are objects of weight 1, by dividing them by theta series of weight $\frac{1}{2}$, since the mock theta functions will eventually be expressed as linear combinations of such quotients. For fixed $\tau \in \mathfrak{H}$ (= complex upper half plane) we define a function of two complex variables u, v by

$$\mu(u, v) = \mu(u, v; \tau) = \frac{a^{1/2}}{\theta(v)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-b)^n q^{n(n+1)/2}}{1 - aq^n},$$

where $q = e^{2\pi i\tau}$, $a = e^{2\pi iu}$, $b = e^{2\pi iv}$ (we will use these abbreviations throughout, and will omit the variable τ when it is not varying) and $\theta(v)$ is the Jacobi theta series

$$\theta(v) = \theta(v; \tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (-1)^{\nu-1/2} b^\nu q^{\nu^2/2} = q^{1/8} b^{1/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - bq^n)(1 - b^{-1}q^{n-1}).$$

(The last equality is the famous triple product identity of Jacobi.) Zwegers shows that the function μ has the symmetry property

$$\mu(u, v) = \mu(v, u),$$

the elliptic transformation properties

$$\begin{aligned} \mu(u + 1, v) &= -\mu(u, v), \\ a^{-1}bq^{-1/2}\mu(u + \tau, v) &= -\mu(u, v) + a^{-1/2}b^{1/2}q^{-1/8}, \end{aligned}$$

and the modular transformation properties

$$\begin{aligned} \mu(u, v; \tau + 1) &= \zeta_8^{-1}\mu(u, v) \quad (\zeta_N := e^{2\pi i/N}), \\ (\tau/i)^{-1/2} e^{\pi i(u-v)^2/\tau} \mu\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau}; \frac{-1}{\tau}\right) &= -\mu(u, v) + \frac{1}{2} h(u - v; \tau), \end{aligned}$$

where $h(z; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i x^2 \tau - 2\pi i x z} dx}{\cosh \pi x}$, an integral of a kind first introduced by Mordell [17]. These properties show that μ behaves nearly like a Jacobi form of weight $\frac{1}{2}$ in two variables (a Jacobi form being a function of a modular variable τ and one or more elliptic variables u, v, \dots with appropriate transformation properties; the exact definition in the one-variable case will be recalled in §4), and that its failure to transform exactly like a Jacobi form depends only on the difference $u - v$.⁽¹⁾ Zwegers then constructs a second, but now non-holomorphic, function (of $u - v$ only) whose “non-Jacobiness” exactly matches that of μ , so that the difference of these two functions transforms in the correct way, though at the expense of no longer being holomorphic:

THEOREM 2.1. — For $\tau \in \mathfrak{H}$, $z \in \mathbb{C}$ define $R(z; \tau)$ by the convergent series

$$R(z; \tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} (-1)^{\nu-1/2} [\operatorname{sgn}(\nu) - E((\nu + \Im(z)/y)\sqrt{2y})] e^{-2\pi i\nu z} q^{-\nu^2/2},$$

where $y = \Im(\tau)$ and $E(z)$ is the odd entire function $2 \int_0^z e^{-\pi u^2} du$. Then the function

$$\widehat{\mu}(u, v; \tau) = \mu(u, v; \tau) - \frac{1}{2} R(u - v; \tau)$$

⁽¹⁾ The fact that the “non-Jacobiness” of $\mu(u, v)$ depends only on $u - v$ can be explained by the fact that $\mu(u, v)$ has a decomposition of the form $\mu(u, v) = \frac{\zeta(u) - \zeta(v) - \zeta(u-v)}{\theta(u-v)} + \lambda(u - v)$, where $\zeta(z) = (2\pi i)^{-1} \theta'(z)/\theta(z)$ is the Weierstrass ζ -function, in which the first term is a true (meromorphic) Jacobi form and the second a function of $u - v$ alone. The details will be given in a later publication.

is symmetric in u and v and satisfies the elliptic transformation properties

$$\widehat{\mu}(u+1, v) = a^{-1} b q^{-1/2} \widehat{\mu}(u+\tau, v) = -\widehat{\mu}(u, v)$$

and the modular transformation properties

$$\zeta_8 \widehat{\mu}(u, v; \tau+1) = -(\tau/i)^{-1/2} e^{\pi i(u-v)^2/\tau} \widehat{\mu}\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau}; \frac{-1}{\tau}\right) = \widehat{\mu}(u, v).$$

Now it is well-known that specializing the “elliptic” variables of a Jacobi form to torsion points (= points of $\mathbb{Q}\tau + \mathbb{Q}$) gives functions of τ which are modular forms times rational powers of q . If we combine this with the two other facts that some or all mock theta functions can be written as linear combinations of the function $\mu(u, v; \tau)$ with u and v in $\mathbb{Q}\tau + \mathbb{Q}$, and that the function μ can be modified in a simple way to give a function $\widehat{\mu}$ which transforms like a Jacobi form, we deduce that a mock theta function, multiplied by a suitable rational power of q and corrected by the addition of a simple and explicit non-holomorphic function of τ , becomes a modular form. For instance, using the identity of Watson for the mock theta function $f(q)$ of order 3 given at the beginning of this section and the transformation properties of the Lerch sums, Zwegers [27] shows that the function $h_3(\tau) = q^{-1/24} f(q)$ ($\tau \in \mathfrak{H}$, $q = e^{2\pi i\tau}$) can be “corrected” by adding to it the non-holomorphic unary theta series

$$R_3(\tau) = \sum_{n \equiv 1 \pmod{6}} \operatorname{sgn}(n) \beta(n^2 y/6) q^{-n^2/24} \quad (y = \Im(\tau)),$$

where $\beta(x)$ is the complementary error function (or incomplete gamma function)

$$\beta(x) = \int_x^\infty u^{-1/2} e^{-\pi u} du = 2 \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-\pi t^2} dt = 1 - E(\sqrt{x}) \quad (x \geq 0),$$

and that the corrected function $\widehat{h}_3(\tau) = h_3(\tau) + R_3(\tau)$ transforms like a modular form of weight $\frac{1}{2}$ with respect to the congruence group $\Gamma(2)$.

Finally, we mention that the correction terms for the mock theta functions can be written in a different form. For instance, we can write the definition of $R_3(\tau)$ as

$$R_3(\tau) = \frac{i}{\sqrt{3}} \int_{-\bar{\tau}}^\infty \frac{g_3(z)}{\sqrt{(z+\tau)/i}} dz,$$

where $g_3(z)$, a holomorphic modular form of weight $\frac{3}{2}$, is the unary theta series

$$g_3(z) = \sum_{n \equiv 1 \pmod{6}} n q^{n^2/24} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{-12}{n}\right) n q^{n^2/24}.$$

This type of formula will play a role in §5 when we give the general definitions of mock theta functions and mock modular forms.

3. INDEFINITE THETA SERIES

Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a \mathbb{Z} -valued bilinear form on \mathbb{Z}^r and $Q(x) = \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$ the associated quadratic form. If Q is positive definite, then it is a classical fact that the theta series $\Theta(\tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^r} q^{Q(\nu)}$, or more generally $\Theta_{a,b}(\tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^r+a} e^{2\pi i \langle b, \nu \rangle} q^{Q(\nu)}$ for any $a, b \in \mathbb{Q}^r$, is a modular form of weight $r/2$ (and of known level and character). For indefinite theta series there is a well-known theory of non-holomorphic theta series due to Siegel, but no standard way to obtain holomorphic functions with arithmetic Fourier coefficients having any kind of modular transformation behavior. In the second chapter of his thesis, Zwegers shows how to do this when the quadratic form Q has signature $(r - 1, 1)$. Since many (presumably, all) of the mock theta functions have representations as the quotient of a theta series associated to a quadratic form of signature $(1, 1)$ by a theta series associated to a positive definite quadratic form of rank 1, this has an immediate application to the transformation behavior of mock theta functions. We will describe the general result first and then give some of the applications to mock theta functions at the end of the section.

For Q indefinite, the theta series $\Theta_{a,b}$ as defined above is divergent, since its terms are unbounded (because there are vectors $\nu \in \mathbb{Z}^r$ with $Q(\nu) < 0$) and all occur with infinite multiplicity (because there is an infinite group of units permuting the terms). However, we can make it convergent by restricting the summation to the set of lattice points lying between two appropriately chosen hyperplanes in \mathbb{R}^r . More precisely, let C be one of the two components of the double cone $\{x \in \mathbb{R}^r \mid Q(x) < 0\}$, and for $a, b \in \mathbb{Q}^r$ and $c, c' \in C$ define

$$\Theta_{a,b}^{c,c'}(\tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^r+a} (\operatorname{sgn}(\langle c, \nu \rangle) - \operatorname{sgn}(\langle c', \nu \rangle)) e^{2\pi i \langle b, \nu \rangle} q^{Q(\nu)}.$$

This series now contains only positive powers of q and is absolutely convergent (although this isn't obvious), so it defines a holomorphic function of τ , but of course it is not in general modular. To remedy this, Zwegers introduces the modified function

$$\widehat{\Theta}_{a,b}^{c,c'}(\tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^r+a} \left(E\left(\frac{\langle c, \nu \rangle \sqrt{y}}{\sqrt{-Q(c)}}\right) - E\left(\frac{\langle c', \nu \rangle \sqrt{y}}{\sqrt{-Q(c')}}\right) \right) e^{2\pi i \langle b, \nu \rangle} q^{Q(\nu)} \quad (y = \Im(\tau))$$

with $E(z)$ as in Theorem 2.1. Then from the relation $E(x) = \operatorname{sgn}(x)(1 - \beta(x^2))$ we get $\widehat{\Theta}_{a,b}^{c,c'}(\tau) = \Theta_{a,b}^{c,c'}(\tau) - \Phi_{a,b}^c(\tau) + \Phi_{a,b}^{c'}(\tau)$ with

$$\Phi_{a,b}^c(\tau) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^r+a} \operatorname{sgn}(\langle c, \nu \rangle) \beta\left(\frac{\langle c, \nu \rangle^2 y}{-Q(c)}\right) e^{2\pi i \langle b, \nu \rangle} q^{Q(\nu)}$$

(which is rapidly convergent, with summands bounded by $e^{-A\|\nu\|^2}$ for some $A > 0$). If c belongs to $C \cap \mathbb{Q}^r$, then $\Phi_{a,b}^c(\tau)$ is a finite linear combination $\sum_j R_j(\tau)\theta_j(\tau)$ where each $R_j(\tau)$ is a sum of the same sort as occurred in §2 as the correction needed to make

mock theta functions modular (i.e., $R_j(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \alpha_j} \text{sgn}(n) \beta(4\kappa_j n^2 y) q^{-\kappa_j n^2}$ for some $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ and $\kappa_j \in \mathbb{Q}_{>0}$) and each $\theta_j(\tau)$ is an ordinary theta series associated to the quadratic form $Q|\langle c \rangle^\perp$ and hence is a holomorphic modular form of weight $(r - 1)/2$. (In the case of mock theta functions, one can choose $\theta_j(\tau) = \theta(\tau)$ independent of j , so that $\Phi_{a,b}^c(\tau)$ factors as $\theta(\tau)R^c(\tau)$, and moreover the theta function $\theta(\tau)$, here of weight $\frac{1}{2}$ because $r = 2$, is the same for c and c' . The mock theta function is then, up to a power of q , the quotient $h(\tau) = \Theta_{a,b}^{c,c'}(\tau)/\theta(\tau)$ and its completed version is $\widehat{h}(\tau) = h(\tau) - R^c(\tau) + R^{c'}(\tau)$.) Zwegers now shows ([28], Cor. 2.9):

THEOREM 3.1. — *The non-holomorphic function $\widehat{\Theta}_{a,b} = \widehat{\Theta}_{a,b}^{c,c'}$ ($a, b \in \mathbb{Q}^r$, $c, c' \in C$) satisfies the same transformation equations (expressing $\widehat{\Theta}_{a,b}(\tau + 1)$ and $\widehat{\Theta}_{a,b}(-1/\tau)$) as finite linear combinations of functions $\widehat{\Theta}_{a',b'}(\tau)$ as in the positive definite case, and in particular is a non-holomorphic modular form of weight $r/2$.*

Note that this theorem can also be used to get theta series associated to Q which are *holomorphic* modular forms. For instance, let $O(Q)^+$ be the component of the orthogonal group of Q mapping C to itself and Γ^+ congruence subgroup of all $\gamma \in O(Q)^+$ preserving $\mathbb{Z}r + a$ and the function $\nu \mapsto e^{2\pi i(b, \nu)}$ on $\mathbb{Z}r + a$. Then $\Phi_{a,b}^c = \Phi_{a,b}^{\gamma c}$ for any $c \in C$ and $\gamma \in \Gamma^+$, so the function $\Theta_{a,b}^{c,\gamma c} = \widehat{\Theta}_{a,b}^{c,\gamma c}$ (which is independent of c , as one can easily check) is both holomorphic and modular.

We now give examples of the applications of these results to mock theta functions. In [1], Andrews found representations for all of Ramanujan’s fifth order mock theta functions except $\chi_1(\tau)$ and $\chi_2(\tau)$ as quotients $\Theta(\tau)/\theta(\tau)$ with $\theta(\tau)$ modular of weight $\frac{1}{2}$ and $\Theta(\tau)$ a theta series associated to a binary quadratic form of signature (1,1), a typical formula being

$$f_1(q) = \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{|j| \leq n} - \sum_{n < 0} \sum_{|j| < |n|} \right) (-1)^j q^{n(5n+1)/2 - j^2}.$$

Similar formulas for the seventh order functions were proved by Hickerson [12], e.g.,

$$\mathcal{F}_1(q) = \frac{1}{\prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)} \left(\sum_{r, s \geq 0} - \sum_{r, s < 0} \right) (-1)^{r+s} q^{(3r^2 + 8rs + 3s^2 + r + s)/2}.$$

Using these formulas and Theorem 3.1, we can find the modular properties of all of these mock theta functions. For example, from the first identity just given and its companion for f_2 we find that the sum of the holomorphic vector-valued function $\left(\begin{smallmatrix} q^{-1/60} f_1(q) \\ q^{11/60} f_2(q) \end{smallmatrix} \right)$ and the non-holomorphic correction term $\left(\begin{smallmatrix} R_{5,1}(\tau) \\ R_{5,2}(\tau) \end{smallmatrix} \right)$, where

$$R_{p,j}(\tau) = \sum_{n \equiv j \pmod{p}} \left(\frac{12}{n} \right) \text{sgn}(n) \beta\left(\frac{n^2 y}{6p}\right) q^{-n^2/24p} \quad (6 \nmid p, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

transforms like a modular form of weight $\frac{1}{2}$ with respect to the congruence subgroup $\Gamma(5)$ of $SL(2, \mathbb{Z})$, while from the second one we find the even nicer result for the seventh order functions that, if we define

$$M_7(\tau) = \begin{pmatrix} q^{-1/168} \mathcal{G}_1(q) \\ -q^{-25/168} \mathcal{G}_2(q) \\ q^{47/168} \mathcal{G}_3(q) \end{pmatrix}, \quad \widehat{M}_7(\tau) = M_7(\tau) + \begin{pmatrix} R_{7,1}(\tau) \\ R_{7,2}(\tau) \\ R_{7,3}(\tau) \end{pmatrix},$$

then \widehat{M}_7 transforms in a modular way with respect to the full modular group $SL(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_7(\tau + 1) &= \text{diag}(\zeta_{168}^{-1}, \zeta_{168}^{-25}, \zeta_{168}^{-121}) \widehat{M}_7(\tau), \\ \widehat{M}_7(-1/\tau) &= \sqrt{\tau/7i} (2 \sin 6\pi jk/7)_{1 \leq j, k \leq 3} \widehat{M}_7(\tau). \end{aligned}$$

4. FOURIER COEFFICIENTS OF MEROMORPHIC JACOBI FORMS

We recall that a Jacobi form is a holomorphic function $\varphi(\tau, z)$ of two variables $\tau \in \mathfrak{H}$ and $z \in \mathbb{C}$ which transforms like a modular form with respect to the first and like an elliptic function with respect to the second. More precisely, a Jacobi form of weight k and index $N/2$ on the full modular group is a holomorphic function $\varphi : \mathfrak{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfying $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{\pi i N c z^2 / (c\tau+d)} \varphi(\tau, z)$ for all $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ and $\varphi(\tau, z + r\tau + s) = e^{-\pi i N (r^2 \tau + 2rz)} \varphi(\tau, z)$ for all $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$, as well as certain growth conditions which we omit. (For these and further details and explanations, see [9].) Examples are given by classical theta functions and by the Fourier coefficients of Siegel modular forms of degree 2, and an important property, already mentioned in §2 in connection with the mock Jacobi forms $\mu(u, v; \tau)$, is that for any $a, b \in \mathbb{Q}$ the specialization $\varphi(\tau, a\tau + b)$, multiplied by a suitable rational power of q , is a modular form with respect to τ .

The elliptic transformation property of φ implies that it has an expansion

$$\varphi(\tau, z) = \sum_{\ell \pmod{N}} h_\ell(\tau) \theta_{N,\ell}(\tau, z),$$

where $h_\ell(\tau)$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) is the Fourier coefficient

$$h_\ell(\tau) = e^{-\pi i \ell^2 \tau / N} \int_{z_0}^{z_0+1} e^{-2\pi i \ell z} \varphi(\tau, z) dz \quad (\text{any } z_0 \in \mathbb{C})$$

and $\theta_{N,\ell}(\tau, z)$ is the unary theta series

$$\theta_{N,\ell}(\tau, z) = \sum_{n \equiv \ell \pmod{N}} e^{2\pi i n z} q^{n^2/2N}$$

(which is itself a Jacobi form of weight $\frac{1}{2}$ and index $N/2$ on a subgroup of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$). The modular transformation property of φ then implies that the vector-valued function $h = (h_1, \dots, h_N) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}^N$ transforms like a modular form of weight $k - \frac{1}{2}$ on $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Zwegers observed that certain representations of the fifth order mock theta functions found by Andrews [2] can be reinterpreted as saying that these functions are the Fourier coefficients of a *meromorphic* Jacobi form (= quotient of two holomorphic Jacobi forms), and proceeds to find a general theory of the transformation behavior of the vector-valued function $h(\tau)$, defined by the same integral formula as above, when the Jacobi form φ is allowed to have poles. The complete result (Theorem 3.9 in [28]) is a little too long and technical to be included here. Briefly (in the simplest case when φ has only simple poles), it says that h can be completed to a non-holomorphic vector-valued modular form $\widehat{h}(\tau) = (\widehat{h}_\ell(\tau))_{\ell \pmod{N}}$ of weight $k - \frac{1}{2}$ by the addition of a vector of functions which are linear combinations of functions $R_\nu(\tau)$ of the same type as we encountered in §2 and §3, the coefficients in their turn being modular forms of weight $k-1$ if the poles of φ are at torsion points $z = a\tau + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$. In particular, if $k = 1$ and the poles of φ are at torsion points, then the \widehat{h}_ℓ are \mathbb{C} -linear combinations of the functions R_ν and the functions h_ℓ are mock theta functions of precisely the same kind as Ramanujan's. Moreover (now again for general k), the meromorphic Jacobi form has an expansion of the form $\varphi(\tau, z) = \sum_\ell h_\ell(\tau) \theta_{N,\ell}(\tau, z) + \mathrm{Res}$ with the same $\theta_{N,\ell}$ as above and with "Res" being given as an explicit finite sum over the residues of $\varphi(\tau, z)$ in the fundamental domain $z_0 + [0, 1)\tau + [0, 1)$ for the action of $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ on \mathbb{C} .

One peculiarity of the expansion just described is that the individual terms change as the base-point z_0 used to compute the Fourier coefficients $h_\ell(\tau)$ moves across certain lines in \mathbb{C} , namely, those where $\varphi(\tau, \cdot)$ has a singularity on the boundary of the parallelogram $z_0 + [0, 1)\tau + [0, 1) \subset \mathbb{C}$. This is related to the so-called "wall-crossing phenomenon" in the theory of Donaldson invariants (which were in turn related to the theory of indefinite theta functions in [10]) and also to the similar wall-crossing phenomenon which has appeared more recently in the theory of black holes [22].

5. MOCK THETA FUNCTIONS AND MOCK MODULAR FORMS

In §§2–4 we have seen that each of Ramanujan's mock theta functions $H(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$ acquires modularity transformation properties after carrying out the following three steps: (i) multiply $H(q)$ by a suitable rational power q^λ of q , e.g., $q^{-1/24}$ for the mock theta function $f(q)$ of order 3 or $q^{47/168}$ for the mock theta function

$\mathcal{F}_3(q)$ of order 7; (ii) change the variable from $q = e^{2\pi i\tau}$ to τ with $\tau \in \mathfrak{H}$, setting $h(\tau) = e^{2\pi i\lambda\tau} H(e^{2\pi i\tau})$; (iii) add a simple (but non-holomorphic) correction term to $h(\tau)$ so that the corrected function $\widehat{h}(\tau)$ transforms like a modular form of weight $\frac{1}{2}$ for some congruence subgroup of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. The correction has the form $g^*(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \alpha} \mathrm{sgn}(n) \beta(4\kappa n^2 y) q^{-\kappa n^2}$ for some $\alpha \in \mathbb{Q}$ and $\kappa \in \mathbb{Q}_{>0}$, with $\beta(t)$ as in Sections 2 and 3, and is in turn associated (in a way which we will make precise in a moment) to the theta series $g(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \alpha} n q^{\kappa n^2}$, which is a true modular form of weight $\frac{3}{2}$. Notice that steps (i) and (ii) would also be necessary in the case of q -series which are attached to true modular forms; it is only in the final step that the “mock” aspect comes into play.

One can therefore say that each mock theta function $H(q)$ has two secret invariants: a rational number λ such that $H(q)$ must be multiplied by q^λ in order to have any kind of modularity properties, and a “shadow” $g(\tau)$ which is a unary theta series of weight $\frac{3}{2}$ such that the holomorphic function $h(\tau) = q^\lambda H(q)$ becomes a non-holomorphic modular form of weight $\frac{1}{2}$ when we complete it by adding a correction term $g^*(\tau)$ associated to $g(\tau)$. This picture generalizes immediately to other weights and leads to the notion of a *mock modular form of weight k* , which we now describe. The space \mathbb{M}_k of all such forms contains as a subspace the space M_k of classical modular forms of weight k (and arbitrary level and character), but since—as we already saw for Ramanujan’s original mock theta functions—we will in general need to allow negative powers of q in the Fourier expansions at infinity or other cusps, we will define \mathbb{M}_k in such a way that it contains the larger space $M_k^!$ of weakly holomorphic modular forms of weight k (= functions which transform like modular forms of weight k and are holomorphic in \mathfrak{H} , but may have singularities of type $q^{-O(1)}$ at cusps). The space \mathbb{M}_k is of course infinite dimensional, but becomes finite dimensional when one adds conditions specifying the level of the form (i.e., the discrete group $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ and the character or finite-dimensional representation of Γ describing the modularity properties of the completed form) and the order of poles which we allow at the cusps. Each mock modular form $h \in \mathbb{M}_k$ has a “shadow” $g = \mathcal{J}[h]$ which is an ordinary modular form of weight $2 - k$. This “shadow” depends \mathbb{R} -linearly on h and vanishes if and only if h is a modular form (which is then weakly holomorphic, since in \mathbb{M}_k we impose exponential growth conditions at the cusps), so that we have an exact sequence over \mathbb{R}

$$0 \longrightarrow M_k^! \longrightarrow \mathbb{M}_k \xrightarrow{\mathcal{J}} M_{2-k}.$$

In fact the last map is also surjective, so that we have a short exact sequence and \mathbb{M}_k can be seen as the extension of one space of classical modular forms by another.

The definition of the shadow map is as follows. For $g(\tau)$ a modular form of weight $2 - k$ we define a new function $g^*(\tau)$ with $\partial g^*/\partial\bar{\tau}$ proportional to $y^{-k}\overline{g(\tau)}$ by

$$g^*(\tau) = (i/2)^{k-1} \int_{-\bar{\tau}}^{\infty} (z + \tau)^{-k} g^c(z) dz = \sum_{n>0} n^{k-1} \overline{b_n} \beta_k(4ny) q^{-n},$$

if $g = \sum_{n>0} b_n q^n$ (sum over some arithmetic progression in \mathbb{Q}), where $g^c(\tau) = g(-\bar{\tau}) = \sum \overline{b_n} q^n$ and $\beta_k(t)$ is the incomplete gamma function $\int_t^\infty u^{-k} e^{-\pi u} du$. (Here we are assuming for convenience that g vanishes at infinity. For mock theta functions, the unary theta series g is in fact a cusp form.) Then to say that g is the shadow $\mathcal{J}[h]$ of h means that the non-holomorphic function $\widehat{h}(\tau) = h + g^*$ transforms like a modular form of weight k , i.e., $\widehat{h}(\gamma\tau) = \rho(\gamma)(c\tau + d)^k \widehat{h}(\tau)$ for all $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in a suitable subgroup Γ of $SL(2, \mathbb{R})$, where ρ is a character (or, for vector-valued h , representation) of Γ .

We can say this in another way. There is a canonical isomorphism between the space \mathbb{M}_k of mock modular forms, which are holomorphic, but not quite modular, and a second space $\widehat{\mathbb{M}}_k$ of functions which are modular, but not quite holomorphic, the situation here being exactly analogous to the isomorphism (see [13] or §5 of [26]) between the space \widetilde{M}_k of “quasimodular forms” (which are again holomorphic, but not quite modular) and the space \widehat{M}_k of “almost holomorphic modular forms”. The isomorphism $\mathbb{M}_k \cong \widehat{\mathbb{M}}_k$ sends the mock modular form h with shadow g to the completed function $\widehat{h} = h + g^*$, so to find the definition of the image space $\widehat{\mathbb{M}}_k$ we must see how to recover h from \widehat{h} . But this is easy: since h is holomorphic, we can just apply the Cauchy–Riemann operator $\partial/\partial\bar{\tau}$ to get $\partial\widehat{h}/\partial\bar{\tau} = \partial g^*/\partial\bar{\tau} = y^{-k}\overline{g}$, and from \widehat{h} and g we recover h as $\widehat{h} - g^*$. The direct definition of $\widehat{\mathbb{M}}_k$ is therefore as follows. Let \mathfrak{M}_k be the space of real-analytic functions $F(\tau)$ in \mathfrak{H} which transform like modular forms of weight k (i.e., $F(\gamma\tau) = \rho(\gamma)(c\tau + d)^k F(\tau)$ for all γ in some modular group $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ and some character or representation ρ of Γ) and have at most exponential growth at the cusps. More generally, let $\mathfrak{M}_{k,\ell}$ be the space of functions which transform under some modular group Γ by $F(\gamma\tau) = \rho(\gamma)(c\tau + d)^k (c\bar{\tau} + d)^\ell F(\tau)$. Since the derivative of a modular form of weight 0 is a modular form of weight 2, the map $\partial/\partial\bar{\tau}$ sends $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{k,0}$ to $\mathfrak{M}_{k,2}$ and the map $\partial/\partial\tau$ sends $\mathfrak{M}_{0,\ell}$ to $\mathfrak{M}_{2,\ell}$. Also, the function $y := \Im(\tau)$ belongs to $\mathfrak{M}_{-1,-1}$, so we have isomorphisms $\cdot y^r : \mathfrak{M}_{k,\ell} \rightarrow \mathfrak{M}_{k-r,\ell-r}$ for any $r \in \mathbb{Z}$. This gives a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}_{k,0} & \xrightarrow{\partial/\partial\bar{\tau}} & \mathfrak{M}_{k,2} & \xrightarrow[\cong]{\cdot y^k} & \mathfrak{M}_{0,2-k} & \xrightarrow{\partial/\partial\tau} & \mathfrak{M}_{2,2-k} \\ & & & & \cup & \nearrow 0 & \\ & & & & \mathbb{M}_{2-k} & & \end{array}$$

and $\widehat{\mathbb{M}}_k$ is the space of functions $F \in \mathfrak{M}_k$ for which $y^k F_{\bar{\tau}} = y^k \partial F / \partial \bar{\tau}$ belongs to $\overline{M_{2-k}}$, or equivalently (since it already transforms like a modular form of weight $(0, 2 - k)$ by the above diagram), for which $y^k F_{\bar{\tau}}$ is anti-holomorphic:

$$\widehat{\mathbb{M}}_k = \left\{ F \in \mathfrak{M}_k \mid \frac{\partial}{\partial \tau} \left(y^k \frac{\partial F}{\partial \bar{\tau}} \right) = 0 \right\}.$$

Note that the composite map $\mathfrak{M}_k \xrightarrow{y^k \partial / \partial \bar{\tau}} \mathfrak{M}_{0, 2-k} \xrightarrow{y^{2-k} \partial / \partial \tau} \mathfrak{M}_k$ is, up to a factor of 4 and an additive constant $k(2 - k)$, the Laplace (or Casimir) operator in weight k , so that the elements of $\widehat{\mathbb{M}}_k$ are in particular *weak Maass forms* (= non-holomorphic modular forms of at most exponential growth at the cusps which are eigenfunctions of the Laplace operator), but they are very special weak Maass forms since the eigenvalue under the Laplacian is only allowed to have the particular value $\frac{k}{2} (1 - \frac{k}{2})$. Following a suggestion of Bruinier and Funke, these functions are called *harmonic weak Maass forms*.

The whole discussion can be summarized by the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_k^! & \xrightarrow{\subset} & \widehat{\mathbb{M}}_k & \xrightarrow{y^k \partial / \partial \bar{\tau}} & \overline{M_{2-k}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \text{ complex conjugation} \\ 0 & \longrightarrow & M_k^! & \longrightarrow & \mathbb{M}_k & \xrightarrow{\varphi} & M_{2-k} \longrightarrow 0 \end{array}$$

We observe that the map φ is linear over \mathbb{R} but antilinear over \mathbb{C} , so that the sequence $0 \rightarrow M_k^! \rightarrow \mathbb{M}_k \rightarrow M_{2-k} \rightarrow 0$ is exact only over \mathbb{R} . We could make it exact over \mathbb{C} by replacing the last term by $\overline{M_{2-k}}$; this would be more natural, but less aesthetic since holomorphic modular forms are more familiar than antiholomorphic ones.

General Principle. A mock theta function is by definition a q -series $H(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ such that $q^\lambda H(q)$ for some $\lambda \in \mathbb{Q}$ is a mock modular form of weight $\frac{1}{2}$ whose shadow is a unary theta series of weight $\frac{3}{2}$, i.e., a function of the form $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varepsilon(n) n q^{\kappa n^2}$ with $\kappa \in \mathbb{Q}_{>0}$ and ε an odd periodic function. It follows that if $\mathcal{A} \subset \mathbb{Q}$ is any arithmetic progression containing no number of the form $-\kappa n^2 - \lambda$ with $n \in \mathbb{Z}$ and $\varepsilon(n) \neq 0$, then $\sum_{n \in \mathcal{A}} a_n q^{n+\lambda}$ is a true (though in general only weakly holomorphic) modular form of weight $\frac{1}{2}$. This principle has many applications, one of which will be described in §7.

6. NEW IDENTITIES AND NEW EXAMPLES

At the end of the introduction we mentioned that one application of Zwegers’s theory is that it now becomes as easy to prove identities among mock theta functions (or more generally, among mock modular forms) as it previously was for modular forms.

For example, the so-called “Mock theta conjectures” for the mock theta functions of order 5, which were stated by Ramanujan in his “Lost Notebook”, were proved only in 1988 by D. Hickerson [11] after heroic efforts, but now with the knowledge of the transformation properties of the mock theta functions the proof becomes automatic: one only has to verify that the left- and right-hand sides of the identities become modular after the addition of the same non-holomorphic correction term and that the first few coefficients of the q -expansions agree. Moreover, knowing the transformation behavior also allows one to find new identities in a systematic way. For instance, we mentioned in §3 that representations as quotients of a binary by a unary theta series were found in [1] for only four of the five vector-valued mock theta functions of order 5, but using the mock modular transformation properties one easily gets such a representation also in the missing case, and it actually turns out to be the best one, since it is the only one of the five functions whose completed version transforms under the full modular group $SL(2, \mathbb{Z})$: if we set $M_5(\tau) = \begin{pmatrix} M_{5,1}(\tau) \\ M_{5,2}(\tau) \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} q^{-1/120} (2 - \chi_1(q)) \\ q^{71/120} \chi_2(q) \end{pmatrix}$, then we have

$$-\frac{3}{2} M_{5,j}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{\substack{|a| > 5|b| \\ a+b \equiv 2 \pmod{4} \\ a \equiv 2j \pmod{5}}} (-1)^a \left(\frac{-3}{a^2 - b^2} \right) \operatorname{sgn}(a) q^{(a^2 - 5b^2)/120}$$

and the completed function $\widehat{M}_5 = M_5 + \begin{pmatrix} R_{5,1} \\ R_{5,2} \end{pmatrix}$, where $R_{p,j}$ is defined as in §3, satisfies

$$\widehat{M}_5(\tau + 1) = \begin{pmatrix} \zeta_{120}^{-1} & 0 \\ 0 & \zeta_{120}^{-49} \end{pmatrix} \widehat{M}_5(\tau), \quad \widehat{M}_5(-1/\tau) = \sqrt{\tau/5i} \begin{pmatrix} -2 \sin \frac{\pi}{5} & 2 \sin \frac{2\pi}{5} \\ 2 \sin \frac{2\pi}{5} & 2 \sin \frac{\pi}{5} \end{pmatrix} \widehat{M}_5(\tau).$$

Similarly, for the mock theta functions of order 7, as well as Hickerson’s identity for $\eta(\tau)M_{7,j}(\tau)$ as an indefinite binary theta series, we find the representation

$$\eta(7\tau) M_{7,j}(\tau) = \sum_{\substack{|r| > |s|, rs > 0 \\ 2r \equiv -2s \equiv j \pmod{7}}} \operatorname{sgn}(r) (2\varepsilon_6(s) - \varepsilon_2(r)\varepsilon_3(s) - \varepsilon_3(r)\varepsilon_2(s)) q^{rs/42}$$

(where $\varepsilon_N(s) = 1$ if $s \equiv 0 \pmod{N}$ and 0 otherwise) of the product of $M_{7,j}(\tau)$ with $\eta(7\tau)$ as a “mock Eisenstein series” of weight 1 (explaining the smallness of the Fourier coefficients of this product that was mentioned in §1), and also the representation

$$\eta(\tau)^3 M_{7,j}(\tau) = \sum_{\substack{m > 2|n|/9 \\ n \equiv j \pmod{7}}} \left(\frac{-4}{m} \right) \left(\frac{12}{n} \right) (m \operatorname{sgn}(n) - \frac{3n}{14}) q^{m^2/8 - n^2/168}$$

of the product of $M_{7,j}(\tau)$ with $\eta(\tau)^3$ as an indefinite theta series of weight 2. What’s more, by methods obtained in a reasonably straightforward way by generalizing methods from standard modular form theory (holomorphic projection, Rankin–Cohen

brackets, etc.), one can produce infinitely many new examples of mock theta functions or of more general types of mock modular forms. In particular, we can construct vector-valued mock modular forms $M_p(\tau) = (M_{p,j}(\tau) = -M_{p,-j}(\tau))_{j \pmod p}$ of length $(p-1)/2$ of order $p > 3$ for any prime p by a formula like the one just given for M_7 , e.g.,

$$M_{11,j}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)^3} \sum_{\substack{m > 2|n|/11 \\ n \equiv j \pmod{11}}} \binom{-4}{m} \binom{12}{n} \left(m \operatorname{sgn}(n) - \frac{n}{6}\right) q^{m^2/8 - n^2/264}$$

for $p = 11$, in such a way that the completed function $\widehat{M}_p(\tau) = (M_{p,j}(\tau))_{j \pmod p}$ with $\widehat{M}_{p,j}(\tau) = M_{p,j}(\tau) + R_{p,j}(\tau)$ transforms like a vector-valued modular form of weight $\frac{1}{2}$ on $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$, thus directly generalizing the previous two cases $p = 5$ and $p = 7$.

There are also many examples of other types. For instance, there is a family of scalar-valued functions having completions that transform like modular forms of every even integral weight k on the full modular group. The k th function $F_k = F_k(\tau)$ is defined as

$$F_k = \sum_{n \neq 0} (-1)^n \binom{-3}{n-1} n^{k-1} \frac{q^{n(n+1)/6}}{1 - q^n} = - \sum_{r > s > 0} \binom{12}{r^2 - s^2} s^{k-1} q^{rs/6}$$

(i.e., as a Lerch-like sum or as a mock Eisenstein series), the first two values being

$$\begin{aligned} F_2 &= q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 - q^5 + 3q^6 - \dots, \\ F_4 &= 7q + 26q^2 + 7q^3 + 26q^4 - 91q^5 + \dots. \end{aligned}$$

Then the function

$$f(\tau) = \frac{E_2(\tau) - 12F_2(q)}{\eta(\tau)} = q^{-1/24} (1 - 35q - 130q^2 - 273q^3 - 595q^4 - \dots),$$

where $E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n$ is the usual quasimodular Eisenstein series of weight 2, is a mock modular form of weight $\frac{3}{2}$ on the full modular group with shadow $\eta(\tau)$, and for each integer $n > 0$ the sum of $12F_{2n+2}(\tau)$ and $24^n \binom{2n}{n}^{-1} [f, \eta]_n$ (where $[f, g]_n$ denotes the n -th Rankin–Cohen bracket, here in weight $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$), is a modular form of weight $2n + 2$ on $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$. In a different direction, the Eichler integral $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k+1} a(n) q^n$ of a classical cusp form $f = \sum a(n) q^n$ of weight k is a mock modular form of weight $2 - k$, but of a somewhat generalized kind in which the “shadow” is allowed to be a weakly holomorphic modular form. (This latter fact was observed independently by K.-H. Fricke in Bonn.) Yet another example—actually the oldest—is the generating function of class numbers of imaginary quadratic fields (more precisely, of Hurwitz–Kronecker class numbers), which was shown in [24] to be a mock modular form of weight $\frac{3}{2}$ and level 4 with shadow $\sum q^{n^2}$, although the notion had not yet been formulated at that time.

7. APPLICATIONS

Since the appearance of Zwegers's thesis, Kathrin Bringmann and Ken Ono and their collaborators have developed the theory further and given a number of beautiful applications, a sampling of which we describe in this final section.

Define the *rank* of a partition to be its largest part minus the number of its parts, and for $n, t \in \mathbb{N}$ and $r \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ let $N(r, t; n)$ denote the number of partitions of n with rank congruent to r modulo t . The rank was introduced by Dyson [8] to explain in a natural way the first two of Ramanujan's famous congruences

$$p(5\ell + 4) \equiv 0 \pmod{5}, \quad p(7\ell + 5) \equiv 0 \pmod{7}, \quad p(11\ell + 6) \equiv 0 \pmod{11}$$

for the partition function $p(n)$: he conjectured (and Atkin and Swinnerton-Dyer [4] later proved) that the ranks of the partitions of an integer congruent to 4 (mod 5) or to 5 (mod 7) are equidistributed modulo 5 or 7, respectively, so that $N(r, 5; 5\ell + 4) = \frac{1}{5} p(5\ell + 4)$, $N(r, 7; 7\ell + 5) = \frac{1}{7} p(7\ell + 5)$. (He also conjectured the existence of a further invariant, which he dubbed the "crank," which would explain Ramanujan's third congruence in the same way; this invariant was constructed later by Garvan and Andrews.) The generating function that counts the number of partitions of given size and rank is given by

$$\mathcal{R}(w; q) := \sum_{\lambda} w^{\text{rank}(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{\prod_{m=1}^n (1 - wq^m)(1 - w^{-1}q^m)},$$

where the first sum is over all partitions and $|\lambda| = n$ means that λ is a partition of n . Clearly knowing the functions $n \mapsto N(r, t; n)$ for all $r \pmod{t}$ is equivalent to knowing the specializations of $\mathcal{R}(w; q)$ to all t -th roots of unity $w = e^{2\pi ia/t}$. For $w = -1$, the function $\mathcal{R}(w; q)$ specializes to $f(q)$, the first of Ramanujan's mock theta functions, which is $q^{1/24}$ times a mock modular form of weight $\frac{1}{2}$. Bringmann and Ono [7] generalize this to other roots of unity:

THEOREM 7.1. — *If $\xi \neq 1$ is a root of unity, then $q^{-1/24} \mathcal{R}(\xi; q)$ is a mock modular form of weight $\frac{1}{2}$ with shadow proportional to $(\xi^{1/2} - \xi^{-1/2}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{12}{n}\right) n \xi^{n/2} q^{n^2/24}$.*

Remarks. 1. Note that the choice of square root of ξ in the formula for the shadow does not matter, since n in the non-vanishing terms of the sum is odd.

2. In fact Bringmann and Ono prove the theorem only if the order of ξ is odd. (If it is even, they prove a weaker result showing the modularity only for a group of in general infinite index in $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$.) Also, both the formulation and the proof of the theorem in [7] are considerably more complicated than the ones given here.

Proof. An elementary identity stated in [8] and quoted in [4] and [11] says, after a slight rewriting, that:

$$\mathcal{R}(w; q) = \frac{1-w}{\prod_{n \geq 1} (1-q^n)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}}{1-q^n w}.$$

Using the identity $\frac{1}{1-x} = \frac{1+x+x^2}{1-x^3}$ we deduce from this that

$$\frac{q^{-1/24} \mathcal{R}(e^{2\pi i \alpha}; q)}{e^{-\pi i \alpha} - e^{\pi i \alpha}} = \frac{\eta(3\tau)^3/\eta(\tau)}{\theta(3\alpha; 3\tau)} + q^{1/6} \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} \varepsilon e^{-2\pi \varepsilon \alpha} \mu(3\alpha, \varepsilon \tau; 3\tau)$$

with $\theta(v; \tau)$ and $\mu(u, v; \tau)$ as in §2. The first term on the right is a weakly holomorphic modular form of weight $\frac{1}{2}$ and the other two terms are mock modular forms of weight $\frac{1}{2}$, with shadow proportional to $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{12}{n} n q^{n^2/24} \sin(\pi n \alpha)$, by Theorem 2.1. \square

As a corollary of Theorem 7.1 we see that for all $t > 0$ and all $r \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ the function

$$\sum_{n \geq 0} (N(r, t; n) - \frac{1}{t} p(n)) q^{n-1/24}$$

is a mock modular form of weight $\frac{1}{2}$, with shadow proportional to

$$\left(\sum_{n \equiv 2r+1 \pmod{2t}} - \sum_{n \equiv 2r-1 \pmod{2t}} \right) \left(\frac{12}{n} \right) n q^{n^2/24}.$$

Applying the general principle formulated at the end of §5, one deduces that the sum

$$\sum_{n \in \mathcal{U}, n \geq 0} (N(r, t; n) - \frac{1}{t} p(n)) q^{n-1/24}$$

is a (weakly holomorphic) modular form for any arithmetic progression $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}$ not containing any number of the form $(1-h^2)/24$ with $h \equiv 2r \pm 1 \pmod{2t}$. In particular, this holds if \mathcal{U} is the set of n with $\left(\frac{1-24n}{p}\right) = -1$ for some prime $p > 3$, and using this and methods from classical modular form theory the authors deduce the following nice result (stated there only for t odd and Q prime to t) about divisibility of the Dyson counting function $N(r, t; n)$:

THEOREM 7.2. — *Let $t > 0$ and Q a prime power prime to 6. Then there exist $A > 0$ and $B \in \mathbb{Z}/A\mathbb{Z}$ such that $N(r, t; n) \equiv 0 \pmod{Q}$ for all $n \equiv B \pmod{A}$ and $r \in \mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$.*

In a different direction, knowing the modularity properties of mock theta functions permits one to obtain asymptotic results, as well as congruences, for their coefficients. We give two examples. In §2 we described the weak Maass form $\widehat{h}_3(\tau)$ associated to Ramanujan’s order 3 mock theta function $f(q)$. In [6], Bringmann and Ono construct a weak Maass–Poincaré series that they can identify (essentially by comparing the

modular transformation properties and the asymptotics at cusps) with $\widehat{h}_3(\tau)$, and from this they deduce a Rademacher-type closed formula for the coefficient $\alpha(n)$ of q^n in $f(q)$ of the form

$$\alpha(n) = \frac{1}{\sqrt{n-1/24}} \sum_{k=1}^{\infty} c_k(n) \sinh\left(\frac{\pi}{12k} \sqrt{24n-1}\right),$$

where $c_k(n)$ is an explicit finite exponential sum depending only on n modulo $2k$, e.g., $c_1(n) = (-1)^{n-1}$. This formula had been conjectured by Andrews and Dragonette in 1966 (after Ramanujan had stated, and Dragonette and Andrews had proven, weaker asymptotic statements corresponding to keeping only the first term of this series), but had resisted previous attempts at proof because the circle method, which is the natural tool to use, requires having a very precise description of the behavior of $f(q)$ as q approaches roots of unity, and this in turn requires knowing the modular transformation properties of $h_3(\tau) = q^{-1/24} f(q)$. As a second example, Bringmann [5] was able to use this type of explicit formulas for the coefficients of mock theta functions, combined with Theorem 7.1, to prove an inequality that had been conjectured earlier by Andrews and Lewis, saying that $N(0, 3; n)$ is larger than $N(1, 3; n)$ for all $n \equiv 1 \pmod{3}$ and smaller for all other values of n (except $n = 3, 9$ or 21 , where they are equal).

We close by mentioning that mock theta functions (both in the guises of Appell–Lerch sums and of indefinite theta series) also arise in connection with characters of infinite-dimensional Lie superalgebras and conformal field theory [21], and that they also occur in connection with certain quantum invariants of special 3-dimensional manifolds [14]. This suggests that mock modular forms may have interesting applications even outside the domain of pure combinatorics and number theory.

REFERENCES

- [1] G. E. ANDREWS – “The fifth and seventh order mock theta functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **293** (1986), p. 113–134.
- [2] ———, “Ramanujan’s fifth order mock theta functions as constant terms”, in *Ramanujan revisited (Urbana-Champaign, Ill., 1987)*, Academic Press, 1988, p. 47–56.
- [3] M. P. APPELL – “Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce I”, *Annales sci. de l’ENS* **1** (1884), p. 135, **2** (1885), p. 9, and **3** (1886), p. 9.
- [4] A. O. L. ATKIN & P. SWINNERTON-DYER – “Some properties of partitions”, *Proc. London Math. Soc.* **4** (1954), p. 84–106.
- [5] K. BRINGMANN – “Asymptotics for rank partition functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), p. 3483–3500.

- [6] K. BRINGMANN & K. ONO – “The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks”, *Invent. Math.* **165** (2006), p. 243–266.
- [7] ———, “Dyson’s ranks and Maass forms”, to appear in *Ann. Math.*
- [8] F. J. DYSON – “Some guesses in the theory of partitions”, *Eureka* **8** (1944), p. 10–15.
- [9] M. EICHLER & D. ZAGIER – *The theory of Jacobi forms*, Progress in Math., vol. 55, Birkhäuser, 1985.
- [10] L. GÖTTSCHE & D. ZAGIER – “Jacobi forms and the structure of Donaldson invariants for 4-manifolds with $b_+ = 1$ ”, *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), p. 69–115.
- [11] D. HICKERSON – “A proof of the mock theta conjectures”, *Invent. Math.* **94** (1988), p. 639–660.
- [12] ———, “On the seventh order mock theta functions”, *Invent. Math.* **94** (1988), p. 661–677.
- [13] M. KANEKO & D. ZAGIER – “A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms”, in *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser, 1995, p. 165–172.
- [14] R. LAWRENCE & D. ZAGIER – “Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds”, *Asian J. Math.* **3** (1999), p. 93–107.
- [15] M. LERCH – “Bemerkungen zur Theorie der elliptischen Funktionen”, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* **24** (1892), p. 442–445.
- [16] ———, “Poznámky k teorii funkcí elliptických”, *Rozpravy České Akademie Císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění v praze* **24** (1892), p. 465–480.
- [17] L. J. MORDELL – “The value of the definite integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at^2+bt}}{e^{ct+d}} dt$ ”, *Quarterly J. of Math.* **68** (1920), p. 329–342.
- [18] W. NAHM – “Conformal field theory and torsion elements of the Bloch group”, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry II*, Springer, 2007, p. 67–132.
- [19] A. POLISHCHUK – “M. P. Appell’s function and vector bundles of rank 2 on elliptic curves”, *Ramanujan J.* **5** (2001), p. 111–128.
- [20] S. RAMANUJAN – *The lost notebook and other unpublished papers*, Narosa Publishing House, New Delhi, 1987.
- [21] A. M. SEMIKHATOV, A. TAORMINA & I. Y. TIPUNIN – “Higher-level Appell functions, modular transformations, and characters”, *Comm. Math. Phys.* **255** (2005), p. 469–512.
- [22] A. SEN – “Walls of marginal stability and dyon spectrum in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric string theories”, *J. High Energy Phys.* **5** (2007).

- [23] G. N. WATSON – “The final problem: an account of the mock theta functions”, *J. Lond. Math. Soc.* **11** (1936), p. 55–80.
- [24] D. ZAGIER – “Nombres de classes et formes modulaires de poids $3/2$ ”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **281** (1975), p. A883–A886.
- [25] ———, “The dilogarithm function”, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry II*, Springer, 2007, p. 3–65.
- [26] ———, “Elliptic modular forms and their applications”, in *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer, 2008, p. 1–103.
- [27] S. P. ZWEGERS – “Mock θ -functions and real analytic modular forms”, in *q-series with applications to combinatorics, number theory, and physics (Urbana, IL, 2000)*, Contemp. Math., vol. 291, Amer. Math. Soc., 2001, p. 269–277.
- [28] ———, “Mock theta functions”, Ph.D. Thesis, Universiteit Utrecht, 2002, <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2003-0127-094324/full.pdf>.

Don ZAGIER

Collège de France

3 rue d’Ulm

F-75005 Paris

and

Max-Planck-Institut für Mathematik

Vivatsgasse 7

D-53111 Bonn

E-mail : don.zagier@college-de-france.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(987) *Groupoïdes de Lie et leurs algébroides*

Pierre CARTIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

GRUPOÏDES DE LIE ET LEURS ALGÉBROÏDES

par Pierre CARTIER

INTRODUCTION

Pourquoi des grupoïdes et des algébroïdes, aux noms si laids ? La première apparition des grupoïdes est due à Brandt [3], et se rapporte à des problèmes d'arithmétique non-commutative. Si K est un corps de nombres algébriques, de degré fini sur le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels, on appelle ordre dans K tout sous-anneau \mathcal{O} , engendrant K comme espace vectoriel sur \mathbb{Q} , et de type fini comme \mathbb{Z} -module. Il existe un plus grand ordre \mathcal{O}_K , et les idéaux (fractionnaires) pour \mathcal{O}_K forment un groupe multiplicatif, découvert par Kummer et Dedekind. Lorsque K est un corps non-commutatif (ou même plus généralement une algèbre simple sur \mathbb{Q}), de degré fini sur \mathbb{Q} , la définition d'un ordre demeure inchangée, et il existe des ordres maximaux. Les idéaux par rapport à l'un de ces ordres maximaux forment encore un groupe multiplicatif. Mais il existe plusieurs ordres maximaux, et la structure multiplicative des idéaux, pour tenir compte de la multiplicité des ordres maximaux, s'exprime par une espèce de groupe à plusieurs unités, et à multiplication associative partiellement définie, un *grupoïde*.

Cette structure exotique ne reçut guère d'attention jusque vers 1950. Après l'invention des catégories, on remarqua qu'un grupoïde est une (petite) catégorie dont toutes les flèches sont inversibles, et qu'un grupoïde à un seul objet est un groupe. Les foncteurs entre grupoïdes généralisent les homomorphismes entre groupes, mais dans le monde des catégories, il faut distinguer les isomorphismes (*stricto sensu*) des équivalences (dites faibles après Moerdijk [27]). On montre facilement qu'un grupoïde transitif⁽¹⁾ est faiblement équivalent à un groupe, mais ceci est trompeur.

⁽¹⁾ Où tous les objets sont isomorphes.

Vu la signification épistémologique des catégories, codifiant les objets d'une structure (groupes, variétés, etc.) les objets apparaissent isolés, et pour chaque couple d'objets x, y d'une catégorie \mathcal{C} , on a l'ensemble $\mathcal{C}(x, y)$ des flèches de x vers y . La définition d'un foncteur se fait aussi objet par objet. Pour aborder les problèmes de variation de structures, par exemple les diverses structures complexes sur une variété réelle, il faut « souder » les objets. Du coup, une catégorie \mathcal{C} est formée de deux ensembles $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$ correspondant aux objets et aux flèches respectivement, et la structure d'une catégorie est définie par des applications entre des ensembles construits par produits fibrés à partir de \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 . Alors, on peut enrichir \mathcal{C} en munissant \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 de diverses structures (topologiques, différentielles, etc.).

Le premier mathématicien à suivre cette direction fut Charles Ehresmann (vers 1950) suivi de ses élèves André Haefliger et Jean Pradines. Ehresmann était un géomètre et il voulait construire des groupoïdes géométriques pour étudier les espaces fibrés, les revêtements et les feuilletages. Un peu plus tard, Alain Connes [5] introduisit l'algèbre non-commutative de convolution d'un groupoïde, et ceci conduisit à considérer l'espace des feuilles d'un feuilletage comme un espace non-commutatif.

Un problème récurrent est l'étude d'espaces trop singuliers pour être des variétés, comme on en rencontre dans les problèmes de variation de structures : « orbifolds », variétés transverses, espace de feuilles d'un feuilletage... On s'est peu à peu aperçu que la classification de tels espaces se fait au moyen de groupoïdes topologiques (ou différentiables) définis à équivalence faible près. Déjà, pour définir une variété, il faut se donner un atlas (qui peut se représenter par un groupoïde) et lui permettre de changer à équivalence (faible) près. On arrive donc à une conception de variétés généralisées conçues comme groupoïdes à équivalence faible près. L'équivalence de Morita, familière en algèbre, s'étend aux groupoïdes topologiques, et a été appliquée aux C^* -algèbres par Hilsaum et Skandalis [17].

Si les groupoïdes différentiables (ou de Lie) généralisent les groupes de Lie, il convient de développer leur théorie infinitésimale. Les algèbres de Lie deviennent des objets de la géométrie différentielle : les *algèbroïdes de Lie*, introduits par Pradines [28]. La théorie est assez parallèle à celle des groupes et algèbres de Lie, mais une difficulté majeure se présente : démontrer l'analogue du troisième théorème de Lie qui construit un groupe de Lie d'algèbre de Lie donnée. L'histoire mouvementée sera détaillée plus loin ; la solution définitive est très récente et due à M. Crainic et R.L. Fernandes [7].

Nous nous attacherons aussi à décrire certaines applications, tels le lien entre variétés de Poisson et groupoïdes symplectiques (étudiée par l'école d'Alan Weinstein) et une nouvelle présentation de la théorie de Galois des équations différentielles linéaires.

Remerciements

Tout d'abord, à mon amie Yvette Kosmann-Schwarzbach, qui m'a introduit à ces sujets et fourni une abondante documentation. Également à I. Moerdijk, J. Mrčun et A. Weinstein pour de nombreuses discussions. Je remercie enfin Ch.-M. Marle pour le prêt de ses notes sur la géométrie de Poisson. Quant à ma vaillante secrétaire Cécile Gourgues, elle était sur le pont avec son sourire coutumier.

1. GROUPOÏDES DE LIE

1.1. Définitions

Soit M_0 un ensemble. Par analogie à la notion de bimodule, appelons *bi-ensemble*⁽²⁾ de base M_0 , un système d'applications $\mathcal{M} = (M_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} M_0)$ où s est appelée la source, et b le but. L'application (b, s) de M_1 dans $M_0 \times M_0$ s'appelle l'*ancree*. Le bi-ensemble unité $U(M_0)$ est défini par $M_1 = M_0$, $s = b = \mathbb{I}_{M_0}$; le produit $\mathcal{M} \times_{M_0} \mathcal{M}'$ des bi-ensembles $\mathcal{M} = (M_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} M_0)$ et $\mathcal{M}' = (M'_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{b'} \end{smallmatrix} M_0)$ sur la base M_0 est défini comme l'ensemble M'' produit fibré du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M'_1 \\ & \searrow s & \swarrow b' \\ & M_0 & \end{array}$$

noté $M_1 \times_{s \times b'} M'_1$ et formé des paires (μ, μ') dans $M_1 \times M'_1$ telles que $s(\mu) = b'(\mu')$, avec les applications $s''(\mu, \mu') = s'(\mu')$, $b''(\mu, \mu') = b(\mu)$.

Un *monoïde en bi-ensembles* est défini par la donnée d'un bi-ensemble \mathcal{M} , d'une loi de composition

$$m : \mathcal{M} \times_{M_0} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

et d'une unité

$$e : U(M_0) \rightarrow \mathcal{M}.$$

On impose la commutativité des diagrammes qui correspondent à l'associativité, et l'élément neutre. Un *groupe en bi-ensembles* est un monoïde en bi-ensembles $\mathcal{G} = (G_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} G_0)$ qui possède une inversion $I : G_1 \rightarrow G_1$ telle que $s \circ I = b$, $b \circ I = s$ et qui satisfait à la propriété traduisant l'équation $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ dans un groupe.

⁽²⁾ Ce néologisme sert à rappeler cette analogie. Une terminologie plus usuelle est celle de graphe (orienté), où M_0 est l'ensemble des sommets, M_1 celui des arêtes, l'arête a allant de sa source $s(a)$ à son but $b(a)$.

Plus couramment, un monoïde (resp. groupe) en bi-ensembles est appelé une (petite) *catégorie* (resp. un *groupoïde*). Ces définitions alambiquées ont le mérite de s'étendre telles quelles au cas où les ensembles sont remplacés par des objets d'une catégorie, tels que les espaces topologiques, ou les variétés (différentiables, analytiques réelles ou complexes, algébriques...). On peut ainsi parler de catégorie (ou de groupoïde) topologique, différentiable... La seule difficulté est l'existence des produits fibrés :

- $M_2 := M_1 \times_b M_1$ pour définir la multiplication,
- $M_3 := M_1 \times_b M_1 \times_b M_1$ pour énoncer l'associativité.

Pas de difficulté pour les espaces topologiques.

Pour les variétés, on utilise deux variantes. Rappelons d'abord qu'une application $f : M \rightarrow M'$ de classe C^∞ entre variétés est dite *étale* (resp. *submersive*) si pour tout point m de M , l'application tangente $T_m f : T_m M \rightarrow T_{f(m)} M'$ est bijective (resp. surjective). Dans la définition d'un groupoïde différentiable⁽³⁾ \mathcal{G} on supposera que s et b sont des submersions. D'après des résultats classiques, ceci assure que G_2 est une sous-variété localement fermée de $G_1 \times G_1$. Idem pour G_3 et même pour la sous-variété G_p de $G_1 \times \dots \times G_1$ (p facteurs) définie de manière analogue. Un groupoïde de Lie est dit *étale*⁽⁴⁾ si les applications s et b sont étales.

Il convient de définir les morphismes de groupoïdes. Soient $\mathcal{G} = (G_1 \xrightarrow[s]{b} G_0)$ et $\mathcal{H} = (H_1 \xrightarrow[s]{b} H_0)$ deux groupoïdes. Un morphisme ϕ de \mathcal{H} dans \mathcal{G} est donné par deux applications $\phi_i : H_i \rightarrow G_i$ (pour $i = 0, 1$) compatibles avec source, but, composition, unité et inversion en un sens évident. Dans le cas des groupoïdes de Lie, on impose en plus que ϕ_0 et ϕ_1 soient des morphismes de variétés.

1.2. Exemples de groupoïdes de Lie

a) Tout d'abord, pour toute variété M , on a défini le bi-ensemble $U(M) = (M \xrightarrow[\text{II}]{\text{II}} M)$. C'est de manière naturelle un groupoïde avec l'unité $e_x = x$ et la multiplication

$$(1.1) \quad e_x \cdot e_x = e_x$$

pour tout x dans M . On l'appelle le *groupoïde unité* de M .

Un autre groupoïde $V(M)$ associé à M est défini par

$$M_0 = M, \quad M_1 = M \times M, \quad s = pr_2, \quad b = pr_1,$$

⁽³⁾ Un groupoïde différentiable est dit aussi « groupoïde de Lie ».

⁽⁴⁾ Vu la correspondance entre faisceaux et espaces étalés, les groupoïdes étales forment une généralisation des *pseudo-groupes* étudiés par E. Cartan et Ch. Ehresmann : transformations locales d'un ouvert sur un ouvert, inversibles, et se composant.

où pr_1 et pr_2 sont les deux projections de $M \times M$ sur M . La multiplication est nécessairement de la forme

$$(1.2) \quad (x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$$

pour x, y, z dans M . On l'appelle le *groupoïde des paires* de M .

Plus généralement, soit $R \subset M \times M$ le graphe d'une relation d'équivalence dans M , telle que R soit une sous-variété de $M \times M$ et que les deux projections de R sur M soient des submersions. Alors R définit un sous-groupoïde $W(R)$ de $V(M)$. On retrouve les deux cas précédents en prenant R égal à la diagonale de $M \times M$ ou à $M \times M$ lui-même.

b) Examinons *les liens entre groupes et groupoïdes*. Tout d'abord, un groupoïde de Lie $\mathcal{G} = (G_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{b} \end{smallmatrix} G_0)$, dans lequel G_0 est réduit à un point, est un groupe de Lie. Lorsque $s = b$, alors G_1 est un fibré en groupes de Lie sur la base G_0 .

Soient M une variété et G un groupe de Lie. On peut définir un groupoïde \mathcal{P} avec $P_0 = M, P_1 = M \times M \times G$ et les applications structurales définies par

$$(1.3) \quad s(x, y; g) = y, \quad b(x, y; g) = x$$

$$(1.4) \quad (x, y; g) \cdot (y, z; h) = (x, z; gh).$$

Un groupoïde de ce type sera utilisé en 5.1.

Supposons maintenant que G agisse sur M . Un autre groupoïde \mathcal{H} est défini par les règles $H_0 = M, H_1 = G \times M$ et les applications structurales

$$(1.5) \quad s(g, m) = m, \quad b(g, m) = g \cdot m$$

$$(1.6) \quad (g, m) \cdot (g', m') = (gg', m') \quad \text{si} \quad m = g' \cdot m'.$$

Soit $\mathcal{G} = (G_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{b} \end{smallmatrix} M)$ un groupoïde de Lie de base M . Pour tout point x de M , l'ensemble \mathcal{G}_x des éléments g de G_1 tels que $s(g) = b(g) = x$ forme un groupe de Lie pour la multiplication. Le sous-ensemble de G_1 où s et b coïncident est la réunion Γ des \mathcal{G}_x . Pour la projection $\pi : \Gamma \rightarrow M$ induite par s (ou b), on obtient ainsi un fibré en groupes de Lie, de base M , dont les \mathcal{G}_x sont les fibres.

Avec les notations précédentes, fixons un point x_0 de M , notons G le groupe \mathcal{G}_{x_0} et P l'ensemble des éléments p de G_1 tels que $s(p) = x_0$. La multiplication dans \mathcal{G} définit une action (à droite) de G sur P ; si l'on adjoint la restriction q de $b : G_1 \rightarrow M$ à P , le système (P, G, M, q) est un fibré principal de base M , groupe G et projection q .

Réciproquement, à partir d'un fibré principal (P, G, M, q) , on définit un groupoïde \mathcal{P} de base M comme suit : P_1 est l'ensemble $(P \times P)/G$ des orbites de G opérant diagonalement dans $P \times P$, et comme M est l'espace P/G des orbites de G dans P , les deux projections pr_1 et pr_2 de $P \times P$ dans P définissent par passage aux orbites

respectivement les applications b et s de P_1 dans M . Enfin, si deux éléments λ et λ' de P_1 satisfont à la relation $s(\lambda) = b(\lambda')$, ils ont des représentants de la forme (p, p') pour λ et (p', p'') pour λ' et leur produit $\lambda\lambda'$ admet (p, p'') pour représentant⁽⁵⁾.

Dans le cas des groupoïdes de Lie transitifs⁽⁶⁾, les deux constructions sont réciproques, et la *théorie des groupoïdes de Lie transitifs est équivalente à celle des fibrés principaux*. Cette remarque a été le point de départ de l'intérêt d'Ehresmann pour les groupoïdes. Prenons par exemple le cas d'un fibré vectoriel E de base M . Si P est le fibré principal des repères de E , la fibre en $x \in M$ de P est l'ensemble des isomorphismes d'espaces vectoriels $\varphi : V \rightarrow E_x$, où V est la « fibre-type ». Si \mathcal{P} est le groupoïde correspondant, d'espace des flèches P_1 , une flèche f de source x et but y (dans M) n'est autre qu'un isomorphisme de la fibre E_x sur la fibre E_y . Comme variété, P_1 s'identifie à un ouvert du fibré⁽⁷⁾ vectoriel $pr_1^*(E) \otimes pr_2^*(E)^*$ sur $M \times M$.

c) Passons aux *relations d'équivalence* et aux *variétés quotients*. Soit $\mathcal{G} = (G_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M)$ un groupoïde de base M . L'ancre (b, s) de G_1 dans $M \times M$ a pour image le graphe d'une relation d'équivalence R dans M . L'espace quotient se note $\mathcal{G} \backslash M$ et s'appelle *l'espace des orbites du groupoïde \mathcal{G}* .

Par exemple, si \mathcal{G} est associé à une action d'un groupe de Lie G sur une variété M (cf. formules (1.5) et (1.6)), alors les orbites de \mathcal{G} sont celles du groupe G . Supposons que le groupe G soit dénombrable et discret, agissant librement sur M mais avec les orbites denses. La topologie quotient sur l'espace $G \backslash M$ des orbites est grossière, et si l'action de G est ergodique, même la structure mesurable de $G \backslash M$ est grossière. L'idée est que *le groupoïde \mathcal{G} reflète plus fidèlement la structure de l'espace $G \backslash M$ des orbites*.

d) Examinons *le point de vue des atlas*. Soit X une variété. Contrairement aux habitudes⁽⁸⁾, une *carte* sera une application $\varphi : U \rightarrow X$, injective et d'image ouverte, dont la source est un ouvert U d'un modèle (par exemple un espace numérique \mathbb{R}^d pour les variétés différentiables).

Un *atlas* est une famille de cartes $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ telle que X soit la réunion des images $\varphi_i(U_i)$. Introduisant l'espace \mathbf{U} somme des U_i , dont les éléments sont les paires (i, x) avec $i \in I$, $x \in U_i$, l'atlas se résume en une seule application $\varphi : \mathbf{U} \rightarrow X$ donnée par $\varphi(i, x) = \varphi_i(x)$. Notons R l'ensemble des couples \mathbf{u}, \mathbf{v} dans \mathbf{U} tels que $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$.

⁽⁵⁾ Dans le cas du fibré trivial $P = M \times G$, on retrouve les constructions décrites par les formules (1.3) et (1.4).

⁽⁶⁾ Un groupoïde de Lie est dit *transitif* si l'ancre (b, s) de G_1 dans $M \times M$ est une surjection submersive.

⁽⁷⁾ On note pr_1 et pr_2 les projections de $M \times M$ sur M .

⁽⁸⁾ Il est plus courant de voir une carte comme une application d'un ouvert de la variété vers un ouvert d'un modèle.

Alors X est isomorphe au quotient U/R , et elle est donc adéquatement décrite par le groupoïde étale $W(R)$ (cf. 1.2a)).

Variations sur cette construction : soit M une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} , correspondant à un sous-fibré intégrable \mathcal{J} de TM . Une *carte transverse* est une application injective $\varphi : U \rightarrow M$ telle que, en chaque point u de U , l'application tangente soit un isomorphisme de $T_u U$ sur un sous-espace de $T_{\varphi(u)} M$ supplémentaire de $\mathcal{J}_{\varphi(u)}$. Un *atlas transverse* de (M, \mathcal{F}) est une collection de cartes transverses de la forme $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ où chaque feuille rencontre l'une des images $\varphi_i(U_i)$. Construisons U , R et $W(R)$ comme ci-dessus, de sorte qu'on peut identifier U/R à l'espace des feuilles M/\mathcal{F} . En général, *la topologie sur M/\mathcal{F} est inutilisable, et l'application de U_i dans M/\mathcal{F} déduite de φ_i n'est pas injective*. Cependant, l'expérience montre que le groupoïde étale $W(R)$ donne une bonne description de l'espace des feuilles (cohomologie... ; voir Haefliger [16]).

Un « orbifold » (ou V -variété au sens de Satake) est décrit localement comme le quotient d'un ouvert de \mathbb{R}^d par l'action d'un groupe fini de transformations linéaires. Par exemple, l'espace M/Γ des orbites d'un groupe dénombrable discret Γ agissant continuellement et proprement⁽⁹⁾ sur M . Les « orbifolds » sont les espaces d'orbites des groupoïdes $\mathcal{G} = (G_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} G_0)$ tels que G_0 et G_1 soient séparés et que l'ancre (b, s) soit une application propre⁽¹⁰⁾ et à fibres discrètes de G_1 dans $G_0 \times G_0$.

e) Enfin le *lien avec l'homotopie*. Soit M une variété connexe. On note $\Pi(M)$ l'espace des classes d'homotopie (à extrémités fixes) de chemins continus (ou de classe C^∞) dans M . Avec une composition déduite de celle des chemins, $\Pi(M)$ devient un groupoïde étale sur M , qu'on appelle le *groupoïde de Poincaré de M* .

Choisissant un point-base x_0 de M , le groupe $\Pi(M)_{x_0}$ n'est autre que le groupe fondamental $\pi_1(M; x_0) =: \pi$, et l'ensemble des éléments de $\Pi(M)$ de source x_0 est un modèle du revêtement universel \tilde{M} de M . Le groupoïde $\Pi(M)$ se reconstruit comme l'espace des orbites de l'action diagonale de π dans $\tilde{M} \times \tilde{M}$.

Lorsque (M, \mathcal{F}) est une variété feuilletée, le *groupoïde de monodromie* se définit au moyen des chemins qui restent dans une feuille donnée F , avec l'homotopie relative à F (voir Haefliger [16] et Connes [5]). Ce groupoïde est adapté à l'étude longitudinale d'un feuilletage.

⁽⁹⁾ Ceci signifie que si K, L sont deux parties compactes de M , l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(K)$ rencontre L est fini.

⁽¹⁰⁾ L'image réciproque d'une partie compacte de $G_0 \times G_0$ par l'ancre (b, s) est compacte dans G_1 .

1.3. Équivalence de Morita

a) Examinons tout d'abord l'équivalence de Morita en algèbre. Soient A et B deux anneaux. On dit que A et B sont *équivalents au sens de Morita* s'il existe un (A, B) -bimodule M avec les propriétés suivantes :

(α) *comme A -module à gauche, M est fidèle⁽¹¹⁾, projectif et de type fini ;*

(β) *comme B -module à droite, M est fidèle, et B coïncide avec l'anneau des endomorphismes du A -module M .*

La situation est symétrique en A et B , car M est automatiquement un B -module projectif et de type fini, et A est l'anneau des endomorphismes du B -module M .

Deux anneaux équivalents au sens de Morita ont les mêmes modules. De manière précise, au (A, B) -bimodule M , on associe un foncteur T_M de la catégorie $B\text{-mod}$ des B -modules (à gauche) dans $A\text{-mod}$ par

$$T_M(P) = M \otimes_B P.$$

Alors T_M est une équivalence de catégories.

Soit \mathbf{Alg}_k la catégorie des algèbres (associatives avec unité) sur un corps k . La catégorie de Morita \mathbf{Mor}_k a les k -algèbres pour objets, et les morphismes dans \mathbf{Mor}_k d'une algèbre B dans une algèbre A sont les classes d'isomorphisme de (A, B) -bimodules qui satisfont à la propriété (α) ci-dessus. La composition des morphismes dans \mathbf{Mor}_k est donnée par le produit tensoriel $M \otimes_B N$ (où M est un (A, B) -bimodule et N un (B, C) -bimodule). On définit un foncteur S de \mathbf{Alg}_k dans \mathbf{Mor}_k : si $\varphi : B \rightarrow A$ est un homomorphisme de k -algèbres, le bimodule P_φ est A muni de l'action à gauche de A sur lui-même et de l'action à droite de B définie par $(a, b) \mapsto a\varphi(b)$. Un bimodule M satisfaisant à (α) et (β) définit un isomorphisme dans la catégorie \mathbf{Mor}_k , appelé une *équivalence de Morita*.

On a la propriété universelle suivante, qui exprime que la catégorie de Morita \mathbf{Mor}_k est exactement celle qui transforme les équivalences de Morita en isomorphismes :

(U) *Si un foncteur T de \mathbf{Alg}_k dans une catégorie \mathbf{C} transforme les équivalences de Morita en isomorphismes, il existe une unique factorisation de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Alg}_k & \xrightarrow{S} & \mathbf{Mor}_k & \xrightarrow{\bar{T}} & \mathbf{C} \\ & & \underbrace{\hspace{10em}}_T & & \uparrow \end{array}$$

Plus précisément, si A et B sont équivalents au sens de Morita, on suppose que $T(A)$ et $T(B)$ sont isomorphes. Dans ces conditions, il existe un foncteur $\bar{T} : \mathbf{Mor}_k \rightarrow \mathbf{C}$ tels que les foncteurs T et $\bar{T} \circ S$ soient isomorphes.

⁽¹¹⁾ Le seul élément de A qui annule tout élément de M est 0.

b) Pour adapter ce qui précède au cas des groupoïdes de Lie, il faut définir l'*équivalence faible*, qui remplace l'équivalence de Morita, et la catégorie **GPD** des groupoïdes de Lie et fibrés principaux. Les détails sont dans Moerdijk et Mrčun [27].

Une *équivalence faible* entre groupoïdes $\mathcal{G} = (G_1 \xrightarrow[b]{s} G_0)$ et $\mathcal{H} = (H_1 \xrightarrow[b']{s'} H_0)$ est un morphisme $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ de \mathcal{H} dans \mathcal{G} , avec $\phi_i : H_i \rightarrow G_i$ (pour $i = 0, 1$) satisfaisant aux conditions suivantes :

- l'application $b \circ pr_1$ de $G_1 \times_{\phi_0} H_0$ dans G_0 est une submersion surjective ;
- le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\ (b', s') \downarrow & & \downarrow (b, s) \\ H_0 \times H_0 & \xrightarrow{\phi_0 \times \phi_0} & G_0 \times G_0. \end{array}$$

Deux groupoïdes \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont *faiblement équivalents* s'il existe deux équivalences faibles $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \leftarrow \mathcal{G}'$.

Dans le langage des catégories, ϕ est un foncteur de la catégorie \mathcal{H} dans la catégorie \mathcal{G} . La première condition exprime que ϕ est *essentiellement surjectif* : tout objet de \mathcal{G} est isomorphe à l'image par ϕ d'un objet de \mathcal{H} . La seconde propriété signifie que ϕ est *pleinement fidèle* : si x, y sont des objets de \mathcal{H} , le foncteur ϕ définit une bijection de $\mathcal{H}(x, y)$ sur $\mathcal{G}(\phi(x), \phi(y))$. Mais il faut préciser en tenant compte des structures différentielles sur les variétés G_0, G_1, H_0 et H_1 . Les deux propriétés « pleinement fidèle » et « essentiellement surjectif » caractérisent classiquement les foncteurs qui définissent des équivalences de catégories.

Par exemple, les groupoïdes associés à deux atlas d'une variété (ou deux atlas transverses d'une variété feuilletée) sont faiblement équivalents. Soit P un fibré principal de groupe G et de base M . Alors le groupoïde construit avec G et P selon les formules (1.5) et (1.6) est faiblement équivalent au groupoïde unité $U(M)$ qui représente fidèlement M . Le groupoïde $V(M)$ des paires défini en 1.2a) est faiblement équivalent au groupoïde trivial réduit à un point. Le groupoïde $W(R)$ défini en 1.2a) est faiblement équivalent à $U(M/R)$, donc représente adéquatement le quotient M/R (qui existe comme variété), etc.

Nous renvoyons à [27], pages 164 et 165, pour la définition des \mathcal{G} -fibrés principaux au-dessus de \mathcal{H} qui définissent les morphismes de \mathcal{H} dans \mathcal{G} dans la catégorie **GPD**. Cette catégorie est exactement celle qui rend inversibles les équivalences faibles.

2. ALGÈBROÏDES DE LIE

2.1. Rappels sur les algèbres de Lie

Rappelons qu'une algèbre de Lie sur un corps k est un espace vectoriel \mathfrak{g} sur k muni d'une application bilinéaire $(x, y) \mapsto [x, y]$ qui est *antisymétrique*⁽¹²⁾

$$(2.1) \quad [y, x] = -[x, y]$$

et satisfait à l'*identité de Jacobi*

$$(2.2) \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Compte tenu de l'antisymétrie, l'identité de Jacobi équivaut à l'identité dite de Leibniz

$$(2.3) \quad [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

qui exprime que l'application $adx : y \mapsto [x, y]$ est une dérivation du crochet. Récemment, Loday [22] a proposé d'appeler *algèbres de Leibniz* les algèbres dont le crochet satisfait à (2.3), mais n'est pas nécessairement antisymétrique.

Une autre variante des algèbres de Lie est fournie par les *algèbres de Vinberg* (aussi appelées algèbres de pré-Lie par Gerstenhaber [14]). Le produit $x * y$ satisfait à l'identité à 4 termes, due à Vinberg

$$(2.4) \quad x * (y * z) - (x * y) * z = x * (z * y) - (x * z) * y,$$

et qui affaiblit l'associativité. Si l'on pose $[x, y] = x * y - y * x$, l'identité de Jacobi contient 12 termes se regroupant en somme de 3 paquets de 4 termes, dont chacun s'annule d'après l'identité de Vinberg⁽¹³⁾.

Une algèbre de Lie donne naissance à plusieurs structures algébriques.

a) *Le complexe de Chevalley-Eilenberg :*

Sur l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet \mathfrak{g} = \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p \mathfrak{g}$ construite sur un espace vectoriel \mathfrak{g} , on dispose du coproduit

$$\Delta : \Lambda^\bullet \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^\bullet \mathfrak{g} \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{g}$$

caractérisé par le fait que c'est un homomorphisme d'algèbres graduées⁽¹⁴⁾ satisfaisant à $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour x dans \mathfrak{g} .

Un crochet antisymétrique sur \mathfrak{g} est une application

$$\mu : \Lambda^2 \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^1 \mathfrak{g}$$

⁽¹²⁾ Si le corps k est de caractéristique 2, il faut supposer l'*alternance* $[x, x] = 0$ pour x dans \mathfrak{g} .

⁽¹³⁾ Signification géométrique : un groupe de Lie G , dont l'algèbre de Lie provient d'une algèbre de Vinberg, possède une connexion plate sur le fibré tangent TG , invariante par translations à droite.

⁽¹⁴⁾ Le produit tensoriel est le produit gradué satisfaisant à $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} aa' \otimes bb'$, où $|x|$ est le degré de x .

qui s'étend de manière unique en une codérivation ∂ de degré -1 dans la coalgèbre $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$. Elle est donnée explicitement par⁽¹⁵⁾

$$(2.5) \quad \partial(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge \hat{x}_j \wedge \dots \wedge x_p.$$

Dans ces conditions, μ satisfait à l'identité de Jacobi ssi l'on a $\partial\partial = 0$.

De manière duale, ∂ se transpose en une dérivation d de l'algèbre $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ construite sur le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} , et l'on a $dd = 0$. Si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G , on peut identifier $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ à l'espace des formes différentielles extérieures sur G invariantes par les translations à droite et d devient la différentielle extérieure.

b) *Crochet de Poisson* :

Notons $U\mathfrak{g}$ l'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} munie de sa filtration canonique

$$k = U_0 \mathfrak{g} \subset U_1 \mathfrak{g} (= \mathfrak{g}) \subset U_2 \mathfrak{g} \subset \dots,$$

où $U_p \mathfrak{g}$ est engendré linéairement par les produits d'au plus p facteurs tirés de \mathfrak{g} . D'après le théorème PBW⁽¹⁶⁾, on peut identifier $U_p \mathfrak{g}/U_{p-1} \mathfrak{g}$ à la puissance symétrique $S^p \mathfrak{g}$ de \mathfrak{g} . Pour a dans $U_p \mathfrak{g}$ et b dans $U_q \mathfrak{g}$, le commutateur $[a, b] = ab - ba$ appartient à $U_{p+q-1} \mathfrak{g}$, et par passage au quotient, on définit un crochet de Poisson $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ de $S^p \mathfrak{g} \times S^q \mathfrak{g}$ dans $S^{p+q-1} \mathfrak{g}$. Il est défini par

$$(2.6) \quad \{x_1 \dots x_p, y_1, \dots, y_q\} = \sum_{i,j} [x_i, y_j] x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_p y_1 \dots \hat{y}_j \dots y_q.$$

De manière duale, et supposant \mathfrak{g} de dimension finie, on peut identifier $S^\bullet \mathfrak{g} = \bigoplus_{p \geq 0} S^p \mathfrak{g}$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} , et le crochet de Poisson algébrique définit la variété de Poisson \mathfrak{g}^* (voir n° 3.4).

c) *Crochet de Schouten* :

Par analogie avec la formule (2.6), et en accord avec la philosophie de la « supergéométrie », on définit sur l'algèbre extérieure $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$ un *crochet de Schouten* $[a, b]_S$. Il applique $\Lambda^p \mathfrak{g} \times \Lambda^q \mathfrak{g}$ dans $\Lambda^{p+q-1} \mathfrak{g}$, et de manière explicite on a :

$$(2.7) \quad [x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_q]_S = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [x_i, y_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge \hat{y}_j \wedge \dots \wedge y_q.$$

Il satisfait à une forme d'identité de Jacobi dont je donne la variante « Leibniz » :

$$(2.8) \quad [a, [b, c]_S]_S = [[a, b]_S, c]_S + (-1)^{(p-1)(q-1)} [b, [a, c]_S]_S,$$

pour a, b, c dans $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}$ avec a de degré p et b de degré q . L'antisymétrie est donnée par

$$(2.9) \quad [b, a]_S = (-1)^{pq+p+q} [a, b]_S.$$

⁽¹⁵⁾ Le chapeau sur x_i et x_j demande de supprimer ces termes.

⁽¹⁶⁾ De Poincaré, Birkhoff et Witt.

2.2. Algèbres de Lie-Rinehart

Les champs de vecteurs sur une variété différentiable M forment une algèbre de Lie $\mathcal{X} = \mathcal{X}(M)$ sur le corps \mathbb{R} des nombres réels, mais de plus c'est un module sur la \mathbb{R} -algèbre $A = C^\infty(M)$ (associative et commutative) formée des fonctions de classe C^∞ sur M . Les deux structures sont liées par une relation du type « Leibniz »

$$(2.10) \quad [X, fY] = f[X, Y] + \mathcal{L}_X(f) \cdot Y$$

(X et Y sont des champs de vecteurs, f une fonction et \mathcal{L}_X la dérivée de Lie). Cela conduit à la définition d'une *algèbre de Lie-Rinehart* $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ sur la \mathbb{R} -algèbre A , où \mathcal{X} désigne une algèbre de Lie (sur \mathbb{R}) munie d'une structure de A -module, et \mathcal{L} un homomorphisme de \mathcal{X} dans l'algèbre de Lie des \mathbb{R} -dérivations de A satisfaisant à (2.10) et à

$$(2.11) \quad \mathcal{L}_f X(g) = f \cdot \mathcal{L}_X(g)$$

(f et g sont des éléments de A).

Cette notion a été introduite par Rinehart [30], mais aussi dans des notes non publiées de Grothendieck sur l'algébrisation du calcul différentiel (voir aussi l'exposé VII par P. Gabriel dans [11]).

2.3. Définition des algébroïdes de Lie

Nous allons « géométriser » la définition précédente. Selon Pradines [28], un *algébroïde de Lie* sur une variété M est un fibré vectoriel \mathcal{G} de base M , muni des données suivantes :

a) une structure d'algèbre de Lie réelle sur l'espace $\Gamma(\mathcal{G})$ des sections de classe C^∞ de \mathcal{G} ;

b) un homomorphisme de fibrés vectoriels $\rho : \mathcal{G} \rightarrow TM$ (appelé l'*ancree*).

L'identité à respecter est la suivante :

$$(2.12) \quad [a, fb] = f[a, b] + \mathcal{L}_{\rho(a)}(f) \cdot b$$

si a, b sont des sections de \mathcal{G} , et f une fonction (de classe C^∞) sur M .

Dans ces conditions, ρ définit un homomorphisme d'algèbres de Lie réelles de $\Gamma(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{X}(M)$.

Naturellement, $\Gamma(\mathcal{G})$ est une $(\mathbb{R}, C^\infty(M))$ -algèbre de Lie-Rinehart.

2.4. Exemples d'algèbroïdes de Lie

Lorsque M est réduite à un point, d'où $C^\infty(M) = \mathbb{R}$, on retrouve la notion d'algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{R} .

L'exemple prototype est celui où \mathcal{G} est le fibré tangent à M , et ρ l'identité. Alors $\Gamma(\mathcal{G})$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs sur M .

Soit donné un feuilletage \mathcal{F} sur M , correspondant à un sous-fibré intégrable \mathcal{G} de TM . Prenons pour ρ l'inclusion de \mathcal{G} dans TM . On obtient ainsi un algèbroïde de Lie sur M caractérisant le feuilletage.

Réciproquement, pour tout algèbroïde de Lie (\mathcal{G}, ρ) , posons $\mathcal{I}_x = \rho_x(\mathcal{G}_x) \subset T_x M$ pour tout point x de M . Si la dimension de l'espace vectoriel \mathcal{I}_x est localement constante, on a un sous-fibré \mathcal{I} de TM , de fibre \mathcal{I}_x en x , et \mathcal{I} définit un feuilletage. Dans le cas général, même si \mathcal{I} n'est pas un sous-fibré, il est associé à un feuilletage généralisé au sens de Sussmann [33].

Considérons un fibré en algèbres de Lie \mathcal{G} sur M ; le crochet correspond à un homomorphisme de fibrés vectoriels $[\cdot, \cdot] : \Lambda^2 \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ et induit sur $\Gamma(\mathcal{G})$ une structure d'algèbre de Lie. Ce crochet sur $\Gamma(\mathcal{G})$ est linéaire par rapport à $C^\infty(M)$, c'est-à-dire qu'on a une algèbre de Lie sur l'anneau $C^\infty(M)$. L'ancre correspondante est $\rho = 0$, pour respecter la relation (2.12).

Réciproquement, soit (\mathcal{G}, ρ) un algèbroïde de Lie tel que le rang de ρ soit localement constant. Alors le noyau \mathcal{G}_0 de ρ et son image \mathcal{I} sont des fibrés vectoriels sur M . De plus, \mathcal{G}_0 est un fibré en algèbres de Lie, et \mathcal{I} définit un feuilletage comme vu plus haut.

Dans la section suivante, nous montrerons comment associer des algèbroïdes de Lie aux variétés symplectiques ou de Poisson.

2.5. Cohomologie des algèbroïdes de Lie

Considérons un algèbroïde de Lie \mathcal{G} , de base M et d'ancre ρ . On appelle p -forme une section ω du fibré vectoriel $\Lambda^p \mathcal{G}^*$, où \mathcal{G}^* est le fibré dual de \mathcal{G} . Cela correspond à une application p -linéaire antisymétrique $\omega(a_1, \dots, a_p)$ où a_1, \dots, a_p sont des sections de \mathcal{G} , et la valeur $\omega(a_1, \dots, a_p)$ est une fonction sur M . Lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la notion de p -forme différentielle extérieure sur M .

On prouve alors l'existence d'un opérateur $d_{\mathcal{G}}$ transformant une p -forme en une $(p+1)$ -forme, satisfaisant à la relation

$$(2.13) \quad \begin{aligned} (d_{\mathcal{G}} \omega)(a_0, \dots, a_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \mathcal{L}_{\rho(a_i)} (\omega(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p)) \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_p). \end{aligned}$$

On a $d_{\mathcal{G}} d_{\mathcal{G}} \omega = 0$, et l'on peut donc définir la cohomologie $H^{\bullet}(M, \mathcal{G})$. Lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la cohomologie de de Rham de la variété M ; plus généralement, si \mathcal{G} est un sous-fibré associé à un feuilletage \mathcal{F} , on retrouve la cohomologie longitudinale de \mathcal{F} . Enfin, si l'algébroïde \mathcal{G} se réduit à une algèbre de Lie \mathfrak{g} , on a $\rho = 0$, la moitié des termes disparaissant dans (2.13), et l'on retrouve la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

2.6. Crochet de Schouten

Soit encore \mathcal{G} un algébroïde de Lie, de base M et d'ancre ρ . On appelle p -vecteur toute section (de classe C^{∞}) du fibré vectoriel $\Lambda^p \mathcal{G}$ sur M ; l'espace de ces p -vecteurs se note $\mathcal{X}^p(\mathcal{G})$. Lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la notion classique de champ de p -vecteurs, et lorsque M est réduite à un point, on a $\mathcal{X}^p(\mathcal{G}) = \Lambda^p \mathfrak{g}$ où \mathcal{G} est défini par l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Au n° 2.1, on a défini le crochet de Schouten sur $\Lambda^{\bullet} \mathfrak{g}$; le crochet de Schouten sur les champs de p -vecteurs est aussi une notion classique. Ces deux notions sont unifiées grâce à la définition d'un crochet de Schouten sur les p -vecteurs associés à un algébroïde de Lie \mathcal{G} . Si $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ sont des sections de \mathcal{G} , on a

$$(2.14) \quad [a_1 \wedge \dots \wedge a_p, b_1 \wedge \dots \wedge b_q]_S = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j} [a_i, b_j] \wedge a_1 \wedge \dots \wedge \hat{a}_i \wedge \dots \wedge a_p \wedge b_1 \wedge \dots \wedge \hat{b}_j \wedge \dots \wedge b_q.$$

Le crochet de Schouten envoie $\mathcal{X}^p(\mathcal{G}) \times \mathcal{X}^q(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{X}^{p+q-1}(\mathcal{G})$ et satisfait aux relations (2.8) et (2.9). Autrement dit, si l'on donne aux éléments de $\mathcal{X}^p(\mathcal{G})$ la parité opposée à celle de p , on dispose d'une *superalgèbre de Lie*.

Dans $\mathcal{X}^{\bullet}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{X}^p(\mathcal{G})$ on dispose aussi du *produit extérieur* qui est commutatif au sens gradué

$$(2.15) \quad b \wedge a = (-1)^{pq} a \wedge b,$$

pour a de degré p et b de degré q . Le lien entre le crochet de Schouten et le produit extérieur est donné par la formule de type « Leibniz » :

$$(2.16) \quad [a, b \wedge c]_S = [a, b]_S \wedge c + (-1)^{(p-1)q} b \wedge [a, c]_S$$

pour a de degré p et b de degré q . On peut montrer que le crochet de Schouten $[a, b]_S$ sur $\mathcal{X}^{\bullet}(\mathcal{G})$ est le seul qui satisfasse aux relations (2.9) et (2.16) et qui redonne les cas particuliers

$$(2.17) \quad [a, b]_S = [a, b], \quad [a, f]_S = \mathcal{L}_{\rho(a)} f$$

pour deux sections a, b de \mathcal{G} et une fonction f sur M . Ces cas particuliers expriment les données structurelles d'un algébroïde de Lie.

Les propriétés du crochet de Poisson défini en 2.1b) conduisent à la notion d'*algèbre de Poisson* P sur un corps k : on y dispose d'un produit bilinéaire $(f, g) \mapsto fg$ qui en fait une algèbre associative et commutative avec unité, et d'un crochet $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ qui en fait une algèbre de Lie ; de plus, ces deux produits sont reliés par une identité du type « Leibniz »

$$(2.18) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Lorsque P est l'algèbre symétrique $S^\bullet \mathfrak{g}$ sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , le crochet de Poisson défini en 2.1b) est le seul qui en fasse une algèbre de Poisson pour laquelle on ait $\{x, y\} = [x, y]$ pour x, y dans \mathfrak{g} .

De manière analogue, une *algèbre de Gerstenhaber* est une algèbre graduée $A^\bullet = \bigoplus_{p \geq 0} A_p$ munie d'un produit associatif ab et d'un crochet $[a, b]_S$ satisfaisant aux relations (2.8), (2.9), (2.15) et (2.16). Ainsi $\mathcal{X}^\bullet(\mathcal{G})$ est une algèbre de Gerstenhaber caractérisée par les cas particuliers (2.17).

2.7. Opérations des vecteurs sur les formes

Dans l'algèbroïde de Lie \mathcal{G} , on peut associer à toute section a de \mathcal{G} deux opérateurs $i(a)$ et $\mathcal{L}_a^\mathcal{G}$ agissant sur les p -formes. On dit que $i(a)$ est le *produit intérieur* et $\mathcal{L}_a^\mathcal{G}$ la *dérivée de Lie* ; ils sont donnés par les règles

$$(2.19) \quad (i(a)\omega)(a_1, \dots, a_{p-1}) = \omega(a, a_1, \dots, a_{p-1})$$

$$(2.20) \quad (\mathcal{L}_a^\mathcal{G}\omega)(a_1, \dots, a_p) = \mathcal{L}_{\rho(a)}(\omega(a_1, \dots, a_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(a_1, \dots, [a, a_i], \dots, a_p)$$

pour une p -forme ω . Le lien avec la différentielle $d_\mathcal{G}$ est donné par

$$(2.21) \quad \mathcal{L}_a^\mathcal{G} = i(a)d_\mathcal{G} + d_\mathcal{G}i(a).$$

Ces définitions sont bien connues dans le cas $\mathcal{G} = TM$.

On étend ces constructions au cas des q -vecteurs par les formules

$$(2.22) \quad i(a_1 \wedge \dots \wedge a_q) = i(a_1) \dots i(a_q)$$

$$(2.23) \quad \mathcal{L}_{a_1 \wedge \dots \wedge a_q}^\mathcal{G} = i(a_1 \wedge \dots \wedge a_q)d_\mathcal{G} - (-1)^q d_\mathcal{G}i(a_1 \wedge \dots \wedge a_q).$$

Le crochet de Schouten trouve son explication dans les formules

$$(2.24) \quad [\mathcal{L}_a^\mathcal{G}, i(b)] = i([a, b]_S)$$

$$(2.25) \quad [\mathcal{L}_a^\mathcal{G}, \mathcal{L}_b^\mathcal{G}] = \mathcal{L}_{[a, b]_S}^\mathcal{G},$$

où a et b sont des multivecteurs. Si $a \in \mathcal{X}^q(\mathcal{G})$, les opérateurs $i(a)$ et $\mathcal{L}_a^{\mathcal{G}}$ sont respectivement de degrés $-q$ et $1-q$ et ci-dessus le commutateur de deux opérateurs D, D' de degrés respectifs δ, δ' est donné par

$$(2.26) \quad [D, D'] = DD' - (-1)^{\delta\delta'} D'D.$$

Pour toutes ces notions, voir mon cours [4].

2.8. Algébroïdes de Courant

Sur une algèbre de Lie \mathfrak{g} une forme bilinéaire symétrique $(x | y)$ est dite invariante si l'on a

$$(2.27) \quad ([t, x] | y) + (x | [t, y]) = 0$$

pour t, x, y dans \mathfrak{g} . Par exemple, la forme de Killing

$$(2.28) \quad B(x, y) = \text{Tr}(ad x \cdot ad y)$$

a cette propriété.

La généralisation aux algébroïdes de cette situation est due à Courant [6] et à Liu, Weinstein et Xu [21]. La présentation que nous en donnons est due à Roytenberg [31].

Un *algébroïde de Courant* est un fibré vectoriel \mathcal{E} sur une variété M , muni des données suivantes :

- un produit scalaire symétrique, non-dégénéré sur les fibres de \mathcal{E} , définissant un isomorphisme de \mathcal{E} sur son dual \mathcal{E}^* ;
- une structure d'algèbre de Leibniz (cf. section 2.1) sur l'espace $\Gamma(\mathcal{E})$ des sections de \mathcal{E} ;
- une ancre $\rho : \mathcal{E} \rightarrow TM$ satisfaisant aux règles

$$(2.29) \quad \mathcal{L}_{\rho(a)}(b | c) = (a | [b, c] + [c, b])$$

$$(2.30) \quad \mathcal{L}_{\rho(a)}(b | c) = ([a, b] | c) + (b | [a, c])$$

pour des sections a, b, c de \mathcal{E} .

Un algébroïde de Courant *n'est pas* un algébroïde de Lie, car le crochet n'est pas antisymétrique. Cependant, il satisfait aux règles

$$(2.31) \quad \rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)]$$

$$(2.32) \quad [a, fb] = f[a, b] + \mathcal{L}_{\rho(a)}(f) \cdot b.$$

Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ un sous-fibré contenu dans son orthogonal \mathcal{D}^\perp pour le produit scalaire $(a | b)$; supposons que l'espace $\Gamma(\mathcal{D})$ des sections de \mathcal{D} soit stable pour le crochet dans $\Gamma(\mathcal{E})$. Alors \mathcal{D} est un algébroïde de Lie, car l'antisymétrie du crochet dans $\Gamma(\mathcal{D})$

résulte de la formule (2.29). Nous verrons plus loin le lien avec les variétés de Dirac (section 3.5).

3. VARIÉTÉS DE POISSON

3.1. Crochet de Poisson sur les variétés symplectiques

Rappelons qu'une *variété symplectique* se compose d'une variété M et d'une 2-forme différentielle extérieure ω qui est *fermée* ($d\omega = 0$) et *non-dégénérée*. Dire que ω est non-dégénérée signifie qu'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels $\omega^\flat : TM \rightarrow T^*M$ caractérisé par

$$(3.1) \quad \omega^\flat(X) = -i(X)\omega$$

pour tout champ de vecteurs X sur M . Autrement dit, on a

$$(3.2) \quad \langle \omega^\flat(X), Y \rangle = \omega(Y, X)$$

si X, Y sont deux champs de vecteurs, pour l'accouplement naturel entre 1-formes et champs de vecteurs.

On note Λ^\sharp l'isomorphisme de T^*M sur TM inverse de ω^\flat . Il se prolonge en un isomorphisme de $\Lambda^p T^*M$ sur $\Lambda^p TM$ pour tout entier $p \geq 0$. En particulier, pour $p = 2$, on note Λ le 2-vecteur image de la 2-forme ω par Λ^\sharp . On a alors

$$(3.3) \quad \langle \alpha \wedge \beta, \Lambda \rangle = \langle \beta, \Lambda^\sharp \alpha \rangle$$

si α et β sont des 1-formes différentielles.

Si f est une fonction sur M , on appelle *champ de vecteurs hamiltonien* le champ $X_f = \Lambda^\sharp(df)$. En mécanique, on dispose d'une variété symplectique (M, ω) appelée *espace des phases*, et d'une fonction H sur M , appelée le *hamiltonien*. Le flot du champ de vecteurs X_H décrit l'évolution d'un système, vue comme une courbe dans l'espace des phases paramétrée par le temps.

Par construction, on a

$$(3.4) \quad i(X_f)\omega = -df,$$

et l'on introduit le crochet de Poisson $\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f}(g)$ de deux fonctions f et g , d'où les expressions équivalentes

$$(3.5) \quad \{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = \langle dg, X_f \rangle = \langle df \wedge dg, \Lambda \rangle.$$

Noter aussi la formule

$$(3.6) \quad [X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

Dans un système mécanique, si f représente une grandeur mesurable sur le système en évolution, la dérivée temporelle est donnée par la loi

$$(3.7) \quad \dot{f} = \{H, f\}.$$

La variété symplectique la plus remarquable est l'espace cotangent $M = T^*N$ d'une variété N . La *forme de Liouville* sur M est la 1-forme η caractérisée par

$$(3.8) \quad \langle \eta_\xi, \zeta \rangle = \langle \xi, T_\xi \pi(\zeta) \rangle$$

avec les notations suivantes :

- x est un point de N
- ξ appartient à $T_x^*N \subset M$
- ζ appartient à $T_\xi M$ et $\eta_\xi \in T_\xi^*M$ est la valeur de la forme η en ξ
- π est la projection de $M = T^*N$ sur N , d'où $\pi(\xi) = x$
- $T_\xi \pi$ est l'application de $T_\xi M$ dans $T_x N$ déduite de π .

On pose ensuite $\omega = d\eta$, d'où $d\omega = 0$ et l'on montre que ω est non-dégénérée.

Dans le cas général, introduisons sur M des coordonnées locales x^1, \dots, x^m , puis les champs de vecteurs $\partial_i = \partial/\partial x^i$. Si l'on développe ω sous la forme $\frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ au moyen d'une matrice antisymétrique (ω_{ij}) , la relation $d\omega = 0$ s'écrit

$$(3.9) \quad \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} + \partial_k \omega_{ij} = 0.$$

Si (Λ^{ij}) est la matrice inverse de la matrice $(-\omega_{ij})$, on a

$$(3.10) \quad \Lambda = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \partial_i \wedge \partial_j$$

$$(3.11) \quad \Lambda^{ij} = \{x^i, x^j\}$$

$$(3.12) \quad \{f, g\} = \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \partial_i f \cdot \partial_j g.$$

Dans le cas d'un espace cotangent $M = T^*N$, introduisons des coordonnées locales q^1, \dots, q^n sur N . Sur M , on a un système de coordonnées locales⁽¹⁷⁾ $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ tel que la forme de Liouville soit

$$(3.13) \quad \eta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i,$$

d'où

$$(3.14) \quad \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i.$$

⁽¹⁷⁾ On ne distingue pas entre la fonction q^i sur N et la fonction $q^i \circ \pi$ sur M , où $\pi : M \rightarrow N$ est la projection.

On en déduit l'expression de Λ , soit

$$(3.15) \quad \Lambda = \sum_{i=1}^n \partial_{p_i} \wedge \partial_{q^i},$$

d'où les crochets de Poisson

$$(3.16) \quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^i} \right).$$

En particulier, on a

$$(3.17) \quad \{p_i, p_j\} = \{q^i, q^j\} = 0, \quad \{p_i, q^j\} = \delta_i^j.$$

Le *théorème de Darboux* affirme que, dans toute variété symplectique (M, ω) , on peut trouver, au voisinage de tout point de M , des coordonnées locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ telles que la formule (3.14) soit valable, donc aussi les formules (3.15) à (3.17). On dit qu'un tel système de coordonnées est *canonique*.

3.2. Variétés de Poisson

On vient de voir que, si M est une variété symplectique, on peut définir un crochet de Poisson $\{f, g\}$ pour deux fonctions f et g sur M (de classe C^∞). Alors l'application bilinéaire $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ de $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ fait de $C^\infty(M)$ une algèbre de Lie sur \mathbb{R} , et la relation de Leibniz

$$(3.18) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

est satisfaite. Autrement dit, $C^\infty(M)$ est une algèbre de Poisson.

De manière générale, une *variété de Poisson* est une variété M dans laquelle on a défini un crochet de Poisson $\{f, g\}$ qui fait de $C^\infty(M)$ une algèbre de Poisson. On prouve alors l'existence d'un champ de 2-vecteurs $\Lambda \in \mathcal{X}^2(M)$ caractérisé par

$$(3.19) \quad \{f, g\} = \langle df \wedge dg, \Lambda \rangle.$$

On dit que Λ est le *champ de Poisson*. Ces définitions sont dues à Lichnérowicz [20].

À toute fonction f sur M , on associe encore le champ de vecteurs hamiltonien $X_f \in \mathcal{X}(M)$ caractérisé par

$$(3.20) \quad \{f, g\} = \mathcal{L}_{X_f}(g) = \langle dg, X_f \rangle,$$

et la formule (3.6) est encore valable. Au moyen de coordonnées locales x^1, \dots, x^m sur M , on peut exprimer Λ sous la forme (3.10) et les formules (3.11) et (3.12) sont encore valables. Pour décrire un crochet de Poisson, il suffit donc de donner les crochets de Poisson $\{x^i, x^j\}$ des coordonnées. Se pose le problème de satisfaire à l'identité de Jacobi

$$(3.21) \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

ou la forme équivalente⁽¹⁸⁾

$$(3.6) \quad [X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

Il revient au même de vérifier l'identité de Jacobi pour trois coordonnées $f = x^i$, $g = x^j$, $h = x^k$. On trouve

$$(3.22) \quad \sum_m (\Lambda^{im} \partial_m \Lambda^{jk} + \Lambda^{jm} \partial_m \Lambda^{ki} + \Lambda^{km} \partial_m \Lambda^{ij}) = 0.$$

Noter que si la matrice (Λ^{ij}) est inversible, d'inverse $(-\omega_{ij})$, la formule (3.22) est équivalente à (3.9). De manière plus intrinsèque, la formule (3.22) s'écrit

$$(3.23) \quad [\Lambda, \Lambda]_S = 0$$

avec le crochet de Schouten. Dans le cas symplectique, où Λ est en quelque sorte l'inverse de $-\omega$, la relation $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$ équivaut à $d\omega = 0$.

En résumé, *une variété de Poisson est un couple (M, Λ) où M est une variété, et Λ une section de $\Lambda^2 TM$ telle que $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$.*

Le théorème de Darboux se généralise au cas des variétés de Poisson d'après Weinstein [37] et Marle (non publié). Dans le cas régulier, où l'application Λ^\sharp de T^*M dans TM définie par (3.3) est de rang constant $2r$ au voisinage d'un point x_0 de M , on peut trouver au voisinage de x_0 un système de coordonnées $q^1, \dots, q^r, p_1, \dots, p_r, z^1, \dots, z^s$ (avec $\dim M = 2r + s$) tel que

$$(3.24) \quad \{f, g\} = \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right)$$

(comme dans le cas symplectique). Les seuls crochets de Poisson non nuls entre coordonnées sont donc $\{p_i, q^i\} = -\{q^i, p_i\} = 1$. Dans le cas non régulier, il faut ajouter au membre de droite de (3.24) une expression de la forme $\sum_{\alpha, \beta} J^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial z^\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\beta}$ avec une matrice antisymétrique $(J^{\alpha\beta})$ formée de fonctions de z^1, \dots, z^s et s'annulant au point choisi x_0 .

3.3. Algèbre de Lie associée à une variété de Poisson

Soit M une variété de Poisson, de champ de Poisson Λ . Rappelons que Λ^\sharp est un homomorphisme de fibrés vectoriels, de T^*M dans TM , caractérisé par la relation

$$(3.25) \quad \langle \alpha, \Lambda^\sharp(\beta) \rangle = \langle \beta \wedge \alpha, \Lambda \rangle$$

pour deux 1-formes différentielles α, β . En particulier, on a $\Lambda^\sharp(df) = X_f$.

On va utiliser Λ^\sharp comme ancre d'un algèbre de Lie \mathcal{P} , dont le fibré vectoriel sous-jacent est donné par $\mathcal{P} = T^*M$, d'où $\mathcal{P}^* = TM$. Il reste à définir le crochet $[\alpha, \beta]_\mathcal{P}$ de deux 1-formes. D'après ce qu'on a vu en 2.6, il s'agit de définir le crochet

⁽¹⁸⁾ Rappelons qu'on a $X_f = \sum_{i,j} \Lambda^{ij} \partial_i f \cdot \partial_j$.

de Schouten sur les sections de $\Lambda^\bullet \mathcal{P}$, c'est-à-dire sur l'espace $\mathcal{U}^\bullet(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{U}^p(M)$ des formes différentielles. Mais, d'après ce qu'on a vu en 2.7, tout revient à définir une différentielle d_φ sur les sections de $\Lambda^p \mathcal{P}^*$, c'est-à-dire sur les champs de p -vecteurs. On posera

$$(3.26) \quad d_\varphi v = [\Lambda, v]_S$$

(crochet de Schouten des champs de multivecteurs). Comme Λ est de degré 2, l'opérateur d_φ augmente le degré de 1, et l'identité de Jacobi (2.8) jointe à la condition d'intégrabilité $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$ implique $d_\varphi d_\varphi v = 0$. Cela permet de définir la *cohomologie de Poisson* d'une variété de Poisson (M, Λ) puisque d_φ applique $\mathcal{X}^p(M)$ dans $\mathcal{X}^{p+1}(M)$ et vérifie $d_\varphi d_\varphi = 0$.

On peut alors suivre les définitions de 2.7. Tout d'abord, pour toute 1-forme α , on définit le produit intérieur $i(\alpha)$ sur $\mathcal{X}^p(M)$ par

$$(3.27) \quad i(\alpha) \cdot (X_1 \wedge \dots \wedge X_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \langle \alpha, X_j \rangle X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge X_p.$$

On étend cela aux q -formes de sorte que

$$(3.28) \quad i(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_q) = i(\alpha_1) \dots i(\alpha_q).$$

Toutes ces opérations sont de l'algèbre bien connue sur les multivecteurs et les formes en un point. Pour toute q -forme ω , on pose

$$(3.29) \quad \mathcal{L}_\omega^\varphi = i(\omega) d_\varphi - (-1)^q d_\varphi i(\omega)$$

et le crochet de Schouten sur $\mathcal{U}^\bullet(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{U}^p(M)$ est caractérisé par la formule

$$(3.30) \quad [\mathcal{L}_\omega^\varphi, i(\varphi)] = i([\omega, \varphi]_S)$$

pour le commutateur gradué d'opérateurs. Au niveau des 1-formes, le crochet de Schouten est caractérisé par la formule (2.12) (avec $\rho = \Lambda^\sharp$) jointe à $[df, dg]_S = d\{f, g\}$. De manière explicite, on a

$$(3.31) \quad \langle [\alpha, \beta]_S, X \rangle = \langle \alpha, [\Lambda, \langle \beta, X \rangle]_S \rangle - \langle \beta, [\Lambda, \langle \alpha, X \rangle]_S \rangle - \langle \alpha \wedge \beta, [\Lambda, X]_S \rangle$$

lorsque α, β sont des 1-formes et X un champ de vecteurs.

3.4. Feuilletage symplectique d'une variété de Poisson

Sur une variété de Poisson (M, Λ) la donnée de l'ancre $\Lambda^\sharp : T^*M \rightarrow TM$ définit comme en 2.4 un feuilletage \mathcal{F} (au sens de Sussmann) sur la variété M . Si F est une feuille de ce feuilletage, on montre qu'il existe sur F une 2-forme ω_F fermée et non-dégénérée. Si f et g sont deux fonctions sur M , de restrictions respectives f_F et g_F à F , on montre que le crochet de Poisson de f_F et g_F sur la variété symplectique

(F, ω_F) est la restriction à F du crochet de Poisson $\{f, g\}$ calculé dans (M, Λ) . Pour cette raison, le feuilletage \mathcal{F} est appelé le *feuilletage symplectique* de (M, Λ) .

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe G . Le groupe G agit par la représentation adjointe sur \mathfrak{g} et, par dualité, on obtient la *représentation coadjointe* de G dans le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} . Vers 1970, Kostant, Kirillov et Souriau ont construit une structure symplectique G -invariante sur chaque orbite de G dans \mathfrak{g}^* . Il fut découvert un peu plus tard que ces orbites forment le feuilletage symplectique d'une structure de Poisson sur \mathfrak{g}^* ainsi caractérisée : identifiant \mathfrak{g} à l'ensemble des fonctions linéaires sur \mathfrak{g}^* , alors le crochet de Poisson se réduit sur \mathfrak{g} au crochet de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Cette construction se généralise. Soit \mathcal{G} un algébroïde de Lie de base M et d'ancre ρ . Le dual \mathcal{G}^* du fibré vectoriel \mathcal{G} est une variété, et les sections de \mathcal{G} s'identifient aux fonctions de classe C^∞ sur \mathcal{G}^* qui sont linéaires sur chaque fibre \mathcal{G}_x^* (pour x dans M). Alors \mathcal{G}^* est une variété de Poisson, de sorte que le crochet de Poisson sur $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ induise sur le sous-espace $\Gamma(\mathcal{G})$ le crochet de l'algébroïde \mathcal{G} . Lorsque M est réduit à un point, on retrouve le cas précédent $\mathcal{G}^* = \mathfrak{g}^*$, et lorsque $\mathcal{G} = TM$, on retrouve la structure symplectique (donc de Poisson) sur $\mathcal{G}^* = T^*M$, le fibré cotangent de M .

3.5. Structures de Dirac

Si (M, ω) est une variété symplectique, ou (M, Λ) une variété de Poisson, ces structures s'induisent mal sur des sous-variétés. Pour formuler de manière plus générale la méthode de réduction symplectique, et aussi pour préciser la méthode de Dirac pour traiter des systèmes mécaniques avec contraintes, on a interpolé entre les cas symplectique et de Poisson.

Soit M une variété, et identifions les fibrés TM et T^*M à des sous-fibrés de leur somme directe $\mathcal{E} = TM \oplus T^*M$. Etant données deux sections $s_i = (X_i, \alpha_i)$ de \mathcal{E} , où X_i est un champ de vecteurs sur M et α_i une 1-forme différentielle, on utilise les définitions suivantes :

$$(3.32) \quad (s_1 | s_2) = \langle \alpha_1, X_2 \rangle + \langle \alpha_2, X_1 \rangle$$

$$(3.33) \quad \rho(s_i) = X_i$$

$$(3.34) \quad [s_1, s_2] = ([X_1, X_2], \mathcal{L}_{X_1} \alpha_2 - i(X_2) d\alpha_1).$$

On obtient ainsi un algébroïde de Courant (voir n° 2.8).

Une *structure de Dirac* sur M est un sous-fibré \mathcal{D} de \mathcal{E} , égal à son orthogonal \mathcal{D}^\perp pour le produit scalaire $(s_1 | s_2)$, et tel que l'espace $\Gamma(\mathcal{D})$ de ses sections soit stable pour le crochet $[s_1, s_2]$. Autres manières équivalentes de décrire \mathcal{D} :

— Se donner un sous-fibré R de TM et une forme bilinéaire antisymétrique ω sur R telle que les sections de \mathcal{D} se composent des paires (X, α) avec une section X de R , et $\omega(X, Y) = \alpha(Y)$ pour toute section Y de R . Lorsque $R = TM$, ω est une 2-forme, et la stabilité de $\Gamma(\mathcal{D})$ par rapport au crochet équivaut à $d\omega = 0$ (cas pré-symplectique).

— De manière symétrique, un sous-fibré S de T^*M et une section Λ de $\Lambda^2 S^*$. Alors les sections de \mathcal{D} se composent des paires (X, α) avec une section α de S et $\Lambda(\alpha, \beta) = \beta(X)$ pour toute section β de S . Cas particulier $S = T^*M$, d'où $\Lambda \in \mathcal{X}^2(M)$ et la stabilité de $\Gamma(\mathcal{D})$ par rapport au crochet équivaut à $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$.

Dans tous les cas, \mathcal{D} devient, pour l'ancre et le crochet induits par ceux de \mathcal{E} , un algèbroïde de Lie. On retrouve comme cas particuliers l'algèbroïde associé à un tenseur de Poisson, et aussi un algèbroïde sur T^*M dans le cas pré-symplectique (voir Koszul [18]).

4. PROBLÈMES D'INTÉGRATION

4.1. Algèbroïde de Lie d'un groupoïde

Soit $\mathcal{G} = (G_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{b} \end{smallmatrix} M)$ un groupoïde de Lie de base M . Nous plongeons M comme sous-variété de G_1 au moyen de la section unité $e : M \rightarrow G_1$. On définit comme suit un fibré vectoriel sur M : en tout point x de M , on a les applications tangentes $T_x s$ et $T_x b$ de $T_x G_1$ dans $T_x M$. On note \mathcal{E}_x le noyau de $T_x s$ (c'est un supplémentaire de $T_x M$ dans $T_x G_1$), et ρ_x la restriction de $T_x b$ à \mathcal{E}_x . On a donc un fibré vectoriel \mathcal{E} sur M et une ancre $\rho : \mathcal{E} \rightarrow TM$. Pour achever de définir un algèbroïde de Lie, il reste à construire le *crochet de deux sections* de \mathcal{E} . Mais toute section ξ de \mathcal{E} sur M s'étend de manière unique en un champ de vecteurs Ξ sur G_1 avec les deux propriétés suivantes :

- en chaque point g de G_1 , le vecteur Ξ_g de $T_g G_1$ est tangent à la fibre de s passant par g ;
- Ξ est invariant par les translations à droite.

Il est alors clair que les champs de vecteurs sur G_1 , tangents aux fibres de s , et invariants à droite, forment une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(G_1)$.

Voici quelques exemples :

a) Pour le groupoïde des paires $V(M) = M \times M$ défini en 1.2a), l'algèbroïde de Lie est TM , avec l'application identique pour ancre.

b) Comme en 1.2b), considérons un fibré principal P de base M et de groupe G et le groupoïde correspondant $(P \times P)/G$. Pour construire l'algèbroïde correspondant, on part du fibré TP sur P , avec l'action (à droite) de G sur P et TP . Par passage au quotient par G , on obtient un fibré vectoriel $\mathcal{E} = TP/G$ de base $M = P/G$. Les sections de \mathcal{E} sur M s'identifient aux champs de vecteurs sur P invariants par G ; elles forment donc une algèbre de Lie. Les *connexions* sur P correspondent aux sections de l'ancre $\rho : \mathcal{E} \rightarrow TM$.

c) Plus particulièrement, supposons que P soit le fibré des repères d'un fibré vectoriel E sur M . Le groupoïde correspondant de base M a pour flèches de x vers y les isomorphismes de fibres de E_x sur E_y . L'algébroïde correspondant $At(E)$ est une extension

$$0 \rightarrow \text{End}(E) \rightarrow At(E) \rightarrow TM \rightarrow 0$$

où $\text{End}(E)$ est le fibré en algèbres de Lie des endomorphismes des fibres de E . Ce fibré $At(E)$ a été introduit par Atiyah [1] dans le contexte des variétés holomorphes et il en a déduit une construction des classes caractéristiques.

d) Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété M . En 1.2b) on a décrit le groupoïde correspondant $G \times M \rightrightarrows M$. Si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G , l'action infinitésimale de \mathfrak{g} est un homomorphisme d'algèbres de Lie $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(M)$. On peut voir ceci comme une ancre $\beta : M \times \mathfrak{g} \rightarrow TM$ pour le fibré vectoriel trivial $M \times \mathfrak{g}$ sur M . Au moyen d'un crochet de Lie *ad hoc* sur les sections de $M \times \mathfrak{g}$ (c'est-à-dire l'espace $C^\infty(M, \mathfrak{g})$ des applications de M dans \mathfrak{g}), on décrit un algébroïde de Lie ; c'est celui associé au groupoïde $G \times M \rightrightarrows M$.

e) L'exemple le plus trivial. Si G est un groupe de Lie vu comme groupoïde sur un espace à un point, son algébroïde de Lie est l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G .

4.2. Groupoïdes symplectiques

Le problème des variétés de Poisson est de les agrandir en variétés symplectiques. Soit (M, Λ) une variété de Poisson, avec le crochet de Poisson $\{f, g\}_\Lambda$ sur $C^\infty(M)$. Une *réalisation symplectique* de (M, Λ) est une variété symplectique (S, ω) , avec le crochet de Poisson $\{f, g\}_\omega$ sur $C^\infty(S)$ et une application $\phi : S \rightarrow M$ qui soit surjective, submersive et respecte le crochet de Poisson

$$(4.1) \quad \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_\omega = \{f, g\}_\Lambda \circ \phi$$

pour f, g dans $C^\infty(M)$. On doit à Weinstein [38] la construction d'une réalisation symplectique⁽¹⁹⁾ avec $\dim S = 2 \dim M$.

La bonne notion est celle de *groupoïde symplectique*⁽²⁰⁾. C'est un groupoïde $G_1 \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \rightrightarrows \\ \xleftarrow{b} \end{matrix} M$ muni d'une forme symplectique ω sur G_1 telle que

$$(4.2) \quad pr_1^*(\omega) + pr_2^*(\omega) = m^*(\omega).$$

Ici pr_1 et pr_2 sont les projections de $G_2 = G_1 \times_s \times_b G_1$ sur G_1 et m est la multiplication.

Deux exemples :

⁽¹⁹⁾ Résultat en fait anticipé dans S. Lie.

⁽²⁰⁾ Voir les pages 223 et suivantes de [13].

- Si M est une variété, on pose $G_1 = T^*M$, s et b sont la projection de T^*M sur M . Dire que G_1 est un groupoïde revient donc à dire que c'est un fibré en groupes de Lie, mais les fibres sont des espaces vectoriels de dimension finie, donc des groupes de Lie. L'algèbroïde correspondant est T^*M lui-même, avec l'ancre nulle, et le crochet nul.
- Si G est un groupe de Lie, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , le fibré cotangent T^*G est une variété symplectique. Si (g, α) est un point de T^*G , avec $g \in G$ et $\alpha \in T_g^*G$, la source et le but sont définis par

$$(4.3) \quad s(g, \alpha) = g^{-1}\alpha, \quad b(g, \alpha) = \alpha g^{-1}$$

et appartiennent à $T_1^*G = \mathfrak{g}^*$. Donc, la base du groupoïde T^*G est \mathfrak{g}^* , et les flèches de $u \in \mathfrak{g}^*$ vers $v \in \mathfrak{g}^*$ sont les éléments g de G tels que $(ad^*g)(u) = v$. Composition évidente.

Les groupoïdes symplectiques ont de merveilleuses propriétés :

a) La section unité $e(M) \subset G_1$ (qu'on identifiera à M) est une sous-variété lagrangienne de G_1 . En particulier, la restriction à M de la forme symplectique ω est nulle, et $\dim G_1 = 2 \dim M$.

b) En chaque point u de G_1 , les espaces tangents aux fibres pour s et b passant par u sont de dimension égale à celle de M , et orthogonaux l'un à l'autre pour le produit scalaire sur $T_u G_1$ induit par ω .

c) Si f et g sont deux fonctions sur M , on a $\{f \circ s, g \circ b\} = 0$ pour le crochet de Poisson sur G_1 .

On montre ensuite qu'il existe sur M une unique structure de Poisson telle que l'application source $s : G_1 \rightarrow M$ soit une réalisation symplectique de la variété de Poisson M . Par exemple, dans le cas du fibré cotangent T^*G à un groupe de Lie, la structure de Poisson sur la base \mathfrak{g}^* est celle décrite à la section 3.4.

4.3. Le troisième théorème de Lie

Nous nous contenterons d'un bref historique⁽²¹⁾. Classiquement, le troisième théorème de Lie affirme que, pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} réelle de dimension finie, il existe un groupe de Lie G , connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Le problème analogue est d'associer à tout algèbroïde de Lie (\mathcal{G}, ρ) de base M un groupoïde de Lie de base M , dont les fibres $s^{-1}(x)$ (pour $x \in M$) soient connexes et simplement connexes.

Dans [29], Pradines en 1968 résout le problème *localement*, et annonce de manière erronée le résultat global. Auparavant, en 1966, A. Douady et M. Lazard ont traité dans [12] un problème partiel : si l'on a un fibré en algèbres de Lie \mathcal{G} sur une variété

⁽²¹⁾ Voir [13], pages 256 à 262.

M , et si l'on associe à chaque point x de M le groupe de Lie G_x , connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie \mathcal{G}_x , organiser la famille des groupes G_x en une variété G au-dessus de M . La difficulté est que la topologie de ces groupes change, et que G n'est pas toujours séparée même lorsque M est séparée.

Pendant environ 40 ans, on a donné des contre-exemples [10] et des résultats partiels jusqu'aux résultats définitifs de Crainic et Fernandes [7] en 2003, donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour l'intégrabilité d'un algébroïde de Lie. Pour obtenir dans tous les cas un objet global correspondant à l'objet infinitésimal constitué d'un algébroïde de Lie, il faut introduire des 2-groupeïdes. Le résultat définitif a été récemment annoncé par Chen Chang Zhu [40].

On a vu à la section 3.3 comment associer un algébroïde de Lie $(T^*M, \Lambda^\#)$ à une variété de Poisson (M, Λ) . K. Mackenzie et Ping Xu ont montré que cet algébroïde s'intègre en un groupeïde de Lie si et seulement si la variété de Poisson est la base d'un groupeïde symplectique. Ceci a permis à Crainic et Fernandes d'appliquer dans [8] leurs méthodes au cas de l'intégrabilité des variétés de Poisson au moyen des groupeïdes symplectiques.

5. APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

5.1. Monodromie d'une équation différentielle linéaire

Soient V un espace vectoriel complexe de dimension finie, Ω un ouvert de \mathbb{C} , et A une application holomorphe de Ω dans $\text{End}(V)$. On lui associe l'équation différentielle

$$(5.1) \quad \frac{dF}{dz} = A \cdot F \quad (\text{E})$$

où F est une fonction holomorphe à valeur dans V , définie dans un ouvert de Ω . En général, il n'existe pas de solution définie dans tout Ω , les solutions sont multiformes. Voici la parade. Notons $\tilde{\Omega}$ un revêtement universel de Ω et p la projection de $\tilde{\Omega}$ sur Ω . La *résolvante* de l'équation différentielle est une application holomorphe U de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ dans le groupe $G = GL(V)$ des transformations linéaires inversibles de V . Elle est caractérisée par les conditions

$$(5.2) \quad U(\tilde{z}, \tilde{z}) = 1 \quad \text{pour} \quad \tilde{z} \in \tilde{\Omega}$$

$$(5.3) \quad \frac{dU(\tilde{z}', \tilde{z})}{d\tilde{z}'} = A(p(\tilde{z}')) U(\tilde{z}', \tilde{z}).$$

On en déduit les relations

$$(5.4) \quad U(\tilde{z}'', \tilde{z}') U(\tilde{z}', \tilde{z}) = U(\tilde{z}'', \tilde{z})$$

$$(5.5) \quad \frac{dU(\tilde{z}', \tilde{z})}{d\tilde{z}} = -U(\tilde{z}', \tilde{z}) A(p(\tilde{z})).$$

Soit Γ le groupe des automorphismes $\tilde{z} \mapsto \tilde{z}g$ de la variété holomorphe $\tilde{\Omega}$ tels que

$$(5.6) \quad p(\tilde{z}g) = p(\tilde{z})$$

pour tout \tilde{z} dans $\tilde{\Omega}$. On a alors

$$(5.7) \quad U(\tilde{z}'g, \tilde{z}g) = U(\tilde{z}', \tilde{z})$$

pour tout g dans Γ . Le groupoïde fondamental $\Pi(\Omega)$ de Ω peut se décrire comme le quotient de $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega}$ par l'action diagonale de Γ . Les formules précédentes montrent que U peut être vu comme un homomorphisme du groupoïde $\Pi(\Omega)$ dans le groupoïde $\mathcal{G} = (G_1 \overset{s}{\rightrightarrows} G_0)$ défini comme en 1.2b) par

$$\begin{aligned} G_0 &= \Omega \\ G_1 &= \Omega \times \Omega \times G \end{aligned}$$

composition :

$$(5.8) \quad (a, b; g)(b, c; g') = (a, c; gg')$$

source et but :

$$(5.9) \quad s(a, b; g) = b, \quad b(a, b; g) = a.$$

Explicitement, on a la *formule de Dyson* pour calculer la résolvante :

si $(\gamma(t) \mid 0 \leq t \leq 1)$ est un chemin dans Ω allant de a à b , représentant un élément $[\gamma]$ du groupoïde $\Pi(\Omega)$, et si l'on pose $a(t) = A(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, on a

$$(5.10) \quad U([\gamma]) = \sum_{n \geq 0} \int_{\Delta_n} a(t_n) \cdots a(t_1) dt_1 \cdots dt_n,$$

où le domaine d'intégration est le simplexe $\Delta_n = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}$ dans \mathbb{R}^n .

5.2. Groupe de Galois différentiel

On suppose désormais que $A(z)$ est une fonction rationnelle et que l'on a $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$, où S est l'ensemble des pôles de $A(z)$. La théorie de Picard-Vessiot définit un groupe de Galois différentiel associé à l'équation (E). Le théorème classique de Schlessinger décrit ainsi ce groupe : choisissons un point-base z_0 et notons Δ le sous-groupe de $G = GL(V)$ formé des monodromies $U(\gamma)$ pour les lacets γ en z_0 . Dans le cas de Fuchs⁽²²⁾, le groupe de Galois différentiel est le plus petit sous-groupe algébrique de G contenant Δ . Mais on n'a rien de tel en dehors du cas de Fuchs.

⁽²²⁾ C'est celui où $A(z)$ est de la forme $\sum_{s \in S} A_s / (z - s)$ avec des A_s fixes pour s dans S (les pôles sont d'ordre 1).

Voici la difficulté : dans le cas de l'équation $dF = Fdz$ définissant l'exponentielle, on a $\Omega = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{C}^\times$ et $A(z) = 1$ et comme l'espace \mathbb{C} est simplement connexe, on a $\Delta = (1)$, alors que la théorie de Picard-Vessiot affirme que le groupe de Galois différentiel est \mathbb{C}^\times . Ceci a poussé Ramis à introduire la monodromie sauvage, associée aux lignes de Stokes.

Présentons maintenant une solution simple basée sur les groupoïdes, proche des considérations de Malgrange [25]. On a défini plus haut la monodromie comme un homomorphisme de groupoïdes :

$$U : \Pi(\Omega) \rightarrow \Omega \times \Omega \times G.$$

Mais $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$ et G (isomorphe à $GL(d, \mathbb{C})$) sont des variétés algébriques complexes affines. Le *groupoïde de Galois de l'équation (E)* est par définition la plus petite sous-variété algébrique de $\Omega \times \Omega \times G$ contenant l'image $U(\Pi(\Omega))$; c'est un sous-groupoïde $\text{Gal}(E)$ du groupoïde \mathcal{G} . Dans le cas de Fuchs, moyennant le choix d'un point-base z_0 dans Ω , le groupe $\text{Gal}(E)_{z_0}$ associé au groupoïde $\text{Gal}(E)$ coïncide avec le groupe algébrique défini plus haut.

Revenons à l'exemple de l'équation $dF = Fdz$ sur \mathbb{C} . On a $\tilde{\Omega} = \mathbb{C}$, car \mathbb{C} est simplement connexe, et la résolvante est $U(z', z) = \exp(z' - z)$. Par suite, le groupoïde $U(\Pi(\Omega))$ se compose des triplets

$$(z', z, \exp(z' - z)).$$

Comme l'exponentielle n'est pas une fonction algébrique, la seule variété algébrique de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ contenant cette image est la variété entière, d'où

$$\text{Gal}(E) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times.$$

On a donc $\text{Gal}(E)_{z_0} = \mathbb{C}^\times$ pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$. Par contre, le groupe Δ associé au point z_0 se compose des nombres $\exp(z_0 - z_0) = 1$, et c'est le groupe algébrique réduit à 1. Le point est que *les opérations d'intersection (avec $z = z' = z_0$) et d'adhérence de Zariski ne commutent pas.*

5.3. Une version moderne de la théorie de Picard-Vessiot

Dans l'exposé classique de la théorie de Picard-Vessiot par Kolchin, l'accent est mis sur les corps différentiels. C'était l'époque où la géométrie algébrique se basait sur les *corps* de fonctions rationnelles, à la Zariski-Weil. La géométrie algébrique moderne, née des labeurs de Grothendieck, s'appuie sur les *anneaux*.

Reprenons l'exemple $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$, où S est fini. Soit \mathcal{O} l'anneau des fonctions rationnelles à pôles situés dans S . On a $\mathcal{O} = \mathbb{C} \left[z, \frac{1}{D} \right]$ avec $D = \prod_{s \in S} (z - s)$. Dans l'anneau \mathcal{O} , on dispose de la dérivation $D_{\mathcal{O}} = \frac{d}{dz}$. Une *extension différentiellement*

simple de $(\mathcal{O}, D_{\mathcal{O}})$ est une paire $(\mathcal{O}, D_{\mathcal{O}})$ formée d'un anneau commutatif \mathcal{O} et d'une dérivation $D_{\mathcal{O}}$ avec les hypothèses suivantes :

- \mathcal{O} est un sous-anneau de \mathcal{O} ;
- la dérivation $D_{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} étend la dérivation $D_{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O} ;
- il n'existe aucun idéal de \mathcal{O} stable par $D_{\mathcal{O}}$ et distinct de 0 et \mathcal{O} .

Fixons une telle extension.

L'application $A : \Omega \rightarrow \text{End}(V)$ peut être vue comme un élément de $\mathcal{O} \otimes \text{End}(V)$, sous-anneau de $\mathcal{O} \otimes \text{End}(V)$. L'équation différentielle (E) $dF = AFdz$ s'étend en une équation du type

$$(5.11) \quad (D_{\mathcal{O}} \otimes \mathbb{I})(U) = A \cdot U \quad (\text{E}_{\mathcal{O}})$$

avec l'inconnue U dans $\mathcal{O} \otimes \text{End}(V)$.

Dans ces conditions, on dit que $(\mathcal{O}, D_{\mathcal{O}})$ est une *extension de Picard-Vessiot associée à l'équation (E)* si l'équation $(\text{E}_{\mathcal{O}})$ a une solution U inversible dans l'anneau $\mathcal{O} \otimes \text{End}(V)$, engendrant \mathcal{O} au sens suivant : tout sous-anneau \mathcal{O}_0 de \mathcal{O} contenant \mathcal{O} et tel que U soit un élément inversible de $\mathcal{O}_0 \otimes \text{End}(V)$ coïncide avec \mathcal{O} . Fixons une telle extension, dont on montre facilement l'existence, et l'unicité à isomorphisme près.

Soit alors Γ le groupe des automorphismes de l'anneau \mathcal{O} qui fixent les éléments de \mathcal{O} et commutent à $D_{\mathcal{O}}$. On définit une représentation linéaire fidèle

$$\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$$

caractérisée par

$$(5.12) \quad (g \otimes \mathbb{I})(U) = U \cdot (1 \otimes \rho(g)) \quad \text{pour } g \in \Gamma.$$

Le groupe de Galois différentiel « algébrique » est le sous-groupe algébrique $\rho(\Gamma)$ de $GL(V)$. Il est conjugué dans $GL(V)$ au groupe de Galois « monodromique » $\text{Gal}(E)_{z_0}$ associé à un point-base z_0 de Ω (et défini en 5.2).

5.4. Généralisations

a) Tout ce qui précède s'étend sans difficulté au cas où Ω est un ouvert de \mathbb{C}^d , et où le système différentiel est

$$(5.13) \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = A_i(z) F(z) \quad (1 \leq i \leq d, z = (z^1, \dots, z^d)).$$

Les applications $A_i : \Omega \rightarrow \text{End}(V)$ sont holomorphes et satisfont à la condition d'intégrabilité

$$(5.14) \quad \frac{\partial A_i}{\partial z^j} - \frac{\partial A_j}{\partial z^i} = [A_i, A_j].$$

b) On peut même, avec Deligne, considérer le cas où Ω est une variété holomorphe (ou algébrique) et l'équation différentielle est formulée pour un fibré vectoriel E de base Ω , avec une connexion intégrable ∇ .

c) On doit à H. Umemura [34], [35] et B. Malgrange [25] la définition des groupoïdes de Galois associés à des feuilletages, ce qui fournit une théorie de Galois différentielle pour des équations différentielles non-linéaires.

Quelques mots sur la bibliographie. — Tout d'abord, voici quelques ouvrages de fond sur le sujet des groupoïdes et des algébroïdes de Lie, et de la géométrie des variétés de Poisson : [2, 9, 13, 15, 19, 23, 24, 26, 36]. Pour comprendre la philosophie des groupoïdes, voir l'article de propagande : [39]. Le lien avec la géométrie non-commutative est l'objet du livre [32].

RÉFÉRENCES

- [1] M. F. ATIYAH – Complex analytic connections in fibre bundles, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), p. 181–207.
- [2] O. BABELON, P. CARTIER & Y. KOSMANN-SCHWARZBACH (éds.) – *Proceedings of Lectures on integrable systems (Sophia-Antipolis, 1991)*, World Scientific Publishing Co. Inc., 1994.
- [3] W. BRANDT – Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.* **97** (1926), p. 360–366.
- [4] P. CARTIER – Some fundamental techniques in the theory of integrable systems, in *Lectures on integrable systems (Sophia-Antipolis, 1991)*, World Scientific Publishing Co. Inc., 1994, p. 1–41.
- [5] A. CONNES – A survey of foliations and operator algebras, in *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., 1982, p. 521–628.
- [6] T. J. COURANT – Dirac manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **319** (1990), p. 631–661.
- [7] M. CRAINIC & R. L. FERNANDES – Integrability of Lie brackets, *Ann. of Math.* **157** (2003), p. 575–620.
- [8] ———, Integrability of Poisson brackets, *J. Differential Geom.* **66** (2004), p. 71–137.
- [9] P. DAZORD & A. WEINSTEIN (éds.) – *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 20, Springer, 1991.
- [10] P. DAZORD – Obstruction à un troisième théorème de Lie non linéaire pour certaines variétés de Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **306** (1988), p. 273–278.

- [11] M. DEMAZURE & A. GROTHENDIECK (éds.) – *Schémas en groupe. I : Propriétés générales des schémas en groupe. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA3)*, Lecture Notes in Math., vol. 151, Springer, 1970.
- [12] A. DOUADY & M. LAZARD – Espaces fibrés en algèbres de Lie et en groupes, *Invent. Math.* **1** (1966), p. 133–151.
- [13] J.-P. DUFOUR & N. T. ZUNG – *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Math., vol. 242, Birkhäuser, 2005.
- [14] M. GERSTENHABER – The cohomology structure of an associative ring, *Ann. of Math.* **78** (1963), p. 267–288.
- [15] S. GUTT, J. RAWNSLEY & D. STERNHEIMER (éds.) – *Poisson geometry, deformation quantisation and group representations*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 323, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [16] A. HAEFLIGER – Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 248–329.
- [17] M. HILSUM & G. SKANDALIS – Morphismes K -orientés d’espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d’après une conjecture d’A. Connes), *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **20** (1987), p. 325–390.
- [18] J.-L. KOSZUL – Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, *Astérisque* numéro hors-série (1985), p. 257–271, The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).
- [19] P. LIBERMANN & C. MARLE – *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel, 1987.
- [20] A. LICHNEROWICZ – Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential Geom.* **12** (1977), p. 253–300.
- [21] Z.-J. LIU, A. WEINSTEIN & P. XU – Dirac structures and Poisson homogeneous spaces, *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), p. 121–144.
- [22] J.-L. LODAY – Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz, *Enseign. Math.* **39** (1993), p. 269–293.
- [23] K. C. H. MACKENZIE – *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 124, Cambridge Univ. Press, 1987.
- [24] ———, *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 213, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [25] B. MALGRANGE – Le groupoïde de Galois d’un feuilletage, in *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, p. 465–501.
- [26] I. MOERDIJK & J. MRČUN – *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 91, Cambridge Univ. Press, 2003.
- [27] ———, Lie groupoids, sheaves and cohomology, in *Poisson geometry, deformation quantisation and group representations*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 323, Cambridge Univ. Press, 2005, p. 145–272.

- [28] J. PRADINES – Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **263** (1966), p. A907–A910.
- [29] ———, Troisième théorème de Lie sur les groupoïdes différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **267** (1968), p. A21–A23.
- [30] G. S. RINEHART – Differential forms on general commutative algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 195–222.
- [31] D. ROYTENBERG – Courant algebroids, derived brackets and even symplectic manifolds, Thèse, UC Berkeley, 1999, arXiv:math.DG/9910078.
- [32] A. CANNAS DA SILVA & A. WEINSTEIN – *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkeley Math. Lect. Notes, vol. 10, Amer. Math. Soc., 1999.
- [33] H. J. SUSSMANN – Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **180** (1973), p. 171–188.
- [34] H. UMEMURA – Differential Galois theory of infinite dimension, *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 59–135.
- [35] ———, Invitation to Galois theory, in *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Notes Math. Theor. Phys., vol. 9, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, p. 269–289.
- [36] I. VAISMAN – *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Math., vol. 118, Birkhäuser, 1994.
- [37] A. WEINSTEIN – The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geom.* **18** (1983), p. 523–557.
- [38] ———, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **16** (1987), p. 101–104.
- [39] ———, Groupoids : unifying internal and external symmetry. A tour through some examples, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (1996), p. 744–752.
- [40] C. C. ZHU – Lie II theorem for Lie algebroids, via stacky Lie groupoids, prépublication arXiv:math.DG/0701024.

Pierre CARTIER

C.N.R.S., I.H.É.S. et I.M.J.
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette
E-mail : cartier@ihes.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2007/2008

EXPOSÉS 982-996

(988) *Résultats non-perturbatifs
pour l'équation de Schrödinger
et d'autres cocycles quasi-périodiques*

L. Hakan ELIASSON

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**RÉSULTATS NON-PERTURBATIFS POUR L'ÉQUATION DE
SCHRÖDINGER ET D'AUTRES COCYCLES QUASI-PÉRIODIQUES**
[d'après Avila, Bourgain, Jitomirskaya, Krikorian, Puig]

par **L. Hakan ELIASSON**

INTRODUCTION

Soit G un groupe de matrices, et soit \mathbb{T}^d le tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ muni de la métrique

$$\|[x]\| = \inf_{k \in \mathbb{Z}^d} |x - k|.$$

Soit α un élément de \mathbb{T}^d tel que $\|\langle k, \alpha \rangle\| \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$, de sorte que l'orbite $\{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense en \mathbb{T}^d .

À une fonction $A : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ continue et homotope à l'identité, on associe l'homéomorphisme

$$(\alpha, A) : \begin{cases} \mathbb{T}^d \times G \rightarrow \mathbb{T}^d \times G \\ (\theta, X) \mapsto (\theta + \alpha, A(\theta)X). \end{cases}$$

Alors l'application itérée $(\alpha, A)^n$ a la forme

$$(\theta, X) \mapsto (\theta + n\alpha, A_n(\theta)X) \quad n \in \mathbb{Z},$$

où

$$A_n(\theta) = \begin{cases} A(\theta + (n-1)\alpha) \dots A(\theta) & n \geq 1 \\ I & n = 0 \\ A(\theta + n\alpha)^{-1} \dots A(\theta - \alpha)^{-1} & n \leq -1. \end{cases}$$

La famille des matrices $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ vérifie la propriété des cocycles

$$A_{n+m}(\theta) = A_n(\theta + m\alpha)A_m(\theta).$$

Remarque 0.1. — Il y a aussi une version de cocycle à temps continu. Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que $|\langle k, \alpha \rangle| \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$, de sorte que

l'orbite $\{[t\alpha] : t \in \mathbb{R}\}$ est dense en \mathbb{T}^d . Soit $A : \mathbb{T}^d \rightarrow g$ continu ; considérons le système autonome

$$\theta' = \alpha, \quad X' = A(\theta)X$$

sur $\mathbb{T}^d \times G$. Son flot $(\alpha, A)^t$ a la forme

$$(\theta, X) \mapsto (\theta + [t\alpha], A_t(\theta)X) \quad t \in \mathbb{R},$$

et la famille des matrices $\{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ vérifie la propriété des cocycles

$$A_{t+s}(\theta) = A_t(\theta + s\alpha)A_s(\theta).$$

La classe la plus importante, ou du moins la plus étudiée, est le *cocycle de Schrödinger* $(\alpha, A(\cdot, E))$ où

$$A(\theta, E) = \begin{pmatrix} V(\theta) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa dynamique est liée aux propriétés spectrales de *l'opérateur de Schrödinger* $H_\theta : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$,

$$H_\theta u(n) = -\Delta u(n) + V(\theta + n\alpha)u(n),$$

où Δ est le laplacien

$$\Delta u(n) = u(n+1) + u(n-1).$$

Dans cet article, nous allons traiter de cocycles de classe \mathcal{C}^∞ ou analytique à fréquences diophantiennes α , c'est-à-dire que α satisfait une *condition diophantienne*

$$DC(\kappa, \tau) : \quad \| \langle k, \alpha \rangle \| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0.$$

Il y a des résultats importants pour les cocycles qui sont seulement continus et/ou ont des fréquences qui ne sont pas diophantiennes (voir par exemple [3, 20, 43]) mais les techniques pour les étudier sont différentes et ne seront pas discutées ici.

Des méthodes de type KAM ont été utilisées avec succès depuis une cinquantaine d'années pour étudier la dynamique des cocycles quasi-périodiques. Cette théorie perturbative n'est valable qu'au voisinage d'un cocycle constant, et la taille de ce voisinage dépend des propriétés arithmétiques des fréquences.

Récemment deux approches beaucoup plus globales ont été développées. L'une est basée sur la renormalisation et a donné des résultats globaux, dus à R. Krikorian et A. Avila, pour des cocycles à valeurs dans $SU(2)$ et $SL(2, \mathbb{R})$. L'autre est basée sur des résultats de localisation dus à J. Bourgain et S. Jitomirskaya qui, combinés à un argument de dualité, ont permis à J. Puig de décrire la dynamique du cocycle de Schrödinger dans un cadre semi-global. Ces méthodes restent (pour le moment) restreintes à des cocycles avec une fréquence dans \mathbb{T} .

1. RÉDUCTIBILITÉ

1.1. Définition

Deux cocycles (α, A) et (α, A') sont *conjugués* s'il existe une fonction continue $Z : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ telle que

$$(0, Z)^{-1} \circ (\alpha, A)^n \circ (0, Z) = (\alpha, A')^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ou, de manière équivalente,

$$Z(\theta + \alpha)^{-1} A(\theta) Z(\theta) = A'(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^d.$$

On dit qu'ils sont \mathcal{C}^∞ -*conjugués* si Z est de classe \mathcal{C}^∞ .

Un cocycle (α, A) est constant si la fonction $A : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ est constante. Il est *réductible* s'il est conjugué à un cocycle constant.

Cette notion de réductibilité s'avère inutilement restrictive. Plus généralement on dit qu'un cocycle (α, A) est réductible s'il existe une fonction continue $Z : \mathbb{R}^d / (2\mathbb{Z})^d \rightarrow G$ telle que

$$B = Z(\theta + \alpha)^{-1} A(\theta) Z(\theta)$$

soit constante. Dans le cas où Z est en effet définie sur \mathbb{T}^d , on dit qu'il est réductible mod \mathbb{Z}^d .

Remarque 1.1. — Ces notions de conjugaison et de réductibilité se généralisent immédiatement aux cocycles à temps continu.

Remarque 1.2. — Notez que la notion de réductibilité dépend du groupe G – c'est la G -réductibilité. Pour tout groupe de matrice G , réel ou complexe, en $GL(N, \mathbb{C})$, si un cocycle (α, A) à valeurs dans G est $GL(N, \mathbb{C})$ -réductible mod \mathbb{Z}^d , alors il est G -réductible [11].

Il a été démontré par Floquet que les cocycles à temps continu périodiques sont toujours réductibles. Les cocycles (à temps discret) périodiques sont aussi réductibles, quand cette notion est définie de manière appropriée. Les cocycles quasi-périodiques ne sont pas toujours réductibles.

Du point de vue dynamique un cocycle réductible est parfaitement compris – il a la même dynamique qu'un cocycle constant.

Les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger H_θ sont fortement liées aux propriétés dynamiques du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ associé. Si E n'est pas dans le spectre de H_θ , alors $(\alpha, A(\cdot, E))$ est réductible [32], mais cela n'est pas toujours le cas si E est dans le spectre [23]. Démontrer la réductibilité d'un cocycle de Schrödinger pour des énergies dans le spectre a été la clé de nombreuses propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger correspondant : spectre absolument continu

[14, 16], existence de trous spectraux [42], mesure de Lebesgue du spectre [25, 50], régularité Hölder de la densité d'états intégrée [6, 25].

1.2. Obstructions à la réductibilité

Même les cocycles analytiques à fréquence diophantienne ne sont pas toujours réductibles. Par exemple, pour tout entier positif r ,

$$E_r(\theta) = e^{2\pi r h \theta}, \quad h = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

définit un cocycle non réductible en $\mathbb{T}^1 \times SU(2)$. Il existe aussi de tels cocycles dans $\mathbb{T}^d \times SU(2)$.

Ces cocycles non réductibles sont assez exceptionnels. Par exemple Krikorian montre [39] que les cocycles qui ne sont pas conjugués à $E_r(\theta)$ sont un ensemble ouvert et dense en topologie \mathcal{C}^∞ dans un petit \mathcal{C}^s -voisinage (pour un s suffisamment grand) autour des cocycles constants.

La question naturelle qui se pose pour des cocycles dans $SU(2)$, et aussi pour d'autres groupes compacts, est de savoir si presque tout (dans un sens raisonnable) cocycle est réductible.

L'exposant de Lyapunov d'un cocycle (α, A) en $SL(2, \mathbb{R})$ est

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^d} \log(\|A_n(\theta)\|) d\theta.$$

C'est facile de montrer que cette limite existe, qu'elle est indépendante du choix de la norme matricielle et qu'elle est non-négative. Un cocycle (α, A) en $SL(2, \mathbb{R})$ est *hyperbolique* s'il existe deux sous-espaces continus, unidimensionnels et linéairement indépendants W_\pm et un $\gamma > 0$ constant tel que pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$ et tout $u \in W_\pm(\theta) \setminus 0$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|A_n(\theta)u\| = -\gamma.$$

Dans ce cas, γ est l'exposant de Lyapunov. Tout cocycle hyperbolique en $SL(2, \mathbb{R})$ (qui est de classe \mathcal{C}^∞ ou analytique et qui a des fréquences diophantiennes) est réductible [31, 33].

À cause d'un théorème célèbre d'Oseledec [44], un cocycle qui a un exposant de Lyapunov positif mais qui n'est pas hyperbolique est appelé *non uniformement hyperbolique*. Ce n'est pas facile de voir que de tels cocycles existent, mais nous savons aujourd'hui qu'ils constituent une grande classe. Ce qui est facile de voir par contre, c'est qu'un tel cocycle ne peut pas être réductible.

Une question naturelle pour les cocycles dans $SL(2, \mathbb{R})$ est de savoir si presque tout (dans un sens raisonnable) cocycle est ou bien réductible ou bien non uniformement hyperbolique.

Un cocycle dont l'exposant de Lyapunov est zéro a parfois une propriété plus forte : le cocycle (α, A) est L^2 -conjugué à une rotation, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $Z : \mathbb{T}^d \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ carré-intégrable telle que, pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$Z(\theta + \alpha)^{-1}A(\theta)Z(\theta) \in SO(2, \mathbb{R}).$$

Par exemple, le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ est L^2 -conjugué à une rotation pour presque tout E tel que $\gamma(\alpha, A(\cdot, E)) = 0$ [49]. La même chose vaut pour tout cocycle de la forme $A(\theta)R_E$, où

$$R_E = \begin{pmatrix} \cos(E) & -\sin(E) \\ \sin(E) & \cos(E) \end{pmatrix},$$

mais certainement pas pour n'importe quelle famille de cocycles à un paramètre.

2. RÉSULTATS LOCAUX

La réductibilité de cocycles proches de cocycles constants a été intensivement étudiée par des théories de perturbation de type KAM. Les meilleurs résultats sont obtenus pour des cocycles (α, A) avec α diophantienne dans $DC(\kappa, \tau)$ et A dans la classe $\mathcal{C}_\rho(\mathbb{T}^d, G)$ des matrices $A : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ analytiques telles que

$$|A|_\rho =: \sup_{|\Im \theta| < \rho} |A(\theta)| < \infty.$$

L'existence de cocycles réductibles proches des constants a été démontrée dans des familles à plusieurs paramètres [14, 41] – la réductibilité est démontrée pour un grand (au sens de Lebesgue) ensemble de paramètres, et la dimension de l'espace des paramètres augmente dans ces théories avec la dimension de la matrice A . Plus tard des résultats analogues ont été démontrés dans des familles à un paramètre [15, 34].

Dans les années 1990, des résultats plus forts ont été obtenus et aujourd'hui nous avons une vision assez complète qui a été confirmée dans beaucoup de cas : pour $\alpha \in DC(\kappa, \tau)$ donné, il existe un voisinage \mathcal{U} (qui dépend seulement de ρ, κ, τ) de l'ensemble des cocycles constants en $\{\alpha\} \times \mathcal{C}_\rho(\mathbb{T}^d, G)$ de sorte que

- tout cocycle dans \mathcal{U} est presque réductible ;
- « presque tout » cocycle dans \mathcal{U} est réductible ;
- un cocycle générique dans \mathcal{U} n'est pas réductible.

Être presque réductible veut dire que le cocycle peut être conjugué (par une conjugaison définie sur $\mathbb{R}^d / (2\mathbb{Z})^d$) à un cocycle arbitrairement proche d'un cocycle constant. En particulier, un cocycle presque réductible ne peut pas être non uniformément hyperbolique. Cette propriété a été confirmée dans de nombreux cas : $SL(2, \mathbb{R})$ [16], $SO(3, \mathbb{R})$ [19], $SU(N)$ [36], $GL(N, \mathbb{R})$ [18]. Le fait que « presque tout » cocycle soit

réductible a été vérifié dans de nombreuses familles à un paramètre : la famille de Schrödinger [16], certaines familles dans des groupes compacts [37], certaines familles dans $GL(N, \mathbb{C})$ [26]. Le fait qu'il y ait un \mathcal{G}_δ dense de cocycles non réductibles a été vérifié dans la famille de Schrödinger [16, 47] et dans $SO(3, \mathbb{R})$ [19].

Voici une formulation précise d'un résultat de réductibilité « presque partout » :

il existe une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho, \kappa, \tau)$ telle que, pour toute fonction analytique $V : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ avec $|V|_\rho < \varepsilon_0$ et pour tout $\alpha \in DC(\kappa, \tau)$, le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E; V))$ est réductible pour presque tout $E \in \mathbb{R}$.

Dans la catégorie \mathcal{C}^∞ , on pourrait être amené à penser que la vision locale est la même que dans la catégorie analytique, mais pas grand chose n'a été démontré. Parmi les quelques résultats, un d'entre eux affirme que les cocycles réductibles en $SO(3, \mathbb{R})$ et $SU(N)$ sont \mathcal{C}^∞ -denses proches de cocycles constants [36].

La théorie de perturbation de KAM utilisée pour obtenir ces résultats dépend très sensiblement des propriétés arithmétiques de α décrites par la classe $DC(\kappa, \tau)$. Ceci est reflété dans la dépendance du voisinage \mathcal{U} et de la constante ε_0 en κ et τ , qui (d'après les estimations que l'on peut obtenir) décroissent quand κ décroît ou quand τ croît. Des résultats qui sont valables pour toutes fréquences α dans l'ensemble de mesure totale

$$DC = \cup_{\kappa, \tau > 0} DC(\kappa, \tau)$$

et pour toute matrice A proche d'une constante – le cas semi-global – sont au-delà de la théorie de perturbation. Ceci est bien sûr d'autant plus vrai pour le cas vraiment global lorsque la matrice A est arbitraire et pas proche d'une constante. Les résultats globaux de petits diviseurs sont rares, le théorème de conjugaison des difféomorphismes du cercle étant le plus connu [28].

Durant ces cinq à dix dernières années, deux méthodes globales supplémentaires ont été développées. Une d'entre elles est dynamique et basée sur la renormalisation, et elle donne des résultats plutôt globaux pour des cocycles à valeurs dans $SU(2)$ et $SL(2, \mathbb{R})$. L'autre est basée sur la localisation de l'opérateur de Schrödinger et sur la dualité, et elle donne des résultats semi-globaux pour les cocycles de Schrödinger.

3. DU GLOBAL AU LOCAL – RENORMALISATION

La renormalisation a été utilisée dans [48] pour étudier les dynamiques de cocycles dans le groupe compact $\mathbb{T} \times SU(2)$. Plus tard, elle a servi dans [35] pour démontrer la \mathcal{C}^0 -densité de cocycles réductibles en $\mathbb{T} \times SU(2)$. La méthode a été étendue à la catégorie \mathcal{C}^∞ dans [38], et ensuite adaptée au groupe non compact $\mathbb{T} \times SL(2, \mathbb{R})$ dans

[39] et, plus récemment, dans [5]. Des idées similaires ont aussi été utilisées dans [21] pour étudier un problème de perturbation singulier et, à un certain degré, dans [27].

Dans cette section, nous allons traiter du travail de Krikorian et Avila [5, 39] sur la renormalisation de cocycles de classe \mathcal{C}^∞ ou analytiques en $\mathbb{T} \times SU(2)$ et $\mathbb{T} \times SL(2, \mathbb{R})$.

3.1. Renormalisation et paires commutantes

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Soient, pour $k \geq 0$,

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k} - \left[\frac{1}{\alpha_k} \right], \quad \alpha_0 = \alpha,$$

$$a_{k+1} = \left[\frac{1}{\alpha_k} \right],$$

$$\beta_k = \alpha_k \beta_{k-1}, \quad \beta_{-1} = 1,$$

et

$$p_{k+2} = a_{k+2} p_{k+1} + p_k \quad p_1 = 1 \quad p_0 = 0$$

$$q_{k+2} = a_{k+2} q_{k+1} + q_k \quad q_1 = a_1 \quad q_0 = 1$$

où $[\cdot]$ dénote la partie entière.

L'application $]0, 1[\ni \alpha \mapsto \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha} \right] \in [0, 1[$ – connue comme l'application de Gauss – est ergodique par rapport à une mesure invariante absolument continue [40]. Cela implique, par exemple, que, pour tout ensemble $D \subset]0, 1[$ de mesure positive,

$$\#\{k \geq 0 : \alpha_k, \alpha_{k+1} \in D\} = \infty$$

pour presque tout $\alpha_0 \in D$ – notons cet ensemble $\mathcal{R}D$.

Pour $k \geq 0$, soient

$$A^{(k)}(\theta) = A_{(-1)^k q_k}(\theta)$$

et

$$V_k = (\beta_k, A^{(k)}) = (\alpha, A)^{(-1)^k q_k}.$$

(V_k est un homéomorphisme en $\mathbb{T} \times G$.) Alors

PROPOSITION 3.1. — *Il existe une fonction $Z : \mathbb{R} \rightarrow G$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que*

$$(0, Z)^{-1} \circ V_k \circ (0, Z) = (\beta_k, I).$$

Si Z' est une autre application de ce type, alors $Z'Z^{-1}$ est β_k -périodique.

Pour $SL(2, \mathbb{R})$, un résultat analogue est aussi prouvé dans la catégorie analytique dans [5].

Soit L_β la dilatation

$$\mathbb{R} \times G \ni (x, X) \mapsto (\beta x, X) \in \mathbb{R} \times G;$$

définissons

$$\begin{aligned}\tilde{U}_k &= L_{\beta_{k-1}}^{-1} \circ V_{k-1} \circ L_{\beta_{k-1}} = (1, A^{(k-1)}(\beta_{k-1} \cdot)) \\ \tilde{V}_k &= L_{\beta_{k-1}}^{-1} \circ V_k \circ L_{\beta_{k-1}} = (\alpha_k, A^{(k)}(\beta_{k-1} \cdot)).\end{aligned}$$

Alors

PROPOSITION 3.2. — (i) $\tilde{U}_k \circ \tilde{V}_k = \tilde{V}_k \circ \tilde{U}_k$.

(ii) Il existe une fonction $Z : \mathbb{R} \rightarrow G$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que

$$(0, Z)^{-1} \circ \tilde{U}_k \circ (0, Z) = (1, I).$$

Soit

$$W_k = (0, Z)^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ (0, Z).$$

(iii) W_k est 1-périodique.

(iv) Si Z' est une autre fonction comme dans (ii), alors W_k et

$$(0, Z')^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ (0, Z')$$

sont \mathcal{C}^∞ -conjugués. Ils sont donc deux représentants de la même classe de \mathcal{C}^∞ -conjugaison $[\tilde{V}_k]$.

(v) Si (α, A) et (α, B) sont \mathcal{C}^∞ -conjugués, alors

$$[\tilde{V}_k(A)] = [\tilde{V}_k(B)].$$

Si on définit pour $x_* \in \mathbb{T}$

$$V_{k,x_*} = T_{x_*}^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ T_{x_*} = (\beta_k, A^{(k)}(\cdot + x_*)),$$

où T_{x_*} est la translation

$$\mathbb{R} \times G \ni (x, X) \mapsto (x + x_*, X) \in \mathbb{R} \times G,$$

alors nous avons les mêmes résultats pour $\tilde{U}_{k,x_*}, \tilde{V}_{k,x_*}$.

3.2. Du global au local

Dans le cas de $SU(2)$, soit

$$\eta_k(\theta) = (\partial A^{(k)}(\theta))(A^{(k)}(\theta))^{-1},$$

où $\partial = \frac{\partial}{\partial \theta}$. $\eta_k(\theta)$ est un élément de l'algèbre de Lie $su(2)$ qui est munie de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} it & u \\ -\bar{u} & -it \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{t^2 + |u|^2}.$$

Par un calcul explicite, on démontre que

$$\|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq a_k \|\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\eta_{k-2}\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

d'où on déduit que

$$u_k =: \beta_{k-1} \|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} + \beta_k \|\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

décroit quand k augmente. Ce n'est pas difficile de voir que sa limite, $J(\alpha, A)$, est une invariante de conjugaison, et on vérifie facilement que cette invariante est égale à 0 si A est constante et égale à $2\pi r$ si A est un des E_r . De l'estimation

$$\|\eta_k\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \leq q_k \|\eta_0\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}$$

on déduit que l'invariante est petite si A est \mathcal{C}^1 -proche d'une constante.

Les résultats principaux de Krikorian sont maintenant

THÉORÈME 3.3 ([38]). — *Soient A de classe \mathcal{C}^∞ et $\alpha \in \mathcal{RDC}(\kappa, \tau)$. Soit $s \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un k tel que $\alpha_k \in DC(\kappa, \tau)$ et que la classe $[\tilde{V}_k]$ soit ε -proche, en topologie \mathcal{C}^s , ou bien à un cocycle constant (si $J(\alpha, A) = 0$) ou bien à un cocycle (α_k, E_r) (si $J(\alpha, A) > 0$).*

Que la classe $[\tilde{V}_k]$ soit proche de (α_k, B) veut simplement dire qu'elle contient un représentant W_k qui est proche de ce cocycle.

Si $W_k \in [\tilde{V}_k]$ est \mathcal{C}^s -proche de (α_k, E_r) mais pas conjugué à (α_k, E_r) , alors Krikorian montre par une analyse perturbative poussée que, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe un k' tel que $\alpha_{k'} \in DC(\kappa, \tau)$ et la classe $[\tilde{V}_{k'}]$ est ε' -proche, en topologie \mathcal{C}^s , ou bien à un cocycle constant ou bien à un cocycle $(\alpha_{k'}, E_{r'})$ pour un $r' < r$. D'où

THÉORÈME 3.4 ([38]). — *Soit A de classe \mathcal{C}^∞ et soit $\alpha \in \mathcal{RDC}(\kappa, \tau)$. Supposons que (α, A) n'est pas conjugué à un (α, E_r) . Alors $J(\alpha, A) = 0$.*

En utilisant la densité \mathcal{C}^∞ de réductibilité [37], on obtient pour presque tout α que les cocycles réductibles sont \mathcal{C}^∞ -denses parmi tous les cocycles $SU(2)$. On aimerait bien conclure que, dans des familles génériques de cocycles à un paramètre, presque tout cocycle est réductible, mais pour faire cela il nous manque encore le bon résultat local en catégorie \mathcal{C}^∞ .

Dans le cas où $G = SL(2, \mathbb{R})$, il est possible de laisser la renormalisation tendre vers ∞ et Avila-Krikorian démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 3.5 ([5]). — *Soit A de classe \mathcal{C}^∞ et soit $\alpha \in RDC(\kappa, \tau)$. Supposons que (α, A) est L^2 -conjugué à un cocycle de rotations. Alors pour presque tout $x_* \in \mathbb{R}$, la séquence $\{\tilde{V}_{k, x_*} : k \in \mathbb{N}\}$ est \mathcal{C}^∞ -précompacte et, pour toute sous-séquence convergente V_{k_n, x_*} ,*

$$\lim_{k_n \rightarrow \infty} [\tilde{V}_{k_n, x_*}]$$

contient un cocycle à valeurs dans $SO(2, \mathbb{R})$.

La topologie ici est la convergence uniforme \mathcal{C}^∞ sur des ensembles compacts en \mathbb{R} , et le même résultat est aussi valable dans la catégorie analytique.

En utilisant un résultat local de réductibilité presque partout dans la catégorie analytique, nous obtenons, pour presque tout α , que pour presque tout E le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ est soit non uniformément hyperbolique soit réductible.

3.3. Estimations a priori

Le point clé de ces preuves est d'établir des estimations a priori des dérivées des itérations de (α, A) . Dans le cas $SU(2)$:

PROPOSITION 3.6. — Soit $r \in \mathbb{N} \setminus 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in \mathbb{T}$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq r} \beta_{k-1}^{j+1} \left\| |\partial^j \eta_k| + |\partial^j \eta_{k-1}| \right\|_{\mathcal{C}^0(x_k - \frac{\beta_{k-1}}{2}, x_k + \frac{\beta_{k-1}}{2})} = 0$$

si $J(\alpha, A) = 0$, et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq r} \beta_{k-1}^{j+1} \left\| |\partial^j \eta_k| + |\partial^j \eta_{k-1}| \right\|_{\mathcal{C}^0(x_k - \frac{\beta_{k-1}}{2}, x_k + \frac{\beta_{k-1}}{2})} = 0$$

si $J(\alpha, A) > 0$.

PREUVE (esquisse) — C'est assez immédiat d'obtenir des bornes supérieures indépendantes de k

$$\beta_{k-1}^{r+1} \|\partial^r \eta_k\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \leq C_r < \infty.$$

Par des estimations de convexité

$$\|\partial^j f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \leq C'_r \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}^{1-\frac{j}{r}} \|f\|_{\mathcal{C}^r(\mathbb{T})}^{\frac{j}{r}} \quad 1 \leq j \leq r,$$

il suffit de démontrer les deux énoncés pour $r = 0$ et $r = 1$ respectivement. Par l'estimation

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + 2 \|\partial f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} + 2 \|\partial f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

il suffit de démontrer des estimations dans $L^2(\mathbb{T})$ ou $L^1(\mathbb{T})$ respectivement.

Si $J(\alpha, A) = 0$, on en déduit immédiatement que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k-1} \|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0,$$

d'où on obtient le résultat.

Si $J(\alpha, A) > 0$, le résultat suit de la même façon à partir de la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{k-1}^2 \|\partial \eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0,$$

qu'il s'agit donc de démontrer.

Soit

$$\mu_k = 1 - \frac{u_k}{u_{k-1}}.$$

Comme $J(\alpha, A) > 0$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$, et il suffit de montrer que pour k suffisamment grand

$$\begin{aligned} \|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} &\leq a_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|\partial\eta_{k-2}\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\quad + \sqrt{4\mu_k}(a_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial\eta_{k-2}\|_{L^2(\mathbb{T})})^2 \quad (*) \end{aligned}$$

En effet, celui-ci donne que

$$u'_k =: \beta_{k-1}^2 \|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} + \beta_{k-1}\beta_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

vérifie

$$u'_k \leq \alpha_{k-1}u'_{k-1} + \sqrt{4\mu_k}M^2 \quad \text{où } M = \sup_k \beta_{k-1} \|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} < \infty.$$

Cette inégalité implique que $u'_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$ et on a gagné.

Donc, il reste à démontrer (*). Nous avons

$$\begin{aligned} \eta_k &= w_1 + Ad(W_1)w_2 + \dots + Ad(W_1 \dots W_{a_k})w_{a_k+1} \\ \partial\eta_k &= \partial w_1 + Ad(W_1)\partial w_2 + \dots + Ad(W_1 \dots W_{a_k})\partial w_{a_k+1} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq a_k+1} [Ad(W_1, \dots, W_{i-1})w_i, Ad(W_1, \dots, W_{j-1})w_j] \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} w_j(\theta) &= \eta_{k-2}(\theta - a_k\beta_{k-1}) \quad j = 1 \\ w_j(\theta) &= \eta_{k-1}(\theta - (a_k - (j - 2))\beta_{k-1})^* \quad 2 \leq j \leq a_k + 1, \end{aligned}$$

et où W_j est définie de la même façon avec η_{\dots} remplacé par $A(\dots)$. (Ici X^* est l'adjoint de la matrice X .)

Si l'on note

$$\gamma_i = Ad(W_1 \dots W_{i-1})w_i,$$

alors

$$\|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq a_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|\partial\eta_{k-2}\|_{L^1(\mathbb{T})} + \sum_{1 \leq i < j \leq a_k+1} \|[\gamma_i, \gamma_j]\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Par un calcul dans $su(2)$ on démontre que, pour tout $0 \leq \chi \leq 1$, on a ou bien

$$\left\| \sum_j \gamma_j \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq (1 - \chi) \sum_j \|\gamma_j\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

ou bien

$$\sum_{i < j} \|[\gamma_i, \gamma_j]\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\chi} \left(\sum_{i < j} \|\gamma_j\|_{L^2(\mathbb{T})} \right)^2.$$

La première alternative implique immédiatement que

$$\|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq (1 - \chi)(a_k \|\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\eta_{k-2}\|_{L^2(\mathbb{T})}),$$

ce qui est impossible pour k suffisamment grand, si l'on prend $\chi = 4\mu_k$. Donc, on a nécessairement la deuxième alternative, ce qui donne (*) et complète la preuve de la proposition.

De la proposition 3.6, on déduit le théorème 3.3. Cette déduction est assez immédiate si $J(\alpha, A) = 0$. En effet, de la proposition 3.6, on obtient (supposons, pour simplifier, que les x_k sont $= 0$) que

$$\tilde{U}_k = (1, e^{H_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)), \quad \tilde{V}_k = (\alpha_k, e^{K_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)),$$

où $\mathcal{O}(\varepsilon_k)$ signifie une suite dont la norme $\mathcal{C}^s(\cdot)$ tend vers 0. On peut normaliser le premier cocycle

$$(0, Z_k)^{-1} \circ \tilde{U}_k \circ (0, Z_k) = (1, I)$$

par une $Z_k : \mathbb{R} \rightarrow SU(2)$ de classe \mathcal{C}^∞ de la forme

$$Z_k(x) = e^{H_k x} + \mathcal{O}(\varepsilon_k).$$

Alors

$$(0, Z_k)^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ (0, Z_k) = (\alpha_k, e^{-\alpha_k H_k + K_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)),$$

et comme la matrice $e^{-\alpha_k H_k + K_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)$ est 1-périodique, c'est gagné. Le cas $J(\alpha, A) > 0$ est plus compliqué.

Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$, quand le cocycle est L^2 -conjugué à une rotation :

PROPOSITION 3.7. — Soit $r \in \mathbb{N} \setminus 0$. Alors, pour presque tout $x_* \in \mathbb{T}$, il existe deux constantes K et n_0 telles que si

$$\|k\alpha\| \leq \frac{2}{k} \quad \text{et} \quad k \geq n_0,$$

alors

$$\beta_{k-1}^{r+1} \|\partial^r A_k\|_{\mathcal{C}^0(x_* - \frac{2}{k}, x_* + \frac{2}{k})} \leq (\beta_{k-1} K k)^{r+1} \varepsilon_k,$$

où $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

PREUVE (esquisse) — Soit

$$Z(x + \alpha)^{-1} A(x) Z(x) = R(x) \in SO(2\mathbb{R})$$

et

$$\phi(\cdot) = \|Z(\cdot)\|^2 = \|Z(\cdot)^{-1}\|^2 \in L^1(\mathbb{T}),$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur.

On vérifie que

$$\|A_n(y)^{-1} (A_n(x) - A_n(y))\| \leq -1 + \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} |x - y| \|A\|_{\mathcal{C}^0} \|\partial A\|_{\mathcal{C}^0} \phi(y) \phi(y + k\alpha)\right),$$

d'où

$$\|A_n(x)\| \leq (K \phi(y) \phi(y + n\alpha))^{\frac{1}{2}}, \quad K = e^{2n|x-y| \|A\|_{\mathcal{C}^0} \phi(y) S(y)},$$

où

$$S(y) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(y + k\alpha).$$

Par le théorème ergodique, $S(y) < \infty$ pour presque tout $y \in \mathbb{T}$.

Soit \mathcal{I} l'ensemble des fonctions

$$i : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{0, \dots, n - 1\}$$

et soient

$$\mathcal{R}(i) = i(\{1, \dots, r\}), \quad s_i = \#\mathcal{R}(i).$$

On en déduit ensuite que

$$\|\partial^r A_n(x)\| \leq (K\phi(y)\phi(y+n\alpha))^{\frac{1}{2}} \sum_{i \in \mathcal{I}} (K\phi(y)\|A\|_{\mathcal{E}^0})^{s_i} \prod_{i_p \in \mathcal{R}(i)} \phi(y+i_p\alpha) \left\| \partial^{\#i^{-1}(i_p)} A \right\|_{\mathcal{E}^0},$$

et par des estimations de convexité

$$\|\partial^r A_n(x)\| \leq C^r n^r \phi(y + n\alpha)^{\frac{1}{2}} (c(y)e^{nc(y)|x-y|})^{r+\frac{1}{2}} \|A\|_{\mathcal{E}^r},$$

où $c(y) = 2\phi(y)S(y)\|A\|_{\mathcal{E}^1}^2$ et C est une constante universelle.

Maintenant, presque tout x_* est un point de continuité mesurable pour ϕ et S , c'est-à-dire que, pour presque tout x_* , on a : il existe $n_0 = n_0(x_*)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, l'ensemble des

$$y \in [x_* - \frac{4}{n}, x_* + \frac{4}{n}],$$

tels que $|\phi(y) - \phi(x_*)| \geq 1$ ou $|S(y) - S(x_*)| \geq 1$, est de mesure $< \frac{2}{n}$. D'où on obtient : il existe $n_0 = n_0(x_*)$ tel que pour tout $n \geq n_0$ tel que $\|n\alpha\| \leq \frac{2}{n}$, l'ensemble des

$$y \in [x_* - \frac{2}{n}, x_* + \frac{2}{n}],$$

tels que $|\phi(y) - \phi(x_*)| \geq 1$ ou $|S(y) - S(x_*)| \geq 1$ ou $|\phi(y + n\alpha) - \phi(x_*)| \geq 1$, est de mesure $< \frac{4}{n}$.

En mettant tout ensemble, on obtient, pour presque tout x_* et pour tout $n \geq n_0$ tel que $\|n\alpha\| \leq \frac{2}{n}$, que

$$\|\partial^r A_n(x)\| \leq C^r n^r (\phi(x_*))^{\frac{1}{2}} (\tilde{c}(x_*)e^{2\tilde{c}(x_*)})^{r+\frac{1}{2}} \|A\|_{\mathcal{E}^r}$$

pour $|x - x_*| \leq \frac{2}{n}$. Ceci termine la preuve de la proposition.

4. LOCALISATION D'ANDERSON

Considérons l'opérateur de Schrödinger

$$H_\theta = H_{\theta, \lambda V, \alpha} = -\Delta + \lambda \{V(\theta + n\alpha) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

On dit que H_θ admet la *localisation d'Anderson* s'il est purement ponctuel (c'est-à-dire si les vecteurs propres de H_θ constituent une base pour $l^2(\mathbb{Z})$) et que ses vecteurs propres ont une décroissance exponentielle.

Il existe des exemples de $H_{\theta, \lambda V, \alpha}$ avec un spectre continu pour tout θ et pour λ arbitrairement grande si α n'est pas diophantienne [23] ou si V n'est pas lisse mais, pour α diophantienne et V lisse, il y a des résultats de perturbation pour spectre ponctuel et localisation d'Anderson.

4.1. Résultats locaux

Dans les travaux phare de Frölich-Spencer-Wittver [22] et Sinai [51] de la fin des années 1980, il a été démontré que :

si $\alpha \in DC(\kappa, \tau)$ et si V est une fonction \mathcal{C}^2 avec exactement un maximum et un minimum générique, alors il existe une constante $\lambda_0 = \lambda_0(V, \kappa, \tau)$ telle que, pour $|\lambda| > \lambda_0$, $H_{\theta, \lambda V, \alpha}$ admet la localisation d'Anderson pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$.

Ce résultat a plus tard été généralisé à d'autres fonctions V , et à des opérateurs à décroissance exponentielle,

$$\tilde{\Delta}u(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k u(n-k), \quad |a_k| \leq C_1 e^{-C_2 |k|} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

au lieu du laplacien Δ [1, 12, 17].

Il y a de nombreuses relations entre la famille d'opérateurs $H_\theta = H_\theta$ et la famille des cocycles de Schrödinger associée $(\alpha, A(\cdot, E))$. Par exemple l'exposant de Lyapunov $\gamma(E)$ de $(\alpha, A(\cdot, E))$ est égal à

$$\tilde{\gamma}(E) =: \inf_{n \geq 1} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \log(F(n, \theta, E)) d\theta,$$

où $F(n, \theta, E)$ est

$$\max(|\det(H_\theta^n - E)|, |\det(H_{\theta+\alpha}^{n-1} - E)|, |\det(H_\theta^{n-1} - E)|, |\det(H_{\theta+\alpha}^{n-2} - E)|)$$

et H_θ^n est la restriction de H_θ à $l^2(\{0, 1, \dots, n-1\})$ (avec des conditions de bord de Dirichlet). De plus, par un théorème de Kotani, si H_θ est purement ponctuel pour presque tout θ , alors $\gamma(E) > 0$ pour presque tout E [45].

4.2. Résultats semi-globaux

Autour de 2000, il y a eu des progrès importants vers des résultats plus globaux pour les modèles analytiques. Bourgain et Jitomirskaya ont démontré

THÉORÈME 4.1 ([9]). — Soit α diophantienne et soit

$$K_\varphi u(n) = -\tilde{\Delta}u(n) + \lambda 2 \cos(\varphi + n\alpha)u(n) \quad n \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathbb{T},$$

où $\tilde{\Delta}$ est un opérateur à décroissance exponentielle. Alors il existe une constante λ_0 (indépendante de α) telle que, pour $|\lambda| > \lambda_0$, K_φ admette la localisation d'Anderson pour tout φ dans un ensemble Φ de mesure de Lebesgue totale.

Φ a une description explicite et contient en particulier $\varphi = 0$.

λ_0 dépend bien sûr de $\tilde{\Delta}$, mais seulement de son taux de décroissance exponentielle.

Ce théorème est une généralisation d'un résultat célèbre de Jitomirskaya sur l'opérateur de presque Mathieu ($\tilde{\Delta} = \Delta$) [30].

Il y a une différence importante dans cette approche par rapport à la preuve perturbative : démontrer la positivité de $\tilde{\gamma}(E)$ est une partie essentielle de la preuve (au lieu d'en être une conséquence), et la positivité est ensuite utilisée pour obtenir des estimations de $(H_\theta^n - E)^{-1}$. Dans le modèle du théorème 4.1, nous savons par sous-harmonicité [29] que

$$\tilde{\gamma}(E) \geq \log \left| \frac{\lambda}{2} \right|,$$

qui est donc positive quand $|\lambda| > 2$.

Un deuxième résultat important est

THÉORÈME 4.2 ([10]). — Soit $\gamma(E, \alpha)$ l'exposant de Lyapunov du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ avec un potentiel analytique. Alors

$$E \mapsto \gamma(E, \alpha)$$

est continu pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, et

$$(E, \alpha) \mapsto \gamma(E, \alpha)$$

est continu à tout point (E, α) avec α irrationnelle.

La preuve est basée sur un argument de grandes déviations et sur le principe d'avalanche développés par Bourgain, Goldstein et Schlag dans leur étude sur la localisation des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques [8]. Cela nous mènerait trop loin de discuter de ces travaux importants qui méritent à eux seuls un exposé.

5. DUALITÉ

L'argument de dualité est maintenant classique [2]. Voici comment ça marche. Soit K_φ l'opérateur

$$\varepsilon \sum_k \hat{V}(k)v(n-k) - 2 \cos(\varphi + n\alpha)v(n) \quad n \in \mathbb{Z},$$

où les $\hat{V}(k)$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction $V : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que, pour un $\varphi \in \mathbb{T}$, il existe un vecteur propre $v = \{v(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ à décroissance exponentielle, $K_\varphi v = Ev$, et soit

$$U(\theta) = \sum_k v(k)e^{i2\pi k\theta}.$$

Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{T}$,

$$u = \{u(n) = e^{i2\pi n\varphi}U(\theta + n\alpha) : n \in \mathbb{Z}\}$$

est une solution de l'équation

$$H_\theta u(n) = -\Delta u(n) + \varepsilon V(\theta + n\alpha)u(n) = Eu(n) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Une solution de cette forme s'appelle une *solution de Floquet* ou une *onde de Bloch* quasi-périodique. On démontre que l'existence d'une telle solution implique la réductibilité du cocycle $(\alpha, A(\cdot, E; \varepsilon V))$.

Par cet argument et par la localisation d'Anderson de l'opérateur de presque Mathieu pour la phase $\varphi = 0$ [30], Puig a déduit sa solution du problème de « 10 Martini ».

THÉORÈME 5.1 ([46]). — *Si α est diophantienne, alors pour tout $\lambda \neq 0, \pm 2$, le spectre de l'opérateur de presque Mathieu est un ensemble de Cantor.*

Récemment ceci a été étendu à tout α irrationnelle [4].

L'argument de dualité a été développé en [24] où il est démontré que si K_φ est purement ponctuel pour presque tout φ , alors H_θ est purement absolument continu pour presque tout θ . Ce résultat, combiné avec le théorème 4.1, nous montre que H_θ est purement absolument continu pour presque tout θ si $|\frac{1}{\varepsilon}| > \lambda_0$ [9]. Puig a été le premier à bien comprendre les conséquences dynamiques de ce résultat.

THÉORÈME 5.2 ([47]). — *Il existe une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho)$ telle que, pour toute fonction analytique $V : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $|\varepsilon V|_\rho < \varepsilon_0$ et tout $\alpha \in DC$, le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E; \varepsilon V))$ est réductible pour presque tout $E \in \mathbb{R}$.*

Voici l'argument. Soit $H : L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$ l'opérateur

$$(Hu)(\theta, n) = (H_\theta u(\theta, \cdot))(n),$$

et soit $f \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$. Nous avons la relation suivante entre les mesures spectrales de H et H_θ :

$$\mu_{H,f}(A) = \int_{\mathbb{T}} \mu_{H_\theta, f(\theta, \cdot)}(A) d\theta$$

pour tous les ensembles de Borel A en \mathbb{R} . Comme le spectre $\sigma(H_\theta)$ est indépendant de θ , on en déduit que

$$\sigma(H) = \sigma(H_\theta).$$

Considérons l'opérateur unitaire $U : L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T})$,

$$(Uf)(n, \theta) = (\mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_1 f)(n, \theta + n\alpha),$$

où

$$\mathcal{F}_1 : L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

sont les transformées de Fourier respectivement dans les premier et second variables. Alors $K = UHU^{-1}$ est l'opérateur

$$(Ku)(n, \varphi) = (K_\varphi u(\cdot, \varphi))(n).$$

Par le théorème 4.1, nous concluons que si $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\rho)$, alors H_θ est purement absolument continu pour presque tout θ . Par le théorème de Ishii-Pastur [45], cela implique que l'exposant de Lyapunov $\gamma(E)$ du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ est zéro pour presque tout $E \in \sigma(H)$, donc, par le théorème 4.2, pour tout $E \in \sigma(H)$ (à l'exception d'une partie isolée où le spectre peut être de mesure zéro, qu'on peut négliger).

Soit maintenant $X \subset \sigma(H)$ un ensemble de Borel tel que, pour tout $E \in X$, le cocycle $(\alpha, A(\cdot, E; V))$ n'est pas réductible. Ceci implique que l'équation $H_\theta u = Eu$ n'a pas de solution de Floquet. Donc

$$X \subset \sigma(K) \setminus \cup_{\varphi \in \Phi} \{\text{valeurs propres de } K_\varphi\}.$$

Soit $\delta_0 \in l^2(\mathbb{Z})$ l'élément $\delta_0(n) = \delta_0^n$. Nous pensons à δ_0 comme élément de $L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$ et de $L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T})$ par identification triviale $\delta_0(\theta, \cdot) = \delta_0(\cdot) = \delta_0(\cdot, \varphi)$. Alors $U\delta_0 = \delta_0$. On a donc $\mu_{K_\varphi, \delta_0}(X) = 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$, donc $\mu_{K, \delta_0}(X) = 0$, donc $\mu_{H, \delta_0}(X) = 0$. Mais μ_{H, δ_0} est la densité d'états de H_θ , et on sait [13] que, pour tout ensemble de Borel $Y \subset \gamma^{-1}(0)$, $\mu_{H, \delta_0}(Y) > 0$ si $\text{Leb}(Y) > 0$. Donc $\text{Leb}(X)$ est nécessairement $= 0$. Cela conclut la preuve du théorème 5.2.

Il existe un résultat intéressant de Bourgain dans [7]. Pour tout polynôme trigonométrique $V : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ avec un maximum non-dégénéré, il existe un θ tel que l'ensemble

$$\{\alpha \in \mathbb{T}^2 : \sigma_{pp}(H_{\theta, V, \alpha}) \neq \emptyset\}$$

a une mesure de Lebesgue positive. Ceci montre que les résultats pour une fréquence ne peuvent être généralisés à plusieurs fréquences sans précaution.

RÉFÉRENCES

- [1] C. ALBANESE – KAM theory in momentum space and quasiperiodic Schrödinger operators, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10** (1993), p. 1–97.
- [2] S. AUBRY & G. ANDRÉ – Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, in *Group theoretical methods in physics (Proc. Eighth Internat. Colloq., Kiryat Anavim, 1979)*, Ann. Israel Phys. Soc., vol. 3, Hilger, 1980, p. 133–164.
- [3] A. AVILA, J. BOCHI & D. DAMANIK – Cantor spectrum for Schrödinger operators with potential arising from generalized skew-shifts, prépublication arXiv:0709.2667.
- [4] A. AVILA & S. Y. JITOMIRSKAYA – The ten Martini problem, prépublication arXiv:math/0503363.
- [5] A. AVILA & R. KRİKORIAN – Reducibility or nonuniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles, *Ann. of Math.* **164** (2006), p. 911–940.
- [6] J. BOURGAIN – Hölder regularity of integrated density of states for the almost Mathieu operator in a perturbative regime, *Lett. Math. Phys.* **51** (2000), p. 83–118.
- [7] ———, On the spectrum of lattice Schrödinger operators with deterministic potential. II, *J. Anal. Math.* **88** (2002), p. 221–254.
- [8] ———, *Green's function estimates for lattice Schrödinger operators and applications*, Annals of Mathematical Studies, Princeton Univ. Press, 2004.
- [9] J. BOURGAIN & S. Y. JITOMIRSKAYA – Absolutely continuous spectrum for 1D quasiperiodic operators, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 453–463.
- [10] ———, Continuity of the Lyapunov exponent for quasiperiodic operators with analytic potential, *J. Statist. Phys.* **108** (2002), p. 1203–1218.
- [11] C. CHAUDAUDRET – Reducibility of quasi-periodic cocycles in linear Lie groups, manuscrit, 2008.
- [12] V. A. CHULAEVSKY & E. I. DINABURG – Methods of KAM-theory for long-range quasi-periodic operators on \mathbf{Z}^ν . Pure point spectrum, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), p. 559–577.

- [13] P. DEIFT & B. SIMON – Almost periodic Schrödinger operators. III. The absolutely continuous spectrum in one dimension, *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), p. 389–411.
- [14] E. I. DINABURG & Y. G. SINAI – The one-dimensional Schrödinger equation with quasiperiodic potential, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **9** (1975), p. 8–21.
- [15] L. H. ELIASSEN – Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **15** (1988), p. 115–147.
- [16] ———, Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), p. 447–482.
- [17] ———, Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum, *Acta Math.* **179** (1997), p. 153–196.
- [18] ———, Almost reducibility of linear quasi-periodic systems, in *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 69, Amer. Math. Soc., 2001, p. 679–705.
- [19] ———, Ergodic skew-systems on $\mathbb{T}^d \times \text{SO}(3, \mathbb{R})$, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **22** (2002), p. 1429–1449.
- [20] R. FABBRI & R. A. JOHNSON – Genericity of exponential dichotomy for two-dimensional differential systems, *Ann. Mat. Pura Appl.* **178** (2000), p. 175–193.
- [21] A. FEDOTOV & F. KLOPP – Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger equations in the adiabatic case, *Comm. Math. Phys.* **227** (2002), p. 1–92.
- [22] J. FRÖHLICH, T. SPENCER & P. WITTEWIT – Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators, *Comm. Math. Phys.* **132** (1990), p. 5–25.
- [23] A. Y. GORDON – The point spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator, *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), p. 257–258.
- [24] A. Y. GORDON, S. Y. JITOMIRSKAYA, Y. LAST & B. SIMON – Duality and singular continuous spectrum in the almost Mathieu equation, *Acta Math.* **178** (1997), p. 169–183.
- [25] S. HADJ AMOR – Sur la densité d'état de l'opérateur de Schrödinger quasi-périodique unidimensionnel, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **343** (2006), p. 423–426.
- [26] H. HE & J. YOU – Full measure reducibility of generic one-parameter family of quasi-periodic linear systems, manuscrit, 2006.
- [27] B. HELFFER & J. SJÖSTRAND – Semiclassical analysis for Harper's equation. III. Cantor structure of the spectrum, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **39** (1989), p. 1–124.

- [28] M.-R. HERMAN – Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **49** (1979), p. 5–233.
- [29] ———, Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d’un théorème d’Arnol’d et de Moser sur le tore de dimension 2, *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), p. 453–502.
- [30] S. Y. JITOMIRSKAYA – Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator, *Ann. of Math.* **150** (1999), p. 1159–1175.
- [31] R. A. JOHNSON – Analyticity of spectral subbundles, *J. Differential Equations* **35** (1980), p. 366–387.
- [32] R. A. JOHNSON & J. MOSER – The rotation number for almost periodic potentials, *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), p. 403–438.
- [33] R. A. JOHNSON & G. R. SELL – Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasiperiodic linear differential systems, *J. Differential Equations* **41** (1981), p. 262–288.
- [34] À. JORBA & C. SIMÓ – On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients, *J. Differential Equations* **98** (1992), p. 111–124.
- [35] R. KRIKORIAN – C^0 -densité globale des systèmes produits-croisés sur le cercle réductibles, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), p. 61–100.
- [36] ———, Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts, *Astérisque* **259** (1999).
- [37] ———, Réductibilité presque partout des flots fibrés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), p. 187–240.
- [38] ———, Global density of reducible quasi-periodic cocycles on $\mathbf{T}^1 \times \mathrm{SU}(2)$, *Ann. of Math.* **154** (2001), p. 269–326.
- [39] ———, Reducibility, differentiable rigidity and Lyapunov exponents for quasi-periodic cocycles on $\mathbb{T} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, prépublication arXiv:math/0402333.
- [40] R. MAÑÉ – *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Ergebnisse Math. Grenzg. (3), vol. 8, Springer, 1987.
- [41] J. MOSER – Convergent series expansions for quasi-periodic motions, *Math. Ann.* **169** (1967), p. 136–176.
- [42] J. MOSER & J. PÖSCHEL – An extension of a result by Dinaburg and Sinaï on quasiperiodic potentials, *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), p. 39–85.
- [43] M. G. NERURKAR – On the construction of smooth ergodic skew-products, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), p. 311–326.
- [44] V. I. OSELEDEC – A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **19** (1968), p. 179–210.

- [45] L. PASTUR & A. FIGOTIN – *Spectra of random and almost-periodic operators*, Grund. Math. Wiss., vol. 297, Springer, 1992.
- [46] J. PUIG – Cantor spectrum for the almost Mathieu operator, *Comm. Math. Phys.* **244** (2004), p. 297–309.
- [47] ———, A nonperturbative Eliasson’s reducibility theorem, *Nonlinearity* **19** (2006), p. 355–376.
- [48] M. RYCHLIK – Renormalization of cocycles and linear ODE with almost-periodic coefficients, *Invent. Math.* **110** (1992), p. 173–206.
- [49] B. SIMON – Kotani theory for one-dimensional stochastic Jacobi matrices, *Comm. Math. Phys.* **89** (1983), p. 227–234.
- [50] Y. G. SINAI – Structure of the spectrum of a Schrödinger difference operator with almost periodic potential near the left boundary, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **19** (1985), p. 42–48, 96.
- [51] ———, Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential, *J. Statist. Phys.* **46** (1987), p. 861–909.

L. Hakan ELIASSON

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris VII
UMR 7586 du CNRS
Case 7052
2 place Jussieu
F-75251 PARIS Cedex 05
E-mail : hakane@math.jussieu.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(989) *The strong abc conjecture over function fields*

Carlo GASBARRI

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THE STRONG abc CONJECTURE OVER FUNCTION FIELDS
[after McQuillan and Yamanoi]

by **Carlo GASBARRI**

1. INTRODUCTION

One of the deepest conjectures in arithmetics is the abc conjecture:

CONJECTURE 1.1. — *Let $\epsilon > 0$; then there exists a constant $C(\epsilon)$ for which the following holds: Let a , b and c be three integral numbers such that $(a, b) = 1$ and $a + b = c$. Then*

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq C(\epsilon) \left(\prod_{p/abc} p \right)^{1+\epsilon},$$

where the product is taken over all the prime numbers dividing abc .

Let us give a geometric interpretation of this conjecture:

Consider the arithmetic surface $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ equipped with the tautological line bundle $\mathcal{O}(1)$ and the divisor $D := [0 : 1] + [1 : 0] + [1 : -1]$. Suppose we have a section $P : \text{Spec}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, not contained in D ; then $P^*(D)$ is an effective Weil divisor on $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ which can be written as $\sum_p v_p(D)[p]$.

Define *the radical* of the divisor as $N_D^{(1)}(P) := \sum_p \min(1, v_p(D)) \log(p)$.

The conjecture can be stated in this way: for every $\epsilon > 0$, there is a constant $C(\epsilon)$ such that, for every section $P : \text{Spec}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$, we have

$$h_{\mathcal{O}(1)}(P) \leq (1 + \epsilon)N_D^{(1)}(P) + C(\epsilon),$$

where $h_{\mathcal{O}(1)}(P)$ is the height of P with respect to $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. When we state the conjecture in this way we see many possible generalizations. We also clearly see the geometric analogue over function fields (cf. next sections for details). Let us formulate the conjecture in the most general version.

If K is a number field, we denote by \mathcal{O}_K the ring of integers of K and by Δ_K its discriminant. If $X \rightarrow K$ is an arithmetic surface, D an effective divisor over X and

$P : \text{Spec}(\mathcal{O}_K) \rightarrow X$ a section not contained in D , we define the *radical* of D as the real number

$$N_D^{(1)}(P) := \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec max}(\mathcal{O}_K)} \min\{1; v_{\mathfrak{p}} P^*(D)\} \log \text{Card}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}).$$

The general strong *abc* conjecture is the following:

CONJECTURE 1.2. — *Let $\epsilon > 0$, and let K be a number field, $\pi : X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ a regular arithmetic surface and $D \hookrightarrow X$ an effective divisor on X . Denote by K_{X/\mathcal{O}_K} the relative dualizing sheaf. Then there exists a constant $C := C(X, \epsilon, D)$ for which the following holds: Let L be a finite extension of K and let $P : \text{Spec}(\mathcal{O}_L) \rightarrow X$ be a section not contained in D ; then*

$$h_{K_{X/\mathcal{O}_K}(D)}(P) \leq (1 + \epsilon)(N_D^{(1)}(P) + \log |\Delta_L|) + C[L : K],$$

where $h_{K_{X/\mathcal{O}_K}(D)}(P)$ is the height of P with respect to $K_{X/\mathcal{O}_K}(D)$.

We will not list here the endless number of consequences of this conjecture and we refer to [3] or to the web page [19] for details. One may also see the report [21] in this seminar. We only notice that, if such a conjecture was true, more or less all the possible problems about the arithmetic of algebraic curves over number fields would have an effective answer: for instance one easily sees that, if the constant C is effective, it easily implies the famous Fermat Last Conjecture (now a theorem [28]) and it allows to solve effectively diophantine equations in two variables:

THEOREM 1.3. — *Suppose that Conjecture 1.2 is true. Let $F(x; y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ be an irreducible polynomial of degree at least three. Then there exists a constant C , depending only on F , such that for every number field K and for every solution $(x; y) \in \mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K$ of the diophantine equation $F(x; y) = 0$, we have*

$$h_{\mathcal{O}(1)}([x : y : 1]) \leq (1 + \epsilon) \log |\Delta_K| + C_{\epsilon}[K : \mathbb{Q}].$$

In particular there are only finitely many solutions in $\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K$ and their height can be explicitly bounded.

Observe that, if the conjecture is true and the constant C_{ϵ} is explicit, then we can explicitly *compute and find* the set of solutions of the diophantine equation in $\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K$.

Similarly we may obtain an effective version of Mordell's conjecture (Faltings' theorem) and of the classical Siegel theorem on integral points of hyperbolic curves.

At the moment we know that the set of integral points of a hyperbolic curve is finite (projective by Faltings' theorem [7] or affine by Siegel's theorem, cf. [24]) but we are not able to explicitly bound their height (up to some sporadic cases); thus, in particular, it is not possible to find all the rational points of a hyperbolic curve.

In this paper we will report about the solution of the analogue of the *abc* conjecture over function fields (for the analogy between number fields and function fields arithmetic cf. for instance [24]).

The analogue of Conjecture 1.1 for polynomials is quite easy and proved in [12]: If f is a polynomial over \mathbb{C} (to simplify), let $N_0 = (f)$ be the number of *distinct* roots of f . Then the analogue of the *abc* conjecture for polynomials is

THEOREM 1.4 (Mason). — *Let f, g and h be three polynomials relatively coprime in $\mathbb{C}[t]$ such that $f + g = h$; then*

$$\max\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} \leq N_0(fgh) - 1.$$

This theorem is the analogue of Conjecture 1.2 for function fields when $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ is the first projection, $D = \mathbb{P}^1 \times [0 : 1] + \mathbb{P}^1 \times [1 : 0] + \mathbb{P}^1 \times [1 : -1]$ and P is a section. One easily deduces it from Hurwitz's formula (cf. next section). It can be seen as the beginning of all the story, and it has some interesting consequences: for example the analogue of Fermat's last theorem for polynomials is an immediate consequence of it. Usually statements in the function fields situation are much easier to prove than their correspondent in the number fields situation. In this case one should notice an amazing point: Suppose that, over number fields, we can prove Conjecture 1.2 when $X = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ and $D = [0 : 1] + [1 : 0] + [1 : -1]$; then we can deduce the general case from this! To prove it, one applies the proof of Theorem 7.1 to a suitable Belyi map (for more details, see [6]). In the function fields case this is *not* the case! We cannot deduce the general case from an isotrivial case. For this reason it is our opinion that $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ with the divisor $[0 : 1] + [1 : 0] + [1 : -1]$ (unit equations) is a highly non isotrivial family over $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ (whatever an isotrivial family should be).

Exploiting the analogy between the arithmetic geometry over number fields and the theory of *analytic* maps from a parabolic curve to a surface (cf. for instance [26]), an analogue of the *abc* conjecture for these maps is also solved.

We will propose two proofs of the *abc* conjecture over function fields (and for analytic maps). The first one is the proof by McQuillan [15] and the second one is by Yamanoi [29]. The proof by McQuillan is synthetically explained in the original paper; it makes a systematic use of the theory of integration on algebraic stacks; although this is very natural in this context, it needs a very heavy background (which is used here only in a quite easy situation). Thus we preferred to propose a self contained proof which uses the (easier) theory of normal \mathbb{Q} -factorial varieties; the proof follows the main ideas of the original one. The proof by Yamanoi requires skillful combinatorial computations, well explained in the original paper, thus we preferred to sketch his proof in a special (but non trivial) case: the main ideas and tools are all used and

we think that once one understands this case, it is easier to follow the proof in the general situation.

As before, we find for instance, as a consequence, a strong effective version of Mordell's conjecture over function fields (in characteristic zero), for non isotrivial families of hyperbolic curves.

In the next section, we will explain why the *abc* conjecture for isotrivial curves corresponds respectively to the Hurwitz formula in the geometric case and to the Nevanlinna Second Main theorem in the analytic case. Thus the *abc* conjecture may be seen as a non isotrivial version of these theorems.

There are at least two strategies to attack the Second Main Theorem of Nevanlinna's theory. The first strategy uses tools from analytic and differential geometry, it is strictly related to the algebraic geometry of the Hurwitz formula and to the existence of particular singular metrics on suitable line bundles: it has been strongly generalized to analytic maps between equidimensional varieties by Griffiths, King and others in the 70's (cf. [8]). The second strategy is via Ahlfors' theory (cf. [1]); it is much related to the algebraic and combinatorial topology of maps between surfaces; the version of the SMT one obtains in this way is weaker than the original one but also more subtle: one sees that one can perturb a little bit the divisor D without perturbing the statement (cf. §8). These two approaches correspond respectively to the two proposed proofs. The proof by McQuillan is nearer to the first strategy while the one by Yamanoi is more topological. One should notice that, while the first proof is predominantly of a global nature and the second one is essentially local, both meet the main difficulties in an argument which is localized around the singular points of the morphism $p : X \rightarrow B$. If the morphism p is relatively smooth, McQuillan's proof is much simpler. In a hypothetical relatively smooth case, Yamanoi's approach reduces to the Ahlfors theory: you will observe that, unless you are in the isotrivial case, in Yamanoi's approach there is always a bad reduction.

Both proofs hold for curves over function fields in one variable over \mathbb{C} and both heavily use analytic and topological methods, specific of the complex topology. We should notice that the analogue of the *abc* conjecture, as stated before, over a function field with positive characteristic is false (cf. [11])!

1.1. A short overview of the history of the *abc* conjecture

The *abc* conjecture has a weak and a strong version (in the arithmetic case they are both unproven and very deep). Over function fields, the weak *abc* is easier to prove and it is strictly related with the theory of elliptic curves (cf. [10] and [25]). Here we deal with the strong version. The conjecture has been formulated in the middle 80's by Masser and Oesterlé exploiting the analogy between number fields and function fields and the version for polynomials proved in [12]. The general version,

as stated here, has been formulated by Vojta in [26] as a consequence of a series of conjectures for varieties of arbitrary dimension. The particular case of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ and $D := [0 : 1] \times \mathbb{P}^1 + [1 : 0] \times \mathbb{P}^1 + [1 : 1] \times \mathbb{P}^1 + \Delta$ (Δ being the diagonal) was previously proposed by Oesterlé. Some weak versions of the conjecture in the context of the Value distribution theory have been proved in the papers [23] and [22].

In the paper [27], one finds a proof of a weak version of the conjecture (with factor $2 + \epsilon$ instead of $1 + \epsilon$) in the algebraic case when D is empty (the function field case!); it can be easily generalized to the case when D is arbitrary. In the recent paper [17] we can find an algebraic proof of a weak version of the conjecture. On the preprint [5] one can find another overview of the proofs.

Recently one can find generalizations of the theory in the papers [31] and [20]. A strong generalization (and many other results), for families of surfaces, is proved in the forthcoming book [16].

Acknowledgements

I would like to warmly thank Michael McQuillan for his continuous help and support. I also thank J.-B. Bost, A. Chambert-Loir and P. Vojta for their comments on the paper.

2. NOTATIONS AND OVERVIEW OF VALUE DISTRIBUTION THEORY

If X is a set and $U \subseteq X$ is a subset, then we denote by $\mathbb{1}_U$ the characteristic function of U .

Let X be a smooth variety defined over \mathbb{C} . Let L be a line bundle and let D be a Cartier divisor over X such that $L = \mathcal{O}_X(D)$. We suppose that L is equipped with a smooth metric.

Over X we have the two operators $d := \partial + \bar{\partial}$ and $d^c := \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})$.

The divisor D corresponds to a section $s \in H^0(X, L)$ (defined up to a non zero scalar). The Poincaré–Lelong equation is

$$dd^c \log \|s\|^2 = \delta_D - c_1(L)$$

where δ_D is the Dirac distribution “integration on D ” and $c_1(L)$ is the first Chern form associated with the hermitian line bundle L .

A divisor on X is said to be *simple normal crossing* (snc for short) if $D = \sum D_i$ with D_i smooth and locally, for the Euclidean topology, we can find coordinates x_1, \dots, x_n on X for which $D_i = \{x_i = 0\}$ and $D = \{x_1 \cdots x_r = 0\}$. If D is snc, we can introduce the sheaf of differentials on X with logarithmic poles along D : $\Omega_X^1(\log(D))$;

this is the sheaf of meromorphic differentials ω which may locally be written as $\omega = \sum_{i=1}^r a_i \frac{dx_i}{x_i} + \alpha$ where a_i are C^∞ -functions and α is a smooth differential. If D is a divisor on a variety, we let D_{red} be the *reduced* divisor having the same support as D .

Suppose that Y is a *compact* Riemann surface and $f : Y \rightarrow X$ is an analytic map such that $f(Y) \not\subset D$. Since Y is without boundary, Stokes' theorem gives

$$\deg(f^*(D)) = \int_Y f^*(c_1(L)).$$

Thus *the degree* of the restriction of the divisor D to Y can be interpreted as the *area* of Y with respect to the measure defined with $c_1(L)$. We will denote by $N_D^{(1)}(Y)$ the degree of $f^*(D)_{\text{red}}$; observe that $N_D^{(1)}(Y) = \sum_{z \in Y} \min\{1, v_z(f^*(D))\}$; thus, in the analogy between number fields and function fields, it corresponds to the radical defined in the previous section. In the sequel we will denote by (L, Y) the integral number $\deg(f^*(L))$ (omitting the reference to f if this is clear from the context).

Suppose that $X = X_1 \times X_2$ where X_i are compact Riemann surfaces and $p_i : X \rightarrow X_i$ are the projections. Suppose that D_2 is a reduced divisor on X_2 and $D := p_2^*(D_2)$. We consider $(X; D)$ as an isotrivial family of curves with divisors over X_2 via p_2 .

Let Y be a compact Riemann surface with an analytic map $f : Y \rightarrow X$. Call $f_i := p_i \circ f$. For $i = 1, 2$, define R_{f_i} as the Ramification term: $R_{f_i} := \sum_{z \in Y} (\text{Ram}(f_i) - 1)$. The Hurwitz formula gives $f_2^*(\Omega_{X_2}^1(D_2)) \hookrightarrow \Omega_Y^1(f^*(D)_{\text{red}})$. Thus a double application of the Hurwitz formula gives

$$\deg(f^*(K_{X/X_1}(D))) \leq N_D^{(1)}(Y) + R_{f_1} + \chi(X_1) \deg(f_1),$$

which is the analogue (which holds with $\epsilon = 0$) of the *abc* conjecture over function fields in the isotrivial case.

When $f : Y \rightarrow X$ is an algebraic map between smooth projective curves, we will denote by $[Y : X]$ the degree of the pull-back, via f , of a generic point; it coincides with the degree of the field extension $\mathbb{C}(Y)/\mathbb{C}(X)$.

Suppose that Y is not compact. In this case we suppose that Y is *parabolic* equipped with an exhaustion function g : an exhaustion function is an unbounded function g such that $dd^c(g) = \delta_S$ where $S = \sum P_i$ is a reduced divisor of finite degree and, near each P_i , we can find a harmonic function h_P such that $g = \log |z - P|^2 + h$. Remark that g is harmonic outside S .

Examples. — a) \mathbb{C} with the function $\log |z|^2$.

b) If $\pi : Y \rightarrow \mathbb{C}$ is a proper map of degree $[Y : \mathbb{C}]$ (not ramified over 0), then $(Y; \pi^*(\log |z|^2))$ is parabolic: thus each affine Riemann surface is parabolic.

c) If Y is parabolic and E is a polar set in Y , then $Y \setminus E$ is parabolic.

For more details on parabolic Riemann surfaces, see [2].

The parabolic Riemann surfaces are those where one can develop a value distribution theory. We fix a parabolic Riemann surface (Y, g) .

Suppose that $f : Y \rightarrow X$ is an analytic map. We define the *intersection* of the hermitian line bundle L with Y as a *function* on \mathbb{R} :

$$(L; Y)(r) := \int_{-\infty}^{\log(r)} ds \int_{g \leq s} f^*(c_1(L)) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{g \leq \log(t)} f^*(c_1(L))$$

(in value distribution theory, this is denoted by $T_f(L)$; we choose this notation to stress the analogy with intersection theory). The intersection $(L, Y)(r)$ can be seen as *the average of the areas of the disks $g \leq s$ for $s \leq \log(r)$* . Up to a constant $(L; Y)(r)$ does not depend on the choice of the metric on L .

We will define the *non integrated counting function* as $n_D(s) := \sum_{g(z) < s} v_z(f^*(D))$ and the *the non integrated radical function* as $n_D^{(1)}(s) := \sum_{g(z) < s} \inf\{1, v_z(f^*(D))\}$; the n.i. counting function measures the growth of the degree of the divisor $f^*(D)$ on the disk $g < s$ and the n.i. radical plays the role of the radical. We define the *integrated counting function* and the *integrated radical* as

$$N_D(Y)(r) := \int_{-\infty}^{\log(r)} n(f^*(D), s) ds \text{ and } N_D^{(1)}(Y)(r) := \int_{-\infty}^{\log(r)} n^{(1)}(f^*(D), s) ds \text{ resp.}$$

In the same way we define a *non integrated characteristic function or ramification term*: the form ∂g is holomorphic outside S ; thus we define $r_g(s) := \sum_{g(z) < s} v_z(\partial g)$, where the sum is extended to points not in S . For instance, if Y is a proper covering of \mathbb{C} , then $r_g(s)$ is the degree of the part of the ramification divisor of the covering supported in $g < s$. Thus we define the *integrated characteristic function* as

$$\chi(Y)(r) := \int_{-\infty}^{\log(r)} r_g(s) ds.$$

Integrating the Poincaré–Lelong equation we obtain the *First Main Theorem of Value distribution theory* (cf. [18] or [9]): Suppose that X is smooth projective, D and L are as before and $f : Y \rightarrow X$; then we can find an explicit constant C , independent of r , such that

$$(L; Y)(r) = N_D(Y)(r) - \int_{g=r} \log \|s\|^2 d^c g + C.$$

The term $m_D(Y, r) := - \int_{g=r} \log \|s\|^2 d^c g$ is called *the proximity function* and it measures the average of the inverse of the distance between D and the image of the boundary of $g \leq r$.

Suppose that $X := X_1 \times X_2$ and $D := p_2^*(D_2)$ as before. Suppose that $f : Y \rightarrow X$ is an analytic map from a parabolic Riemann surface. The *Second Main Theorem of Value Distribution Theory* ([18] and [9]) can be stated in this way:

$$(K_{X/X_1}(D); Y)(r) \leq N_D^{(1)}(Y)(r) + \chi(Y)(r) + O(\log(r(K_{X/X_1}(D); Y)(r)))$$

where the involved constant is independent of r . Thus, the analogue of the *abc* conjecture in the isotrivial case is the second main theorem.

Let Y be parabolic, B be a compact Riemann surface and $f : Y \rightarrow B$ be an analytic map. Let $P \in B$ be a point and equip $\mathcal{O}_B(P)$ with a smooth metric. In analogy with the algebraic case, we will denote the function $(\mathcal{O}_B(P); Y)(r)$ by $[Y : B](r)$.

3. STATEMENT OF THE MAIN THEOREMS

In this section we will state the main theorems, namely the *abc*-conjecture over function fields and make the first easy reductions.

The object of study is a set (X, D, B, p) where X is a smooth projective surface, D is a simple normal crossing divisor on X , B is a smooth projective curve and $p : X \rightarrow B$ is a non constant morphism. We will also fix an ample line bundle H equipped with a smooth positive metric.

We will explain the proof of the two theorems below, one is in the algebraic and the other in the analytic setting. They are in correspondence in the analogy and we will see that their proofs are, *mutatis mutandis*, very similar.

THEOREM 3.1 (*abc algebraic version*). — *Let $p : X \rightarrow B$, let D be as above and $\epsilon > 0$. Then, given a smooth projective curve Y and a morphism $f : Y \rightarrow X$ whose image is not contained in D , the following inequality holds*

$$(K_X(D); Y) \leq (1 + \epsilon)(N_D^{(1)}(Y) + \chi(Y)) + O_\epsilon([Y : B]).$$

The involved implicit constants depend only on X, D, p and ϵ .

To avoid trivialities we supposed that the morphism $p \circ f : Y \rightarrow B$ is non constant.

THEOREM 3.2 (*abc analytic version*). — *Let $p : X \rightarrow B$, let D be as above and $\epsilon > 0$. Let (Y, g) be a parabolic Riemann surface and $f : Y \rightarrow X$ be a holomorphic map with dense image. Then the following inequality holds*

$$(K_X(D); Y)(r) \leq (1 + \epsilon)(N_D^{(1)}(Y)(r) + \chi(Y)(r)) + O_\epsilon([Y : B](r) + \log(r(H; Y)(r))). //$$

The involved implicit constants depend only on X, D, p, f and ϵ but are independent of r .

The symbol // means that the inequality holds outside a set of finite Lebesgue measures.

3.1. Reductions and observations

a) The theorems remain true if we change X by a blow-up (but the involved constants may vary). Consequently they are statements about the algebraic curve X_K where K is the function field $\mathbb{C}(B)$. Moreover we may suppose that every irreducible component of D dominates B .

b) In order to prove the theorems, we may take finite extensions of the base field $K := \mathbb{C}(B)$: if the theorem is true over a finite extension, it is true over it, and conversely. We may, and we will, suppose for instance that B is hyperbolic.

c) By the semistable reduction theorem, we may suppose that $K_X(D)$ is nef and big and that the fibres of p are reduced simple normal crossings. Incidentally, this shows that the hypothesis that D is a simple normal crossing is unnecessary.

d) Suppose that $X = \mathbb{P}_1 \times B$ and D is the pull-back, via the the first projection of the divisor $0 + 1 + \infty$; then the theorems give the "classical" *strong abc*-conjecture over function fields.

e) Suppose that, in the analytic situation, $(Y, g) = (\mathbb{C}, \log |z|^2)$, $X = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, D is the pull-back via the first projection of a divisor $\sum_{i=1}^d a_i$ and $f := (f_1, id) : \mathbb{C} \rightarrow X$, where f_1 is a meromorphic function; then the theorem becomes (in the standard notation of Nevanlinna theory)

$$(d - 2)T_{f_1}(r) \leq (1 + \epsilon) \sum_i N^{(1)}(a_i, f) + O_\epsilon(\log(rT_{f_1}(r))) //$$

which is essentially (up to the factor ϵ) the Nevanlinna Second Main Theorem.

4. THE TAUTOLOGICAL INEQUALITY

Let X be a smooth projective variety and $D \subset X$ be a simple normal crossing divisor. Let $\Omega_{X/k}^1(\log(D))$ be the sheaf of differentials of X with logarithmic poles along D and $\pi : \mathbb{P} := \text{Proj}(\Omega_{X/k}^1(\log(D))) \rightarrow X$. We will denote by \mathbb{L} the tautological line bundle on \mathbb{P} . We also fix an ample line bundle H on X .

Let Y be a smooth projective curve and $f : Y \rightarrow X$ a map. The induced map $f^* : f^*(\Omega_{X/k}^1(\log(D))) \rightarrow \Omega_{Y/k}^1(f^*(D)_{\text{red}})$ induces a morphism $f' : Y \rightarrow \mathbb{P}$. By definition we have an inclusion $f'^*(\mathbb{L}) \hookrightarrow \Omega_{Y/k}^1(f^*(D)_{\text{red}})$; consequently we obtain the *tautological inequality*

$$(4.1.1) \quad (\mathbb{L}; Y) \leq \chi(Y) + N_D^1(Y),$$

where $\chi(Y) := 2g(Y) - 2$ is the Euler characteristic of Y .

Suppose now that $k = \mathbb{C}$. We suppose that H is equipped with a positive (Kähler) metric ω . We also equip $\mathcal{O}(D)$ and $\Omega^1_{X/k}(\log(D))$ with a smooth metric. Remark that the metric on $\Omega^1_{X/k}(\log(D))$ induces a metric on \mathbb{L} .

Suppose that $(Y; g)$ is a parabolic Riemann surface and $f: Y \rightarrow X$ is an analytic map whose image is not contained in D . The tautological inequality is the analogue of the 4.1.1 in this context.

THEOREM 4.2 (Analytic tautological inequality). — *Let $f: Y \rightarrow X$ as above and let $f': Y \rightarrow \mathbb{P}$ be the induced map. The following inequality holds*

$$(4.2.1) \quad (\mathbb{L}; Y)(r) \leq N_D^1(Y)(r) + \chi(Y)(r) + O(\log(H; Y)(r)). \quad //$$

The tautological inequality above is an important push-forward in the analogy between the algebraic and the analytic theory of maps of Riemann surfaces in projective varieties. It is very important because it translates the problems of defect type in Nevanlinna theory to problems of geometrical nature: If one proves that some intersection is upper bounded by the intersection with \mathbb{L} , one will deduce an inequality in the spirit of the Second Main Theorem of Nevanlinna theory.

REMARK 4.3. — One may wonder which parts of the proof of the *abc* conjecture performed in the function field case can be done in the arithmetic situation. Unfortunately, in the arithmetic situation, the geometric interpretation of the radical via the tautological inequality is missing: one does not know what the arithmetic meaning of the radical is.

Proof. — Write the divisor D as $\sum_i D_i$. Locally on X we can find coordinates X_1, \dots, X_n in such a way that there is an $r \in \{0, \dots, n\}$, such that each D_i is given by $\{X_i = 0\}$ and $D = \{X_1 \cdots X_r = 0\}$. Since X is compact, we can choose a positive constant such that the singular $(1, 1)$ -form

$$\omega^{sm} := A\omega + \sum_i \frac{d\|D_i\| \wedge d^c\|D_i\|}{\|D_i\|^2}$$

induces a smooth hermitian metric on $T_{X/k}(-\log(D))$. We introduce the singular $(1, 1)$ -form

$$\tilde{\omega} := \omega + \sum_i \frac{d\|D_i\| \wedge d^c\|D_i\|}{\|D_i\|^2 (\log(\|D_i\|))^2}.$$

The form $\tilde{\omega}$ induces a singular hermitian form on $T_{X/k}(-\log(D))$: if we write an element of $T_{X/k}(-\log(D))$ as $t = \sum_{i=1}^r a_i \frac{X_i \partial}{\partial X_i} + \sum_{j=r+1}^n b_j \frac{\partial}{\partial X_j}$, then $\tilde{\omega}(t, t)$ is comparable to $\sum_i |a_i X_i|^2 + \sum_j |b_j|^2 + \sum_i \frac{|a_i|^2}{\log|X_i|^2}$.

Let \mathbb{P}' be the projective bundle $\text{Proj}(\mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_{X/k}(\log(D)))$ over X , and let \mathbb{M} be the tautological line bundle over it. The surjection $\mathcal{O}_X \oplus \Omega^1_{X/k}(\log(D)) \rightarrow \Omega^1_{X/k}(\log(D))$

induces an inclusion $\mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{P}'$ and $\mathcal{O}_{\mathbb{P}'}(\mathbb{P}) = \mathbb{M}$. Observe that, locally on X , \mathbb{P}' is isomorphic to $X \times \mathbb{P}_n$, and we may choose homogeneous coordinates $[z_0 : \dots : z_n]$ on \mathbb{P}_n for which the divisor \mathbb{P} is given by $z_0 = 0$.

On the other hand, the inclusion $\Omega_{X/k}^1(\log(D)) \rightarrow \mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1(\log(D))$ induces a rational map $h : \mathbb{P}' \dashrightarrow \mathbb{P}$. Let $q : \tilde{Z} \rightarrow \mathbb{P}'$ be the blow-up along the section given by the projection $\mathcal{O}_X \oplus \Omega_{X/k}^1(\log(D)) \rightarrow \mathcal{O}_X$; it resolves the indeterminacy of h and we obtain a morphism $p : \tilde{Z} \rightarrow \mathbb{P}$. By construction we obtain $p^*(\mathbb{L}) = q^*(\mathbb{M})(-E)$ where E is the exceptional divisor of \tilde{Z} .

The form ω^{sm} induces positive metrics $\|\cdot\|_{\mathbb{M}}^{sm}$ on \mathbb{M} and $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}^{sm}$ on \mathbb{L} . We denote by $c_1(\mathbb{M})^{sm}$ and $c_1(\mathbb{L})^{sm}$ the corresponding singular first Chern forms. We put on $\mathcal{O}_{\tilde{Z}}(E)$ the metric for which the isomorphism $p^*(\mathbb{L}) \simeq q^*(\mathbb{M})(-E)$ becomes an isometry. The form $\tilde{\omega}$ induces singular metrics $\|\cdot\|_{\mathbb{M}}^s$ on \mathbb{M} and $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}^s$ on \mathbb{L} . We denote by $c_1(\mathbb{M})^s$ and $c_1(\mathbb{L})^s$ the corresponding singular first Chern forms.

The morphism

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y \oplus f^*(\Omega_X^1(\log(D))) &\longrightarrow \Omega_Y^1(S + f^{-1}(D)) \\ (a, \alpha) &\longmapsto a\partial(g) + f^*(\alpha) \end{aligned}$$

induces maps $f_1 : Y \rightarrow \mathbb{P}'$ and $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{Z}$. By construction $p \circ \tilde{f} = f'$.

Locally on Y , we can write f as (g_1, \dots, g_n) and $f_1 = (g_1, \dots, g_n) \times [g' : \frac{g'_1}{g'_1} : \dots : \frac{g'_r}{g'_r} : g'_{r+1} : \dots : g'_n]$.

We apply the first main theorem to the map f_1 , the line bundle \mathbb{M} equipped with $\|\cdot\|_{\mathbb{M}}^s$ and the divisor \mathbb{P} . Remark that, even if the metric $\|\cdot\|_{\mathbb{M}}^s$ is singular, we can apply the FMT because it is locally integrable.

By the local computation of f_1 we see that $N_{\mathbb{P}}(Y)(r) = \chi(Y)(r) + N_D^{(1)}(Y, r)$. Thus we obtain

$$\int_{-\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} f_1^* c_1(\mathbb{M})^s = \chi(Y)(r) + N_D^{(1)}(Y, r) - 2 \int_{g=r} \log \|\mathbb{P}\|_{\mathbb{M}}^s d^c g.$$

Consequently we obtain

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} f'^*(c_1(\mathbb{L})^s) \\ &= \chi(Y)(r) + N_D^{(1)}(Y, r) - 2 \int_{g=r} \log \|\mathbb{P}\|_{\mathbb{M}}^s d^c g - N_E(Y)(r) + 2 \int_{g=r} \log \|E\| d^c g + O(1). \end{aligned}$$

We claim that $(\mathbb{L}, Y)(r)$ is smaller than $\int_{-\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} f'^*(c_1(\mathbb{L})^s) + O(\log(H; Y)(r))$. The intersection $(\mathbb{L}, Y)(r)$ can be computed using the metric $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}^{sm}$. Outside D , we can find a function h such that $\|\cdot\|_{\mathbb{L}}^{sm} \cdot h = \|\cdot\|_{\mathbb{L}}^s$. Thus $c_1(\mathbb{L})^s = c_1(\mathbb{L})^{sm} - dd^c \log(h)$.

Computing the two metrics locally, again by compactness of X , we obtain that $h \ll \prod \log^2 \|D_i\|$. Consequently

$$\int_{-\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} f'^*(c_1(\mathbb{L})^s) = (\mathbb{L}; Y)(r) - \int_{\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} dd^c \log(h) + O(1);$$

by applying Stokes Theorem twice, we find that

$$\int_{\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} dd^c \log(h) = \int_{g=\log r} \log(h) d^c g + O(1).$$

This last term can be bounded as follows

$$\begin{aligned} \int_{g=\log r} \log(h) d^c g &\ll \sum_i \int_{g=\log r} \log(\log^2 \|D_i\|) d^c g \\ &\leq \sum_i 2 \log \int_{g=\log r} |\log \|D_i\|| d^c g \\ &\leq \sum_i 2 \log((\vartheta_X(D_i); Y)(r)) \ll \log((H; Y)(r)). \end{aligned}$$

The claim follows.

Now we compute locally $\tilde{f}^*(\|E\|)(z)$ and $f_1^*(\|\mathbb{P}\|_{\mathbb{M}}^s)(z)$. Let z be a local coordinate on Y and let ∂_z be the corresponding local generator of the tangent bundle of Y . Define $\tilde{\omega}(z) := f^*(\tilde{\omega})(\partial_z)$. The local expression of f, f_1 , etc., implies that $\tilde{f}^*(\|E\|)^2(z) = \frac{\tilde{\omega}(z)}{\tilde{\omega}(z)+|\partial_z g|^2}$ and $\tilde{f}^*(\|\mathbb{P}\|_{\mathbb{M}}^s)^2(z) = \frac{|\partial g|^2}{\tilde{\omega}(z)+|\partial_z g|^2}$.

In order to conclude, we need to find an upper bound for

$$T(r) := \int_{g=r} \log \frac{\tilde{\omega}(z)}{|\partial_z g|^2} d^c g.$$

We can find a function F such that $f^*(\tilde{\omega}) = Fdg \wedge d^c g$. The function F will be $|z|^2 \times$ smooth in the neighborhood of the poles of g and in general $F(z) = \frac{\tilde{\omega}(z)}{|\partial_z g|^2}$.

Let

$$S(r) := \int_{\infty}^{\log(r)} dt \int_{g \leq t} f^*(\tilde{\omega}).$$

Fubini's theorem gives

$$S(r)' = \int_{-\infty}^{\log(r)} dt \int_{g=t} F d^c g.$$

Thus, the concavity of the log gives

$$\log(S^{(2)}(r)) \geq T(r).$$

The following lemma is well known and elementary (for a proof, see [8])

LEMMA 4.4. — *Let H be a derivable positive increasing function. For every positive ϵ , there exists a subset $E \subset \mathbb{R}$ with $\text{meas}(E) \leq \int_{1+\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x \log^{1+\epsilon}(x)} dx < \infty$, such that, for every $x \notin E$*

$$H'(x) \leq H(x) \log^{1+\epsilon}(H(x)).$$

We apply Lemma 4.4 twice and we find that

$$T(r) \leq \log(S(r) \log^{1+\epsilon}(S(r)) \log^{1+\epsilon}(S(r) \log^{1+\epsilon}(S(r)))).$$

We will conclude if we find an upper bound for $S(r)$.

The following equality holds

$$-dd^c \log(\log^2(\|D_i\|)) = \frac{d\|D_i\| \wedge d^c\|D_i\|}{\|D_i\|^2(\log\|D_i\|)^2} + \frac{1}{|\log(\|D_i\|)|} \cdot c_1(\mathcal{O}(D_i));$$

by the compactness of X , the last term on the right hand side is uniformly bounded; thus we can find a constant A such that

$$\tilde{\omega} \leq A\omega - \sum_i dd^c \log(\log^2(\|D_i\|)).$$

Thus, again by applying Stokes' theorem,

$$S(r) \ll (H; Y)(r) - 2 \int_{g=r} \log(\log^2(\|D_i\|)) d^c g + O(1).$$

Since we can suppose that $\|D_i\| < \epsilon$, we conclude. □

5. CURRENTS ASSOCIATED TO FAMILIES OF CURVES

Let X be a projective variety (reduced and irreducible) and H an ample line bundle equipped with a smooth positive metric. Now we will show how to associate a closed positive current with the situation we are interested in.

In the analytic situation, we start with a map from a parabolic Riemann surface to X , and the diophantine statement we are interested in is about upper bounds *uniform in r* . Roughly speaking, we have maps from the Riemann surfaces $\{z \in Y / g(z) < \log(r)\}$ and we look for uniform upper bounds for their areas (or better: the average of the areas over them) with respect to some hermitian line bundles, in terms of their Euler characteristic and the (set theoretical) intersection with the divisor at infinity. Thus we can take a sequence of r 's which goes to infinity and does not satisfy the wanted inequality and eventually find a contradiction.

Similarly, in the algebraic case, we want to give uniform upper bounds of the intersection (the height!) of the closed curves in X in terms of the Euler characteristic

of their normalization and the (set theoretic) intersection with the divisor at infinity. Again we take a sequence of smooth projective curves which do not satisfy the inequality and find a contradiction.

Now we will show that, in both situations, we can associate with the involved sequences a closed positive current T on X (and on other varieties constructed during the proof). The proof of the theorem will work with the properties of T and, only at the end, its definition will give the statement in the analytic or in the geometric case.

We will consider two situations:

a) *The analytic situation S^{an}* : A parabolic Riemann surface and a holomorphic map $f: Y \rightarrow X$.

b) *The algebraic situation S^{alg}* : A sequence of smooth projective curves $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ and algebraic maps $f_n: Y_n \rightarrow X$.

Before we start the construction, we have to show that the currents associated with S^{an} , even if they are not closed, are “closed enough”.

Let (Y, g) be a parabolic Riemann surface equipped with a positive singularity. Let $f: Y \rightarrow X$ be a holomorphic map.

We show now that the intersection of Y with exact forms is essentially irrelevant.

LEMMA 5.1. — *Let $1/2 > \epsilon > 0$. Let α be a smooth exact $(1, 1)$ -form on X ; then*

$$(\alpha, Y)(r) = O_\epsilon(((H; Y)(r))^{1/2} \log^{1+\epsilon}(r(H; Y)(r))) //$$

where the involved constants depend only on ϵ .

Proof. — Since $(\cdot, Y)(r)$ is a positive current, it will suffice to prove the theorem when α is $\bar{\partial}\beta$ for a smooth $(1, 0)$ -form β .

By Stokes’ theorem

$$\begin{aligned} (\alpha; Y)(r) &= \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{g=t} \beta \\ &= \int_{-\infty < g \leq \log(r)} dg \wedge \beta. \end{aligned}$$

Since X is compact, we have that $\beta \wedge \bar{\beta} \ll c_1(H)$. Consequently, the Cauchy-Schwartz inequality gives

$$\left| \int_{-\infty < g \leq \log(r)} dg \wedge \beta \right| \leq 2\pi \left| \int_{-\infty < g \leq \log(r)} \beta \wedge \bar{\beta} \right|^{1/2} \cdot \left| \int_{-\infty < g \leq \log(r)} dg \wedge d^c g \right|^{1/2}.$$

We apply again 4.4 and we obtain that, outside a set of finite Lebesgue measure,

$$\left| \int_{-\infty < g \leq \log(r)} \beta \wedge \bar{\beta} \right| \ll (H, Y)(r) \log^{1+\epsilon}((H; Y)(r)).$$

Since (again by Stokes' theorem) $\int_{-\infty < g \leq \log(r)} dg \wedge d^c g \leq C \log(r)$ for a suitable C , we conclude. \square

REMARK 5.2. — In the algebraic setting, if Y is a smooth algebraic curve and $f: Y \rightarrow X$ is a map, the current $\alpha \rightarrow \int_Y f^*(\alpha)$ is closed by Stokes' theorem. We observe that the above lemma tells us that, up to a negligible term, the current $(\cdot; Y)(r)$ is closed. Consequently, up to this negligible term, this is another analogy between the two situations; we will see now how to push this forward.

Let (X, H) as above. In the analytic situation consider the set of currents

$$T_r : A^{1,1}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \frac{1}{(H; Y)(r)} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{g < t} f^*(\alpha);$$

in the geometric situation, consider the set of currents

$$T_n : A^{1,1}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \frac{\int_{Y_n} f_n^*(\alpha)}{(H; Y_n)}.$$

In both situations, they are families of positive currents bounded for the standard norm on $A^{1,1}$ (but also for the L^∞ norm); consequently we can extract from them a sequence converging, in the weak topology, to a positive current T .

In the algebraic situation, the current T is closed because it is a limit of closed currents.

In the analytic case, due to Lemma 5.1, we can choose the sequence in order to obtain a sequence T_{r_n} such that $dT_{r_n} \rightarrow 0$. Observe that, even if the involved map f is algebraic, the height of r is at least $A \log(r)$ (for a suitable A) and consequently the lemma applies.

DEFINITION 5.3. — *The closed positive current T constructed above will be called the current associated to the (geometric or analytic) situation.*

Observe that T is non zero because $T(c_1(H)) = 1$.

REMARK 5.4. — The article *the* in the definition is not completely correct. Indeed the current T depends on the choice of the subsequences involved. The reader will check that we will only use properties which hold for *every* sequence as above.

REMARK 5.5 (Important). — Since the current T is closed, we can unambiguously compute it on a Cartier divisor R of X : put an arbitrary smooth metric on $\mathcal{O}_X(R)$ and define $T(R) := T(c_1(\mathcal{O}_X(R)))$; this number does not depend on the chosen metric. Of course, since T is positive, if R is ample (resp. nef) then $T(R) > 0$ (resp. $T(R) \geq 0$). One should see T as a class in the dual of the positive cone of $NS(X)_{\mathbb{R}}$ and interpret $T(R)$ as an intersection number.

6. FIRST APPROACH TO THE THEOREMS

In this section we will explain the proof by McQuillan of Theorems 3.1 and 3.2. We recall that we are assuming the reductions made after the statements. We begin by fixing some notations: $\pi : \mathbb{P} := \text{Proj}(\Omega_X^1(\log(D))) \rightarrow X$ will be the projective bundle associated with the sheaf of differentials with logarithmic poles around D . Let \mathbb{L} be the tautological bundle over \mathbb{P} . Let $p : X \rightarrow B$ be the given fibration (cf. section 3) and F be a smooth fibre of it. We fix an ample divisor H on X ; observe that we may suppose that there exists ϵ' such that, for every curve Y not contained in a fibre, $(Y, K_X(D)) \geq \epsilon'(Y; H)$ (and similarly in the analytic setting).

The theorems are proved by contradiction.

a) *Algebraic situation*: We suppose that there is a sequence of smooth projective curves and morphisms $f_n : Y_n \rightarrow X$ such that

$$(6.1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_D^{(1)}(Y_n) + \chi(Y_n)}{(H; Y_n)} < \infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[Y_n : B]}{(H; Y_n)} = 0.$$

Consequently, we can construct a closed and positive current T on X associated with the sequence. We can lift each map f_n to a map $f'_n : Y_n \rightarrow \mathbb{P}$. Each f'_n gives rise to a closed positive current

$$T'_n : A^{(1,1)}(\mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \frac{1}{(H; Y_n)} \int_{Y_n} f'^*_n(\alpha).$$

Because of Hypothesis 6.1.1, we can extract from the sequence above a subsequence converging to a closed positive current T' on \mathbb{P} . By construction we have that $\pi_*(T') = T$.

The theorem will be proved if we show that

$$T'(\mathbb{L} - \pi^*(K_{X/D}(D))) \geq 0.$$

b) *Analytic situation:* We suppose that there exists a sequence of real numbers r_n such that

$$(6.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_D^{(1)}(Y)(r_n) + \chi(Y)(r_n)}{(H, Y)(r_n)} < \infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[Y; B](r_n)}{(H; Y)(r_n)} = 0.$$

Thus, again we can associate the closed positive current T on X with this sequence. We can lift the map f to a map $f' : Y \rightarrow \mathbb{P}$. Each r_n gives rise to a closed positive current

$$T'_n : A^{(1,1)}(\mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \frac{1}{(H; Y)(r_n)} \int_0^{r_n} \frac{dt}{t} \int_{g \leq t} f'^*(\alpha).$$

Because of Hypothesis 6.2.1, we can extract from the sequence above a subsequence converging to a closed positive current T' on \mathbb{P} . By Lemma 5.1, if we choose the subsequence suitably, the currents will converge to a closed current because we can suppose that $\mathbb{L} + \pi^*(H)$ is ample. By construction we have that $\pi_*(T') = T$.

Again, the theorem will be proved if we show that

$$T'(\mathbb{L} - \pi^*(K_{X/D}(D))) \geq 0.$$

REMARK 6.3. — Observe that 6.1.1 and 6.2.1 imply that if V is a vertical divisor on X (the map $p|_V : V \rightarrow B$ is not dominant), then $T(V) = 0$.

Let $p : X \rightarrow B$ be the given fibration; let $S := \{P_i\}$ be the set of singular points of the fibers of p . By the assumed reduction, we may suppose that each P_i belongs to exactly two smooth components of a fibre which intersect properly on P_i ; denote these two components by B^i and C^i . We will denote by I_S the ideal sheaf of the subscheme defined by S on X . The fibration p gives rise to an exact sequence

$$(6.4.1) \quad 0 \rightarrow p^*(\Omega_B^1) \rightarrow \Omega_X^1(\log(D)) \rightarrow I_S \otimes K_{X/B}(D) \rightarrow 0.$$

Let $b : \tilde{X} \rightarrow X$ be the surface obtained by taking the blow-up of X over the P_i 's and let $E := \sum_i E_i$ be the exceptional divisor (E_i being the exceptional divisor over P_i). The exact sequence 6.4.1 gives rise to an injection $\iota : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}$; by construction

$$\iota^*(\mathbb{L}) = b^*(K_{X/B}(D))(-E).$$

Denote by Δ the image of ι ; it is a divisor on \mathbb{P} . Observe that the fibre of π over the P_i 's is contained in Δ . Denote by U the open set $\mathbb{P} \setminus \Delta$.

One of the main tools of the proof is the

PROPOSITION 6.5. — *We have that*

$$\pi_*(\mathbb{L}_U T') = 0.$$

The proposition above is not a surprise! Essentially it tells us the following: The area of a curve on X has a vertical and a horizontal component (with respect to p). If the theorems are false, then we can find a sequence of curves for which the vertical component of the area is much bigger than the horizontal one. Thus the limit of the curves must be vertical.

Proof. — We fix Kähler forms ω on X and η on B . In order to prove the proposition, it suffices to prove the following: Let V be an open set of \mathbb{P} such that $\overline{V} \cap \Delta = \emptyset$ (\overline{V} being the closure of V in the Euclidean topology); then $\pi_*(\mathbb{I}_V T) = 0$. To prove this, we will show the following: there exists a constant A_V (depending on V and the metrics) such that the following holds: if W is an open Riemann surface and $h : W \rightarrow X$ is a holomorphic map such that the image of $h' : W \rightarrow \mathbb{P}$ is contained in V , then $h^*(\omega) \leq A_V(p \circ h)^*(\eta)$. The conclusion follows because T (resp. T') is zero on the fibres of p (resp. on the fibres of $p \circ \pi$).

Fix such a V . Observe that $\pi(\overline{V})$ is a closed set of X which does not contain the singular points of the fibers P_i . By compactness of X , we can cover $\pi(\overline{V})$ by a finite set of disks B_j not containing the P_i 's. We may restrict our attention to each of the B_j 's: thus we may suppose that:

- $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| < 1, |w| < 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ and $p(z, w) = z$;
- $\omega = \sqrt{-1}(dz \wedge d\bar{z} + dw \wedge d\bar{w})$ and $\eta = \sqrt{-1}(dz \wedge d\bar{z})$;
- $D = \{w = 0\}$ and the exact sequence 6.4.1 is the split exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X dz \longrightarrow \mathcal{O}_X dz \oplus \mathcal{O}_X \frac{dw}{w} \longrightarrow \mathcal{O}_X \frac{dw}{w} \rightarrow 0;$$

- consequently $\mathbb{P} = X \times \mathbb{P}^1$ and $\Delta = X \times \{[0 : 1]\}$; we may then suppose that there exists a positive constant a such that $V \subseteq \{(z, w) \times [x : y] / |x|^2 > a|y|^2\}$;

- $W := \{z / |z| < 1\}$, and $h(z) = (h_1; h_2)$ and $h'(z) = (h_1; h_2) \times [h'_1 : \frac{h'_2}{h_2}]$.

The image of W via h' is contained in V ; we have that $|h'_1(z)|^2 > a \left| \frac{h'_2}{h_2} \right|^2$. Thus $\frac{|h'_2(z)|^2}{|h'_1(z)|^2} < \frac{1}{a}$. Since $h^*(\omega) = \sqrt{-1}(|h'_1|^2 + |h'_2|^2)dz \wedge d\bar{z}$ and $h^*(\eta) = \sqrt{-1}(|h'_1|^2)dz \wedge d\bar{z}$, the proposition follows. □

Since the line bundle \mathbb{L} is nef, as far as we are interested, we may work as if the current T were supported on Δ . Indeed, by the proposition, $\mathbb{I}_U T = T - \mathbb{I}_\Delta T$ is a current which intersects \mathbb{L} positively and whose intersection with $\pi^*(K_X(D))$ is zero. Moreover, again, as far as we are interested, via the proposition below, we can even suppose that it is the push-forward of a current on Δ .

PROPOSITION 6.6. — *Let X be a smooth variety and E be a smooth divisor on it. Let T be a closed positive current of type $(1, 1)$ over X . Let $\iota: E \rightarrow X$ be the inclusion. Then there is a current S on E such that*

$$\mathbb{I}_E \cdot T = \iota_*(S).$$

It is obvious that S is positive and closed.

Proof. — In order to prove the proposition, we need to show that, if ω is a form such that $\iota^*(\omega) = 0$, then $\mathbb{I}_E \cdot T(\omega) = 0$.

Locally on X we can suppose that z_1, \dots, z_n are coordinates on X and $E = \{z_n = 0\}$. The theorem is proved if we show that, for every i and for every C^∞ -function a with compact support, we have that $\mathbb{I}_E \cdot T(a \cdot dz_n \wedge d\bar{z}_i) = \mathbb{I}_E \cdot T(a \cdot dz_i \wedge d\bar{z}_n) = 0$.

Let ψ be a positive function with compact support which is 1 on the support of a . Since $\mathbb{I}_E \cdot T$ is positive, the Cauchy–Schwartz inequality gives

$$|\mathbb{I}_E \cdot T(a \cdot dz_n \wedge d\bar{z}_i)|^2 \leq |\mathbb{I}_E \cdot T(\psi \cdot \sqrt{-1} dz_n \wedge d\bar{z}_n)|^2 \cdot |\mathbb{I}_E \cdot T(a \cdot \sqrt{-1} dz_i \wedge d\bar{z}_i)|^2;$$

consequently it suffices to show that $|\mathbb{I}_E \cdot T(\psi \cdot \sqrt{-1} dz_n \wedge d\bar{z}_n)|^2 = 0$. Since T is of type $(1, 1)$ and closed, $\mathbb{I}_E \cdot T(\psi dd^c|z_n|^2) = \mathbb{I}_E \cdot T(|z|^2 dd^c \psi) = 0$. But since $dd^c|z_n|^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dz_n \wedge d\bar{z}_n$, the conclusion follows. \square

We apply the proposition above with $X = \mathbb{P}$ and $E = \Delta$. Thus, there is a closed positive current S on Δ such that $\mathbb{I}_\Delta T' = \iota_*(S)$. Observe that, by functoriality, $b_*(S) = T$.

The proof of the theorem will be achieved if we can prove that $S(-E_i) \geq 0$. In particular, if X is smooth over B and the divisor D is étale over B then the theorem is proved; for instance the isotrivial case (Nevanlinna Second Main Theorem) is proved.

We reduced the difficulty to a local problem around the singular points of the fibres. Most of the remaining of the proof will be of local nature, but we will notice that one main point will be of a global nature.

The proof proceeds by working on coverings of X . Let Q_1, \dots, Q_r be the points of B where p is not smooth. We fix another point Q on B . For every m sufficiently big, we can find a covering $B_m \rightarrow B$ which is cyclic of order m , totally ramified over Q_1, \dots, Q_r and étale over $B \setminus \{Q, Q_1, \dots, Q_r\}$.

In the algebraic situation, the normalization $Y_{n,m}$ of the curves $Y_n \times_B B_m$ are such that $\frac{\chi(Y_{n,m})}{m} \leq \chi(Y_n) + A$ (with A independent on m).

In the analytic situation, the normalization Y_m of $Y \times_B B_m$ is a parabolic Riemann surface, with as a positive singularity, the pull-back of g (which we will denote by g_m). Also in this situation $\frac{\chi(Y_m)(r)}{m} \leq +\chi(Y)(r) + A$.

Consider the surface $X_m := X \times_B B_m \xrightarrow{g_m} X$. Let $p_m: X_m \rightarrow B_m$ be the second projection.

The surface X_m is normal and \mathbb{Q} -factorial. Denote by D_m the divisor $g_m^*(D)$. For every i there is a unique singular point R_i over the P_i 's. For every i , there is an analytic neighborhood of R_i isomorphic to an analytic neighborhood of the surface $Z^m = XY$ (R_i corresponds to $(0, 0, 0)$). Denote by U_m the open surface $X_m \setminus \{R_i\}$.

In the next subsection we will justify the following properties:

- There exists a normal \mathbb{Q} factorial variety \mathbb{P}_m with a \mathbb{Q} line bundle \mathbb{L}_m and a projection $\pi_m : \mathbb{P}_m \rightarrow X_m$. Over U_m there is a canonical isomorphism $i_m : \mathbb{P}_m|_{U_m} \leftrightarrow \mathbb{P}(\Omega_{U_m}(\log(D_m)))$ whose pull-back of the tautological line bundle is the restriction of \mathbb{L}_m .

- The analogue of the exact sequence 6.4.1 over U_m gives rise to an inclusion $U_m \rightarrow \mathbb{P}(\Omega_{U_m}(\log(D_m)))$. Let \tilde{X}_m be the closure of the image. Let $h_m : \tilde{X}_m \rightarrow X_m$ be the projection and $\iota_m : \tilde{X}_m \rightarrow \mathbb{P}_m$ be the inclusion. The surface \tilde{X}_m is again normal and \mathbb{Q} -factorial. The preimage of R_i is a Weil divisor and coincides with the fibre of π_m over R_i . Denote it by E_i^m . Moreover $\iota_m^*(\mathbb{L}_m) = g_m^*(K_{X_m/B_m}(D_m))(-\sum_i E_i^m)$ (this is an equality between \mathbb{Q} -divisors). Denote by V_m the open set $\mathbb{P}_m \setminus \iota(\tilde{X}_m)$ (remark that V_m is smooth).

- For every R_i , let B_m^i and C_m^i be the two components of the fibre of p_m meeting on R_m . We have that $h_m^*(B_m^i) = \tilde{B}_m^i + E_i^m$ and $h_m^*(C_m^i) = \tilde{C}_m^i + E_i^m$ where \tilde{B}_m^i is birational to B_m^i and \tilde{C}_m^i to C_m^i , respectively.

- Let $f_{n,m} : Y_{n,m} \rightarrow X_m$ (resp. $f_m : Y_m \rightarrow X_m$ in the analytic situation); taking, if necessary, a subsequence of the curves $Y_{n,m}$ (resp. of the r_n 's), we can construct, as before, a closed positive current T_m on X_m (resp. T'_m on \mathbb{P}_m) such that $g_{m,*}(T_m) = T$; observe that we have to normalize dividing by m . The value of the currents T_m and T'_m on the fibres of p_m and of $\pi_m \circ p_m$ respectively is zero.

- We can find a constant A_m (depending on m) such that, in the algebraic situation

$$\frac{(\mathbb{L}_n, Y_{n,m})}{m} \leq N_D^1(Y_n) + \chi(Y_n) + A_m[F; Y_n],$$

and in the analytic situation

$$\frac{(\mathbb{L}_n, Y_m)(r)}{m} \leq N_D^1(Y_n)(r) + \chi(Y_n)(r) + A_m[F; Y](r);$$

thus the theorem will be proved if we show that there exists a constant A (independent on m) such that

$$T'_m(\mathbb{L}_m - \pi_m^*(K_{X_m/B_m}(D_m))) \geq \frac{A}{m}.$$

Since the singular points of \mathbb{P}_m are contained in the image of ι_m , we can prove, exactly as before, that

$$\pi_{m,*}(\mathbb{I}_{V_m} T') = 0.$$

Since \mathbb{P}_m is \mathbb{Q} -factorial and $\iota_m(\tilde{X}_m)$ is a divisor, the analogue of Proposition 6.6 holds; thus there is a current S_m on \tilde{X}_m such that $\mathbb{I}_{\iota_m(\tilde{X}_m)} T'_m = \iota_*(S_m)$. Moreover $h_{m,*}(S_m) = T_m$.

The theorem is proved if we show that there is a constant A such that

$$S_m(-E_i^m) \geq \frac{A}{m}.$$

Computing on the smooth part of X_m , we find that $g_m^*(B^i) = mB_m^i$ and $g_m^*(C^i) = mC_m^i$.

On \tilde{X}_m , since $g_m^*(B^i) = mB_m^i$ and $(g_m \circ h_m)_*(S_m) = T$, we have that $S_m(h_m^*(B_m^i)) = 0$ (cf. Remark 6.3). Thus $S_m(-E_i^m) = S_m(\tilde{B}_m^i)$.

LEMMA 6.7. — *Let B be an effective divisor on a projective variety X and R be a closed positive current on X such that $\mathbb{I}_B R = 0$; then $R(B) \geq 0$*

We will postpone the proof of the lemma in the next subsection.

Because of the lemma, applied to $\mathbb{I}_{\tilde{X}_m \setminus \tilde{B}_m^i} S_m$, we have that $S_m(\tilde{B}_m^i) \geq \mathbb{I}_{\tilde{B}_m^i} S_m(\tilde{B}_m^i)$. Since \tilde{B}_m^i and \tilde{C}_m^i are disjoint, $\mathbb{I}_{\tilde{B}_m^i} S_m(\tilde{B}_m^i) = \mathbb{I}_{\tilde{B}_m^i} S_m(\tilde{B}_m^i - \tilde{C}_m^i)$.

The divisor $\tilde{B}_m^i - \tilde{C}_m^i$ is $(h_m \circ g_m)^*(\frac{B^i - C^i}{m})$, thus

$$S_m(-E_i^m) \geq \frac{(h_m \circ g_m)_*(\mathbb{I}_{\tilde{B}_m^i} S_m)(B_i - C_i)}{m}.$$

Since $(h_m \circ g_m)_*(S_m) = T$, the following easy remark, applied to the couples $(T; (h_m \circ g_m)_*(\mathbb{I}_{\tilde{B}_m^i} S_m))$ and $(T; (h_m \circ g_m)_*(\mathbb{I}_{\tilde{X}_m \setminus \tilde{B}_m^i} S_m))$, allows to conclude:

Let C be a divisor on a variety X and T a closed positive current on X ; then there exists a constant A depending only on C and T for which the following holds: for every closed positive current T_1 with $T \geq T_1$, we have that $T(C) \geq T_1(C) + A$ (proof: take an ample bundle H such that $C + H$ is ample and compute T and T_1 on $C + H$).

6.1. Extension of some results to singular varieties

In this subsection, we will explain how to extend the results we need to the singular varieties involved in the proof. As explained in the introduction, a natural approach to the proof is via the integration on stacks. Unfortunately, even for this easy orbifold case, we need to develop the entire theory of integration on stacks; this is why we prefer to deal with singular varieties.

A systematic approach to the tautological inequality and the other needed results may be quite complicated, in particular it is not easy to find the minimal hypotheses. This is why we develop just what we need. Moreover this subsection will be sketchy.

Metriized line bundles on singular varieties: Let X be a reduced irreducible projective variety. Let \mathcal{L} be a line bundle on it. A continuous metric on \mathcal{L} is a metric on the fibres of it which varies continuously for the Euclidean topology. We will say

that a metric is *smooth* if, locally, we can embed X in a smooth variety W , \mathcal{L} is the restriction of a line bundle \mathcal{L}_W on W and the metric is the restriction of a smooth metric on \mathcal{L}_W . We see that this is equivalent to ask that, for every smooth variety Y and map $f : Y \rightarrow X$, the induced metric on the line bundle $f^*(\mathcal{L})$ is smooth. A (local) section of \mathcal{L} is said to be smooth if, locally, it is the restriction of a section on a smooth variety.

Observe that the sheaf $\Omega_X^{1,1}$ has a meaning on X : Ω_X^1 exists, and $\bar{\Omega}_X^1$ is its conjugate; thus $\Omega^{1,1} := \Omega_X^1 \otimes \bar{\Omega}_X^1$. A $(1, 1)$ -form is said to be *smooth* if, locally, it is the restriction of a smooth form of a smooth variety. Similarly for functions.

Every line bundle on X is the difference of very ample line bundles, thus every line bundle on X admits a smooth metric.

Given a line bundle \mathcal{L} on X equipped with a smooth metric, we can define its first Chern form in the following way: take a (local) smooth section f and $c_1(L) := -dd^c \log \|f\|^2$ outside the zeroes of f . Observe that dd^c is well defined on smooth functions and that $c_1(L)$ is a smooth $(1, 1)$ form on X . If we change the metric on \mathcal{L} by another smooth metric, the first Chern form varies by the dd^c of a smooth function on X .

We gave examples to show that we can define all the objects we need as restrictions of similar objects defined over smooth varieties: in particular we can also define the currents on X and give a meaning to closed and positive currents.

Construction of \mathbb{P}_m and related objects: The surface X_m is smooth except on the points R_i . Near the R_i 's it is isomorphic to the surface $Z^m = XY$. Let $D_{\zeta, \xi} := \{(\zeta, \xi) \mid |\zeta| < 1; |\xi| < 1\}$. Let μ_m be the cyclic group of the m -roots of the unity and let θ_m be a generator of it; it acts on $D_{\zeta, \xi}$ with the actions $\zeta \rightarrow \theta_m \zeta$ and $\xi \rightarrow \theta_m^{-1} \xi$. For every i , there is a neighborhood V_i of the singular point R_i on X_m , isomorphic to $D_{\zeta, \xi} / \mu_m$. Observe that we may suppose that V_i does not intersect the divisor D_m . The cyclic group μ_m acts on the cotangent sheaf of $D_{\zeta, \xi}$, thus on $\mathbb{P}(\Omega_{D_{\zeta, \xi}}^1)$. Denote by \mathbb{P}_{D_m} the quotient $\mathbb{P}(\Omega_{D_{\zeta, \xi}}^1) / \mu_m$. There is a natural projection $\mathbb{P}_{D_m} \rightarrow V_i$ and the restriction of \mathbb{P}_{D_m} to $V_i \setminus \{R_i\}$ is isomorphic to the restriction of $\text{Proj}(\Omega_{X_m}^1(\log(D_m)))$. Thus we can glue together the restriction of $\text{Proj}(\Omega_{X_m}^1(\log(D_m)))$ to $X_m \setminus \{R_i\}$ and $\mathbb{P}_{D_m} \rightarrow V_i$ to obtain a variety $\pi_m : \mathbb{P}_m \rightarrow X_m$ which is normal and \mathbb{Q} -factorial by construction (locally it is the quotient of a smooth variety by a finite group). One easily verifies that \mathbb{P}_m is projective and equipped with a \mathbb{Q} -line bundle \mathbb{L}_m which has the searched properties. Observe that \mathbb{P}_m only has isolated singular points.

The extension of the tautological inequality to singular variety is straightforward: Let X_m^{sm} be a desingularization of X_m , $\mathbb{P}_m^{sm} \rightarrow X_m^{sm}$ be the corresponding projective bundle of the logarithmic differentials and \mathbb{L}_m^{sm} the tautological bundle over it. Since

\mathbb{P}_m and \mathbb{P}_m^{sm} are birational, there exist a smooth variety Z_m , a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} Z_m & \xrightarrow{a} & \mathbb{P}_m^{sm} \\ b \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_m & \xrightarrow{p_m} & B_m, \end{array}$$

where the morphisms a and b are birational and a divisor A on Z_m such that $b^*(\mathbb{L}_m) = a^*(\mathbb{L}_M^{sm}) + A$. Since the divisor A is vertical (contained over a fibre of $p_m \circ b$) and the tautological inequality holds on X_m^{sm} , the needed tautological inequality holds on X_m .

The construction of the currents T_m and T'_m is similar to the construction of the currents T and T' : everything is defined to let the construction work. Observe that the intersection of both T_m and T'_m with a vertical divisor is zero.

To prove 6.7, we need the analogue of Stokes' theorem for currents:

PROPOSITION 6.9. — *Let T be a closed positive current on a projective variety X . Let f be a smooth function on it. Then for almost all ϵ , there exists a closed positive current T_ϵ on $X_\epsilon := \{z \in X / f(z) = \epsilon\}$ such that the following equality holds for every smooth form ω :*

$$\int_{\{f \leq \epsilon\}} T \wedge d(\omega) = \int_{X_\epsilon} T_\epsilon \wedge \omega.$$

Sketch of Proof: We can find a sequence of smooth closed currents T_n such that $T_n \rightarrow T$ in the weak topology. By Fubini's theorem, we have that, for suitable a and b in \mathbb{R}

$$T(df \wedge d^c f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(df \wedge d^c f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dt \int_{X_t} T_n \wedge d^c f;$$

thus, for almost all $\epsilon \in [a; b]$ the integrals $\int_{X_t} T_n \wedge d^c f$ are uniformly bounded. Consequently, for almost all $\epsilon \in [a; b]$ the measures $(T_n \wedge d^c f)|_{X_\epsilon}$ on X_ϵ converge to a measure $T_\epsilon \wedge d^c f$. If ϵ is outside the "bad set", the classical Stokes' theorem applied to the smooth closed currents gives

$$\int_{f \leq \epsilon} T \wedge d(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f \leq \epsilon} T_n \wedge d(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_\epsilon} T_n \wedge \omega = \int_{X_\epsilon} T_\epsilon \wedge \omega.$$

□

Now we can give the

Sketch of Proof of 6.7: Fix a smooth metric on $\mathcal{O}_X(B)$. Since $\mathbb{I}_B R = 0$, by definition

$$R(B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\|B\| \geq \epsilon} R \wedge c_1(\mathcal{O}_X(D)).$$

By Stokes' theorem 6.9, for almost all ϵ

$$\int_{\|B\| \geq \epsilon} R \wedge c_1(\mathcal{O}_X(D)) = - \int_{\|B\| \geq \epsilon} R \wedge dd^c \log \|B\|^2 = \int_{\|B\| = \epsilon} R_\epsilon \wedge \frac{d^c \|B\|^2}{\epsilon^2} \geq 0.$$

The conclusion follows. □

7. SECOND APPROACH TO THE THEOREMS

In this section we will sketch the approach by Yamanoi to the main Theorems 3.1 and 3.2.

The Yamanoi approach is via the Ahlfors theory and works directly on the moduli space of pointed stable curves of genus zero. The complete proof requires a big machinery and is quite involved, thus we refer to the original paper [29] for the general statements. We will give here a simplified proof, in the spirit of Yamanoi's paper, in the first non trivial case. The main ideas and difficulties already appear here and we think that this case, and its proof, may help to understand the general case.

The first step is the reduction to the case when X is a blow-up of $\mathbb{P}^1 \times B$. This reduction goes back to Elkies [6].

PROPOSITION 7.1. — *Suppose that Theorems 3.1 and 3.2 hold when X is a blow-up of $\mathbb{P}^1 \times B$. Then Theorems 3.1 and 3.2 hold in general.*

Sketch of Proof: Let $(X; D)$ as in Theorems 3.1 and 3.2. Changing X by a birational model of it, if necessary, we may suppose that there are a generically finite morphism $g : X \rightarrow Z := \mathbb{P}^1 \times B$ (commuting with p) and a simple normal crossing divisor H on $\mathbb{P}^1 \times B$ such that $g^*(K_Z(H)) = K_X(D) + G$, where G is a suitable effective divisor on X and (set theoretically) $g^{-1}(H) = D + G$.

Suppose that $f : Y \rightarrow X$ is a morphism from a curve; then since Theorem 3.1 or 3.2 holds for (Z, H) (we omit r in the analytic case), the inequality $(K_Z(H); Y) \leq N_H^{(1)}(Y) + \chi(Y) + \epsilon(K_Z(H); Y) + \dots$ holds. Thus

$$(K_X(D); Y) + (G; Y) \leq N_D^{(1)}(Y) + N_G^{(1)}(Y) + \chi(Y) + \epsilon(K_X(D + G); Y) + \dots$$

We conclude because $N_G^{(1)}(Y) \leq (G; Y)$ and $K_X(D)$ is big. □

8. AHLFORS' APPROACH TO SMT

8.1. Quick review of Ahlfors' theory

Suppose that F and G are two bordered Riemann surfaces having finite Euler–Poincaré characteristic (eventually the boundary may be empty). Suppose that $f : F \rightarrow G$ is an analytic finite morphism such that $f(\partial F) \subset \partial G$; then the classical Hurwitz formula holds:

$$\chi(F) = \deg(f)\chi(G) + \sum_{P \in \text{Ram}(f)} (\text{Ram}_P(f) - 1),$$

where $\text{Ram}(f)$ is the set of ramification points of f and $\text{Ram}_P(f)$ is the ramification index of f at P . Observe that we are using the convention that $\chi(\text{point}) = -1$ or that $\chi(\mathbb{P}^1) = -2$.

The first part of the Ahlfors theory is a generalization of this formula when one removes the condition on the boundaries. Let G° be the interior of G ; the set of points of the boundary of F whose image is contained in G° is called the *relative boundary of f* . Suppose that H is a Riemann surface and η a pseudometric on it (i.e a smooth $(1, 1)$ -form which is positive everywhere but a finite set of points where it vanishes). If U is a domain in H , we denote by $A(U, \eta)$ the area of U with respect to η ; if β is a Jordan curve on H we denote by $\ell(\beta, \eta)$ the length of β with respect to the measure defined by η ; observe that they are both positive numbers.

We introduce a smooth positive metric ω on G in such a way that $A(G; \omega) < \infty$. The *mean sheet number of f* will be the number $S_f := \frac{A(F; f^*(\omega))}{A(G; \omega)}$. Observe that if f is non ramified and unbordered, then S_f is the degree of f . If U is a domain in G then we define the *sheet number of U with respect to f* by $S_f(U) := \frac{A(f^{-1}(U); f^*(\omega))}{A(U; \omega)}$. Similarly, if β is a Jordan curve on G , then we define the *sheet number of β* by $L_f(\beta) := \frac{\ell(f^{-1}(\beta); f^*(\omega))}{\ell(\beta; \omega)}$. We denote by L_f the length of the relative boundary of f with respect to $f^*(\omega)$. A morphism $f : F \rightarrow G$ will be said to be *quasifinite* if it has finite fibres. The first main theorem of Ahlfors' theory is

THEOREM 8.2. — *Let G be a bordered Riemann surface, equipped with a positive metric ω . Let U be a domain and β be a Jordan curve on G . Then there exist positive constants h and k depending only on the metric and on U and β respectively for which the following holds: For every quasifinite morphism $f : F \rightarrow G$ from a bordered Riemann surface to G , we have the following inequalities*

$$|S_f - S_f(U)| \leq hL_f \quad \text{and} \quad |S_f - L_f(\beta)| \leq kL_f.$$

For a proof we refer to [1], to [9] or to [18]. What is very important in the theorem above is that the constants h and k depend only on U and β (and on the metric ω) but not on F and f . The second main theorem of Ahlfors' theory is the following

THEOREM 8.3. — *Suppose that G and U are as in the previous theorem; then there is a constant $h > 0$ depending only on U (and the metric) such that, for every finite covering $f : F \rightarrow G$ we have*

$$\max(\chi(f^{-1}(U)); 0) \geq \chi(U)S_f - hL_f.$$

In the sequel we will denote by a^+ the number $\max(a, 0)$.

8.2. Ahlfors' proof of SMT

We will briefly show how to deduce a form of the SMT from Ahlfors' theorems. We will be a little bit sketchy because these things are classical and well known by experts; we recall them here for the reader's convenience and to point out the analogies and the differences within the isotrivial and the non isotrivial cases. Here and in the following we systematically use the following:

– We will always suppose that every (bordered) Riemann surface we deal with will have finite Euler characteristic and be either compact or relatively compact in a bigger Riemann surface.

– *Mayer–Vietoris formula:* If F is a Riemann surface and U and V are two open sets of F , then $\chi(F) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.

– If β is a non compact Jordan curve which divides F into two connected components U and V , then $\chi(F) = \chi(U) + \chi(V) + 1$. We will call β a *cross cut*.

– The Euler–Poincaré characteristic of a connected Riemann surface is at least -2 and it is -2 if and only if it is isomorphic to \mathbb{P}^1 .

– Let $f : F \rightarrow G$ be a finite covering. Let U be a domain in G . A connected component V of $f^{-1}(U)$ is called an *island* if it is relatively compact in F and a *peninsula* otherwise.

Suppose that P_1, \dots, P_q are q points on \mathbb{P}^1 and U_1, \dots, U_q are small disks around the P_i 's whose closures are mutually disjoint. Denote by G^0 the Riemann surface $\mathbb{P}^1 \setminus \bigcup_i U_i$. We fix on \mathbb{P}^1 the Fubini–Study metric ω_{FS} : $A(\mathbb{P}^1; \omega_{FS}) = 1$.

If $f : F \rightarrow \mathbb{P}^1$ is a quasifinite morphism, then we denote by $N_i(f)$ the number of islands on F above U_i . The theorem which generalizes the SMT is the following; it can be seen as a strong, non integrated form of it.

THEOREM 8.5. — *Suppose that we fixed U_i as above. Then there is a positive constant h depending only on the U_i 's such that the following holds: for every Riemann surface F and quasifinite morphism $f : F \rightarrow \mathbb{P}^1$, we have that*

$$\chi^+(F) + \sum_i N_i(f) \geq (q - 2)A(F; f^*(\omega_{FS})) - hL_f.$$

Theorem 8.5 is a consequence of Theorems 8.2 and 8.3. We give here a sketch of the proof.

Sketch of Proof: Denote by G_0 the open set $\mathbb{P}^1 \setminus \bigcup_{i=1}^q \bar{U}_i$ and β the boundary of G_0 . The Euler characteristic of G_0 is $q - 2$. Denote by \mathcal{I} (resp. \mathcal{P}) the set of islands (resp. peninsulas) of F over the U_i 's. Let F_0 be $f^{-1}(G_0)$ and $\gamma = f^{-1}(\beta)$. By the Mayer–Vietoris Formula, we have

$$\chi(F) = \chi(F_0) + \sum_{I \in \mathcal{I}} \chi(I) + \sum_{P \in \mathcal{P}} \chi(P) + n,$$

where n is the number of cross-cuts of γ (components which are not compact). Since for every connected component A in the sum, $\chi(A) \geq -1$, each peninsula touches at least a cross-cut and each cross-cut touches at most one peninsula,

$$\chi^+(F) + \sum_i N_i(f) \geq \chi^+(G_0).$$

We conclude applying Theorems 8.2 and 8.3. □

Denote by $n(f, P_i)$ the cardinality of the $z \in F$ such that $f(z) = P_i$; then one easily sees that $\sum_i n(f, P_i) \geq \sum_i N_i(f)$.

Let (Y, g) be a parabolic Riemann surface and let $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ be an analytic map. Apply the theorem to $F_t := \{z \in Y \text{ s.t. } g(z) \leq t\}$. It is well known that

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_1^r \frac{L_{f_t} dt}{t}}{\int_1^r \frac{A(F_t, f^*(\omega_{FS})) dt}{t}} = 0,$$

where L_{f_t} is the length of the relative boundary of F_t (cf. for instance [4]). Thus if one integrates the inequality of the theorem with respect to $\int_1^r \frac{dt}{t}$, one finds a proof of the SMT.

Remark that in the proof we are allowed to move the points P_i a little bit and the results remains unchanged! This means that the SMT remains true if we perturb the divisor $D := \sum_i P_i$ a little bit. This is the key point of the Yamanoi approach: In the theorem we can move a little bit the divisor and everything remains true; thus we can give a general proof working on the moduli space of stable pointed curves of genus zero, which is compact! The only problem is that sometimes the points P_i may coincide.

One works directly on the moduli space of stable curves of genus zero with n marked points $\mathcal{M}_{0,n}$ and on its universal family $p : \mathcal{U}_{0,n} \rightarrow \mathcal{M}_{0,n}$. It is well known that there are n sections $\xi_i : \mathcal{M}_{0,n} \rightarrow \mathcal{U}_{0,n}$ of p and that $\mathcal{D}_n := \sum_i \xi_i(\mathcal{M}_{0,n})$ is the universal divisor: the restriction of \mathcal{D}_n to the generic fibre of p is the divisor given by the marked points. Let $K_{\mathcal{U}/\mathcal{M}}$ be the relative dualizing sheaf of p . In the sequel we will denote by K_n the line bundle $K_{\mathcal{U}/\mathcal{M}}(\mathcal{D}_n)$ on $\mathcal{U}_{0,n}$; we will suppose that it is equipped with a smooth hermitian metric and we will denote by ω its first Chern form.

Since a rigorous proof is quite involved and requires a careful attention to details, we will explain the main steps of the proof in the case when $n = 4$ (stable curves of genus zero with 4 marked points). We refer to the original paper by Yamanoi for the general case. This is the first non trivial case which cannot be deduced directly from the classical SMT. Even in this case a detailed proof requires a skillful work (we think that filling the gaps is a good exercise). Nevertheless we think that all the main steps and ideas of the proof are already present in this case.

8.3. Explicit description of $\mathcal{M}_{0,4}$ and $\mathcal{U}_{0,4}$

The moduli space $\mathcal{M}_{0,4}$ is isomorphic to the projective line \mathbb{P}^1 .

Let $X := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; we denote by $p : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ the first projection. The map p is equipped with 4 sections: we write them in affine coordinate: $\xi_0(z) := (z, 0)$, $\xi_1(z) = (z, 1)$, $\xi_\infty(z) = (z, \infty)$ and $\xi_\Delta(z) = (z, z)$; we will denote by ξ_i and ξ_Δ the image of ξ_i and ξ_Δ respectively. The ξ_i 's, for $i = 0, 1, \infty$, do not intersect and the ξ_Δ 's intersect the ξ_i 's properly over i .

Let $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ be the blow-up of X over the three points $\xi_\Delta \cap \xi_i$. Then \tilde{X} is the universal family $\mathcal{U}_{0,4}$ and the strict transforms $\hat{\xi}_j$'s of the ξ_j 's, for $j = 0, 1, \infty$ and Δ are the universal sections. The map $p \circ \pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ is the universal map.

Let $U_g \subset \mathbb{P}^1$ be the open set $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Then $\tilde{X}|_{U_g} := p^{-1}(U_g)$ is isomorphic to $U_g \times \mathbb{P}^1$; let $h : \tilde{X}|_{U_g} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be the second projection. Suppose that $z = 0, 1$ or $z = \infty$, then we can find a neighborhood $U_x \subset \mathbb{P}^1$ of z for which $\tilde{X}|_{U_x} := p^{-1}(U_x)$ is the blow-up of $U_x \times \mathbb{P}^1$ over the point (z, z) ; by construction there is a projection $h : (g_1; g_2) : \tilde{X}|_{U_x} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. It is easy to see (by restriction to the fibres of p) that the restriction of K_4 to $\tilde{X}|_{U_g}$ is $h^*(\mathcal{O}(2))$. Moreover, for $x = 0, 1, \infty$ (we may suppose that) the restriction of K_4 to $\tilde{X}|_{U_x}$ is $h^*(\mathcal{O}(1, 1))$. In the sequel we will suppose that the metric on the restriction of K_4 to these open sets is the pull-back of the Fubini–Study metrics; this is not exactly the case but since \tilde{X} is compact, the error we make is bounded and can be controlled.

In the sequel we will suppose that we are in the following situation: R will be an open set in \mathbb{P}^1 (for the analytic topology). $g : F \rightarrow R$ is a proper map between Riemann surfaces and $f : F \rightarrow \tilde{X}$ is an analytic map such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ g \downarrow & & \downarrow \pi \\ R & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

where $\iota : R \rightarrow \mathbb{P}^1$ is the inclusion. We will call this a *situation*.

Suppose we are in a situation as above, and $W \subseteq F$ is an open set; we will denote by $A(W, \omega)$ the area of W with respect to the volume form $f^*(\omega)$ on F . If γ is a Jordan curve on F , we denote by $L(\gamma, \omega)$ the length of γ with respect to the measure defined by $f^*(\omega)$. We will denote by L_f the length of the relative boundary of f .

Let $D = \mathcal{D}_4 \hookrightarrow \tilde{X}$ be the universal divisor: we will denote by $n(D, f)$ the cardinality of the set $\{z \in F / f(z) \in D\}$.

9. THE LOCAL VERSION OF THE THEOREM

The key step of Yamanoi's proof is a local version of the theorem. This local version plays the role of Theorem 8.5 in the Ahlfors proof of SMT. Given $f : F \rightarrow \tilde{X}$, and an open set U of \tilde{X} , we will generalize in the obvious way the concept of island and peninsula of F over U : an island will be a connected component of $f^{-1}(U)$ which is relatively compact, etc. We will denote by $N(f, U)$ the number of islands of F over U .

Before we state and prove the theorem, we need to state a generalization of a classical theorem by Rouché:

PROPOSITION 9.1. — *Let E be a Jordan domain of \mathbb{P}^1 and $b \in E$; then there exists a positive constant $C := C(E, b)$ with the following property: Let F be a bordered Riemann surface and $\zeta : F \rightarrow E$ an analytic function such that $\zeta(F) = E$ and $\zeta(\partial(F)) = \partial E$; then for every meromorphic function $\alpha : F \rightarrow \mathbb{P}^1$ such that $|\alpha(z) - b| < C$ for every $z \in F$, there exists $z \in F$ with $\alpha(z) = \zeta(z)$.*

The proof of this proposition is a variation of the classical Rouché theorem and can be found on [30].

The local version of Yamanoi's theorem is

THEOREM 9.2. — *Let $x \in \mathbb{P}^1$ then we can find a open neighborhood $x \in U_x \subseteq \mathbb{P}^1$, open neighborhoods $W_i \subseteq \tilde{X}|_{U_x}$ of $\xi_i \cap \tilde{X}|_{U_x}$, for $i = 0, 1, \infty$ and Δ , with disjoint closures, and a positive constant h_x for which the following holds:*

For every situation

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ g \downarrow & & \downarrow \pi \\ R & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^1, \end{array}$$

for which $x \in R \subseteq U_x$, we have that

$$h_x L_f + \deg(g) + \chi^+(F) + \sum_i N(f, W_i) \geq A(F, \omega).$$

We recall that L_f is the length of the relative boundary. One sees the similarity of the theorem above with the classical theorem 8.5 by Ahlfors. One should notice that Theorem 8.5 is one of the main tools of the proof of the theorem above.

Proof. — First case: we suppose that $x \neq 0, 1$ or ∞ . In this case the theorem is essentially Theorem 8.5; we give some details: Take a small disk U_x around x ; then $\tilde{X}|_{U_x}$ is isomorphic to $U_x \times \mathbb{P}^1$; let $h : \tilde{X}|_{U_x} \rightarrow \mathbb{P}^1$ be the second projection. We may suppose that, for $i = 0, 1$ and ∞ , we have $h \circ \xi_i(x) = i$ and $h \circ \xi_\Delta(x) = x$. Take small neighborhoods U_i of i in \mathbb{P}^1 and a small neighborhood U_Δ of x with non intersecting closures. We obtain the theorem in this case by applying Ahlfors' theorem 8.5 to the morphism $h \circ f : F \rightarrow \mathbb{P}^1$. Notice that in this case the term $\deg(g)$ is not there.

The new case is when $x = 0, 1$ or ∞ .

Suppose that $x = 0, 1$ or ∞ : we may suppose that $x = 0$ the two other cases are similar.

In this case the fibre of $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ over x is the union of two components X_1 and X_2 both isomorphic to \mathbb{P}^1 . The universal sections ξ_0 and ξ_Δ intersect X_1 and not X_2 while ξ_1 and ξ_∞ intersect X_2 and not X_1 . Take a neighborhood U_x of x and two maps $h_i : \tilde{X}|_{U_x} \rightarrow \mathbb{P}^1$. We may suppose that: $h_1(\xi_\infty(x)) = 0$, $h_1(\xi_1(x)) = 1$, $h_1(X_2) = \infty$ and that $h_2(\xi_0(x)) = 0$, $h_2(\xi_\Delta(x)) = 1$, $h_2(X_1) = \infty$.

For $i = 0, 1$ and ∞ , choose small neighborhoods U_i of i whose closures do not intersect. Call $A := h_1^{-1}(U_\infty)$ and $B := h_2^{-1}(U_\infty)$. We may take the neighborhood U_x so small that $h_1(A \cap B) = h_2(A \cap B) = U_\infty$. We may also suppose that U_x is so small that $|h_j(\xi_i(z)) - \ell| < C(i, U_\ell)$ for $z \in U_x$, $j = 1, i = 0, 1, \Delta$ $\ell = 0, \infty, 1$ respectively, or $j = 2$ and $i = \ell = 0, 1, \infty$ respectively (cf. Proposition 9.1).

For $i = 0, 1$, define the following open sets $W_i := h_1^{-1}(U_i)$ and $V_i := h_2^{-1}(U_i)$. Notice that the W_i 's and V_j 's are mutually disjoint and we may suppose U_x so small that $\xi_\infty(U_x) \subset W_0$, $\xi_1(U_x) \subset W_1$, $\xi_0(U_x) \subset V_0$ and $\xi_\Delta(U_x) \subset V_1$.

Let A_1, \dots, A_r be the island of F over $A \cap B$, $F_1 := F \setminus \{A_1, \dots, A_r\}$ and \mathcal{I} and \mathcal{P} be the set of islands and peninsulas of F over B respectively. Remark that \mathcal{I} is also the set of islands of F_1 over U_∞ via $h_1 \circ f$.

Let S be one of the A_i 's or an element of one of \mathcal{I} . Proposition 9.1 applied to S , $h_1 \circ f|_S$ and $h_1 \circ \xi_1 \circ g$ implies that there is $z \in S$ such that $h_1 \circ f(z) = h_1 \circ \xi_1 \circ g(z)$. Since h_1 restricted to a fibre of π different from the fibre over x is an isomorphism, one finds that $\pi(f(z)) = x$. Consequently every such island intersects the fibre over x and the properness of g implies that $r + \text{Card}(\mathcal{I}) \leq \deg(g)$. In particular

$$(9.3.1) \quad \chi(F_1) + \text{Card}(\mathcal{I}) \leq \chi(F) + \deg(g).$$

Let N_A (resp. N_B) be the number of islands of F_1 (or F , which is the same) over V_0 and V_1 (resp. over W_1 and W_2). A direct application of Ahlfors' theory and Mayer-Vietoris' formula to F_1 and $h_2 \circ f$ gives a universal constant h (independent on F) such that

$$(9.4.1) \quad \chi^+(F_1) + N_A - \sum_{P \in \mathcal{P}} \chi^+(P) - \sum_{I \in \mathcal{J}} \chi(I) \geq A(F; (h_2 \circ f)^*(\omega_{FS})) - hL_f.$$

Here and in the sequel, we systematically use Theorem 8.2.

We apply again Ahlfors' theory to each island and peninsula of F_1 over B . Observe that, for each island I , $\chi^+(I) < \chi(I) + 1$. Thus we obtain

$$(9.5.1) \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} \chi^+(P) + \sum_{I \in \mathcal{J}} \chi(I) + \text{Card}(\mathcal{J}) + N_B \geq A(F; (h_1 \circ f)^*(\omega_{FS})) - hL_f.$$

The conclusion follows from 9.3.1, 9.4.1 and 9.5.1. \square

Remark that, since the base \mathbb{P}^1 is compact, the error we make using the pull-back of the Fubini Study metric via h_i instead of the $(1, 1)$ -form ω of K_4 over \tilde{X} is controlled by changing the constant h_x .

If we have a *situation* as above, we will denote by $n(D, f)$ the number of points $z \in F$ such that $f(z) \in D$. Let R_f be the number $\sum_{z \in F} (\text{Ram}(g) - 1)$

As a consequence, we find

THEOREM 9.6. — *Suppose that we are in the hypotheses of Theorem 9.2. Then*

$$A(F, \omega) \leq n(D, f) + R_f + \deg(g)\chi(R) + \deg(g) + h_x L_F.$$

Proof. — Since g is proper, $\chi^+(F) \leq \chi(F) + \deg(g)$ and by Hurwitz's formula, $\chi(F) = \deg(g)\chi(R) + R_f$. Thus it suffices to apply 9.2 and 9.1 to f and $\xi_i \circ g$ over each island. \square

Observe that the theorem above is a local version of the theorems. It seems better than the theorem because one has the impression that one can set $\epsilon = 0$; nevertheless there is the term coming from the relative boundary L_f . We will see in the sequel that we will need to put $\epsilon > 0$ in order to control this term. Even if this is not the only reason, it is the most important one.

10. THE NON INTEGRATED VERSION OF THE THEOREM

After the local version of the theorem we will prove a global non integrated version of the theorem. Here too we will put some restrictive hypotheses on the situations: nevertheless we would like to remark that these hypotheses suffice to prove Theorems 3.1 and 3.2.

Let K be a compact set of \mathbb{P}^1 (which may be empty). We will say that a sequence of open sets $R_n \subset \mathbb{P}^1$ is *relatively exhausting with respect to K* if, for every compact disk $\Delta \subset \mathbb{P}^1 \setminus K$, there exists n_0 such that, for every $n \geq n_0$, we have that $\Delta \subset R_n$.

The non integrated version of the theorems we propose is the following

THEOREM 10.1. — *Let K be a compact set of \mathbb{P}^1 and $\epsilon > 0$. Suppose that*

$$\begin{array}{ccc}
 F_n & \xrightarrow{f_n} & \tilde{X} \\
 g_n \downarrow & & \downarrow \pi \\
 R_n & \xrightarrow{\iota_n} & \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

is a sequence of situations with the sequence $\{R_n\}$ relatively exhausting with respect to K . Then, after subsequencing, we can find constants h and C such that, for every term of the subsequence

$$A(F_n; \omega) \leq n(D, f_n) + R_{f_n} + \epsilon A(F_n, \omega) + h\ell(\partial F_n, \omega) + \deg(g_n)(\chi(R_n) + C).$$

The constant h is independent on the sequence and C depends only on the sequence (and not on the terms of the sequence).

Proof. — We can find an open set W containing K having the following property: the open set $W \setminus K$ is a finite union of open sets of the form U_x of Theorem 9.2 such that $U_x \cap K \neq \emptyset$ and $x \notin K$. Choose an integer $J > \frac{2}{\epsilon}$. Let $\gamma_1, \dots, \gamma_J$ be Jordan curves of \mathbb{P}^1 and δ_i small open neighborhoods of γ_i for which the following properties hold:

- For each i , every connected component of $\mathbb{P}^1 \setminus \gamma_i$ is simply connected and contained in one of the open sets U_x of Theorem 9.2.
- For each i , every connected component of $\mathbb{P}^1 \setminus \delta_i$ is again simply connected (and contained in one of the U_x).
- For every triple of distinct indices (i, j, k) we have $\delta_i \cap \delta_j \cap \delta_k = \emptyset$.
- If a connected component of $\mathbb{P}^1 \setminus \delta_i$ intersects W then it is contained in it.

Because of the third condition, for every n we have

$$\sum_j A(g_n^{-1}(\delta_j); \omega) \leq 2A(F_n, \omega).$$

Thus we can find a j_0 and a subsequence n_k for which

$$(10.2.1) \quad A(g_{n_k}^{-1}(\delta_{j_0}), \omega) \leq \frac{2}{J} A(F_{n_k}; \omega) \leq \epsilon A(F, \omega).$$

Fix such a j_0 and call δ the open set δ_{j_0} , etc. From now on, we will omit to change notation when we pass to a subsequence.

Let U be a connected component of $\mathbb{P}^1 \setminus \delta$ and consider the set of Riemann surfaces $F_{n,U} := g_n^{-1}(R_n \cap U)$.

Either $\limsup_n \frac{A(F_{n,U}, \omega)}{\deg(g_n)} < \infty$ or $\limsup_n \frac{A(F_{n,U}, \omega)}{\deg(g_n)} = \infty$. We suppose that we are in the second situation, thus, passing to a subsequence, we may suppose that the lim sup is indeed a limit.

If U is not contained in W , then we may also suppose that R_n contains U for every n . Suppose that we are in this case.

Denote by Δ_r the disk of radius r . We may suppose that U is biholomorphic to the disk Δ_{r_0} for some $r_0 < 1$. We may also suppose that $U \simeq \Delta_{r_0} \subset \Delta_1 \subseteq U_x$ for some $x \in U$. Let $F_{n,\Delta} := g_n^{-1}(\Delta_1)$ and, for every $r \in (0, 1)$, let $F_{n,r} := g_n^{-1}(\Delta_r) \subset F_{n,\Delta}$. We can find a non negative function G which is C^∞ outside the ramification points of g_n and integrable on $F_{n,\Delta}$, such that $f_n^*(\omega)|_{F_{n,\Delta}} = \sqrt{-1}G^2 dg_n \wedge \overline{d\overline{g_n}}$. Let

$$S_n(r) := \int_0^r dt \int_{\partial F_{n,t}} G t d \arg(g_n),$$

then $\frac{dS_n}{dr} = \ell(\partial F_{n,r}, \omega)$. By the Cauchy-Schwartz inequality, we have

$$\begin{aligned} S_n(r) &\leq \left(\int_0^r t d \wedge d \arg g_n \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^r G^2 t dt \wedge d \arg(g_n) \right)^{1/2} \\ &= C_U \cdot (\deg(g_n))^{1/2} \cdot (A(F_{n,r}; \omega))^{1/2}, \end{aligned}$$

where $C_U > 0$ is a constant depending only on U .

LEMMA 10.3. — *Let $\delta > 0$ and let $S_n(r)$ be a sequence of differentiable functions on $[0, 1)$ with $S_n(r_0) \geq n^{2/\delta}$; then the set*

$$I_S := \left\{ 1 > r \geq r_0 / S'_n(r) \geq \frac{S_n(r)}{(1-r^2)} \text{ for some } n \right\}$$

is such that $\int_{I_S} \frac{dr}{1-r^2} < \infty$.

The proof of the lemma is standard and can be found in [14].

As a consequence of the above lemma, for every $\epsilon' > 0$ we can find a subsequence of the F_n 's and an $R > r_0$ for which $\ell(\partial F_{n,R}, \omega) < \epsilon' A(F_{n,R}, \omega)$. We call again U (by abuse of notations) the enlarged open set for which this last inequality holds.

A similar argument holds when U is contained in W . In this case, even taking a subsequence, we cannot suppose that U is contained in R_n : enlarging U a bit, as before, we may suppose

$$\ell(\partial F_{n,U}, \omega) \leq \epsilon A(F_{n,U}, \omega) + \ell(\partial F_n \cap F_{n,U}; \omega).$$

Since $F_n = \bigcup_U g_n^{-1}(U) \cap g_n^{-1}(\delta)$, and 10.2.1 holds, we apply Theorem 9.6 and obtain $A(F_n; \omega)$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_U A(F_{n,U}, \omega) + A(g_n^{-1}(\delta)) \\ &\leq \sum_U \left(n(D, f_n|_{F_{n,U}}) + R_{f_n|_{F_{n,U}}} + \deg(g_n)\chi(R_n \cap U) + \deg(g_n) + \epsilon A(F_{n,U}, \omega) \right) \\ &\quad + \epsilon A(F_n, \omega) + h\ell(\partial F_n, \omega) + C, \end{aligned}$$

where the constant C takes care of the open sets U for which $\limsup_n \frac{A(F_{n,U}, \omega)}{\deg(g_n)} < \infty$ thus depends only on the sequence.

Since $\chi(R_n) \geq \sum_U \chi(R_n \cap U)$, we conclude that

$$A(F_n; \omega) \leq n(D, f_n) + R_{f_n} + \epsilon A(F_n, \omega) + h\ell(\partial F_n, \omega) + \deg(g_n)(\chi(R_n) + C).$$

□

From this, we deduce

THEOREM 10.4. — *Let $\epsilon > 0$; then there exist constants C and h such that, for every situation as above,*

$$A(F; \omega) \leq n(D, f) + R_f + \epsilon A(F, \omega) + h\ell(\partial F, \omega) + \deg(g)(\chi(R) + C).$$

Proof. — If not, we can find a sequence of situations for which

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\deg(g_n)} \cdot ((1 + \epsilon)A(F_n; \omega) - (n(D, f_n) + R_{f_n} + h + h\ell(\partial F_n, \omega))) + \chi(R_n) = +\infty.$$

And this contradicts Theorem 10.1.

This easily implies, together with 7.1, the algebraic version of *abc*. The analytic version of *abc* requires again a control of the length of the boundary; this is again standard: We give a sketch of the proof in a special case. We suppose, to simplify, that $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ is a proper map and the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ g \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Applying Theorem 10.4 when $R = R_t$, the disk of radius t in \mathbb{C} , and integrating with respect to $\int_0^r \frac{dt}{t}$, we obtain

$$(K_4, Y)(r) \leq N_{D_4}^{(1)}(Y)(r) + R_f(r) + \epsilon(K_4, Y)(r) + h \int_0^r \frac{\ell(\partial g^{-1}(R_t), \omega) dt}{t} + C \log r.$$

We can write $f^*(\omega) = \sqrt{-1}G^2 dg \wedge d\bar{g}$ with G a non negative function which is integrable and C^∞ outside the ramification points of g .

Introduce the function $S(r) := \int_0^{\log(r)} dt \int_{g=t} tGd \arg(g)$. We have that $S'(r) = \int_0^r \frac{\ell(\partial g^{-1}(R_t), \omega) dt}{t}$ and the Cauchy–Schwartz inequality gives $S(r) \leq C(\log(r))^{1/2} \cdot \frac{d(K_4; Y)(r)}{dr}$. A double application of Lemma 4.4. allows to conclude the proof. Remark that this argument is similar to the argument used to derive the SMT from Ahlfors’ theory. □

10.1. The general statement proved by Yamanoi

As a conclusion, we state without proof the main theorem proved in [29]; we refer to the original paper for the proof. Let $n > 3$ be an integer. A *situation* will be a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \mathcal{U}_{0,n} \\ g \downarrow & & \downarrow \pi \\ R & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{M}_{0,n}. \end{array}$$

with F and R bordered Riemann surfaces, g a proper analytic map and f and ι analytic. We fix a metric on K_n and a positive $(1, 1)$ form η on $\mathcal{M}_{0,n}$. We define $n(\mathcal{D}_n, f)$ and R_g as before. Observe that $\mathcal{M}_{0,n} = \mathcal{U}_{0,n-1}$ thus we may define $n(\mathcal{D}_{n-1}, \iota)$.

THEOREM 10.6. — *Let $\epsilon > 0$; then there is a constant C depending only on ϵ and the metrics chosen on K_n and $\mathcal{M}_{0,n}$ with the following property: For every situation as above, we have*

$$\begin{aligned} A(F, f^*(c_1(K_n))) &\leq n(\mathcal{D}_n, f) + R_g + \epsilon A(F, f^*(c_1(K_n))) \\ &+ C \deg(g) (A(R, g^*(\eta)) + n(\mathcal{D}_{n-1}, \iota) + \chi^+(R) + \ell(\partial F, f^*(c_1(K_n)))) , \end{aligned}$$

cf. [29], Theorem 4. An argument similar to the one sketched above allows to deduce the abc conjecture from the above theorem.

11. CONCLUSIONS AND FINAL OBSERVATIONS

A posteriori one would like to compare the two proofs. The proof by McQuillan has a global nature while the one by Yamanoi is more local. Of course one is tempted to apply the techniques to other situations; for instance to families of surfaces of general type. The first part of the proof by McQuillan passes through without pain (essentially everything until Proposition 6.5). Then one has to deal with a more subtle situation: here we strongly used the fact that the singularities of families of semistable curves are well understood and quite easy. In general the situation is more complicated.

The Yamanoi's approach is essentially local. Suppose that we have a family of varieties over a curve and we want an inequality similar to the *abc* conjecture in this situation. Split the base in finitely many small open sets U_i . Take a sequence of curves with maps in our family. Look at the sequence of the areas of the preimages of each U_i . If it is bounded, there is nothing to prove. If it is unbounded, then one looks for a local inequality which will involve the length of the boundary as in Theorem 9.6. Then one can conclude adapting the arguments of Theorem 10.1. Of course this will need a generalization of Ahlfors' theory (even in the smooth case) and to our knowledge this is still unknown.

In conclusion, the first part of the proof by McQuillan and the second part of the proof by Yamanoi can be generalized. Thus it is probable that the best way to proceed will be by applying a mix of both proofs!

REFERENCES

- [1] L. V. AHLFORS – “Zur Theorie der Überlagerungsflächen”, *Acta Math.* **65** (1935), p. 157–194.
- [2] L. V. AHLFORS & L. SARIO – *Riemann surfaces*, Princeton Mathematical Series, No. 26, Princeton Univ. Press, 1960.
- [3] E. BOMBIERI & W. GUBLER – *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [4] M. BRUNELLA – “Courbes entières et feuilletages holomorphes”, *Enseign. Math.* **45** (1999), p. 195–216.
- [5] X. CHEN – “On Vojta $1 + \epsilon$ conjecture”, preprint arXiv:0705.1727.
- [6] N. D. ELKIES – “*ABC* implies Mordell”, *Int. Math. Res. Not.* **1991** (1991), p. 99–109.

- [7] G. FALTINGS – “Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern”, *Invent. Math.* **73** (1983), p. 349–366.
- [8] P. GRIFFITHS & J. KING – “Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties”, *Acta Math.* **130** (1973), p. 145–220.
- [9] W. K. HAYMAN – *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [10] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN – “The canonical height and integral points on elliptic curves”, *Invent. Math.* **93** (1988), p. 419–450.
- [11] M. KIM – “Geometric height inequalities and the Kodaira-Spencer map”, *Compositio Math.* **105** (1997), p. 43–54.
- [12] R. C. MASON – *Diophantine equations over function fields*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 96, Cambridge Univ. Press, 1984.
- [13] M. MCQUILLAN – “Diophantine approximations and foliations”, *Publ. Math. I.H.É.S.* **87** (1998), p. 121–174.
- [14] ———, “Non commutative Mori theory”, preprint I.H.É.S.
- [15] ———, “Old and new techniques in function fields arithmetics”, preprint.
- [16] ———, “Rational criteria for hyperbolicity”, preprint.
- [17] Y. MIYAOKA – “The orbundle Miyaoka-Yau-Sakai inequality and an effective Bogomolov-McQuillan theorem”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), p. 403–417.
- [18] R. NEVANLINNA – *Analytic functions*, Translated from the second German edition by Phillip Emig. Die Grund. Math. Wiss., Band 162, Springer, 1970.
- [19] A. NITAJ – “The abc conjecture home page”, <http://www.math.unicaen.fr/~nitaj/abc.html>.
- [20] J. NOGUCHI, J. WINKELMANN & K. YAMANOI – “The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties”, *Acta Math.* **188** (2002), p. 129–161.
- [21] J. OESTERLÉ – “Nouvelles approches du “théorème” de Fermat”, Séminaire Bourbaki, Vol. 1987/88, exposé n° 694, *Astérisque* **161-162** (1988), p. 165–186.
- [22] C. F. OSGOOD – “Sometimes effective Thue-Siegel-Roth-Schmidt-Nevanlinna bounds, or better”, *J. Number Theory* **21** (1985), p. 347–389.
- [23] A. SAUER – “Deficient rational functions and Ahlfors’s theory of covering surfaces”, *Ark. Mat.* **39** (2001), p. 151–155.
- [24] J-P. SERRE – *Lectures on the Mordell-Weil theorem*, Aspects of Mathematics, E15, Friedr. Vieweg & Sohn, 1989.
- [25] L. SZPIRO – “Discriminant et conducteur des courbes elliptiques”, *Astérisque* **183** (1990), p. 7–18.

- [26] P. VOJTA – *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1239, Springer, 1987.
- [27] ———, “On algebraic points on curves”, *Compositio Math.* **78** (1991), p. 29–36.
- [28] A. WILES – “Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem”, *Ann. of Math.* **141** (1995), p. 443–551.
- [29] K. YAMANOI – “The second main theorem for small functions and related problems”, *Acta Math.* **192** (2004), p. 225–294.
- [30] ———, “Defect relation for rational functions as targets”, *Forum Math.* **17** (2005), p. 169–189.
- [31] ———, “On the truncated small function theorem in Nevanlinna theory”, *Internat. J. Math.* **17** (2006), p. 417–440.

Carlo GASBARRI

Università di Roma II

Dipartimento di Matematica

“Tor Vergata”

Viale della Ricerca Scientifica

I-01033 ROMA

(Italie)

E-mail : gasbarri@axp.mat.uniroma2.it

et, à partir du 1^{er} septembre 2009 :

Université de Strasbourg

I.R.M.A.

7 rue René Descartes

F-67084 STRASBOURG Cedex

E-mail : gasbarri@math.u-strasbg.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(990) *Géométrie des espaces métriques mesurés :
les travaux de Lott, Villani, Sturm*

Michel LEDOUX

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

GÉOMÉTRIE DES ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS : LES TRAVAUX DE LOTT, VILLANI, STURM

par Michel LEDOUX

L'étude géométrique des espaces métriques mesurés s'est récemment dotée d'une définition synthétique de borne inférieure de courbure de Ricci issue de la théorie du transport optimal de mesures grâce aux travaux parallèles et complémentaires de J. Lott et C. Villani [34, 35] et K.-T. Sturm [52, 53].

L'analogie d'une borne sur la courbure sectionnelle riemannienne dans un espace métrique est ancien, et remonte aux travaux de A. Aleksandrov qui a fourni une définition purement métrique, par comparaison de triangles (voir [13], [12], [24]...). Un aspect significatif de cette définition métrique est sa stabilité par limite de Gromov-Hausdorff, conduisant ainsi à une notion de courbure sur des espaces éventuellement singuliers. (La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts (X, d) et (X', d') peut être définie comme l'infimum de la distance de Hausdorff $\delta(j(X), j'(X'))$ sur tous les plongements isométriques j, j' de (X, d) et (X', d') respectivement dans un espace métrique (Y, δ) .)

Dans le cas de la courbure de Ricci d'une variété riemannienne, une information seulement métrique est insuffisante, et la mesure de volume entre en jeu, reflétant le contrôle de la déformation du volume riemannien par la courbure. La problématique s'inscrit naturellement dans le cadre du théorème de précompacité de M. Gromov pour la famille des variétés riemanniennes uniformément de courbure de Ricci minorée par K , de dimension majorée par N et de diamètre borné par D [24], dont les éléments limites sont des espaces métriques mais plus nécessairement des variétés (voir [16] pour un examen approfondi de ces espaces limites). L'étude entreprise par J. Lott, C. Villani [34, 35] et K.-T. Sturm [52, 53] introduit une définition de minoration de la courbure (couplée avec une dimension) dans un espace métrique mesuré (X, d, μ) , étendant la minoration de la courbure de Ricci riemannienne, par une propriété de convexité d'une fonctionnelle de type entropique le long de géodésiques dans l'espace des mesures de probabilités sur X . Cette définition est directement inspirée de son analogue sur les espaces réguliers qui s'effectue à travers un transport

optimal de mesures. Ces développements récents ont pris place au carrefour de l'analyse, de la géométrie et du calcul des probabilités, notamment à travers le transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf-McCann [11], [48], [38], ainsi que par l'examen de diverses inégalités géométriques et fonctionnelles avec les travaux de D. Bakry et M. Émery [5], [4], F. Otto et C. Villani [43], D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger [19], [20], D. Cordero-Erausquin [17], M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm [47] ...

Cette courte présentation ne donne qu'un aperçu de ces développements, se limitant aux aspects principaux, plusieurs autres introductions (dont ce texte s'inspire) étant déjà disponibles [18], [33], [55], sans compter la monumentale exposition [56] de C. Villani lui-même lors de l'École d'Été de Probabilités de Saint-Flour 2005, à paraître dans la collection des Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.

1. LES PRÉMISSSES RIEMANNIENNES ET FONCTIONNELLES

Le rôle de la mesure (de volume) dans l'obtention de bornes ou d'inégalités en géométrie riemannienne est souvent un élément clef. L'exemple de la minoration spectrale de Lichnerowicz (cf. e.g. [23]) est significatif à cet égard. Soient (M, g) une variété riemannienne compacte (sans bord) de dimension n (≥ 2), Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M (avec la convention des analystes), et λ_1 la première valeur propre non-triviale de Δ . Alors, si $\text{Ric}_x \geq K$, $K > 0$ (au sens où, pour tout $x \in M$ et tout vecteur tangent $v \in T_x(M)$, $\text{Ric}_x(v, v) \geq K|v|^2$),

$$(1) \quad \lambda_1 \geq \frac{nK}{n-1}.$$

(Une borne un peu moins fine, indépendante néanmoins de la dimension, est tout simplement $\lambda_1 \geq K$.) La démonstration est la suivante. D'après la formule de Bochner (dans sa forme métrique), pour toute fonction régulière f sur M , en tout point,

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) - \nabla f \cdot \nabla(\Delta f) &= \|\text{Hess}(f)\|_2^2 + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \\ &\geq \frac{1}{n} (\Delta f)^2 + K |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Intégrer les deux membres de cette inégalité par rapport à l'élément de volume riemannien dx sur M de sorte que, après intégration par parties de part et d'autre,

$$\int_M (\Delta f)^2 dx \geq \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 dx + K \int_M f(-\Delta f) dx.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'inégalité à une fonction propre non triviale de $-\Delta$ de valeur propre $\lambda_1 > 0$.

Cette démonstration peut être adaptée pour une autre forme volume, et cette observation a fondé une partie des résultats pionniers de D. Bakry et M. Émery [5], [4] dans l'étude d'inégalités de trou spectral, de Sobolev logarithmique et de Sobolev pour des opérateurs de diffusion généralisant le laplacien sur une variété. Un exemple simple est le cas d'une mesure de probabilités $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$ sur \mathbb{R}^n pour un potentiel (régulier) V tel que, en tout point, $\text{Hess}_x(V) \geq K$ pour un $K > 0$ (la mesure gaussienne standard $(2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}dx$, $|\cdot|$ désignant la norme euclidienne, par exemple avec $K = 1$). La mesure μ est invariante et symétrique pour l'opérateur linéaire $L = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, et l'hypothèse de convexité sur V se retrouve dans l'analogue de la formule de Bochner pour L ,

$$(3) \quad \begin{aligned} \Gamma_2(f, f) &\equiv \frac{1}{2} L(|\nabla f|^2) - \nabla f \cdot \nabla(Lf) \\ &= \|\text{Hess}(f)\|_2^2 + \text{Hess}(V)(\nabla f, \nabla f) \geq K |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

(Noter que, dans cette famille d'exemples, il n'est en général pas possible d'introduire dans l'inégalité (3) un analogue $\frac{1}{n} (Lf)^2$ du terme dimensionnel pour un $n < \infty$.) D. Bakry et M. Émery démontrent que la mesure μ vérifie l'inégalité de Poincaré ou de trou spectral

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\mu \leq \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\mu, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 0$$

(qui caractérise variationnellement le λ_1 sur une variété), ainsi que l'inégalité (plus forte) de Sobolev logarithmique ([50], [25])

$$(5) \quad H_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\mu \leq \frac{1}{2K} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f} |\nabla f|^2 d\mu, \quad f > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = 1.$$

Le membre de gauche $H_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \log f d\mu$ définit l'entropie relative de la densité de probabilités f par rapport à μ , et l'intégrale $I_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{f} |\nabla f|^2 d\mu$ l'information de Fisher. (Que l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) renforce l'inégalité de Poincaré (4) peut se constater en appliquant la première à $1 + \varepsilon f$, $\int f d\mu = 0$, et en faisant tendre ε vers 0.) Dans cette étude, ils mettent en jeu une méthode de paramétrisation le long du semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t \geq 0}$ associé à l'opérateur L (solution de l'équation $\frac{\partial}{\partial t} P_t f = L P_t f$) par la propriété de flot de gradient

$$\frac{d}{dt} H_\mu(P_t f) = \int_{\mathbb{R}^n} L P_t f \log P_t f d\mu = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{P_t f} |\nabla P_t f|^2 d\mu.$$

L'opérateur Γ_2 issu de la formule de Bochner (3) décrit par la formule

$$\frac{d^2}{dt^2} H_\mu(P_t f) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t f \Gamma_2(\log P_t f, \log P_t f) d\mu$$

les propriétés de convexité de l'entropie H_μ le long de P_t qui conduisent à l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) sous l'hypothèse de convexité uniforme d'ordre $K > 0$

du potentiel V . Dans [3], D. Bakry démontre également une importante équivalence de la minoration de courbure $\Gamma_2 \geq K$ en une condition de commutation

$$(6) \quad |\nabla P_t f| \leq e^{-Kt} P_t(|\nabla f|)$$

entre les actions du semi-groupe et du gradient sur toute fonction f suffisamment régulière (qui permet d'atteindre les formes locales des inégalités précédentes). Ces techniques ont permis d'établir nombre d'inégalités fonctionnelles pour des opérateurs de Markov et leurs formes de Dirichlet associées [4]. Ce cadre couvre naturellement le cas des variétés à poids $d\mu = e^{-V} dx$ pour lesquelles la minoration sur l'opérateur Γ_2 s'exprime à travers le critère

$$(7) \quad \text{Ric}_x + \text{Hess}_x(V) \geq K, \quad x \in M.$$

Le tenseur de Bakry-Émery $\text{Ric} + \text{Hess}(V)$, dont plusieurs aspects géométriques et topologiques sont présentés dans [39] et [32], apparaît également dans l'équation du flot de Ricci (modifiée) considérée par G. Perelman [44]. La comparaison avec la minoration (2) permet aussi d'introduire une notion de couple courbure-dimension (pas nécessairement la dimension topologique pour des opérateurs différentiels du second ordre sur une variété : par exemple, comme noté plus haut, \mathbb{R}^n muni de la structure euclidienne et de la mesure gaussienne standard définit de cette façon un espace de courbure 1 et de dimension infinie). Nous renvoyons à la synthèse [4] pour plus de détails. Si ces définitions permettent de définir une notion de minorant de la courbure de Ricci pour des espaces et modèles généraux (variétés riemanniennes, graphes, modèles de mécanique statistique, etc.) et de travailler avec elle, celle-ci nécessite néanmoins la donnée préalable, non triviale, d'une structure d'opérateur de diffusion sur ces espaces.

C'est une autre technique de paramétrisation qui va permettre de considérer une notion de minorant de courbure de Ricci dans des espaces métriques mesurés assez généraux, sans donnée complémentaire, étendant la courbure sur les variétés et présentant de remarquables propriétés de stabilité, notamment par limite de Gromov-Hausdorff (mesurée). Cette paramétrisation est issue de la théorie du transport de masse et, à nouveau, la recherche et la compréhension d'inégalités fonctionnelles et géométriques, comme par exemple celle de Brunn-Minkowski, ont joué un rôle prépondérant dans son développement.

L'inégalité géométrique de Brunn-Minkowski-Lusternik indique que, pour des parties compactes non vides A, B de \mathbb{R}^n

$$(8) \quad \text{vol}(A + B)^{1/n} \geq \text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n},$$

où $A + B$ désigne la somme de Minkowski $\{x + y; x \in A, y \in B\}$. En choisissant pour B une boule euclidienne de rayon tendant vers 0, cette inégalité conduit à l'inégalité

isopérimétrique de \mathbb{R}^n . Par homogénéité, l'inégalité (8) est équivalente à

$$\text{vol}((1-t)A + tB) \geq \text{vol}(A)^{1-t} \text{vol}(B)^t$$

où $t \in [0, 1]$ et, sous cette forme, s'établit très souvent par l'intermédiaire de sa version sur les fonctions connue comme le théorème de Prékopa-Leindler (cf. [36]).

THÉORÈME 1.1. — *Si $t \in [0, 1]$ et si f_0, f_1, f_t sont trois fonctions mesurables positives ou nulles sur \mathbb{R}^n telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$(9) \quad f_t((1-t)x + ty) \geq f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t,$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0 dx \right)^{1-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1 dx \right)^t.$$

La formulation du théorème de Prékopa-Leindler pour une mesure $d\mu = e^{-V} dx$ dans \mathbb{R}^n telle que $\text{Hess}_x(V) \geq K$, $K \in \mathbb{R}$, s'énonce après un changement de fonctions sous la forme : si $t \in [0, 1]$ et si f_0, f_1, f_t sont trois fonctions positives ou nulles sur \mathbb{R}^n telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(10) \quad f_t((1-t)x + ty) \geq e^{-Kt(1-t)|x-y|^2/2} f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t,$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t d\mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_0 d\mu \right)^{1-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1 d\mu \right)^t.$$

On aura observé l'apparition du coefficient $e^{-Kt(1-t)|x-y|^2/2}$ qui peut s'interpréter comme un coefficient de courbure reflétant les propriétés de convexité du potentiel V , et donc de la géométrie de l'espace mesuré \mathbb{R}^n muni de la mesure μ . En choisissant, dans (10), $f_0 = 1$, $f_1 = e^{f/t}$ et en faisant tendre t vers 1, il est démontré dans [8] comment déduire l'inégalité de Sobolev logarithmique (5) de cette version du théorème de Prékopa-Leindler.

Le théorème de Prékopa-Leindler peut se démontrer en faisant appel au semi-groupe de la chaleur $(P_t)_{t \geq 0}$ sur \mathbb{R}^n [9] (qui démontre la stabilité de l'hypothèse (9) sous P_t), mais le succès de cette étude va se faire à travers une interpolation par transports de mesures initiée par R. McCann [37], et développée ensuite par F. Barthe dans l'obtention d'inégalités de Brascamp-Lieb (cf. [7], [36]). L'un de ces transports, mis en évidence par Y. Brenier [10, 11] et S. T. Rachev et L. Rüschendorf [48], assure que le transport d'une mesure à densité $f_0(x)dx$ sur \mathbb{R}^n vers une autre mesure à densité $f_1(y)dy$ de même masse peut s'effectuer par le gradient $\nabla\varphi$ d'une fonction convexe φ ($f_1(y)dy$ est la mesure image de $f_0(x)dx$ par l'application $T = \nabla\varphi$ de \mathbb{R}^n

dans lui-même). Considérant alors le changement de variable $z = (1-t)x + t\nabla\varphi(x)$ en supposant φ suffisamment régulière,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_t(z) dz &\geq \int_{\mathbb{R}^n} f_t((1-t)x + t\nabla\varphi(x)) \det((1-t)\text{Id} + t\text{Hess}_x \varphi) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)^{1-t} f_1(\nabla\varphi(x))^t (\det \text{Hess}_x \varphi)^t dx \end{aligned}$$

où la seconde inégalité résulte de l'hypothèse (9) et de l'inégalité arithmético-géométrique sur le déterminant des matrices symétriques positives $\det((1-t)A+tB) \geq (\det A)^{1-t}(\det B)^t$. La conclusion s'ensuit à travers l'équation de Monge-Ampère

$$f_0(x) = f_1(\nabla\varphi(x)) \det(\text{Hess}_x \varphi)$$

issue du transport de $f_0(x)dx$ vers $f_1(y)dy$ par $\nabla\varphi$. Une justification rigoureuse nécessite des propriétés de régularité du transport ; des résultats de régularité forte sur φ (sous des hypothèses sur f_0 et f_1) ont été mis en évidence par L. Caffarelli [14] alors que R. McCann [37] étend l'équation de Monge-Ampère en un sens faible généralisé suffisant pour la démonstration (cf. [7], [36], [18]...).

Ainsi qu'il est exposé dans [36], d'autres transports peuvent être mis en œuvre à cet effet, comme par exemple le transport triangulaire de Knothe. Le transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf est néanmoins optimal pour le problème dit de Monge assurant, avec les notations précédentes, l'existence d'une solution à la minimisation

$$\inf \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2 f_0(x) dx$$

sur toutes les applications $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoyant la mesure $f_0(x)dx$ sur $f_1(y)dy$ (sous l'hypothèse de moments d'ordre 2), donnée donc par l'application par $T = \nabla\varphi$, unique $f_0 dx$ -presque partout. Ce changement de variable monotone est donc canonique, ne dépendant que de la structure euclidienne. Le problème de G. Monge, qui remonte à son mémoire de 1781 sur la théorie des déblais et des remblais et a été étendu par L. V. Kantorovich aux plans de transfert, est une question ancienne qui a donné lieu à de nombreux développements dans le cadre de la théorie du transport optimal et de ses applications pour laquelle nous renvoyons à la monographie [45] pour les aspects classiques. La vision du transport optimal qu'en a développée Y. Brenier et son potentiel applicatif marquent une étape fondamentale dans le regain d'intérêt de cette théorie avec l'étude analytique et géométrique des minimisantes du transport et ses interactions avec la théorie des équations aux dérivées partielles (équation de Monge-Ampère, mécanique des fluides, équations de diffusion...) ainsi qu'en témoigne la première monographie, déjà célèbre, de C. Villani [54] (voir aussi [56] pour des aspects plus dynamique, probabiliste et géométrique).

Le caractère canonique du transport de Brenier-Rachev-Rüschendorf ouvre parallèlement la porte à son extension géométrique dans les variétés riemanniennes. Celle-ci,

due à R. McCann [38], requiert une reformulation adéquate en termes du déplacement de x à $T(x) = x + \nabla\psi(x)$ ($\psi(x) = \varphi(x) - \frac{|x|^2}{2}$) afin de comparer le gradient du transport à la hessienne du carré de la distance riemannienne. (M, g) désignera une variété riemannienne complète, connexe, de classe C^∞ (l'hypothèse supplémentaire de compacité pourra simplifier, voire justifier, divers aspects techniques, notamment dans ce texte). L'application exponentielle $\exp_x(v)$ d'un champ de vecteurs v sur (M, g) associe au point x le point $y = \gamma(1)$ obtenu en suivant pendant un temps 1 une courbe géodésique γ issue de x avec la vitesse v . Sur une variété riemannienne complète M , le transport optimal T de $f_0(x)dx$ vers $f_1(y)dy$ qui minimise

$$\inf \int_M d(x, T(x))^2 f_0(x) dx$$

pour la distance géodésique d est de la forme $T(x) = \exp_x(\nabla\psi(x))$ où ψ est $d^2/2$ -convexe au sens où elle peut s'écrire comme une transformée de Legendre

$$\psi(x) = \sup_{y \in M} \left[\zeta(y) - \frac{d(x, y)^2}{2} \right]$$

par rapport à $d^2/2$ (dans \mathbb{R}^n , $\psi(x) = \varphi(x) - \frac{|x|^2}{2}$ et $\zeta(y) = -\varphi^*(y) + \frac{|y|^2}{2}$ où φ^* est la conjuguée de Fenchel-Legendre de φ). Cette propriété exprime que, en un sens faible,

$$\left[\text{Hess}_x \left(\frac{1}{2} d^2(\cdot, T(x_0)) + \psi \right) \right]_{x=x_0} \geq 0$$

pour presque tout x_0 dans le support de f_0 . Cette intervention de la métrique riemannienne fait la richesse du transport optimal dans les variétés. Si $J(x)$ est le jacobien de T , l'équation jacobienne $f_0(x) = f_1(\exp_x(\nabla\psi(x)))J(x)$ est satisfaite $f_0(x)dx$ -presque partout.

Noter que les atouts du transport optimal de Brenier-Rachev-Rüschendorf-McCann sont quelque peu amoindris par les difficultés liées à son manque de régularité, même pour des densités régulières (cf. [56]). Si, suivant les problèmes abordés, des arguments d'approximation peuvent être mis à profit, développer les changements de variables du transport optimal dans un cadre régulier n'est en général pas possible, en particulier dans les variétés. Une construction remarquable de G. Loeper [31] montre par exemple que sur une variété riemannienne compacte dont une courbure sectionnelle est strictement négative en un point, il existe des densités de probabilités C^∞ et strictement positives pour lesquelles le transport optimal est discontinu. La théorie du transport optimal fait donc nécessairement appel à des outils d'analyse non régulière, souvent délicats, développés avec succès ces dernières années en particulier par l'école italienne autour de L. Ambrosio (cf. [1]).

Forts de cette version géométrique du transport optimal, D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger [19] ont ainsi entrepris d'étendre la démonstration par transport du théorème de Prékopa-Leindler au cas des variétés riemanniennes,

à l'aide notamment d'un corpus de lemmes techniques d'analyse non régulière, d'intérêt indépendant. Le schéma de la preuve consiste à introduire l'interpolation par déplacement $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, $t \in [0, 1]$, issue du transport optimal entre $f_0(x)dx$ et $f_1(y)dy$. Le changement de variables (non régulier) $z = F_t(x)$ conduit alors à la différentielle $dF_t(x)$ qui définit une matrice de champs de Jacobi le long de la géodésique $t \mapsto F_t(x)$. Les auteurs de [19] démontrent que les variations du changement de variables sont contrôlées par les facteurs de distorsion du volume $v_t(x, y)$ et $v_{1-t}(y, x)$ où

$$(11) \quad v_t(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(Z_t(x, B_r(y)))}{\text{vol}(B_{tr}(y))},$$

$B_r(y)$ désignant la boule géodésique de rayon r et de centre $y \in M$ et $Z_t(x, B_r(y))$ l'ensemble des t -barycentres de $x \in M$ et $z \in B_r(y)$. Les coefficients $v_t(x, y)$ et $v_{1-t}(y, x)$, liés à la différentielle de l'application exponentielle et à la hessienne de la fonction distance, conduisent à une forme générale remarquable du théorème de Prékopa-Leindler [19]. Ils peuvent être évalués sous des conditions de courbure par le théorème de comparaison de Bishop ; ils sont par exemple minorés par 1 en courbure de Ricci positive ou nulle (égaux à 1 dans \mathbb{R}^n), ce qui donne ainsi lieu à l'extension riemannienne du théorème 1.1 et met en évidence l'influence de la courbure sur le transport optimal dans une variété. Dans cet ordre d'idée, D. Cordero-Erausquin, R. McCann et M. Schmuckenschläger démontrent à la fin de leur article une propriété de convexité de la fonctionnelle d'entropie H de Boltzmann, définie par $H(\nu) = \int_M \frac{d\nu}{dx} \log \frac{d\nu}{dx} dx$ pour une mesure de probabilités ν (avec quelques précautions dans l'existence de l'intégrale), par rapport à la mesure de volume le long des géodésiques du transport (convexité par déplacement) dans les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle (sorte de forme duale du théorème de Prékopa-Leindler).

THÉORÈME 1.2. — *Dans une variété riemannienne complète (M, g) de courbure de Ricci positive ou nulle, pour tout couple (ν_0, ν_1) de mesures de probabilités absolument continues sur M , si ν_t , $t \in [0, 1]$, désigne la mesure ν_0 poussée par l'application $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, alors*

$$(12) \quad H(\nu_t) \leq (1-t)H(\nu_0) + tH(\nu_1).$$

Esquisse de démonstration. En désignant par $J_t(x)$ le jacobien (en un sens généralisé décrit dans [19]) de $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, l'équation de Monge-Ampère $f_0 = f_t(F_t)J_t$, où $f_t = \frac{d\nu_t}{dx}$ et J_t est le jacobien de F_t , fournit

$$H(\nu_t) = \int f_t \log f_t dx = \int \log f_t(F_t) d\nu_0 = H(\nu_0) - \int \log J_t d\nu_0.$$

L'inégalité jacobienne de [19], issue d'une analyse fine et délicate de champs de Jacobi et de la log-concavité du déterminant des matrices symétriques définies positives, indique qu'en les points x où ψ admet une hessienne généralisée,

$$\log J_t(x) \geq (1-t) \log(v_{1-t}(F_1(x), x)) + t \log(v_t(x, F_1(x))J_1(x))$$

pour les coefficients de distorsion v de (11). Ceux-ci étant uniformément minorés par 1 en courbure positive ou nulle,

$$(1-t)H(\nu_0) + tH(\nu_1) - H(\nu_t) = \int \log J_t d\nu_0 - t \int \log J_1 d\nu_0 \geq 0$$

et la conclusion s'ensuit. \square

Le théorème 1.2 était conjecturé en fait dès 1999 par F. Otto et C. Villani [43] qui ont mis en évidence les liens profonds entre l'interpolation le long du transport optimal et les équations aux dérivées partielles associées. Les travaux de R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto [27] et, plus significativement encore, de F. Otto [42] sur lesquels s'appuient les auteurs de [43] définissent formellement une structure naturelle de variété riemannienne (de dimension infinie) sur l'espace $\mathcal{P}_2(M)$ des mesures de probabilités sur M ayant un moment d'ordre 2 telle que le flot de gradient associé à l'entropie H est l'équation de la chaleur (voir [2] pour une présentation rigoureuse dans le cas de l'espace euclidien). Une direction le long d'une courbe (ν_t) dans $\mathcal{P}_2(M)$ peut être (formellement) représentée par l'équation $\partial_t \nu_t = -\nabla \cdot (\nu \nabla \Phi)$ où $\Phi \equiv \Phi(t)$ est une fonction sur M . L'« espace tangent » $T_\nu \mathcal{P}_2(M)$ est ainsi paramétré par Φ , et le produit scalaire formel sur $T_\nu \mathcal{P}_2(M)$ est donné par la forme quadratique $\int_M \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi d\nu$. Munie de cette métrique riemannienne, l'équation géodésique sur $\mathcal{P}_2(M)$ prend la forme de l'équation d'Hamilton-Jacobi $\partial_t \Phi + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0$. La longueur associée sur $\mathcal{P}_2(M)$ correspond à la distance de Wasserstein (voir la définition 2.1 plus bas) et les géodésiques correspondent précisément à l'interpolation par $\exp(t\nabla \psi)$ au sens du transport optimal. Le flot de gradient issu de l'entropie

$$\frac{d}{dt} H(\nu_t) = - \int_M \Delta \Phi f_t dx,$$

où f_t est la densité de ν_t par rapport à la mesure de volume sur M , suggère naturellement la question de la convexité de H . Le calcul riemannien formel montre en effet que le long d'une courbe (ν_t) ,

$$\frac{d^2}{dt^2} H(\nu_t) = \int_M [|\text{Hess}(\Phi)|^2 + \text{Ric}(\nabla \Phi, \nabla \Phi)] f_t dx.$$

Ce calcul formel, qui s'apparente à la démarche de D. Bakry et M. Émery [5] exposée précédemment, justifie ainsi intuitivement le théorème 1.2.

Un des points de départ des travaux de J. Lott et C. Villani, et K.-T. Sturm, est l'observation, cruciale, due à M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm [47], suivant laquelle

la réciproque au théorème 1.2 est vraie, à savoir la convexité par déplacement (12) caractérise en fait la courbure de Ricci positive ou nulle. Les arguments sont locaux, et M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm font usage d'une comparaison de petits volumes pour les mesures uniformes normalisées ν_0 et ν_1 sur deux boules géodésiques. J. Lott et C. Villani [34] (voir aussi [56]) proposent une démonstration par une étude locale du transport optimal de ν_0 concentrée sur une petite boule B autour d'un point x_0 par $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$, où ψ est définie dans un voisinage de x_0 , régulière et telle que $\nabla\psi(x_0) = v$, $\text{Hess}_{x_0}(\psi) = g(x_0)$ pour un $v \in T_{x_0}(M)$ fixé. On montre que $\varepsilon\psi$ est $d^2/2$ -convexe pour ε suffisamment petit. Ainsi, F_ε est l'unique transport optimal de ν_0 à $\nu_1 = \nu_0 \circ F_\varepsilon^{-1}$, et $\nu_0 \circ F_{\varepsilon t}^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, l'unique géodésique de Wasserstein joignant ν_0 à ν_1 . Lorsque le rayon de B et ε tendent vers 0 dans l'inégalité de convexité de l'entropie le long de cette géodésique, des calculs locaux entraînent que $\text{Ric}_{x_0}(v, v) \geq 0$, et ainsi la conclusion.

Ces diverses observations forment le point de départ d'une théorie de la courbure de Ricci dans les espaces métriques mesurés à l'aide du transport optimal : sur la base du théorème 1.2, et de sa caractérisation d'une minoration (positive ou nulle) de la courbure de Ricci d'une variété riemannienne, il n'y a qu'un pas pour définir une courbure positive ou nulle d'un espace métrique mesuré (X, d, μ) en postulant l'existence d'une géodésique dans l'espace $\mathcal{P}_2(X)$ des mesures de probabilités sur X liant deux probabilités ν_0 et ν_1 le long de laquelle certaines fonctionnelles non linéaires de densités de probabilités, comme l'entropie H de Boltzmann, sont convexes. Cette démarche fournit une définition synthétique et robuste de courbure qui étend la courbure de Ricci riemannienne et qui présente de remarquables propriétés de stabilité par convergence de Gromov-Hausdorff (mesurée) établies dans les travaux de J. Lott, C. Villani [34] et K.-T. Sturm [52].

2. COURBURE DE RICCI D'ESPACES MÉTRIQUES MESURÉS

Avant de présenter les résultats de J. Lott, C. Villani et K.-T. Sturm, précisons quelques éléments de vocabulaire en géométrie métrique. Dans un espace métrique (X, d) , une courbe joignant deux points $x, y \in X$ est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. La longueur de γ est définie par $L(\gamma) = \sup \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$ où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$. Une courbe γ est géodésique si $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$. Les géodésiques seront toujours paramétrées à vitesse constante $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t| d(\gamma(0), \gamma(1))$. L'espace métrique (X, d) est un espace de longueurs si, pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = \inf L(\gamma)$ où l'infimum porte sur toutes les courbes γ joignant x à y . L'espace (X, d) est dit géodésique si tout couple de

points $x, y \in X$ est relié par une géodésique. Dans un espace géodésique, il existe des points milieux, ou t -milieux ($t \in [0, 1]$), z entre $x, y \in X$, i.e. $d(x, z) = td(x, y)$, $d(z, y) = (1 - t)d(x, y)$.

La notion de minorant de courbure de Ricci d'un espace métrique va s'obtenir en plongeant celui-ci dans un espace de mesures de probabilités appelé espace de Wasserstein.

DÉFINITION 2.1. — Si (X, d) est un espace métrique, l'espace $\mathcal{P}_2(X)$ des mesures de probabilités ν sur les boréliens de X admettant un moment d'ordre 2, au sens où $\int_X d(x, x_0)^2 d\nu(x) < \infty$ pour un, ou tout, $x_0 \in X$, est appelé espace de Wasserstein L^2 sur (X, d) . Il est muni de la distance de Wasserstein

$$d_W(\nu, \nu') = \left(\inf \int_{X \times X} \frac{d(x, y)^2}{2} d\pi(x, y) \right)^{1/2}$$

où l'infimum porte sur toutes les mesures de probabilités π sur l'espace produit $X \times X$ de marginales ν et ν' dans $\mathcal{P}_2(X)$ (π est dit un couplage, ou plan de transfert, de ν et ν').

L'espace de Wasserstein $\mathcal{P}_2(X)$ est de longueurs si (X, d) l'est. L'espace X est naturellement plongé dans $\mathcal{P}_2(X)$ par $x \mapsto \delta_x$. J. Lott et C. Villani [34] et K.-T. Sturm [52] précisent les liens entre les courbures d'Aleksandrov de X (sectionnelle dans une variété) et de $\mathcal{P}_2(X)$. Comme décrit dans le premier paragraphe, si X est une variété riemannienne complète et si $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2(X)$ (avec ν_0 absolument continue par rapport à la mesure de volume), il existe une unique géodésique dite de Wasserstein $(\nu_t)_{t \in [0, 1]}$ dans $\mathcal{P}_2(X)$ joignant ν_0 et ν_1 donnée par le transport optimal $F_t(x) = \exp_x(t\nabla\psi(x))$ (poussant ν_0 en ν_t , $t \in [0, 1]$).

Dans toute la suite, un espace métrique mesuré (X, d, μ) désignera un espace métrique séparable complet (X, d) muni d'une mesure μ sur les boréliens de X localement finie, et souvent finie et normalisée en une mesure de probabilités. J. Lott et C. Villani [34] le supposent en outre toujours de longueurs, voire géodésique (en fait, sous une hypothèse minimale de courbure $> -\infty$, quand la mesure μ est finie, son support est toujours de longueurs). À la lumière des développements riemanniens présentés dans la première partie, une définition naturelle et intrinsèque d'un minorant de courbure (de Ricci) sur un espace métrique mesuré est alors la suivante. Pour la courbure positive ou nulle, c'est la forme mise en évidence dans le théorème 1.2, étendue pour une courbure quelconque $K \in \mathbb{R}$ comme une convexité uniforme d'ordre K par rapport à la distance de Wasserstein d_W .

DÉFINITION 2.2. — Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est dit de courbure (de Ricci) minorée par $K \in \mathbb{R}$ si pour tout couple (ν_0, ν_1) de mesures de probabilités de

$\mathcal{P}_2(X)$, de supports contenus dans le support de μ , il existe une géodésique $(\nu_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathcal{P}_2(X)$ joignant ν_0 et ν_1 telle que

$$H_\mu(\nu_t) \leq (1-t)H_\mu(\nu_0) + tH_\mu(\nu_1) - Kt(1-t)d_W(\nu_0, \nu_1)^2, \quad t \in [0, 1],$$

où $H_\mu(\nu) = \int_X \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu$ est l'entropie de ν par rapport à μ (supposée bien définie dans l'inégalité ci-dessus).

La définition de J. Lott et C. Villani [34] est un peu plus restrictive, mais elle coïncide avec la précédente utilisée par K.-T. Sturm [52] pour des espaces sans branchements (une géodésique $[0, 1] \rightarrow X$ est entièrement déterminée par sa restriction à un sous-intervalle de $[0, 1]$).

Comme annoncé, le théorème suivant, pour $K = 0$, résulte de la discussion menée lors de la première partie.

THÉORÈME 2.3. — *Une variété riemannienne complète (M, g) est de courbure de Ricci minorée par K , $K \in \mathbb{R}$, si et seulement si l'espace métrique mesuré formé de M muni de sa distance géodésique et de sa mesure de volume riemannien est de courbure minorée par K .*

L'extension à une courbure quelconque $K \in \mathbb{R}$ est établie dans [47] (dans cet article, M.-K. von Renesse et K.-T. Sturm mettent par ailleurs en évidence diverses caractérisations de la courbure de Ricci étendant notamment les propriétés de commutation de gradient et de semi-groupe de la chaleur (6)). Si la variété est à poids, de densité e^{-V} par rapport à la mesure de volume dx , la définition 2.2 est équivalente au critère de Ricci-Bakry-Émery (7), $\text{Ric}_x + \text{Hess}_x(V) \geq K$ (cf. [51] et [20] pour l'extension du théorème de Prékopa-Leindler dans la forme (10)). En fait, la définition 2.2 et le théorème 2.3 fournissent une définition alternative de minorant de courbure de Ricci d'une variété riemannienne déjà intéressante en elle-même ainsi que par ses conséquences et le nouveau point de vue qu'elle exprime.

L'un des résultats principaux des travaux [34] et [52] est la stabilité de la définition précédente par convergence de Gromov-Hausdorff. Comme les mesures entrent en jeu, il convient d'associer leur convergence. Ceci peut s'effectuer par exemple à travers des familles d'isométries approchées. Une suite d'espaces métriques compacts mesurés normalisés $(X_i, d_i, \mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers un espace limite (X, d, μ) s'il existe une suite $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de réels positifs convergeant vers 0 et une famille $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de ε_i -isométries boréliennes $h_i : X_i \rightarrow X$ telles que les mesures μ_i poussées par h_i convergent faiblement vers μ (sur (X, d)) [13], [24], [22], [16], [34], [56] ($h_i : X_i \rightarrow X$ est une ε_i -isométrie si pour tous $x_i, y_i \in X_i$, $|d(h_i(x_i), h_i(y_i)) - d_i(x_i, y_i)| \leq \varepsilon_i$ et si, pour tout $x \in X$, il existe $x_i \in X_i$ tel que

$d(x, h_i(x_i)) \leq \varepsilon_i$). Cette convergence est une notion assez faible qui autorise des limites singulières ou des changements de dimension. K.-T. Sturm [52] introduit quant à lui une distance \mathbb{D} entre deux espaces métriques mesurés normalisés (X, d, μ) et (X', d', μ') en posant

$$(13) \quad \mathbb{D}((X, d, \mu), (X', d', \mu')) = \inf \left(\int_{X \times X'} D(x, y)^2 d\pi(x, y) \right)^{1/2}$$

où l'infimum porte sur tous les couplages π de μ et μ' et tous les couplages D de d et d' sur l'union disjointe $X \sqcup X'$ de X et X' . La métrique \mathbb{D} est complète et séparable sur la famille des classes d'isomorphismes d'espaces métriques mesurés (normalisés). La convergence pour \mathbb{D} est plus faible que la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée (équivalente pour des espaces métriques mesurés de diamètres uniformément bornés et de mesures de supports l'espace entier et satisfaisant une condition uniforme de doublement). Le chapitre 3 $\frac{1}{2}$ de [24] décrit d'autres distances sur des familles d'espaces métriques mesurés.

Cette convergence de Gromov-Hausdorff mesurée est appropriée pour couvrir des exemples naturels de limites d'espaces, comme la convergence de produits finis vers un produit infini, la convergence de la dimension vers l'infini (\mathbb{R}^n muni d'une mesure gaussienne par exemple), la convergence de discrétisation de variétés riemanniennes, les modèles fractals ou des effondrements de la mesure (cf. [52], [56]). Modulo les définitions respectives, un des théorèmes principaux de J. Lott, C. Villani [34] et K.-T. Sturm [52] est la stabilité de la définition de minorant de courbure par limite de Gromov-Hausdorff mesurée.

THÉORÈME 2.4. — *Soit $(X_i, d_i, \mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts mesurés normalisés convergeant vers un espace limite (X, d, μ) au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée telle que, pour chaque i , (X_i, d_i, μ_i) soit de courbure minorée par K , $K \in \mathbb{R}$. Alors l'espace métrique mesuré (X, d, μ) est aussi de courbure minorée par K .*

Esquisse de démonstration. — Les idées principales reposent sur la stabilité de l'espace de Wasserstein par la limite de Gromov-Hausdorff, la stabilité du transport optimal et les bonnes propriétés de la fonctionnelle d'entropie (semi-continuité inférieure, principe de contraction). Un peu plus précisément, en suivant [34], soient ν_0 et ν_1 dans $\mathcal{P}_2(X)$ de densités respectives f_0 et f_1 par rapport à μ . Poser $\mu_i \circ h_i^{-1}$ la mesure μ_i poussée par une ε_i -isométrie $h_i : X_i \rightarrow X$, et définir ν_0^i et ν_1^i comme les mesures sur X_i telles que leurs images par h_i soient respectivement $f_0 \mu_i \circ h_i^{-1}$ et $f_1 \mu_i \circ h_i^{-1}$ normalisées en des mesures de probabilités. Les suites de mesures $\nu_0^i \circ h_i^{-1}$ et $\nu_1^i \circ h_i^{-1}$, $i \in \mathbb{N}$, convergent faiblement vers ν_0 et ν_1 respectivement, et $H_{\mu_i}(\nu_0^i) \rightarrow H_{\mu}(\nu_0)$,

$H_{\mu_i}(\nu_1^i) \rightarrow H_{\mu}(\nu_1)$. Par définition, il existe, pour tout $i \in \mathbb{N}$, une géodésique $(\nu_t^i)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathcal{P}_2(X_i)$ reliant ν_0^i et ν_1^i telle que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(14) \quad H_{\mu_i}(\nu_t^i) \leq (1 - t)H_{\mu_i}(\nu_0^i) + tH_{\mu_i}(\nu_1^i) - Kt(1 - t)d_W(\nu_0^i, \nu_1^i)^2.$$

La convergence de Gromov-Hausdorff de X_i vers X s'étend en la convergence des espaces de Wasserstein $\mathcal{P}_2(X_i)$ vers $\mathcal{P}_2(X)$. En particulier, $d_W(\nu_0^i, \nu_1^i) \rightarrow d_W(\nu_0, \nu_1)$. Par un argument de compacité, les composées $\nu_t^i \circ h_i^{-1}$ convergent uniformément (le long d'une sous-suite) vers une application continue $\nu : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}_2(X)$ qui définit une géodésique de Wasserstein de ν_0 à ν_1 . Il reste à passer à la limite dans (14). La propriété de contraction

$$H_{\mu_i \circ h_i^{-1}}(\nu_t^i \circ h_i^{-1}) \leq H_{\mu_i}(\nu_t^i)$$

ainsi que la limite

$$H_{\mu}(\nu_t) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} H_{\mu_i \circ h_i^{-1}}(\nu_t^i \circ h_i^{-1})$$

issus de la représentation variationnelle et de la semi-continuité inférieure de l'entropie permettent alors de conclure. K.-T. Sturm [52] de son côté définit une application canonique Q' entre les espaces de Wasserstein $\mathcal{P}_2(X)$ et $\mathcal{P}_2(X')$ de deux espaces métriques mesurés (X, d, μ) et (X', d', μ') à partir d'un couplage des distances et des mesures. Ce couplage est construit de sorte que l'image de μ par Q' est μ' et que, pour toute mesure ν absolument continue par rapport à μ , $H_{\mu'}(\nu') \leq H_{\mu}(\nu)$ où ν' est l'image de ν par Q' . En outre,

$$d_W^2(\nu, \nu') \leq \frac{2 + B^2 H_{\mu}(\nu)}{-\log \mathbb{D}}$$

où B est une constante contrôlée par les diamètres de X et X' et $\mathbb{D} < 1$ leur distance (13). Ces contrôles conduisent ensuite à la convergence de la suite d'espaces $(X_i, d_i, \mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vers (X, d, μ) au sens de \mathbb{D} . □

L'extension du théorème 2.4 aux espaces métriques (pointés) localement compacts est développée dans [34] (voir aussi [56]).

Une autre propriété importante couverte par ces travaux [52] (voir aussi [56]) est une propriété de globalisation, dans l'esprit du théorème analogue de Topogonov en géométrie d'Aleksandrov. Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est localement de courbure minorée par K si tout point de X a un voisinage X' tel que X' muni des restrictions de d et μ est de courbure minorée par K . Si (X, d) est compact et sans branchements, et si $\mathcal{P}_2(X)$ est géodésique, la courbure locale détermine alors la courbure globale.

L'hypothèse de courbure strictement positive permet d'atteindre parallèlement des familles d'inégalités fonctionnelles du type de celles évoquées au début de ce texte, et leurs applications à la concentration de la mesure [30], [54, 55, 56]. L'article [43] de

F. Otto et C. Villani décrit le schéma qui conduit de l'hypothèse de courbure de la définition 2.2 avec $K > 0$ à des inégalités de transport et de Sobolev logarithmique (5) par interpolation le long des géodésiques du transport. Dans \mathbb{R}^n , D. Cordero-Erausquin [17] utilise directement, et avec plus de souplesse, le changement de variables entre le point de départ et le point d'arrivée. Cet argument a permis d'atteindre de façon élégante et efficace les inégalités classiques de Sobolev dans \mathbb{R}^n , avec un nouveau point de vue dans l'identification de leurs fonctions extrémales [21], et a ouvert récemment de nouvelles perspectives dans l'analyse des déficits isopérimétriques.

3. COURBURE ET DIMENSION

La théorie géométrique développée grâce au transport optimal permet d'introduire une notion, effective, de dimension couplée avec celle de courbure, le tandem courbure et dimension permettant alors d'atteindre des bornes géométriques comme par exemple le théorème de Bonnet-Myers sur le diamètre. L'introduction de cette dimension s'effectue par le remplacement de la fonctionnelle non-linéaire d'entropie par une autre fonctionnelle convexe de type polynomial (entropie de Rényi). Typiquement, l'entropie H_μ sera généralisée en

$$U_\mu(\nu) = \int U(f) d\mu$$

où f est la densité de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ (en cas de partie singulière ν_s , compléter par un terme $U'(\infty)\nu_s(X)$) et $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur \mathbb{R} nulle en 0 et telle que $r \mapsto r^N U(r^{-N})$ soit convexe pour un $N > 1$ (non nécessairement entier). Par exemple, $U(r) = -r^{1-(1/N)}$. (Si $N = \infty$, remplacer $r^N U(r^{-N})$ par $e^r U(e^{-r})$ et couvrir ainsi la fonction $U(r) = r \log r$ de l'entropie.) Au moins lorsque $K = 0$, la définition d'espace de courbure positive ou nulle et de dimension N s'obtient essentiellement en remplaçant H_μ par U_μ . L'adaptation est cependant plus délicate (et assez lourde) pour une courbure quelconque et introduit des coefficients de distorsion dans les propriétés de convexité de la fonctionnelle correspondant aux modèles à courbure constante. On parlera alors d'espace métrique mesuré (X, d, μ) de courbure-dimension $\text{CD}(K, N)$, $K \in \mathbb{R}$, $N \in]1, \infty]$. J. Lott et C. Villani [34] introduisent $\text{CD}(0, N)$ pour N quelconque, K.-T. Sturm [53] la définition complète (voir aussi [35], [56]).

L'extension du théorème 2.4, à savoir la stabilité de cette courbure de Ricci minorée et de dimension donnée par convergence de Gromov-Hausdorff mesurée, est préservée. Nous renvoyons aux travaux originaux, ainsi qu'à la synthèse [56], pour plus de détails. Pour tout triplet (K, N, D) , la famille des espaces métriques mesurés normalisés (X, d, μ) de diamètres plus petits que D et vérifiant $\text{CD}(K, N)$ est compacte (pour la

métrique \mathbb{D}). Le théorème de stabilité par convergence de Gromov-Hausdorff mesurée est intéressant déjà pour des variétés. Il décrit par exemple la courbure-dimension des espaces limites qui sont réguliers (une variété, éventuellement à poids, limite de Gromov-Hausdorff mesurée de variétés de courbure de Ricci négative ou nulle et de dimension au plus n vérifie le critère $\text{CD}(0, n)$). Il permet d'atteindre par ailleurs des espaces singuliers ayant une courbure et une dimension.

Cette notion de courbure et dimension $\text{CD}(K, N)$ étend la définition de courbure de Ricci et de dimension d'une variété riemannienne (M, g) (la variété M munie de sa distance géodésique et de sa mesure de volume est un espace métrique mesuré de courbure et dimension $\text{CD}(K, N)$, $K \in \mathbb{R}$, $1 \leq N < \infty$, si et seulement si $\text{Ric}_M \geq K$ et $\dim(M) \leq N$). Elle couvre de la même façon les variétés à poids, ainsi que les opérateurs de diffusion étudiés par D. Bakry et M. Émery dont elle peut en être considérée comme la version géométrique, pour lesquelles la condition (7) est complétée par un facteur dimensionnel sous la forme

$$\text{Ric} + \text{Hess}(V) - (N - n)^{-1} \nabla V \otimes \nabla V \geq K, \quad N > n.$$

Les exemples non riemanniens ne sont certes pas encore très nombreux, mais ils indiquent déjà la richesse et le potentiel de la définition : cône euclidien, bord d'un convexe non régulier, \mathbb{R}^n muni d'une norme quelconque sont de courbure-dimension $\text{CD}(0, N)$ (avec $N = n$ pour le dernier exemple qui n'est pas un espace d'Aleksandrov, ni une limite d'espaces riemanniens de courbure de Ricci minorée). La définition de courbure peut être dans certains cas stable par quotient sous une action de groupe. Un exemple relevant de cet ordre d'idée est celui d'un groupe de Lie compact G agissant isométriquement sur une variété riemannienne M de dimension n et de courbure de Ricci positive ou nulle. Alors $X = M/G$ muni de la métrique quotient et de la mesure image de la mesure de volume sur M par l'application quotient est un espace métrique mesuré de courbure-dimension $\text{CD}(0, n)$. Le travail récent [28] de N. Juillet montre à l'opposé que l'espace de Heisenberg \mathbb{H}^n ne vérifie aucune condition $\text{CD}(K, N)$ (tout en satisfaisant une propriété plus faible de contraction de la mesure – voir plus bas). Les exemples de graphes et d'espaces discrets sont le sujet de quelques études récentes, pas encore parfaitement satisfaisantes cependant.

La mise en œuvre du critère $\text{CD}(K, N)$ développée dans [34] et [52, 53] pour l'obtention de bornes géométriques sur des espaces métriques mesurés (X, d, μ) répond au principe de M. Berger de la domination universelle de la courbure de Ricci. Un moyen commode dans leur obtention est la version dimensionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski qui, en courbure positive ou nulle de dimension N par exemple, énonce que

$$(15) \quad \mu([A, B]_{1-t})^{1/N} \geq (1-t)\mu(A)^{1/N} + t\mu(B)^{1/N},$$

où A et B sont des compacts non vides tels que $\mu(A)\mu(B) > 0$ et $[A, B]_{1-t}$ est l'ensemble de tous les $(1 - t)$ -barycentres de A et B le long de géodésiques. Cette dernière découle pour l'essentiel de la définition de $CD(0, N)$ appliquée à μ restreinte (et normalisée) à A et B respectivement. Elle permet d'établir aisément le théorème de comparaison de Bishop-Gromov sur le volume (pour tout point x dans le support de μ , $\mu(B(x, r))/r^N$ est une fonction décroissante de r) en appliquant l'inégalité (15) à $A = B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $B = B(x, r)$ et $t = \frac{\varepsilon}{r} < 1$. Ces deux résultats admettent des généralisations adéquates pour des courbures quelconques et, dans [52], des estimées sur la croissance du volume en dimension infinie sont également évoquées. De la même façon, le critère $CD(K, N)$ avec $K > 0$ et $N < \infty$ entraîne que le support de μ est compact, majoré par $\pi\sqrt{(N - 1)/K}$ (théorème de Bonnet-Myers).

La démonstration d'inégalités fonctionnelles dimensionnelles par le transport de mesures n'est pas encore, en revanche, complètement aboutie. L'exemple simple de la minoration de Lichnerowicz (1) nécessite un effort important [35], alors que la courbure au sens des opérateurs de diffusion est beaucoup plus souple à cet égard. Par exemple, la mesure de probabilités invariante μ d'un opérateur de diffusion L de courbure $N - 1$ et de dimension $N (> 2)$ vérifie l'inégalité optimale de Sobolev

$$(16) \quad \left(\int_X |f|^{2N/(N-2)} d\mu \right)^{(N-2)/N} \leq \int_X f^2 du + \frac{4}{N(N-2)} \int_X |\nabla f|^2 d\mu,$$

où $\int_X |\nabla f|^2 d\mu$ s'interprète comme la forme de Dirichlet $\int_X f(-Lf) d\mu$ [4]. (Cette inégalité de Sobolev optimale entraîne un théorème de Bonnet-Myers pour le générateur L [6].) Qu'en est-il sur un espace métrique mesuré de courbure-dimension $CD(N - 1, N)$? (L'article [35] présente des inégalités de Sobolev non optimales sous $CD(K, N)$, $K > 0$, $N < \infty$.)

Cette nouvelle approche d'une minoration de la courbure dans les espaces métriques mesurés suscite une activité importante de recherches, et pose de nombreuses questions (voir [56]). Parmi celles-ci, alors que des bornes sur la courbure sectionnelle impliquent automatiquement des bornes sur la courbure de Ricci dans une variété riemannienne, l'analogie entre courbure au sens d'Aleksandrov et cette définition synthétique de courbure de Ricci n'est pas encore éclaircie. Le critère de localité sous $CD(K, N)$ peut-il être étendu? Le théorème isopérimétrique de Lévy-Gromov, comparant sous $CD(N - 1, N)$ les fonctions isopérimétriques d'une variété à celle de la sphère \mathbb{S}^N (cf. [23]), voire seulement, ainsi que nous l'avons vu plus haut, l'inégalité de Sobolev (16), est pour l'instant hors d'atteinte par le biais de ces méthodes. De manière générale enfin, de nouveaux exemples d'espaces métriques avec courbure et dimension sans référence préalable à un cadre régulier, ainsi que des critères plus souples, sont certainement souhaitables.

On peut aussi espérer que cette courbure synthétique le long des géodésiques du transport permette d'aborder des questions plus analytiques. Le travail pionnier [27] suggère un semi-groupe de la chaleur et un laplacien naturels sur un espace métrique mesuré (X, d, μ) comme le flot de gradient sur $\mathcal{P}_2(X)$ de l'entropie H_μ , de sorte que des hypothèses de courbure minorée par K devraient impliquer des propriétés de contraction de noyaux de la chaleur p_t ,

$$d_W(\mu p_t, \nu p_t) \leq e^{-Kt} d_W(\mu, \nu),$$

des estimées de gradient, etc. S.-i. Ohta [41] et G. Savaré [49] ont obtenu récemment quelques résultats nouveaux dans cet ordre d'idée pour des familles d'espaces métriques sous des conditions sur la courbure d'Aleksandrov. Un lien mieux établi avec la courbure au sens d'un opérateur de diffusion reste également encore à comprendre.

La forme locale des inégalités de Poincaré est un outil privilégié pour le développement de l'analyse dans les espaces métriques mesurés. Des travaux récents (voir par exemple [15], [26]) montrent que, si un espace de longueurs mesuré (X, d, μ) vérifie une inégalité de doublement de la mesure et une inégalité de Poincaré locale, alors il admet une structure différentiable définie de manière mesurable. Parmi plusieurs définitions, (X, d, μ) est dit vérifier une inégalité de Poincaré locale, à l'échelle, s'il existe $\lambda \geq 1$ et $C > 0$ tels que, pour toute boule $B = B_r(x)$ avec $\mu(B) > 0$, et toute fonction lipschitzienne f sur X ,

$$\int_B |f - \int_B f d\mu|^2 d\mu \leq C r^2 \int_{\lambda B} |\nabla f|^2 d\mu.$$

Les références [15], [26] présentent les conséquences et applications d'une telle propriété, notamment pour la construction d'espaces de Sobolev. J. Cheeger et T. Colding [16] ont montré que les limites de variétés riemanniennes de courbure de Ricci (uniformément) minorée vérifient une inégalité de Poincaré locale (et cette dernière est stable par convergence de Gromov-Hausdorff mesurée). Les travaux récents [35], [53], [40], [46] démontrent des inégalités de Poincaré locales dans des espaces de longueurs de courbure-dimension $CD(0, N)$ sous une hypothèse supplémentaire d'unicité de géodésiques ou d'absence de branchements. Les auteurs de [35] considèrent à cet effet un couplage dit démocratique, ceux de [53], [40], [46] font usage d'une propriété de contraction de la mesure (voir aussi [29]). Cette dernière correspond en un certain sens au choix, dans la définition de $CD(K, N)$, de courbes dans l'espace $\mathcal{P}_2(X)$ dont l'une des extrémités est une masse de Dirac. Ces conditions partagent beaucoup des propriétés de stabilité et de convergence de $CD(K, N)$ et permettent d'atteindre plusieurs de ses conséquences géométriques. Sur la base d'études antérieures (voir [53] pour plus de détails), K.-T. Sturm met à profit l'outil de contraction de la mesure pour décrire une intégrale d'énergie d'ordre 2 dont la forme bilinéaire associée définit

une forme de Dirichlet sur $L^2(X, \mu)$, et un unique opérateur linéaire Δ_N qui fait office de laplacien. Ce cadre permet de développer une théorie du potentiel naturelle, et d'étendre ainsi des résultats classiques de régularité.

Remerciements

Je remercie F. Barthe, J. Bertrand, J. Lott, J.-M. Schlenker, K.-T. Sturm et C. Villani pour leurs remarques et commentaires sur la version préliminaire de ce texte.

RÉFÉRENCES

- [1] L. AMBROSIO, N. GIGLI & G. SAVARÉ – *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, 2005.
- [2] L. AMBROSIO & G. SAVARÉ – Gradient flows of probability measures, in *Handbook of Differential Equations. Evolutionary equations*, vol. 3, Elsevier, 2007.
- [3] D. BAKRY – Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques, in *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, 1985, p. 130–174.
- [4] ———, L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semigroupes, in *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, Lecture Notes in Math., vol. 1581, Springer, 1994, p. 1–114.
- [5] D. BAKRY & M. ÉMERY – Diffusions hypercontractives, in *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, 1985, p. 177–206.
- [6] D. BAKRY & M. LEDOUX – Sobolev inequalities and Myers's diameter theorem for an abstract Markov generator, *Duke Math. J.* **85** (1996), p. 253–270.
- [7] F. BARTHE – Autour de l'inégalité de Brunn-Minkowski, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **12** (2003), p. 127–178.

- [8] S. G. BOBKOV & M. LEDOUX – From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 1028–1052.
- [9] C. BORELL – Diffusion equations and geometric inequalities, *Potential Anal.* **12** (2000), p. 49–71.
- [10] Y. BRENIER – Décomposition polaire et réarrangement monotone des champs de vecteurs, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **305** (1987), p. 805–808.
- [11] ———, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), p. 375–417.
- [12] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.
- [13] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., 2001.
- [14] L. A. CAFFARELLI – The regularity of mappings with a convex potential, *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), p. 99–104.
- [15] J. CHEEGER – Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 428–517.
- [16] J. CHEEGER & T. H. COLDING – On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I, II, III, *J. Differential Geom.* **46** (1997), p. 406–480 ; **54** (2000), p. 13–35 & 37–74.
- [17] D. CORDERO-ERAUSQUIN – Some applications of mass transport to Gaussian-type inequalities, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **161** (2002), p. 257–269.
- [18] ———, Quelques exemples d’application du transport de mesure en géométrie euclidienne et riemannienne, in *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 22. Année 2003–2004*, Sémin. Théor. Spectr. Géom., vol. 22, Univ. Grenoble I, 2004, p. 125–152.
- [19] D. CORDERO-ERAUSQUIN, R. J. MCCANN & M. SCHMUCKENSHLÄGER – A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb, *Invent. Math.* **146** (2001), p. 219–257.
- [20] ———, Prékopa-Leindler type inequalities on Riemannian manifolds, Jacobi fields, and optimal transport, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **15** (2006), p. 613–635.
- [21] D. CORDERO-ERAUSQUIN, B. NAZARET & C. VILLANI – A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities, *Adv. Math.* **182** (2004), p. 307–332.
- [22] K. FUKAYA – Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* **87** (1987), p. 517–547.
- [23] S. GALLOT, D. HULIN & J. LAFONTAINE – *Riemannian geometry*, 3^e éd., Universitext, Springer, 2004.

- [24] M. GROMOV – *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math., vol. 152, Birkhäuser, 1999.
- [25] L. GROSS – Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.* **97** (1975), p. 1061–1083.
- [26] J. HEINONEN – *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer, 2001.
- [27] R. JORDAN, D. KINDERLEHRER & F. OTTO – The variational formulation of the Fokker-Planck equation, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998), p. 1–17.
- [28] N. JUILLET – Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group, prépublication <http://sfb611.iam.uni-bonn.de/uploads/279-komplett.pdf>.
- [29] K. KUWAE & T. SHIOYA – Sobolev and Dirichlet spaces over maps between metric spaces, *J. reine angew. Math.* **555** (2003), p. 39–75.
- [30] M. LEDOUX – *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 89, Amer. Math. Soc., 2001.
- [31] G. LOEPER – Continuity of maps solutions of optimal transportation problems, à paraître dans *Acta Math.*
- [32] J. LOTT – Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor, *Comment. Math. Helv.* **78** (2003), p. 865–883.
- [33] ———, Optimal transport and Ricci curvature for metric-measure spaces, in *Surveys in differential geometry. Vol. XI*, Surv. Differ. Geom., vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007, p. 229–257.
- [34] J. LOTT & V. CÉDRIC – Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, à paraître dans *Ann. Math.*
- [35] J. LOTT & C. VILLANI – Weak curvature conditions and functional inequalities, *J. Funct. Anal.* **245** (2007), p. 311–333.
- [36] B. MAUREY – Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik, et autres inégalités géométriques et fonctionnelles, Séminaire Bourbaki, vol. 2003/2004, exposé n° 928, *Astérisque* **299** (2005), p. 95–113.
- [37] R. J. McCANN – A convexity principle for interacting gases and equilibrium crystals, Thèse, Princeton University, 1994.
- [38] ———, Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps, *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 309–323.
- [39] F. MORGAN – Manifolds with density, *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005), p. 853–858.
- [40] S.-I. OHTA – On the measure contraction property of metric measure spaces, *Comment. Math. Helv.* **82** (2007), p. 805–828.

- [41] ———, Gradient flows on Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces, à paraître dans *Amer. J. Math.*
- [42] F. OTTO – The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), p. 101–174.
- [43] F. OTTO & C. VILLANI – Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* **173** (2000), p. 361–400.
- [44] G. PERELMAN – The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, prépublication arXiv:math.DG/0211159.
- [45] S. T. RACHEV & L. RÜSCHENDORF – *Mass transportation problems*, Springer, 1998.
- [46] M.-K. VON RENESSE – On local Poincaré via transportation, *Math. Z.* **259** (2008), p. 21–31.
- [47] M.-K. VON RENESSE & K.-T. STURM – Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), p. 923–940.
- [48] L. RÜSCHENDORF & S. T. RACHEV – A characterization of random variables with minimum L^2 -distance, *J. Multivariate Anal.* **32** (1990), p. 48–54.
- [49] G. SAVARÉ – Gradient flows and diffusion semigroups in metric spaces under lower curvature bounds, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **345** (2007), p. 151–154.
- [50] A. J. STAM – Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon, *Information and Control* **2** (1959), p. 101–112.
- [51] K.-T. STURM – Convex functionals of probability measures and nonlinear diffusions on manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **84** (2005), p. 149–168.
- [52] ———, On the geometry of metric measure spaces. I, *Acta Math.* **196** (2006), p. 65–131.
- [53] ———, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** (2006), p. 133–177.
- [54] C. VILLANI – *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 2003.
- [55] ———, Transport optimal et courbure de Ricci, in *Seminaire : Equations aux Dérivées Partielles. 2005–2006*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, exp. 7, École Polytech., 2006.
- [56] ———, *Optimal transport, old and new*, Grundlehrer Math. Wiss., vol. 338, Springer, 2009.

Michel LEDOUX

Institut de Mathématiques de Toulouse

UMR 5219 du CNRS

Université de Toulouse

F-31062 Toulouse

E-mail : `ledoux@math.univ-toulouse.fr`

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(991) *Courants d'Ahlfors et
localisation des courbes entières*

Mihai PĂUN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**COURANTS D' AHLFORS ET
LOCALISATION DES COURBES ENTIÈRES**
[d'après Julien Duval]

par Mihai PĂUN

INTRODUCTION

En 1967, S. Kobayashi a introduit une *pseudo-distance* intrinsèque sur toute variété complexe X de la manière suivante.

Etant donnés $x, y \in X$, on considère toutes les familles finies de points de (w_1, \dots, w_N) contenus dans X telles que $w_1 := x, w_N := y$ et telles que, pour chaque $1 \leq j \leq N-1$, le couple de points (w_j, w_{j+1}) appartienne à l'image d'un disque holomorphe. La distance entre deux points à l'intérieur de chaque disque est mesurée par rapport à la métrique de Poincaré; la pseudo-distance de Kobayashi $d_X(x, y)$ est alors la limite inférieure sur toutes familles de points de la somme des distances $d_{\mathbb{D}}(w_j, w_{j+1})$ entre les points successifs (on remarquera l'analogie avec la distance induite par une métrique riemannienne).

La version infinitésimale de d_X s'exprime de la manière suivante : étant donnés $x \in X$ et $v \in T_{X,x}$ un vecteur tangent, la norme de v par rapport à la *pseudo-métrique* de Kobayashi est

$$|v|_K := \inf\{r^{-1} : r > 0, \exists f \in H(\mathbb{D}, X), f(0) = x, f'(0) = rv\}.$$

Lorsque cette pseudo-métrique est non-dégénérée, on dit que X est *hyperbolique*.

Dans cet exposé, nous allons principalement nous intéresser à la classe des variétés qui ne sont pas hyperboliques au sens de Kobayashi, i.e. il existe un point $x \in X$ et un vecteur $v \in T_{X,x}$ tels que $|v|_K = 0$. Notre but est de présenter un résultat récent et très remarquable dû à J. Duval, qui met en évidence des conséquences géométriques importantes de la dégénérescence de $|\cdot|_K$ pour les *variétés X compactes*, ainsi que des corollaires qui en découlent.

Avant d'énoncer le résultat principal, introduisons un peu de terminologie. Soit ω une métrique fixée sur X , et considérons $\varphi_m : \mathbb{D} \rightarrow X$ une famille d'applications holomorphes définies sur l'adhérence du disque unité, telles que la longueur du bord $\varphi_m(\partial\mathbb{D})$ divisée par l'aire de $\varphi_m(\mathbb{D})$ tende vers zéro lorsque $m \rightarrow \infty$.

DÉFINITION 0.1. — *Un courant T de bidimension $(1, 1)$ est dit d'Ahlfors si*

$$\langle T, \alpha \rangle = \lim_m \frac{1}{\int_{\mathbb{D}} \varphi_m^* \omega} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^* \alpha$$

où α est une forme de type $(1, 1)$ sur X .

Nous remarquons le fait qu'un courant d'Ahlfors T est *positif et fermé*. Dans ce contexte, le résultat de J. Duval est le suivant.

THÉORÈME 0.2 ([12]). — *Soit T un courant d'Ahlfors sur X , et soit $K \subset X$ un compact chargé par T . Alors il existe une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ telle que l'aire de l'intersection de son image avec K soit non-nulle.* \square

En rapport étroit avec ce résultat, on pourrait rappeler le lemme classique de Brody : *une suite divergente de disques tracés sur X produit par reparamétrage une courbe entière dont la norme de la dérivée est uniformément bornée* (cf. [3]). Nous pouvons constater que même si la suite précédente fixe un point, il n'est pas garanti que ce point va se retrouver dans l'image de la courbe entière produite – principalement à cause des reparamétrisations. Un exemple dû à J. Winkelmann illustrant ce phénomène se trouve dans l'article [26]. Le théorème précédent peut donc être vu comme une version qualitative du lemme de Brody.

Dans le but de mieux cerner la portée du résultat de J. Duval, considérons une variété projective X telle qu'il existe $Z \subsetneq X$ avec la propriété suivante : l'image de toute courbe entière non-constante $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ est contenue dans Z . Alors étant donnée une suite de disques φ_m divergente au sens de Gromov, l'accumulation de l'aire lorsque $m \rightarrow \infty$ peut se produire au voisinage de Z uniquement. Ainsi, le théorème ci-dessus est une excellente illustration du « principe de Bloch », tel qu'il a été interprété dans [18].

Avant d'expliquer en quelques mots le mécanisme de la démonstration de 0.2, nous voulons présenter quelques corollaires. Le premier caractérise l'hyperbolicité d'une variété complexe compacte *via* une inégalité isopérimétrique linéaire « à la Gromov ».

COROLLAIRE 0.3 ([12], [15]). — *Une variété complexe compacte X est hyperbolique si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\text{aire}(\Delta) \leq C \text{long}(\partial\Delta)$$

pour tout disque holomorphe $\Delta \subset X$. \square

Soit T un courant d'Ahlfors; le théorème de décomposition de Siu (voir [25]) montre que

$$T = \sum_j \nu_j [C_j] + R$$

où les $C_j \subset X$ sont des courbes compactes, et R est un courant positif fermé. Le théorème 0.2 montre en particulier le résultat suivant.

COROLLAIRE 0.4 ([12], [11]). — *Le genre géométrique des courbes C_j ci-dessus est inférieur ou égal à 1.*

Il convient de citer ici un théorème dû à T. Nishino et M. Suzuki. Soit $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow X$ une application holomorphe. On note

$$f(0) := \{x \in X / x = \lim_m f(z_m) \text{ ou } (z_m) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}, z_m \rightarrow 0\};$$

c'est un ensemble fermé, et on a (voir [20]) : si $f(0)$ coïncide avec une courbe analytique $C \subset X$, alors le genre géométrique de toute composante de C est zéro ou un. \square

Voici en quelques mots le schéma de la preuve : l'outil technique principal est une version très astucieuse du théorème de compacité de Bishop-Gromov pour une famille de disques d'aire majorée.

Un lemme de Besicovitch montre que, pour tout entier positif $m \gg 0$, il existe dans \mathbb{D} une famille F_m de disques disjoints, dont l'image par φ_m intersecte un voisinage de K selon un ensemble d'aire ≥ 1 ; le nombre de tels disques est de l'ordre de l'aire de l'image de φ_m (notée a_m), car T charge K . Un argument simple montre qu'on peut supposer de plus que l'aire de l'image de ces disques est majorée uniformément (par rapport à m). Si on croit à l'énoncé 0.2, le germe de la courbe entière qu'on doit obtenir se trouve parmi ces disques, et une idée importante dans l'approche de J. Duval est tout simplement de « doubler » les disques à la source. Plusieurs problèmes se posent : d'abord, les disques de rayon double doivent être contenus dans \mathbb{D} . Ce serait le cas pour une grande partie de notre famille de disques, comme conséquence de l'hypothèse T fermé. Ensuite, rien ne garantit qu'après avoir doublé le rayon des disques, on conserve un nombre de l'ordre de a_m de disques *disjoints* (et, sans cela, on ne peut plus obtenir un majorant uniforme de l'aire de leur image). L'argument à ce moment devient dichotomique : si le nombre de disques disjoints de rayon double est toujours de l'ordre de a_m , on recommence ce processus; sinon, on produit des anneaux disjoints de module arbitrairement grand, qui finiront par engendrer une image non-constante de \mathbb{C}^* .

Ce texte est organisé comme suit. Dans la première partie, on esquisse la preuve du 0.2, en suivant de très près l'article original [12]. Ensuite, nous allons évoquer certains faits/observations illustrant le rapport entre ce résultat et les travaux de

M. McQuillan et M. Brunella concernant les courbes entières tangentes aux feuilletages holomorphes par disques. Finalement, on voudrait mettre en évidence quelques problèmes de géométrie algébrique où les idées et techniques introduites dans [12] pourraient être utiles. \square

Je remercie pour leur aide à la préparation de cet exposé M. Brunella, F. Campana, B. Claudon, M. Damian, O. Debarre, J. Duval et M. McQuillan. \square

1. QUELQUES IDÉES DE LA PREUVE DE 0.2

1.1. La technique

Notre point de départ sera le théorème de compacité de Bishop-Gromov, dans la version suivante (voir e.g. [1], [13], [24]).

THÉORÈME 1.1. — *Considérons $(g_m) \subset H(\mathbb{D}, X)$ une suite d'applications telle que l'aire de l'image $\Delta_m := g_m(\mathbb{D})$ soit uniformément majorée. Alors, quitte à extraire, on a :*

1. *la suite g_m converge vers g sur \mathbb{D} privé d'un nombre fini de points d'explosion e_j ;*
2. *la limite g se prolonge sur tout le disque \mathbb{D} ;*
3. *en un point d'explosion $e \in \mathbb{D}$, il existe une suite de disques $d_m \subset \mathbb{D}$ qui tendent vers e et telle que les $g_m(d_m)$ convergent vers une réunion finie de courbes rationnelles.*

La convergence du point 3) est celle de Hausdorff et est en aire ; on dit alors que g_m converge vers g au sens de Gromov. \square

On remarquera que, dans le cas où les g_m sont définies sur l'adhérence du disque unité, l'analyse des explosions au $\partial\mathbb{D}$ produit soit des courbes rationnelles, soit des disques (cette dernière éventualité se produit, par exemple, lorsque le rapport entre la norme de la dérivée et la distance au bord est borné). Au vu du théorème qu'on veut démontrer, nous voulons donner un critère pour empêcher cette dernière possibilité de se produire ; c'est une première contribution importante de l'article [12], dont voici les deux versions ci-dessous.

COROLLAIRE 1.2 ([12]). — *Soit $f_m : \mathbb{D} \setminus d_m \rightarrow X$ une famille de disques holomorphes, où d_m est une suite de disques convergeant vers l'origine. On suppose que la longueur de $f_m(\partial d_m)$ converge vers zéro, et que l'aire de l'image des (f_m) est uniformément bornée. Alors f_m tend au sens de Gromov vers une application $f_\infty \in H(\mathbb{D}, X)$.*

En d'autres termes, l'explosion éventuelle à l'origine produit forcément un arbre de courbes rationnelles, malgré la présence du bord ∂d_m . \square

La deuxième variante de ce type de résultat qui nous sera très utile par la suite est la suivante.

COROLLAIRE 1.3 ([12]). — Soit \mathbb{D}^+ le demi-disque supérieur et soit $f_m : \mathbb{D}^+ \rightarrow X$ une suite d'applications holomorphes, de classe \mathcal{C}^∞ jusqu'à $s :=]-1, 1[$. On suppose que l'aire de $f_m(\mathbb{D}^+)$ est uniformément bornée, et que la longueur de $f_m(s)$ tend vers zéro. Alors (f_m) tend au sens de Gromov vers un point.

La preuve détaillée de 1.3 est donnée dans [12]; donc, nous allons indiquer les arguments pour 1.2, pour illustrer la façon dont l'hypothèse sur la longueur du bord intervient.

PREUVE (de 1.2). — Compte tenu du fait que l'aire de l'image de f_m est uniformément bornée, et que l'aire d'une courbe rationnelle est minorée par une constante universelle, il existe un réel $r_0 > 0$ avec la propriété suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{D}(r_0) \setminus \{0\}$, la norme sup de la dérivée de f_m sur K est uniformément majorée (pour $m \gg 0$, tel que f_m soit définie sur K).

On suppose que les disques d_m sont centrés en zéro ; soit r_m le rayon de d_m . Nous considérons $z_m \in \mathbb{D}(r_0) \setminus \mathbb{D}(r_m)$ tel que

$$C_m := |f'_m(z_m)| = \sup_{z \in \mathbb{D}(r_0) \setminus \mathbb{D}(r_m)} |f'_m(z)|.$$

Par la suite, nous allons analyser les cas suivants.

- $\limsup_m C_m (|z_m| - r_m) \rightarrow \infty$: alors on définit la suite de disques

$$g_m(z) := f_m\left(z_m + \frac{z}{C_m}\right)$$

dont le rayon tend vers l'infini et dont la dérivée est uniformément majorée et vaut 1 à l'origine. Par ailleurs, l'aire de g_m est aussi uniformément majorée, donc par passage à la limite, on produit une courbe rationnelle.

- $\limsup_m C_m (|z_m| - r_m) < \infty$: c'est dans ce cas que l'hypothèse sur la longueur du bord de l'image de f_m est indispensable. Par renormalisation à la source, on définit $\tilde{f}_m : \mathbb{D}(C_m r_0) \setminus \mathbb{D}(C_m r_m) \rightarrow X$ telle que

$$\tilde{f}_m(w) := f_m\left(\frac{w}{C_m}\right).$$

La dérivée de \tilde{f}_m est uniformément bornée. Par ailleurs, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier positif m , on ait $C_m |z_m| < C_m r_m + C$. Si la suite $C_m r_m$ ne tend pas vers zéro, alors les fonctions \tilde{f}_m produisent par passage à la limite une application holomorphe non-constante sur un disque fermé, qui est constante sur un intervalle de longueur positive contenu dans le bord du disque, ce qui est absurde.

En conclusion, la suite $C_m r_m$ converge vers zéro, et notre suite \tilde{f}_m converge vers une courbe rationnelle (on observe que la limite est définie y compris en zéro, car l'aire totale est bornée, voir [13]). \square

Les arguments pour 1.3 sont parfaitement analogues : l'étude de la convergence au sens de Gromov autour des points d'explosion combinée avec l'hypothèse font que la limite est composée seulement des courbes rationnelles, exactement comme dans le cas compact. \square

1.2. Comment utiliser la technique

Soit $(\varphi_m) \subset H(\overline{\mathbb{D}}, X)$ une famille de disques dans X définis sur l'adhérence du disque unité. On introduit les notations suivantes $\Delta_m := \varphi_m(\mathbb{D})$, $a_m := \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^* \omega$, i.e. l'aire de Δ_m par rapport à une métrique fixée ω sur X , et l_m désigne la longueur du bord de Δ_m .

Supposons que

$$(1) \quad l_m / a_m \rightarrow 0$$

lorsque $m \rightarrow \infty$. Alors (quitte à extraire), les Δ_m définissent un courant d'Ahlfors T par la relation

$$\langle T, \alpha \rangle := \lim_m \frac{1}{a_m} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^* \alpha$$

pour toute (1,1)-forme α sur X . Le courant T est positif, et l'hypothèse (1) montre facilement qu'il est fermé (voir e.g. [5])

On considère $K \subset X$ un compact chargé par T ; cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\langle T, \chi_U \omega \rangle \geq \delta,$$

pour tout ouvert $U \subset X$ qui contient K ; la notation χ_U dans l'intégrale précédente désigne la fonction caractéristique de U .

Il existe donc un système de voisinages (U_m) de K tel que

$$(2) \quad \frac{1}{a_m} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^* (\chi_{U_m} \omega) \geq \delta > 0;$$

donc si on définit la mesure $\mu_m := \varphi_m^* (\chi_{U_m} \omega)$ sur \mathbb{D} , la masse totale de μ_m sera supérieure à δa_m .

Avant de commencer la preuve proprement dite, on remarque qu'on peut supposer

$$(3) \quad a_m \rightarrow \infty.$$

En effet, dans le cas contraire, on aura $l_m \rightarrow 0$ (par la relation (1) ci-dessus) et φ_m convergera au sens de Gromov vers une famille de courbes rationnelles. Alors la preuve

du 0.2 est terminée, car le support de T est constitué par ces courbes, donc l'aire de l'intersection avec K d'au moins une d'elles sera positive.

Les arguments principaux de la démonstration de J. Duval seront présentés dans les lignes suivantes.

— *Construction des germes*

Soit m un entier positif. Pour chaque point $t \in \mathbb{D}$, on considère le disque de rayon minimal centré en t et de masse égale à 1 par rapport à la mesure μ_m (un tel disque existe dès que $m \gg 0$, grâce à la relation (3) ci-dessus). Par le lemme classique de Besicovitch (cf. [16]), on peut extraire de l'ensemble de disques ainsi obtenus une famille F_m qui a les propriétés suivantes :

A.1 les disques de F_m sont disjoints ;

A.2 le cardinal de F_m est supérieur à $\delta_1 a_m$ pour un certain réel positif δ_1 ;

A.3 pour chaque disque $D \in F_m$, on a $\mu_m(\chi_D) = 1$.

On peut remarquer que, même si nous appelons « disques » tous les éléments de F_m , certains ne le sont pas vraiment (à cause du bord de \mathbb{D}).

Pour chaque m assez grand, l'ensemble F_m sera notre famille initiale ; le but du processus qui va suivre est d'agrandir successivement la taille des rayons des disques, tout en conservant les propriétés A.1-A.3 ci-dessus (nous allons voir par la suite la façon dont ces propriétés interviennent).

— *Récurrence*

Soient D un disque et λ un réel positif ; on note λD le disque concentrique dont le rayon est multiplié par λ . Pour chaque entier $m \gg 0$, on note

$$2F_m := \{2D/D \in F_m\}$$

(on « double les disques » de la famille précédente F_m). L'observation pertinente dans ce contexte est la suivante.

PROPOSITION 1.4 ([12]). — *Supposons que F_m admette un sous-ensemble F'_m tel que $2F'_m$ vérifie les propriétés A.1 et A.2 ci-dessus. Si on ne peut pas extraire une famille F_m^1 de F'_m avec les propriétés A.1, A.2 et*

A.4 *les éléments de F_m^1 sont contenus dans \mathbb{D} ;*

A.5 *l'aire de l'image des éléments de F_m^1 est uniformément bornée (par rapport à m) ;*

alors il existe une courbe rationnelle $C \subset X$ telle que l'aire de $C \cap K$ soit positive.

□

La preuve de cette proposition est assez aisée; voici en quelques mots le type d'arguments impliqués.

Par hypothèse, $\text{card } F'_m \geq \delta a_m$; alors nous avons au plus $\frac{\delta}{2} a_m$ disques $D \in F_m$ tels que l'aire de $\varphi_m(2D \cap \mathbb{D})$ soit supérieure à $2/\delta$ (on utilise ici le fait que les éléments de F'_m sont disjoints). Ainsi, quitte à réduire le cardinal de F'_m de moitié, les disques restants vont satisfaire une borne d'aire uniforme.

Un raisonnement analogue montre qu'un sous-ensemble de disques $D \in F'_m$ de cardinal au moins $\frac{\delta}{4} a_m$ satisfait une borne d'aire uniforme et la longueur du chemin $\varphi_m(2D \cap \partial\mathbb{D})$ est inférieure à $\frac{4l_m}{\delta a_m}$. Combiné avec le corollaire 1.3, on obtient soit la relation A.4 dans 1.4, soit une courbe rationnelle.

— *Une première conclusion*

Supposons que le procédé décrit au paragraphe précédent peut être répété à l'infini. Alors on construit les familles (F_m^k) telles que :

A.6 on a $F_m^{k+1} \subset F_m^k$;

A.7 le cardinal de F_m^k est minoré par $\delta_k a_m$, où δ_k est un réel positif;

A.8 si D est un disque de F_m^k , alors on a $2^k D \subset \mathbb{D}$;

A.9 il existe une constante C_k uniforme par rapport à m , et telle que l'aire de $\varphi_m(2^k D)$ soit majorée par C_k .

Compte tenu de ces propriétés, la conclusion de 0.2 s'ensuit par le procédé diagonal standard. \square

— *L'alternative*

Si l'opération de doubler les disques s'interrompt avant la fin de la démonstration de 0.2 (disons au début, afin d'alléger l'écriture) la proposition 1.4 explique sans équivoque pourquoi : on ne peut extraire de F_m une famille de cardinaux de l'ordre de a_m dont les disques doublés soient disjoints. La façon de procéder sera de remplacer les disques par des anneaux et une analyse combinatoire, comme suit.

— *Arborescence des presque-incidences*

Pour commencer, on peut supposer que, si D et D' sont deux disques appartenant à la famille $4F_m$ tels que D' soit inférieur à D et tels que $2D \cap 2D'$ soit non-vide, alors $D' \leq 16D$ (la relation d'ordre est celle induite par la longueur du rayon), voir [12], page 7 (nous allons voir un peu plus loin la raison pour laquelle on utilise précisément le multiple « $4F_m$ »).

Les incidences de disques induisent une structure de graphe orienté sur $4F_m$, dont les sommets sont les éléments de cet ensemble, et une arête joint D et D' si $D' \leq D$ et $D' \cap D \neq \emptyset$. On transforme ce graphe en une *arborescence* par le procédé suivant :

soit δ le disque le plus petit de $4F_m$ et notons k sa valence. Alors on remplace ces arêtes par un chemin $D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_k \rightarrow \delta$, et ensuite on recommence ce procédé en considérant le disque de taille immédiatement supérieure

Voici quelques propriétés de la structure d'arbre \mathcal{A}_m ainsi obtenue :

- B.1 si $D \cap D' \neq \emptyset$, alors il existe un chemin dans \mathcal{A}_m de D à D' ;
- B.2 s'il existe un chemin de D à D' dans \mathcal{A}_m , alors D' est contenu dans $2D$.

Par une analyse astucieuse de la structure de \mathcal{A}_m – pour laquelle on renvoie une fois de plus à l'article original [12] –, on aboutit à une nouvelle arborescence notée \mathcal{A}'_m , qui vérifiera de plus :

- B.3 \mathcal{A}'_m est constitué par des chemins $D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_k$ qui sont des disques emboîtés, i.e. $2D_{j+1}$ est contenu dans D_j ;
- B.4 le nombre de sommets de \mathcal{A}'_m est de l'ordre de a_m ; en revanche, le nombre des chemins qui forment cette arborescence est $o(a_m)$;
- B.5 pour tout chemin $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \dots \rightarrow D_k$ de \mathcal{A}'_m , les anneaux $D_j \setminus D_{j+1}$ sont de module minoré, et l'aire de leurs images par φ_m intersectées avec U_m est également minorée.

La construction de \mathcal{A}'_m avec les propriétés ci-dessus ne sera pas reproduite ici ; voici néanmoins le type d'argument qu'on est amené à faire.

Dans l'arborescence \mathcal{A}_m , le nombre de sommets terminaux (i.e. qui ne sont pas origine d'une arête) est de l'ordre de $o(a_m)$, car cela correspond aux disques dans F_m qui restent disjoints après les avoir doublés, et on a convenu que le nombre de ces derniers est négligeable devant a_m . Par ailleurs, la somme des valences dans un arbre est majorée par le nombre des sommets ; comme conséquence, on déduit que le nombre de sommets de \mathcal{A}_m qui sont origines d'au moins deux arêtes est aussi $o(a_m)$. Si on supprime ce type de sommets multiples, on obtient une nouvelle arborescence qui vérifie B.4.

On note G_m les anneaux de \mathcal{A}'_m .

— *Doublement des anneaux et fin de la preuve*

Le procédé de « doublement des anneaux » auquel on fait allusion ci-dessus est le suivant. Soit $A_j := D_j \setminus D_{j+1}$ un élément de G_m ; son double est par définition $2A_j := D_{j-1} \setminus D_{j+2}$. Nous observons que ces anneaux ne sont pas nécessairement disjoints, mais \mathbb{D} est recouvert au plus 3 fois par les $2A_j$. On peut donc extraire un sous-ensemble $G_m^1 \subset G_m$ tel que :

B.6 les anneaux $2A$ sont disjoints, et l'aire de l'image (par φ_m) de la trace de $2A$ sur \mathbb{D} est uniformément majorée, pour tout $A \in G_m^1$;

B.7 la longueur de l'image de $\varphi_m(2A \cap \partial\mathbb{D})$ converge vers zéro lorsque $m \rightarrow \infty$.

Par un raisonnement déjà évoqué en début de preuve, on aura l'alternative suivante : lorsque $m \rightarrow \infty$, soit les anneaux de G_m^1 sont contenus dans \mathbb{D} , soit on produit une courbe rationnelle dont l'aire de l'intersection avec K est positive.

Supposons que lorsqu'on applique ce processus de manière récurrente on est toujours dans le premier cas (sinon, la preuve est finie) ; on produit une famille G_m^k telle que :

B.8 pour tout couple de paramètres (m, k) , on ait $G_m^{k+1} \subset G_m^k$, et le cardinal de G_m^k soit supérieur à $\delta_k a_m$, pour un certain réel positif δ_k indépendant de m ;

B.9 si $A \in G_m^k$, alors $2^k A \subset \mathbb{D}$;

B.10 il existe une constante C_k telle que l'aire de l'anneau $\varphi_m(2^k A)$ soit majorée par C_k .

Bien entendu, il se peut que la suite (δ_k) ci-dessus tende vers zéro, mais ceci n'est pas une obstruction pour continuer le doublement des anneaux. Compte tenu de ces relations, voici la fin de la preuve.

Considérons $A_m \in G_m^m$; alors la relation B.9 ci-dessus montre que $2^m A_m \subset \mathbb{D}$, tandis que par B.5 on a $\mu_m(\chi_{A_m}) \geq C_0$ (indépendamment de m). De plus, l'aire de $\varphi_m(2^k A_m)$ est majorée par C_k , si $1 \leq k \leq m$.

Supposons que le module de A_m est borné, et soit r_m l'application affine de \mathbb{C} telle que $r_m(0)$ soit le centre du bord intérieur de $2^m A_m$ et telle que r'_m soit le diamètre de A_m . L'image inverse de $2^m A_m$ par r_m tend vers \mathbb{C}^* (car le diamètre de A_m tend vers zéro). Quitte à extraire, la suite $\varphi_m \circ r_m$ tend vers une application $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow X$, dont l'aire de l'intersection avec K est positive, car l'anneau $r_m^{-1}(A_m)$ reste dans un compact de \mathbb{C}^* lorsque $m \rightarrow \infty$.

Le raisonnement pour le cas où le module de A_m n'est pas borné est similaire et ceci achève la preuve de 0.2. \square

Remarque 1.5. — En gros, on a analysé deux cas dans le cours de la preuve de 0.2 : un modèle simple du premier est celui d'une famille de disque F_m « bien répartis » dans \mathbb{D} , tandis que dans le second cas on a des chaînes de disques emboîtés, qui se concentrent en un point. Pour une présentation complète de la démonstration, voir [12]. \square

Remarque 1.6. — Une fois le théorème principal établi, déduire les corollaires 0.3 et 0.4 est immédiat ; cependant, on voudrait mettre en parallèle 0.3 avec la conjecture

suivante, formulée par J.-P. Demailly dans [10] : *une variété projective X est hyperbolique si et seulement si elle est algébriquement hyperbolique, i.e. s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute courbe complète $Z \subset X$, on ait*

$$\deg(Z) \leq Cg(\widehat{Z}).$$

Dans la relation ci-dessus, on note \widehat{Z} la normalisation de la courbe Z . □

2. PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES DES COURANTS ASSOCIÉS AUX COURBES ENTIÈRES

Soit X une variété projective non-singulière de dimension n ; considérons une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ tracée sur X . L'inégalité isopérimétrique d'Ahlfors (voir e.g. [5], ainsi que les références dans cet article) montre qu'on peut choisir une suite de rayons $r_m \rightarrow \infty$ telle que le courant défini par

$$\langle T, \alpha \rangle := \lim_m \frac{1}{a_m} \int_{\mathbb{D}(r_m)} \varphi^* \alpha$$

soit fermé; autrement dit, la courbe φ produit un courant d'Ahlfors à la limite. Ainsi, nous pouvons remarquer que le théorème 0.2 nous donne des renseignements importants sur les compacts de X chargés par ce courant, donc sur le comportement asymptotique de la courbe φ .

Dans les travaux de McQuillan sur l'hyperbolicité des surfaces algébriques (voir [17], [19] et également [6]), c'est la version « à la Nevanlinna » de ce courant qui joue un rôle déterminant; en voici la construction, en quelques mots.

Soit ω une métrique fixée sur X ; l'indicatrice de croissance d'une courbe entière φ est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$r \rightarrow T(\varphi, r) := \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \varphi^* \omega.$$

Ensuite, on utilise cette quantité comme facteur de normalisation (à la place de l'aire dans (1)) et on définit le courant positif $T_r[\varphi]$ par la relation

$$\langle T_r[\varphi], \alpha \rangle := \frac{1}{T(\varphi, r)} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{\mathbb{D}(t)} \varphi^* \alpha,$$

où α est une forme de type (1,1) sur X . Exactement comme dans le cas des courants d'Ahlfors, on peut trouver une suite $r_m \rightarrow \infty$ telle que

$$(4) \quad T[\varphi] := \lim_m T_{r_m}[\varphi]$$

soit positif et fermé (voir e.g. [5]).

Les arguments employés pour la démonstration de 0.2 se transposent sans difficulté afin de montrer un résultat analogue pour $T[\varphi]$ (voir [12]). \square

En guise de motivation pour les énoncés à venir, nous allons nous placer maintenant dans le contexte suivant.

Soit X une variété projective et non-singulière, dont le fibré tangent est noté T_X . On suppose que X est dirigée par un fibré vectoriel $V \subset T_X$ de rang 2 (cf. [10]), et soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe par disques, tel que le fibré tangent $T_{\mathcal{F}}$ qui lui est associé soit contenu dans V , en dehors des singularités de \mathcal{F} . Considérons également une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ tangente à \mathcal{F} .

Un problème important dans le cadre de la conjecture de Green-Griffiths sera d'élaborer un critère qui assure l'existence d'une sous-variété algébrique $Z \subset X$ qui contient l'image de φ (voir [22] ainsi que les références dans cet article pour un *survey* des résultats récents et des techniques autour de ce problème).

L'idée introduite par M. McQuillan dans [17] est d'utiliser le courant $T[\varphi]$ comme « compactification de φ » ; les techniques usuelles de la théorie d'intersection deviennent ainsi disponibles. Supposons la relation ci-dessous vérifiée

$$\langle T[\varphi], \Theta(\det(V)) \rangle < 0,$$

et l'image de la courbe φ Zariski-dense ; l'inégalité précédente sera contredite si on est capable de montrer que $\langle T[\varphi], \Theta(T_{\mathcal{F}}) \rangle \geq 0$ et $\langle T[\varphi], \Theta(N_{\mathcal{F},V}) \rangle \geq 0$ (on note $N_{\mathcal{F},V}$ le fibré en droites dont le dual est contenu dans V^* en dehors des singularités de \mathcal{F} et qui est formé de 1-formes holomorphes s'annulant le long de \mathcal{F}).

Dans le cas où ce programme a été complété (cf. [17], [19] et également [4], [6]), on utilise deux techniques fondamentales : le théorème de « désingularisation » des feuilletages et les propriétés numériques de $T[\varphi]$. Par la suite, nous allons mettre en évidence les connexions du théorème 0.2 avec la seconde technique.

On note $\mathcal{E}_{NS} \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ le sous-ensemble correspondant aux fibrés en droites *pseudo-effectifs* sur X , i.e. l'adhérence du cône des \mathbb{Q} -diviseurs effectifs.

— Soient D une hypersurface réduite et irréductible de X et s_D la section canonique de $\mathcal{O}(D)$ qui lui est associée. Si h est une métrique fixée sur $\mathcal{O}(D)$, la formule de Jensen en conjonction avec la formule de Poincaré-Lelong implique

$$(5) \quad \langle T_r[\varphi], \Theta_h(D) \rangle \geq \frac{1}{T(\varphi, r)} \left(\sum_j \nu_j \log_+ \left(\frac{r}{|z_j|} \right) + O(1) \right)$$

où $\Theta_h(D)$ désigne la forme de courbure de $\mathcal{O}(D)$ par rapport à h et $\sum_j \nu_j \delta_{z_j}$ est le diviseur sur \mathbb{C} correspondant à φ^*D ; comme conséquence, nous avons

$$(6) \quad \langle T[\varphi], \alpha \rangle \geq 0$$

pour tout $\alpha \in \mathcal{E}_{NS}$.

— Le problème suivant sera de formuler certaines conditions portant sur φ et/ou $T[\varphi]$ afin d'avoir une inégalité stricte dans (6), dès que la dimension numérique du fibré correspondant à α est positive. Nous n'allons pas expliquer ici cette notion en toute généralité, mais on rappelle toutefois une conséquence de cette propriété qui va nous être extrêmement utile.

Fixons $A \rightarrow X$ un fibré ample et soit $L \rightarrow X$ un fibré pseudo-effectif. On note $\nu(L)$ sa dimension numérique. Alors on a : pour chaque $x \in X$ et $k \geq 1$, il existe D_k un \mathbb{Q} -diviseur effectif dans $c_1(kL + A)$ dont la multiplicité en x est de l'ordre $k^{\frac{\nu(L)}{n}}$ (c'est une conséquence de la formule de Riemann-Roch, voir e.g. [2], [18]).

Un critère « théorique » qui assurera une inégalité stricte dans (6) sera de supposer que la courbe φ passe par un point $x \in X$ assez de fois pour que la limite du terme de dénombrement dans (5) soit positive : lorsque $D := D_k$ et $k \gg 0$, on obtiendrait en effet

$$(7) \quad \langle T[\varphi], \Theta(kL + A) \rangle \geq C_0 k^{\frac{\nu(L)}{n}}$$

et donc $\langle T[\varphi], \Theta(L) \rangle > 0$ si $\nu(L) \geq 1$. Mais l'hypothèse qu'on a faite pour avoir cette inégalité est trop forte : pratiquement, on demande que l'équation $\varphi(z) = x$ ait autant de solutions dans $\mathbb{D}(r)$ que $\varphi(z) \in H$ où H est une section hyperplane !

Supposons qu'on remplace l'hypothèse précédente par la condition $\nu(T[\varphi], x) > 0$, i.e. le nombre de Lelong de $T[\varphi]$ en x est positif. Dans ce cas, on voit sans beaucoup d'efforts que le courant associé à la courbe $z \rightarrow (z, \exp(z))$ dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sera de carré nul, donc cette hypothèse n'est pas suffisante pour notre but. Néanmoins, on a l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2.1 ([18], [21]). — Soit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ une courbe entière, telle que $\nu(T[\varphi], x) > 0$. On suppose que le courant $T[\varphi]$ ne charge aucun ensemble analytique qui contient x . Alors

$$(8) \quad \langle T[\varphi], \Theta(L) \rangle > 0$$

pour tout fibré pseudo-effectif L tel que $\nu(L) \geq 1$.

Nous ne donnons pas la preuve de cette remarque ici ; intuitivement, la raison pour laquelle on a besoin de l'hypothèse supplémentaire dans l'énoncé ci-dessus est qu'en général les diviseurs D_k qu'on voudrait utiliser pour montrer l'inégalité (8) n'ont pas une singularité isolée en x . \square

La remarque précédente est particulièrement intéressante lorsqu'on la combine avec le théorème 0.2 : si $\nu(T[\varphi], x) > 0$, alors soit $T[\varphi]$ est strictement positif sur la partie de \mathcal{E}_{NS} correspondant aux diviseurs dont la dimension numérique est positive, soit il existe un ensemble analytique $Y \subsetneq X$ qui contient l'image d'une courbe entière

non-constante. On se réfère à l'article [17] (voir également le preprint [19]) pour les conséquences de ce fait dans le contexte de la conjecture de Green-Griffiths.

Les propriétés numériques des courants associés aux courbes entières ont été également utilisées dans [8] pour des applications concernant la classe des *variétés spéciales* introduites par F. Campana dans [7]

Remarque 2.2. — Dans l'article [21], nous établissons des propriétés numériques analogues dans le cadre plus général des classes de cohomologie pseudo-effectives transcendantes.

3. QUELQUES QUESTIONS

Pour finir, nous voudrions rappeler quelques problèmes concernant les familles de disques holomorphes dans une variété projective.

— Dans l'article [7], on introduit la notion suivante : *la variété X est spéciale si elle n'admet pas des fibrations de type général*, i.e. si $f : X \rightarrow Y$ est une application rationnelle dominante, alors la dimension de Kodaira de l'orbifold (Y, Δ_f) est strictement inférieure à $\dim Y$. La conjecture de F. Campana est la suivante : *X est spéciale si et seulement si la pseudo-métrique de Kobayashi est identiquement nulle sur $X \times X$* . Cette conjecture est confirmée pour les courbes et les surfaces qui ne sont pas de type général et pour les variétés rationnellement connexes ; voir [7], page 615, pour plus de renseignements à ce sujet. \square

— La conjecture suivante a été formulée par Iitaka dans [14] : *soit X une variété projective, telle que son revêtement universel soit \mathbb{C}^n ; alors X est une variété abélienne, à revêtement étale fini près*. Dans [8], on montre que la solution de cette conjecture s'ensuit si on est capable de reparamétriser le revêtement universel $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow X$ de la manière suivante : *il existe une suite de boules $f_m : \mathbb{B}(m) \rightarrow X$ telle que :*

- 1) *il existe un ouvert $U \subset X$ contenu dans l'image de f_m , pour tout $m \geq 1$;*
- 2) *la norme du jacobien de f_m en zéro vaut 1 ;*
- 3) *la suite $\frac{1}{m^2}T(f_m, m)$ est bornée (cette condition sera satisfaite par exemple s'il existe une constante C telle que $\sup |df_m| \leq C$).*

Les arguments classiques de Brody ne semblent pas adéquats pour résoudre le problème de reparamétrisation évoqué ci-dessus ; une question sera de savoir si l'analyse combinatoire de J. Duval – transposée dans le contexte actuel – peut aider. \square

— Dans [17], on se place dans le cadre suivant : on a une surface S munie d'un feuilletage \mathcal{F} , et une courbe entière φ tracée sur S , tangente à \mathcal{F} . Si $N_{\mathcal{F}}$ désigne le

fibré normal du feuilletage, M. McQuillan montre l'énoncé suivant : si $\nu(T[\varphi], x) = 0$ pour tout $x \in X$, alors $\langle T, \Theta(N_{\mathcal{G}}) \rangle \geq 0$. En fait, son résultat est plus quantitatif dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que

$$(9) \quad \langle T, \Theta(N_{\mathcal{G}}) \rangle + \varepsilon \geq -C_\varepsilon \sum_{x \in \mathcal{F}_s} \nu(T[\varphi], x)$$

où les \mathcal{F}_s sont les points singuliers de \mathcal{G} (voir également [6]). La démonstration présentée dans [17] est assez indirecte, dans le sens suivant : on montre d'abord (9) pour les feuilletages dont les singularités sont réduites, et l'inégalité s'ensuit par un théorème de Seidenberg (voir [23], et aussi [4] pour une présentation moderne) et la formule de changement de $N_{\mathcal{G}}$ par éclatements.

Une autre façon d'interpréter (9) est : si $\langle T[\varphi], \Theta(N_{\mathcal{G}}) \rangle < 0$, alors $T[\varphi]$ aura un nombre de Lelong positif en un point. Ceci montre que les hypothèses données dans 2.1 ont un support géométrique substantiel.

En dimension supérieure, l'analogue du théorème de Seidenberg n'est pas (encore...) disponible, donc il serait vivement souhaitable de trouver une preuve *directe* de (9) (déjà dans le cas des surfaces). \square

— Soit X une variété complexe compacte ; on note $X_1 := \mathbb{P}(T_X)$ la variété projectivée de son fibré tangent. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré tautologique sur X_1 . Si $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow X$ est une courbe entière, alors on a l'inégalité suivante :

$$\langle T[d\varphi], \Theta(\mathcal{O}(1)) \rangle \leq 0$$

(c'est l'inégalité « tautologique », voir [17], [5]).

Considérons la décomposition de Siu des courants associés à φ , respectivement à sa dérivée $d\varphi$:

$$(10) \quad T[\varphi] = \sum_j \nu_j [C_j] + R$$

et

$$(11) \quad T[d\varphi] = \sum_j \nu'_j [C'_j] + R_1.$$

Il est établi dans [21] que les courbes algébriques dans (11) sont soit des relevées canoniques de celles de (10), soit contenues dans les fibres de l'application $X_1 \rightarrow X$. Par le corollaire 0.4, le genre géométrique de chaque C_j est strictement inférieur à 2 ; donc $\mathcal{O}(1) \cdot \widehat{C}_j \leq 0$. Donc, l'inégalité tautologique est vérifiée pour la partie algébrique du courant $T[d\varphi]$ correspondant aux relevées des courbes de $T[\varphi]$; une question intéressante sera de savoir si l'inégalité tautologique est vérifiée également pour R_1 . \square

RÉFÉRENCES

- [1] E. BISHOP – Conditions for the analyticity of certain sets, *Michigan Math. J.* **11** (1964), p. 289–304.
- [2] S. BOUCKSOM – Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 45–76.
- [3] R. BRODY – Compact manifolds in hyperbolicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), p. 213–219.
- [4] M. BRUNELLA – Courbes entières et feuilletages holomorphes, *Enseign. Math.* **45** (1999), p. 195–216.
- [5] ———, Courbes entières dans les surfaces algébriques complexes (d’après McQuillan, Demailly-El Goul, ...), Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, exposé n° 881, *Astérisque* **282** (2002), p. 39–61.
- [6] ———, *Birational geometry of foliations*, Publicações Matemáticas do IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004.
- [7] F. CAMPANA – Orbifolds, special varieties and classification theory, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 499–630.
- [8] F. CAMPANA & M. PĂUN – Variétés faiblement spéciales à courbes entières dégénérées, *Compos. Math.* **143** (2007), p. 95–111.
- [9] ———, Une généralisation du théorème de Kobayashi-Ochiai, *Manuscripta Math.* **125** (2008), p. 411–426.
- [10] J.-P. DEMAILLY – Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, p. 285–360.
- [11] J. DUVAL – Singularités des courants d’Ahlfors, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 527–533.
- [12] ———, Sur le lemme de Brody, *Invent. Math.* **173** (2008), p. 305–314.
- [13] M. GROMOV – Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.
- [14] S. IITAKA – Genus and classification of algebraic varieties. I, *Sūgaku* **24** (1972), p. 14–27.
- [15] B. KLEINER – Hyperbolicity using minimal surfaces, prépublication.
- [16] P. MATTILA – *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 44, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [17] M. MCQUILLAN – Diophantine approximations and foliations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **87** (1998), p. 121–174.
- [18] ———, Integrating $\partial\bar{\partial}$, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press, 2002, p. 547–554.

- [19] ———, Uniform uniformization, prépublication I.H.É.S., 2005.
- [20] T. NISHINO & M. SUZUKI – Sur les singularités essentielles et isolées des applications holomorphes à valeurs dans une surface complexe, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **16** (1980), p. 461–497.
- [21] M. PĂUN – Currents associated to transcendental entire curves on compact Kähler manifolds, prépublication, 2003.
- [22] E. ROUSSEAU – Hyperbolicité des variétés complexes, cours Peccot, arXiv:0709.3882, 2007.
- [23] A. SEIDENBERG – Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$, *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 248–269.
- [24] J.-C. SIKORAV – Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds, in *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progr. Math., vol. 117, Birkhäuser, 1994, p. 165–189.
- [25] Y. T. SIU – Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.* **27** (1974), p. 53–156.
- [26] J. WINKELMANN – A projective manifold where Brody and entire curves behave very differently, prépublication arXiv:math/0511142.

Mihai PĂUN

Université de Nancy

Institut Élie Cartan

B.P. 239

F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy

E-mail : Mihai.Paun@iecn.u-nancy.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(992) *Grands graphes planaires aléatoires
et carte brownienne*

Vincent BEFFARA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**GRANDS GRAPHS PLANAIRES ALÉATOIRES
ET CARTE BROWNIENNE**
[d'après Jean-François Le Gall]

par **Vincent BEFFARA**

INTRODUCTION

Un thème récurrent en théorie des probabilités, et en mécanique statistique plus particulièrement, est l'étude de propriétés asymptotiques d'objets aléatoires finis quand leur taille tend vers l'infini — ce qu'en physique on nomme *limite thermodynamique*. Ce que l'on entend par là consiste le plus souvent à définir une variable aléatoire à valeurs réelles représentant une caractéristique d'intérêt de l'objet, et à déterminer si la suite de variables aléatoires ainsi obtenue converge en un certain sens, éventuellement après renormalisation. Deux comportements sont possibles en cas de convergence :

- Il se peut que la limite soit déterministe. Le cas le plus typique est celui de la *loi des grands nombres* : si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi et intégrables, alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement vers l'espérance de X_1 . C'est ce qui mène par exemple à la notion de *grandeur intensive* en thermodynamique.
- Il se peut également que la limite reste aléatoire, soit parce qu'elle continue à dépendre fortement de chacune des composantes du système (comme par exemple dans le cas où on considère le signe d'un produit de variables aléatoires), soit parce que la renormalisation a été choisie correctement ; le paradigme est alors celui du *théorème central limite* : si (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, d'espérance nulle et de variance σ^2 finie, alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée et de variance σ^2 .

Plus récemment, l'attention des probabilistes s'est portée sur l'objet aléatoire lui-même, vu comme une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesuré dont les

points sont eux-mêmes des espaces métriques — on peut alors parler de problèmes de *limites d'échelle*. Un cas particulièrement représentatif est celui, considéré par Aldous [1], des *arbres aléatoires* (obtenus par exemple comme arbres généalogiques de processus de branchement de type Galton-Watson) et de leur convergence en loi vers des *arbres aléatoires continus*, que l'on peut voir comme un théorème central limite dans l'espace des arbres réels.

Cet exposé est consacré à la présentation de résultats concernant certaines classes de *cartes planaires aléatoires* (i.e., de graphes planaires aléatoires plongés dans la sphère) et de leur limite, la *carte brownienne*. En plus de leur connexion directe avec les arbres aléatoires *via* la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter, sur laquelle nous revenons plus bas, les cartes planaires apparaissent de manière naturelle dans plusieurs domaines de la physique et des probabilités. Signalons-en ici deux, en renvoyant le lecteur vers le premier chapitre de la thèse de Bouttier [5] pour une présentation plus détaillée.

Un premier lien est leur apparition dans l'étude des *intégrales matricielles*. Soit $t > 0$, et soit M_N une matrice hermitienne aléatoire de taille N , distribuée selon la mesure gaussienne $\mu_{N,t}$ (de densité proportionnelle à $\exp(-\frac{N}{2t} \text{Tr} M^2)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel $H(n)$ des matrices hermitiennes). Soit $V(x) = \sum_{n=1}^d \frac{v_n}{n} x^n$ un polynôme; on appelle *modèle à une matrice* la mesure de probabilité sur $H(n)$ dont la densité par rapport à la mesure gaussienne est $Z_{N,V}(t)^{-1} \exp(N \text{Tr}(V(M)))$ — le facteur de normalisation $Z_{N,V}(t)$ porte le nom de *fonction de partition* du modèle, et l'écriture suivante justifie le terme « intégrale matricielle » :

$$Z_{N,V}(t) = E \left[e^{N \text{Tr} V(M_N)} \right] = \int_{H(n)} e^{N \text{Tr} V(M)} d\mu_{N,t}(M).$$

Une conséquence du théorème de Wick est le développement formel suivant de l'énergie libre du modèle :

$$F_{N,V}(t) := \log Z_{N,V}(t) = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_{N,V}^{(g)}(t),$$

où $F_{N,V}^{(g)}(t)$ est la série génératrice des cartes de genre g , chacune étant affectée d'un poids v_n pour chaque sommet de degré n , d'un poids t par arête et d'un facteur de symétrie. En particulier, le terme dominant quand N tend vers $+\infty$ est donné par la série génératrice des cartes planaires, d'où le nom de *limite planaire* donné à ce régime. Le cas $V(x) = \frac{1}{2p} x^{2p}$ est particulièrement intéressant, puisqu'on peut alors, par dualité, voir la série génératrice qui apparaît comme une somme sur toutes les cartes planaires dont les faces ont $2p$ côtés, lesquelles constituent l'objet principal de cet exposé. Passer d'un tel développement formel à un développement asymptotique

de l'énergie libre est loin d'être facile ; on pourra par exemple se référer à la thèse de Maurel-Segala [25].

Un second lien entre cartes planaires aléatoires et mécanique statistique est l'un des aspects de la *gravité quantique*, qui, dans le cadre qui nous intéresse, consiste à définir un modèle microscopique (tel que le modèle d'Ising, la percolation, ou simplement la marche aléatoire) sur un graphe lui-même aléatoire, ce qui dans le cas bidimensionnel revient à le définir sur une carte plane. La mesure uniforme sur les cartes de taille fixée, qui est celle que nous considérerons par la suite, n'est pas la mieux adaptée ici : en effet, si on considère plutôt une distribution de type Boltzmann, pour laquelle le poids d'une carte particulière s'écrit comme un produit sur ses sommets de termes locaux, des parties disjointes du graphe deviennent en un sens indépendantes, ce qui simplifie l'étude du système.

Le principal problème est alors de relier le comportement d'un même modèle en géométrie fixée et en géométrie aléatoire, ce qui reste mal compris dans le cas général. Pour des modèles pris à leur point critique, Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov [15] obtiennent un tel lien sous la forme d'une relation entre exposants critiques. Des travaux récents (et non encore publiés) de Duplantier et Sheffield [11, 12] construisent une structure conforme aléatoire sur la sphère comme exponentielle d'un champ libre gaussien [30], et l'objet ainsi obtenu permet (en oubliant les problèmes de passage à la limite continue) de justifier ce formalisme ; les liens entre cet objet et la carte brownienne restent largement à explorer.

Les premiers liens combinatoires entre cartes planaires et arbres décorés apparaissent dans un article de Cori et Vauquelin [10], et constituent le thème de la thèse de Schaeffer [29]. Des théorèmes limites similaires à ceux que nous présentons ici, mais pour la plupart exprimés en termes d'arbres et de mobiles, apparaissent dans des travaux de Chassaing et Schaeffer [9], Marckert et Miermont [23] et Marckert et Mokkadem [24]. Ce dernier article introduit le terme de carte brownienne, avec un sens légèrement différent de celui que nous utiliserons par la suite.

Il est à noter que les hypothèses faites sur les cartes considérées (taille fixée des faces, ou simplement bipartition du graphe), si elles sont utiles dans les constructions combinatoires, ne semblent pas fondamentales : la conjecture naturelle est que la carte brownienne constitue la limite d'échelle de toute suite de mesures « naturelles » sur des cartes dont la taille tend vers l'infini. Les travaux récents de Miermont et Weill [27] fournissent le principe d'invariance nécessaire sur les arbres, la seule différence à ce niveau avec le cas du degré fixé (en dehors de la complication des preuves) étant que les constantes numériques sont bien sûr différentes.

Signalons enfin l'existence d'une autre approche du problème : on peut considérer la limite en loi d'une carte aléatoire dont la taille tend vers l'infini sans renormaliser la distance de graphe. L'objet limite est alors un graphe planaire localement fini aléatoire, et l'on peut étudier ses propriétés à grande échelle. On s'attend naturellement à ce qu'elles correspondent à des propriétés locales de la carte brownienne. Cette approche a été suivie par Angel et Schramm [2, 3] dans le cas de triangulations aléatoires, donnant lieu à la construction de la *triangulation infinie uniforme* du plan.

L'exposé suit essentiellement l'ordre et les notations utilisés dans les articles [19], [21] et [20]; la principale différence est que nous notons ici d_n la distance renormalisée. Les contraintes de format nous empêchant d'y inclure des preuves détaillées des résultats énoncés, nous renvoyons le lecteur à ces articles pour plus de détails et choisissons de nous concentrer sur une présentation de la stratégie générale de la preuve et des arguments combinatoires utilisés, en donnant quelques indications sur la démonstration des points essentiels.

1. CARTES PLANAIRES, MOBILES ET ARBRES ALÉATOIRES

1.1. Cartes planaires aléatoires

Par *carte planaire*, on désigne un plongement d'un graphe planaire fini dans la sphère \mathbb{S}^2 , défini à l'action près d'un homéomorphisme direct de la sphère dans elle-même. On autorise *a priori* les arêtes multiples entre deux sommets ainsi que les boucles (arêtes joignant un sommet à lui-même) — notons toutefois que les cartes que nous serons amenés à considérer ne posséderont jamais de telles boucles. Le complémentaire d'une carte planaire est une famille finie de *faces* homéomorphes au disque. Le bord d'une face peut être vu comme une suite finie d'arêtes orientées, que l'on appellera les *côtés* de cette face. Une carte est dite *enracinée* si elle est munie d'une arête orientée marquée (dite *arête-racine*); on identifiera deux cartes enracinées s'il existe un homéomorphisme direct de la sphère dans elle-même envoyant l'une sur l'autre, et envoyant l'arête-racine de la première sur celle de la seconde.

Dans tout cet exposé, on fixera un entier p strictement supérieur à 1. Pour tout $n > 0$, soit \mathcal{M}_n^p l'ensemble des cartes planaires enracinées à n faces, dont toutes les faces ont $2p$ côtés. On appellera une telle carte une *2p-angulation* de la sphère (une *quadrangulation* dans le cas $p = 2$). L'ensemble \mathcal{M}_n^p est fini, ce qui permet de définir l'objet central de cet exposé :

DÉFINITION 1.1. — *On appelle 2p-angulation aléatoire à n faces une variable aléatoire M_n distribuée selon la loi uniforme sur \mathcal{M}_n^p .*

Si M_n est une telle carte aléatoire, on notera \mathbf{m}_n l'ensemble de ses sommets. \mathbf{m}_n est muni d'une distance naturelle \tilde{d}_n héritée de celle du graphe sous-jacent. Pour des raisons qui seront vite claires, on munira en fait m_n de la distance

$$d_n := \left[\frac{9}{4p(p-1)} \right]^{1/4} n^{-1/4} \tilde{d}_n.$$

Le préfacteur numérique est de peu d'importance pour ce qui nous intéresse ici (particulièrement pour p fixé), le point important étant la valeur $-1/4$ de l'exposant de n .

QUESTION 1.2. — *Quel est le comportement asymptotique de la suite $(\mathbf{m}_n, d_n)_n$?*

Cette question est encore partiellement ouverte ; en particulier on ne sait pas prouver la convergence en loi. Le résultat principal que nous présentons dans cet exposé fournit une réponse partielle ; il nécessite pour son énoncé l'introduction d'un objet qui, s'il est devenu classique en géométrie, l'est peut-être moins dans la communauté probabiliste.

DÉFINITION 1.3. — (1) *Soit (\mathcal{X}, d) un espace métrique localement compact ; si X est un compact de \mathcal{X} et si $r \in \mathbb{R}_+$, on note $V_r(X) := \{x \in \mathcal{X} : d(x, X) \leq r\}$. Pour toute paire (A, B) de compacts non vides de \mathcal{X} , on définit leur distance de Hausdorff comme*

$$d_H(A, B) := \inf \{r > 0 : A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\}.$$

Cela fait de l'ensemble des compacts de \mathcal{X} un espace métrique lui aussi localement compact.

(2) *Soient (\mathcal{X}_1, d_1) et (\mathcal{X}_2, d_2) deux espaces métriques compacts. On définit leur distance de Gromov-Hausdorff comme*

$$d_{GH}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) := \inf_{\mathcal{Y}} \inf_{\varphi_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}} \inf_{\varphi_2: \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{Y}} \{d_H(\varphi_1(\mathcal{X}_1), \varphi_2(\mathcal{X}_2))\},$$

la borne inférieure étant prise sur tous les espaces métriques compacts \mathcal{Y} et sur tous les plongements isométriques φ_1 (resp. φ_2) de \mathcal{X}_1 (resp. \mathcal{X}_2) dans \mathcal{Y} .

PROPOSITION 1.4. — *Deux espaces métriques compacts sont isométriques si et seulement si leur distance de Gromov-Hausdorff est nulle. Soit \mathcal{E} l'espace des classes d'isométries d'espaces métriques compacts : d_{GH} induit sur \mathcal{E} une distance que l'on continue à noter d_{GH} , et qui en fait un espace métrique polonais.*

On peut voir (\mathbf{m}_n, d_n) comme une variable aléatoire à valeurs dans \mathcal{E} . Le résultat principal que nous souhaitons présenter ici est le suivant :

THÉORÈME 1.5 (Le Gall-Paulin [19, 21]). — *La suite $(\mathbf{m}_n, d_n)_n$ est tendue* – i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact \mathcal{K}_ε de \mathcal{E} tel que, pour tout $n > 0$, on ait

$$P[(\mathbf{m}_n, d_n) \in \mathcal{K}_\varepsilon] \geq 1 - \varepsilon.$$

Toute limite en loi d'une sous-suite de (\mathbf{m}_n, d_n) est presque sûrement homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .

1.2. Arbres, parcours d'arbres et p -mobiles

La première étape dans la preuve du résultat consiste à relier les cartes planaires à des objets dont la combinatoire est plus facile à manier. La bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter les met en relation avec une classe particulière d'arbres planaires décorés, appelés p -mobiles. On suit ici les notations de [19].

Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} (\mathbb{N}^*)^n$ l'ensemble des suites finies d'entiers strictement positifs (où par convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$). Si $u = (u_1, \dots, u_n)$ est un élément de \mathcal{U} , on notera $|u| = n$ sa *longueur* ($|\emptyset| = 0$). L'opération de concaténation des suites munit \mathcal{U} d'une structure de semi-groupe; on notera uv la concaténation de u et v . On dira alors que u est un *ancêtre* de uv , et que uv est un *descendant* de u . Dans le cas particulier où $|v| = 1$, u est le *père* de uv , qui est son *fil*. La suite vide est donc le seul élément de \mathcal{U} qui n'a pas de père; si $|u| > 0$, on notera \hat{u} le père de u .

DÉFINITION 1.6. — *Un arbre planaire est une partie finie non vide τ de \mathcal{U} vérifiant les deux conditions suivantes : (1) Le père de tout élément non vide de τ est aussi dans τ ;*

(2) *Si $u \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ et si $k < u_{|u|}$, alors $(u_1, \dots, u_{|u|-1}, k) \in \tau$.*

Un p -arbre est un arbre planaire τ dont tout élément de longueur impaire a exactement $p - 1$ fils dans τ . On notera $|\tau|$ le nombre de sommets de τ .

Autrement dit, si τ est un p -arbre et si $u \in \tau$ est de longueur impaire, les fils de u qui sont dans τ sont exactement les u_j avec $1 \leq j \leq p - 1$. On appellera *sommets blancs* (resp. *noirs*) de τ ses éléments de longueur paire (resp. impaire); on notera τ° (resp. τ^\bullet) l'ensemble de ses sommets blancs (resp. noirs). Si u est un sommet noir de τ , on notera $u_{(0)} = u_{(p)} = \hat{u}$ et $u_{(j)} = u_j$ pour $1 \leq j \leq p - 1$. Notons que τ° est lui-même muni d'une structure d'arbre naturelle, si l'on déclare qu'un sommet u est le père de v dans τ° si et seulement si il est son grand-père dans τ . Nous aurons besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 1.7. — *Soit τ un arbre; supposons τ plongé dans le plan, de telle sorte que pour chaque $u \in \tau$, \hat{u} et les enfants de u dans τ apparaissent autour de u dans le sens indirect. On appelle parcours de τ en profondeur d'abord la suite $\mathcal{P}(\tau)$ des sommets rencontrés en longeant le bord du complémentaire de τ dans le sens direct.*

De manière équivalente, le parcours en profondeur d'abord de l'arbre τ est la suite $\mathcal{P}(\tau) = (x_i)_{0 \leq i \leq 2(|\tau|-1)}$ définie par $x_0 = \emptyset$ et, pour tout $0 \leq i < 2(|\tau| - 1)$,

- Si l'un des fils de x_i n'est pas encore apparu dans la suite $(x_k)_{k < i}$, alors $x_{i+1} = x_i j$ est celui des tels sommets pour lequel j est minimal ;
- Sinon, $x_{i+1} = \hat{x}_i$.

L'outil combinatoire central à l'étude qui suit est un arbre décoré :

DÉFINITION 1.8. — Un p -mobile est une paire $\theta = (\tau, (\ell_u)_{u \in \tau^\circ})$, où τ est un p -arbre, et où (ℓ_u) est une famille d'entiers strictement positifs, indexée par τ° , qui satisfait la condition suivante : pour tout $u \in \tau^\bullet$, et pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, on a l'inégalité $\ell_{u_{(j+1)}} \geq \ell_{u_{(j)}} - 1$. L'entier ℓ_u est appelé l'étiquette de u .

1.3. La bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter

Soit $\theta = (\tau, \ell)$ un p -mobile ayant n sommets noirs (et donc $1 + pn$ sommets et $k := pn$ arêtes) ; soit $(u_i)_{0 \leq i \leq 2k} = \mathcal{P}(\tau)$ le parcours de τ en profondeur d'abord. L'algorithme que nous décrivons à présent succinctement est dû à Bouttier, Di Francesco et Guitter ; nous renvoyons le lecteur intéressé à leur article [6] pour une présentation plus formelle. Supposons l'arbre τ plongé dans le plan, de telle sorte que pour tout $u \in \tau^\bullet$ les $u_{(j)}$ apparaissent autour de u dans cet ordre. Soit ∂ un sommet supplémentaire, muni de l'étiquette $\ell_\partial = 0$, et soit $\mathbf{m} = \tau^\circ \cup \{\partial\}$. On construit alors une carte planaire M , dont \mathbf{m} est l'ensemble des sommets, de la façon suivante : partant du graphe vide sur cet ensemble d'arêtes, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$:

- si $\ell_{u_{2i}} = 1$, on ajoute une arête entre u_{2i} et ∂ ;
- sinon, on ajoute une arête entre u_{2i} et $u_{2i'}$, où $i' = \min\{j > i : \ell_{u_{2j}} = \ell_{u_{2i}} - 1\}$.

Toutes ces arêtes sont plongées dans le plan de telle sorte qu'elles n'intersectent par l'arbre τ — ce qui est toujours possible :

PROPOSITION 1.9 (Bouttier, Di Francesco, Guitter [6]). — L'algorithme ainsi décrit produit une carte planaire qui a n faces, toutes ayant $2p$ côtés et contenant exactement un sommet noir de τ . De plus, si on enracine la carte obtenue en y marquant l'arête (∂, \emptyset) , il réalise une bijection entre \mathcal{M}_n^p et l'ensemble \mathcal{T}_n^p des p -mobiles à n sommets noirs.

Une conséquence immédiate de cette proposition est que l'on peut réaliser la variable aléatoire (\mathbf{m}_n, d_n) en appliquant l'algorithme à un élément de \mathcal{T}_n^p choisi selon la loi uniforme. Supposons un instant que, dans la définition d'un mobile, les étiquettes soient à valeurs dans \mathbb{Z} plutôt que dans \mathbb{N}^* (appelons l'objet correspondant un p -mobile signé). Il est clair que le nombre de p -mobiles signés à n sommets noirs dont l'arbre sous-jacent est τ ne dépend pas de la forme de τ mais seulement de n et de p .

La construction d'un p -mobile signé aléatoire uniforme est alors facile : on peut commencer par choisir un p -arbre aléatoire τ uniformément parmi les p -arbres à n sommets noirs, puis conditionnellement à τ choisir un étiquetage (ℓ_u) uniformément parmi les choix admissibles. Or, le comportement asymptotique d'un p -arbre aléatoire est bien connu, et on sait en particulier que sa profondeur (la longueur maximale de l'un de ses sommets) est d'ordre $n^{1/2}$; par ailleurs, conditionnellement à τ , la suite des étiquettes que l'on trouve le long d'une branche donnée est une suite à accroissements indépendants et stationnaires dont il est facile de vérifier qu'ils sont centrés : le théorème central limite entraîne alors que l'étiquette que l'on trouve à l'extrémité d'une branche de longueur l est d'ordre $l^{1/2}$. Il est donc naturel de s'attendre à ce que la plus grande étiquette vue sur un p -mobile signé uniforme à n sommets noirs soit d'ordre $n^{1/4}$ — c'est en effet le cas, comme nous allons le montrer dans la section suivante, y compris pour des mobiles à étiquettes positives.

Anticipons toutefois la suite de l'exposé par la remarque fondamentale suivante. Dans la construction précédente, soit u un sommet blanc de τ : en suivant les arêtes ajoutées par l'algorithme, on construit immédiatement une suite de ℓ_u arêtes reliant u à ∂ et le long de laquelle ℓ décroît. Comme par ailleurs toute arête relie deux sommets dont les étiquettes diffèrent de 1, on obtient l'égalité $\tilde{d}_n(u, \partial) = \ell_u$, et en corollaire une majoration du diamètre d'une carte aléatoire en fonction de l'étiquette maximale du mobile correspondant, qui explique que l'on normalise la distance d_n par un facteur $n^{-1/4}$.

La principale difficulté est alors que, si l'étude des mobiles se prête bien à l'étude des distances à un point marqué dans une carte aléatoire, elle semble à première vue peu adaptée par exemple au calcul de la distance entre deux points quelconques d'une telle carte ; la dernière partie de cet exposé sera ainsi consacrée à l'utilisation de propriétés fines de l'objet limite pour contourner cette obstruction.

1.4. Fonctions de contour et codage d'arbres

Reprenant les notations de la section précédente, soit $C_i = \frac{1}{2}|u_{2i}|$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. La suite (C_i) porte le nom de *fonction de contour* de l'arbre τ° . Il n'est pas difficile de montrer que la fonction de contour détermine entièrement τ° , et donc aussi τ . On sera aussi amené à considérer la suite (V_i) définie par $V_i = \ell_{u_{2i}}$, appelée *fonction de contour spatiale* du mobile θ — et de manière similaire, la donnée de la paire (C, V) caractérise entièrement θ .

Notons $[k] := \{0, \dots, k\}$, et munissons $[k]$ de la relation d'équivalence \sim telle que l'on ait $i \sim j$ si et seulement si $u_{2i} = u_{2j}$. L'arbre τ° s'identifie alors au quotient $[k]/\sim$. Pour formaliser le lien entre fonction de hauteur et arbres, il suffit de caractériser cette

relation d'équivalence en termes de la suite (C_i) . Soit donc, pour tous $i \leq j$,

$$C_*[i, j] := \min \{C_k, i \leq k \leq j\}.$$

Par abus de notation, on étendra cette définition au cas $i > j$, pour lequel on donnera à $C_*[i, j]$ la même valeur qu'à $C_*[j, i]$. Clairement, si $i \sim j$, alors on a $C_*[i, j] = C_i = C_j$. La réciproque est fautive en général; néanmoins, u_{2i} et u_{2j} sont deux apparences successives du même sommet de τ° lors de son exploration en profondeur d'abord si et seulement si

$$i + 1 < j, \quad C_i = C_j \quad \text{et} \quad C_i < C_*[i + 1, j - 1].$$

On peut alors reconstruire la relation \sim par clôture transitive. Ce formalisme va nous permettre de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ de manière agréable.

DÉFINITION 1.10. — *Un arbre réel est un espace métrique (\mathcal{T}, d) satisfaisant les deux conditions suivantes : (1) Pour tous a et b dans \mathcal{T} , il existe un unique plongement isométrique du segment $[0, d(a, b)]$ dans \mathcal{T} envoyant 0 sur a et $d(a, b)$ sur b ; on notera $\llbracket a, b \rrbracket$ son image.*

(2) *Si $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$ est continue et injective, alors $\varphi([0, 1]) = \llbracket \varphi(0), \varphi(1) \rrbracket$.*

L'arbre est dit enraciné si l'un de ses points (sa racine) est distingué. Tous les arbres considérés dans cet exposé seront implicitement supposés enracinés et compacts.

Soit alors $\sigma > 0$, et soit $g : [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue nulle en 0 et en σ — on appellera *fonction de contour* une telle fonction. Comme précédemment, on peut, pour tous $s \leq t$, définir

$$g_*[s, t] := \min \{g(x), s \leq x \leq t\},$$

notation que l'on étendra au cas $s > t$ par symétrie. On munit alors l'intervalle $[0, \sigma]$ d'une pseudo-métrique d_g en posant

$$d_g(s, t) := g(s) + g(t) - 2g_*[s, t].$$

En définissant la relation d'équivalence \sim_g associée, pour laquelle $s \sim_g t$ si et seulement si $d_g(s, t) = 0$, on obtient en passant au quotient un espace métrique $\mathcal{T}_g := [0, \sigma] / \sim_g$ (dont on notera la distance d_g également). Notons que si φ est un homéomorphisme de \mathbb{R}_+ dans lui-même, alors les espaces \mathcal{T}_g et $\mathcal{T}_{g \circ \varphi}$ (où la fonction $g \circ \varphi$ est définie sur $[0, \varphi^{-1}(\sigma)]$) sont isométriques.

PROPOSITION 1.11 (Duquesne–Le Gall [13, théorème 2.1]). — *L'espace métrique (\mathcal{T}_g, d_g) ainsi obtenu est un arbre réel.*

On choisira pour racine la classe d'équivalence de 0; on dira que l'arbre réel \mathcal{T}_g est codé par la fonction g , ou que g est sa fonction de contour. Ce codage est régulier, au sens suivant : si g et h sont deux fonctions de contour, que l'on peut toujours supposer définies sur le même intervalle $[0, \sigma]$, alors $d_{GH}(\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_h) \leq 2\|g - h\|_\infty$ (cf. [13, lemme 2.3]).

Remarque 1.12. — On peut montrer que tout arbre réel compact \mathcal{T} peut être codé par une fonction continue. Il suffit par exemple de considérer un ε -réseau $(x_i)_{i \leq n}$ sur cet arbre, et de construire le sous-arbre engendré par les x_i (c'est-à-dire la réunion des $\llbracket x_i, x_j \rrbracket$). Il s'agit encore d'un arbre réel, mais il est facile de vérifier qu'il est isométrique à un arbre fini aux arêtes duquel on a donné des longueurs positives; et l'exploration de cet arbre fini en profondeur d'abord permet d'en construire la fonction de contour. En raffinant alors le réseau considéré, on obtient par passage à la limite une fonction continue g telle que \mathcal{T} soit isométrique à \mathcal{T}_g .

Le codage d'un arbre réel par une fonction de contour est en revanche loin d'être unique; dans le cas discret, en changeant l'ordre des fils d'un nœud donné, on compose la fonction de contour à droite par un échange d'intervalles, sans changer l'espace métrique sous-jacent.

1.5. Limites de mobiles aléatoires et arbres continus

Soit $(e_t)_{t \in [0,1]}$ une excursion brownienne normalisée — que l'on peut par exemple définir comme la limite en loi, quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, du mouvement brownien réel sur $[0, 1]$, issu de ε , et conditionné à atteindre 0 pour la première fois dans l'intervalle $[1 - \varepsilon, 1]$. On appelle *arbre aléatoire continu* l'arbre codé par (e_t) .

Une autre façon de définir ce processus, qui explique pourquoi il apparaît naturellement dans le contexte des cartes aléatoires, est la suivante. Soit μ une loi de probabilité symétrique à support fini sur \mathbb{Z} , de variance $\sigma^2 > 0$ (le résultat reste vrai sous des hypothèses plus faibles, mais ce cas nous suffira ici); pour tout $n > 0$, soit $(S_k^n)_{0 \leq k \leq 2n}$ une marche aléatoire sur \mathbb{N} , issue de 0, de loi de saut μ , et conditionnée à revenir pour la première fois en 0 au temps $2n$. Alors, on a la convergence en loi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n\sigma^2}} S_{\lfloor 2nt \rfloor}^n \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{\text{(loi)}} (e_t)_{0 \leq t \leq 1}.$$

Une version résumée (et incomplète) de l'argument qui suit est alors de dire que la fonction de contour d'un p -mobile aléatoire se comporte comme une marche aléatoire, et que l'arbre sous-jacent, muni de sa distance naturelle renormalisée par $n^{-1/2}$, converge donc en loi vers l'arbre aléatoire continu.

On peut encore définir l'excursion brownienne normalisée sans conditionnement, en utilisant le résultat suivant :

THÉORÈME 1.13 (Vervaat [31]). — Soit $(b_t)_{t \in [0,1]}$ un pont brownien standard, et soit t_* le point (presque sûrement) unique où il atteint son minimum. Soit $W_t : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $W_t = b_{t_*+t} - b_{t_*}$ si $t \in [0, 1 - t_*]$ et $W_t = b_{t_*+t-1} - b_{t_*}$ si $t \in [1 - t_*, 1]$. Alors, la distribution de $(W_t)_{t \in [0,1]}$ est celle d'une excursion brownienne normalisée.

Avant d'énoncer précisément ce principe d'invariance, il nous faut définir le processus gaussien limite. Pour toute fonction de contour g sur $[0, \sigma]$, soit $(\Gamma_t^g)_{t \in [0, \sigma]}$ le processus gaussien centré dont la covariance est

$$\text{cov}(\Gamma_s^g, \Gamma_t^g) = g_*[s, t].$$

Il n'est pas difficile de vérifier que pour tous s, t on a $E[(\Gamma_s^g - \Gamma_t^g)^2] = d_g(s, t)$; en particulier, Γ^g prend presque sûrement la même valeur en deux points identifiés par \sim_g , ce qui permet de le voir comme un processus gaussien indexé par \mathcal{J}_g .

Soit alors $(e_t^0, Z_t^0)_{t \in [0,1]}$ le processus défini de la façon suivante :

- (1) $(e_t^0)_{t \in [0,1]}$ est une excursion brownienne normalisée;
- (2) conditionnellement à $(e_t^0)_{t \in [0,1]}$, $(Z_t^0)_{t \in [0,1]}$ a la même loi que le processus $(\Gamma_t^e)_{t \in [0,1]}$.

On note alors (e_t, Z_t) le processus obtenu en conditionnant (e_t^0, Z_t^0) par l'événement $Z_t \geq 0$ (pour tout $t \in [0, 1]$). Le conditionnement impliqué par cette définition peut se faire de plusieurs manières équivalentes; on renverra le lecteur intéressé vers l'article [22] pour plus de détails sur ce point. Une des constructions possibles est similaire à celle de Vervaat, et consiste à réenraciner l'arbre \mathcal{T}_{e^0} au point où Z^0 atteint son minimum; on obtient alors Z en soustrayant à Z^0 la valeur de ce minimum.

THÉORÈME 1.14 (Le Gall-Weill [17, 32]). — Soit $(\theta^n)_n$ une suite de mobiles aléatoires, où θ^n est distribué uniformément sur l'ensemble \mathcal{T}_n^p des p -mobiles à n sommets noirs. Soit $(C_i^n)_{i \leq pn}$ (resp. $(V_i^n)_{i \leq pn}$) la fonction de contour (resp. la fonction de contour spatiale) de θ^n . Alors, on a la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{p-1}} n^{-1/2} C_{tpn}^n, \left[\frac{9}{4p(p-1)} \right]^{1/4} n^{-1/4} V_{tpn}^n \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (e_t, Z_t)_{t \in [0,1]}$$

(où l'on assimile C^n et V^n à des fonctions continues par interpolation linéaire sur les intervalles entre deux entiers successifs, et où l'énoncé est à comprendre au sens de la convergence faible de lois de probabilités sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$).

De la même façon que la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter exprime que l'on peut décrire entièrement une $2p$ -angulation de la sphère par la donnée de deux fonctions, il est naturel à ce point de vouloir interpréter la paire (e, Z) comme encodant un espace métrique (aléatoire) homéomorphe à la sphère, et que l'on a en

fait convergence en loi (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de (\mathbf{m}_n, d_n) vers cet espace. La question ainsi posée reste encore ouverte, et la suite de cet exposé est dédiée à la présentation de progrès récents vers une réponse positive.

Remarque 1.15. — Une démarche similaire à celle que nous avons suivie ici est appliquée par Marckert et Mokkadem dans le cas des quadrangulations uniformes ; plutôt que d’encoder une quadrangulation par une paire de chemins, ils l’encodent par une paire d’arbres. Dans [24], ils définissent un espace métrique de *cartes abstraites* et prouvent que l’on a effectivement convergence en loi, dans cet espace, vers un objet limite qu’ils nomment la *carte brownienne*. La topologie qu’ils introduisent est moins fine que celle que nous considérons ici, puisqu’elle ne permet pas d’accéder à la distance entre deux points d’une carte distincts de sa racine ; il semble toutefois naturel de conserver le terme de carte brownienne pour parler de la limite.

2. L’ESPACE MÉTRIQUE LIMITE

2.1. Tension de la suite (\mathbf{m}_n, d_n)

Rappelons que, pour tout n positif, \mathbf{m}_n désigne l’ensemble des sommets d’une $2p$ -angulation uniforme à n faces M_n de la sphère \mathbb{S}^2 , et que l’on munit \mathbf{m}_n de la distance $d_n = [9/4p(p-1)]^{1/4} n^{-1/4} \tilde{d}_n$, où \tilde{d}_n désigne la distance de graphe sur M_n . Rappelons également que \mathcal{E} désigne l’espace des classes d’isométries d’espaces métriques compacts.

Comme d_n est une distance sur l’ensemble des sommets blancs de l’arbre τ associé à M_n par la bijection de Bouttier, Di Francesco et Guitter, elle induit, par l’intermédiaire de la fonction de contour C^n de cet arbre, une pseudo-distance (que l’on continuera à noter d_n) sur l’intervalle entier $[pn]$. On peut l’étendre en une fonction continue sur $[0, pn]^2$ par une interpolation linéaire en chacune des deux coordonnées – ce que nous supposons dorénavant implicitement fait. Si $(s, t) \in [0, 1]^2$, on notera $\bar{d}_n(s, t) := d_n(spn, tpn)$.

PROPOSITION 2.1 (Le Gall [19, Proposition 3.2]). — *Avec les notations précédentes :*

(1) *la suite des lois des \bar{d}_n est tendue dans l’espace des mesures de probabilité sur $\mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R})$, muni de la topologie de la convergence uniforme ;*

(2) *la suite des lois des (\mathbf{m}_n, d_n) est tendue dans l’espace des mesures de probabilité sur \mathcal{E} , muni de la topologie de Gromov-Hausdorff.*

Esquisse de la preuve. — (1) On a déjà vu un lien entre la fonction de contour V^n et la distance \tilde{d}_n : si a est un sommet blanc de M_n , et si i est tel que dans l'exploration de τ on ait $u_{2i} = a$, alors on a $\tilde{d}_n(a, \partial) = \ell_a^n = V_i^n$. Par analogie avec la définition de la distance sur un arbre réel, définissons alors, pour i et j dans $[pn]$,

$$d_n^\circ(i, j) := V_i^n + V_j^n - 2V_*^n[i, j] + 2$$

(où comme précédemment $V_*^n[i, j]$ désigne la plus petite valeur que prend V^n entre i et j). Alors (cf. [19, Lemme 3.1]), $\tilde{d}_n \leq d_n^\circ$. Par ailleurs, une conséquence directe du principe d'invariance énoncé plus haut est que, si l'on définit

$$D^\circ(s, t) := Z_s + Z_t - 2Z_*[s, t],$$

alors on a la convergence en loi suivante :

$$\left(\left[\frac{9}{4p(p-1)} \right]^{1/4} n^{-1/4} d_n^\circ(spn, tpn) \right)_{(s,t) \in [0,1]^2} \xrightarrow{(\text{loi})} (D^\circ(s, t))_{(s,t) \in [0,1]^2}.$$

En écrivant la majoration

$$|d_n(spn, tpn) - d_n(s'pn, t'pn)| \leq n^{-1/4} [d_n^\circ(spn, s'pn) + d_n^\circ(tpn, t'pn)],$$

on peut alors contrôler les variations des d_n par un module de continuité de D° et conclure qu'avec probabilité arbitrairement proche de 1 elles restent dans une partie relativement compacte de $\mathcal{C}([0, 1]^2, \mathbb{R})$.

(2) La tension de la suite des lois des (\mathbf{m}_n, d_n) est conséquence du critère de compacité suivant :

THÉORÈME 2.2 (Gromov [8, Théorème 7.4.15]). — *Si X est un espace métrique compact, soit $P(X, \varepsilon)$ le plus grand cardinal d'une partie ε -séparée de X (son packing number à l'échelle ε). Une partie \mathcal{X} de \mathcal{E} est précompacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sup_{X \in \mathcal{X}} P(X, \varepsilon) < +\infty$.*

Comme $\tilde{d}_n \leq d_n^\circ$, il suffit à nouveau, pour majorer $P(M_n, \varepsilon)$ uniformément quand $n \rightarrow \infty$, de contrôler les fluctuations de (Z_t) . \square

2.2. La carte brownienne comme espace quotient

Dans l'énoncé du théorème 1.14, la tension nous permet, quitte à considérer la convergence le long d'une sous-suite (n_k) , de supposer que l'on a en fait convergence en loi de

$$\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{p-1}} n^{-1/2} C_{tpn}^n, \left[\frac{9}{4p(p-1)} \right]^{1/4} n^{-1/4} V_{tpn}^n, d_n(spn, tpn) \right)_{(s,t) \in [0,1]^2}$$

vers $(e_t, Z_t, D(s, t))_{(s,t) \in [0,1]}$, où D est un processus continu à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Le théorème de Skorohod montre que l'on peut réaliser toutes les variables aléatoires en

présence sur un même espace de probabilité de façon à avoir convergence presque sûre — ce que nous supposons dorénavant.

Rappelons que \mathcal{T}_e est l'arbre réel dont e est la fonction de contour, et que $s \sim_e t$ si et seulement si $e_s = e_t = e_*[s, t]$, de sorte que $\mathcal{T}_e = [0, 1]/\sim_e$. Définissons une nouvelle relation d'équivalence \approx sur $[0, 1]$ en déclarant que $s \approx t$ si et seulement si $D(s, t) = 0$.

PROPOSITION 2.3 (Le Gall [19, proposition 3.3]). — *Presque sûrement, la fonction D satisfait identiquement les relations $D(s, s) = 0$, $D(s, t) = D(t, s)$ et $D(s, u) \leq D(s, t) + D(t, u)$; si $s \sim_e t$, alors $D(s, t) = 0$. De plus, $D \leq D^\circ$.*

Démonstration. — Soit $(s, t) \in [0, 1]^2$; supposons que l'on ait $s \sim_e t$. Deux cas peuvent se présenter :

- Si pour tout $u \in (s, t)$ on a $e_u > e_s$, alors il existe deux suites (i_n) et (j_n) telles que $i_n/pn \rightarrow s$, $j_n/pn \rightarrow t$, $j_n > i_n + 1$ et $C_{i_n}^n = C_{j_n}^n < C_*^n[i_n + 1, j_n - 1]$, cette dernière condition impliquant $d_n(i_n, j_n) = 0$ comme on l'a vu plus haut. En passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on obtient bien $D(s, t) = 0$.
- S'il existe $u \in (s, t)$ tel que $e_u = e_s$, un tel u est nécessairement unique (car les minima locaux du mouvement brownien sont presque sûrement deux à deux distincts — on reviendra sur ce fait à la fin de l'exposé). On peut donc appliquer l'argument précédent aux deux intervalles $[s, u]$ et $[u, t]$ et conclure par l'inégalité triangulaire.

Les autres assertions s'obtiennent simplement par passage à la limite des propriétés correspondantes de d_n . \square

La relation d'équivalence \approx se factorise donc sur \mathcal{T}_e , et D induit une distance sur \mathcal{T}_e/\approx , que nous continuerons à noter D . Notons qu'alors les espaces $([0, 1]/\approx, D)$ et $(\mathcal{T}_e/\approx, D)$ sont isométriques. Toutefois la (pseudo-)distance sur $[0, 1]$ qui est la plus facile à contrôler est D° , laquelle ne s'étend pas aussi facilement à l'arbre \mathcal{T}_e .

Si a et b sont deux points de \mathcal{T}_e , définissons $D^\circ(a, b)$ comme la plus petite valeur que prend $D^\circ(s, t)$ quand s (resp. t) parcourt l'ensemble des éléments de a (resp. b) vu comme une classe d'équivalence de \sim_e , donc comme une partie de $[0, 1]$. D° ne satisfait pas en général l'inégalité triangulaire : définissons donc

$$D^*(a, b) := \inf_{q > 0} \inf_{a_1, \dots, a_{q-1} \in \mathcal{T}_e} \sum_{i=0}^{q-1} D^\circ(a_i, a_{i+1})$$

(où par convention $a_0 = a$ et $a_q = b$). On voit alors facilement que $D \leq D^* \leq D^\circ$. Le résultat principal de l'article [19] est le suivant :

THÉORÈME 2.4 (Le Gall). — *Si la suite (n_k) est choisie comme précédemment, alors presque sûrement la suite $(\mathbf{m}_{n_k}, d_{n_k})$ converge vers $(\mathcal{T}_e/\approx, D)$ pour la distance de Gromov-Hausdorff. De plus, pour tous a et b dans \mathcal{T}_e , les conditions $a \approx b$, $D(a, b) = 0$, $D^*(a, b) = 0$ et $D^\circ(a, b) = 0$ sont équivalentes.*

Démonstration. — La présentation d’une preuve détaillée de ce résultat dépasserait les limites imposées à cet exposé, nous renvoyons pour cela le lecteur à l’article [19]. Signalons toutefois deux choses : d’une part, que la convergence elle-même n’est pas la partie la plus difficile du théorème (elle est essentiellement conséquence de la convergence de d vers D) ; d’autre part, que l’équivalence des caractérisations de la relation d’équivalence \approx , comme dans la proposition 2.3, repose sur le contrôle de propriétés fines presque sûres de l’objet limite. \square

Si la distance D peut *a priori* dépendre de la sous-suite (n_k) choisie, en revanche l’unicité de D^* est garantie par le principe d’invariance, et la relation d’équivalence \approx est donc elle aussi indépendante de ce choix. Par conséquent, même si le théorème ne garantit pas l’existence d’une limite en loi de la suite (\mathbf{m}_n, d_n) , il entraîne que toutes les valeurs d’adhérence sont deux à deux homéomorphes. C’est en ce sens qu’il faut comprendre les énoncés de la section qui suit : on parlera de *la* carte brownienne pour désigner l’une quelconque de ces valeurs d’adhérence, et toute propriété énoncée pour la carte brownienne sera en fait partagée par toutes ces valeurs d’adhérence.

On conjecture toutefois que l’objet limite est décrit par la distance D^* :

CONJECTURE 2.5. — *Avec les notations précédentes, on a $D = D^*$; par conséquent, la suite (\mathbf{m}_n, d_n) converge en loi vers $(\mathcal{T}_e/\approx, D^*)$.*

3. LA CARTE BROWNIENNE EST UNE SPHÈRE

Nous pouvons à présent présenter les grandes lignes de la preuve du théorème 1.5. À nouveau, nous choisissons de nous concentrer sur la stratégie globale de la démonstration, et nous renvoyons le lecteur désireux de connaître les détails plus techniques vers l’article de Le Gall et Paulin [21]. Dans le cas des quadrangulations, notons l’existence d’une preuve postérieure plus directe due à Miermont [26].

3.1. Arbres réels et laminations du disque

Soit g une fonction continue à valeurs réelles définie sur le cercle-unité \mathbb{S}^1 du plan complexe ; faisons sur g l’hypothèse suivante (H_g) , qui nous a déjà servi plus haut dans le cas de l’excursion brownienne : les maxima locaux de g sont deux à deux

distincts. Si s et t sont deux points de \mathbb{S}^1 , notons $[s, t]$ l'arc qui va de s à t dans le sens positif (avec la convention $[s, s] = \{s\}$). Définissons

$$m_g(s, t) := \max \{g_*[s, t], g_*[t, s]\},$$

où comme précédemment $g_*[a, b] = \inf \{g(u) : u \in [a, b]\}$, et

$$d_g(s, t) := g(s) + g(t) - 2m_g(s, t).$$

La construction de la section précédente s'applique : en introduisant la relation d'équivalence \sim_g telle que $s \sim_g t$ si et seulement si $d_g(s, t) = 0$, d_g induit une distance sur l'espace-quotient \mathbb{S}^1/\sim_g qui en fait un arbre réel \mathcal{T}_g . L'hypothèse faite sur g implique que les classes d'équivalence de \sim_g ont toutes au plus 3 éléments.

Remarque 3.1. — Si ω est le point de \mathbb{S}^1 où g atteint son (unique) minimum global, on peut définir la fonction $\tilde{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\tilde{g}(u) = g(\omega e^{2i\pi u})$, et d_g coïncide alors exactement avec $d_{\tilde{g}}$ (au sens de la section précédente); les arbres réels \mathcal{T}_g et $\mathcal{T}_{\tilde{g}}$ sont isométriques. Sauf indication contraire, on considérera l'arbre \mathcal{T}_g comme étant enraciné en (la classe d'équivalence de) ω .

Munissons le disque-unité ouvert \mathbb{D} de la métrique hyperbolique usuelle et, pour s et t deux points distincts de \mathbb{S}^1 , soient st la géodésique hyperbolique ouverte d'extrémités s et t et $\overline{st} := st \cup \{s, t\}$. Par convention on notera $ss = \emptyset$ (et donc $\overline{ss} = \{s\}$). Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION 3.2. — *Une lamination géodésique de \mathbb{D} est une partie fermée de \mathbb{D} qui est la réunion d'une famille de géodésiques deux à deux disjointes. Une telle lamination est dite maximale si elle est maximale pour l'inclusion.*

PROPOSITION 3.3 (Le Gall-Paulin [21, proposition 2.1]). — *Soit L_g la réunion des géodésiques st pour $s \sim_g t$: alors, L_g est une lamination géodésique maximale du disque hyperbolique.*

Démonstration. — Les géodésiques st et $s't'$ sont disjointes si et seulement si les intervalles $[s, t]$ et $[s', t']$ sont soit inclus strictement l'un dans l'autre, soit d'intérieurs disjoints. Si tel n'est pas le cas pour quatre points tels que $s \sim_g t$ et $s' \sim_g t'$, on vérifie alors facilement que ces quatre points sont dans la même classe d'équivalence de \sim_g , ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur g : L_g est donc réunion disjointe de géodésiques. Il est fermé par continuité de g , et sa maximalité s'obtient aisément. \square

Le complémentaire de L_g dans \mathbb{D} est alors une réunion disjointe de triangles hyperboliques idéaux, qui sont en bijection avec les classes d'équivalence de \sim_g qui ont trois éléments (lesquels sont les sommets du triangle correspondant). On peut étendre la relation \sim_g au disque fermé, en conservant la même notation, en déclarant que $a \sim_g b$ si et seulement si a et b sont soit sur la même géodésique fermée \overline{st} avec $s \sim_g t$ dans

\mathbb{S}^1 , soit dans l'adhérence du même triangle géodésique de $\mathbb{D} \setminus L_g$. Les quotients \mathbb{S}^1 / \sim_g et \mathbb{D} / \sim_g s'identifient alors de manière naturelle.

3.2. Composition de deux relations d'équivalence sur le disque

On a vu que la carte brownienne pouvait s'écrire comme le quotient d'un arbre, dont le contour est donné par une excursion brownienne, par une relation d'équivalence. Il est naturel de transposer cette situation au cas de laminations du disque hyperbolique ; soit donc $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une seconde fonction continue, satisfaisant à l'hypothèse (H_h) , et supposons de plus que la paire (g, h) vérifie la restriction supplémentaire suivante $(H'_{g,h})$: si a, b et c sont des points de \mathbb{S}^1 tels que $a \sim_g b$ et $a \sim_h c$, alors $a = b$ ou $a = c$. On peut voir cette condition comme exprimant l'indépendance des deux relations \sim_g et \sim_h ; elle est par exemple réalisée si g et h sont deux ponts browniens indépendants.

On compose les relations \sim_g et \sim_h en définissant une relation d'équivalence sur \mathcal{T}_g que nous continuerons à noter \sim_h : on dira que deux points α et β de \mathcal{T}_g sont dans la même classe d'équivalence pour \sim_h si et seulement si il en existe deux représentants respectifs a et b dans \mathbb{S}^1 tels que $a \sim_h b$. Une autre façon de comprendre cette opération est de l'interpréter comme la description d'une relation d'équivalence \sim sur la sphère (vue comme le recollement de deux copies du disque-unité), pour laquelle deux points sont en relation si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en suivant une chaîne finie de classes d'équivalence de \sim_g (sur un hémisphère) et de \sim_h (sur l'autre).

L'hypothèse $(H'_{g,h})$ exprime que, dans une telle chaîne de classes d'équivalence, l'une au plus n'est pas un singleton, et en particulier toute classe d'équivalence de \sim est une classe de \sim_g ou une classe de \sim_h ; la relation \sim est donc fermée (car \sim_g et \sim_h le sont). De plus les classes d'équivalence de \sim sont compactes et toutes homéomorphes soit à un segment, soit à un triangle. Cela nous permet d'appliquer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.4 (Moore [28]). — *Soit \sim une relation d'équivalence fermée non triviale sur la sphère \mathbb{S}^2 dont chaque classe d'équivalence est compacte, connexe par arcs et de complémentaire connexe. Alors l'espace \mathbb{S}^2 / \sim est homéomorphe à la sphère.*

COROLLAIRE 3.5 (Le Gall-Paulin [21, proposition 2.4]). — *Sous les hypothèses (H_g) , (H_h) et $(H'_{g,h})$, le quotient \mathcal{T}_g / \sim_h est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .*

Démonstration. — Le théorème s'applique clairement au cas de la relation \sim et entraîne que \mathbb{S}^2 / \sim est homéomorphe à \mathbb{S}^2 . Il reste à prouver qu'il est également homéomorphe à \mathcal{T}_g / \sim_h . Pour ce faire, remarquons que \mathcal{T}_g / \sim_h est compact (parce que la relation \sim_h est fermée). L'injection naturelle de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^2 passe au quotient, à droite par \sim et à gauche par \sim_g , produisant une application continue de \mathcal{T}_g dans

\mathbb{S}^2/\sim , laquelle se factorise encore par \sim_h pour induire une application continue de \mathcal{T}_g/\sim_h dans \mathbb{S}^2/\sim . Par construction, cette dernière est une bijection, et la compacité de \mathcal{T}_g/\sim_h entraîne qu'elle est fermée. \square

3.3. Sur les conditions (H_e) , (H_Z) et $(H'_{e,Z})$

L'énoncé du théorème 2.4 peut à présent être récrit de la façon suivante : toute sous-suite convergente (en loi) de (\mathbf{m}_n, d_n) converge en loi vers un espace métrique aléatoire homéomorphe à \mathcal{T}_e/\sim_Z . On saura prouver que cet espace est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 si les fonctions (aléatoires) e et Z satisfont aux trois hypothèses du corollaire précédent. C'est la preuve de ce fait, et en particulier des hypothèses (H_Z) et $(H'_{e,Z})$, qui constitue la majeure partie de l'article [21], et les détails nous entraîneraient bien au-delà des limites imposées à ce texte. La première de ces hypothèses en revanche se montre beaucoup plus facilement :

PROPOSITION 3.6. — *Soit $(B_t)_{t \in [0,1]}$ un pont brownien standard. Alors, les minima locaux de (B_t) sont presque sûrement deux à deux distincts, au sens suivant : si $0 < a < b < c < d < 1$, et si B atteint sa plus petite valeur sur $[a, b]$ (resp. $[c, d]$) en un point de (a, b) (resp. (c, d)), alors $B_*[a, b] \neq B_*[c, d]$.*

Démonstration. — On remarque qu'il suffit de démontrer ce fait pour des bornes d'intervalles rationnelles, et que l'énoncé se réduit alors au suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tous $0 < c < d < 1$, on a $P[B_*[c, d] = x] = 0$. Or, le principe de réflexion assure que le maximum d'une trajectoire brownienne sur un intervalle a une loi qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui permet de conclure. \square

Toutefois, si cette preuve est correcte, il semble difficile de la généraliser directement aux cas qui nous intéressent. En voici une autre, moins élégante (de loin !) et volontairement présentée de manière informelle, mais qui a l'avantage d'être plus générique. Soient donc a, b, c et d comme ci-dessus, et soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Supposons que la plus petite valeur que prend B sur $[a, b]$ soit dans $[x, x + \varepsilon]$. Cela implique que $B_a \geq x$ et, si σ est le premier temps d'atteinte de $[x, x + \varepsilon]$ par B après a , que $\sigma \leq b$. Le processus (B_t) doit ensuite rester supérieur ou égal à x sur tout l'intervalle $[\sigma, b]$, ce qui, par une borne du type « ruine du joueur », a une probabilité conditionnelle de l'ordre de $\varepsilon(b - \sigma)^{-1/2}$. L'invariance du mouvement brownien par renversement du temps permet de supposer que $\sigma \leq \frac{a+b}{2}$, et on obtient alors l'estimation suivante :

$$P(B_*[a, b] \in [x, x + \varepsilon]) = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

où les constantes implicites dans la notation $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ne dépendent que de a et b . Le même argument, et la propriété de Markov, entraînent en fait que

$$P(\{B_*[a, b], B_*[c, d]\} \subset [x, x + \varepsilon]) = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Par conséquent, pour tout $n > 0$, la probabilité qu'il existe $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ pour lequel les minima de B sur $[a, b]$ et $[c, d]$ soient tous les deux dans $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ est au plus d'ordre $2^n 2^{-2n} = 2^{-n}$. Le lemme de Borel-Cantelli permet alors de conclure que pour n assez grand, ces minima, s'ils sont dans l'intervalle $[0, 1]$, sont dans des intervalles disjoints, et qu'ils sont par conséquent distincts, ce qui entraîne le résultat voulu.

L'avantage de la méthode est qu'on peut l'appliquer à (Z_t) , qui ne satisfait pas le principe de réflexion mais qui, étant un processus gaussien, se prête à des calculs explicites. Pour prouver l'hypothèse $(H'_{e,Z})$, on peut raisonner de manière similaire : s'il existe trois points a, b et c du cercle tels que $a \sim_e b$ et $b \sim_Z c$ (notons cet événement F), alors il existe trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) convergeant vers a, b et c respectivement, d'arguments de la forme $2k\pi 2^{-n}$, et tels que $|a_n - b_n|$ et $|b_n - c_n|$ soient au plus d'ordre 2^{-n} . Des résultats connus précédemment sur les modules de continuité de e et Z entraînent qu'alors, $d_e(a_n, b_n)$ est au plus d'ordre $2^{-n/2}$ et $d_Z(b_n, c_n)$ au plus d'ordre $2^{-n/4}$ (à des termes polynomiaux en n près). Pour tout n , on a donc exhibé une famille finie d'événements dont la réunion contient F . La probabilité de chacun d'entre eux peut s'estimer individuellement, sous la forme $2^{-\alpha n}$, et on obtient $P(F) = 0$ si α est assez grand — ce qui exprime qu'alors $(H'_{e,Z})$ est satisfaite presque sûrement.

3.4. Quelques propriétés géométriques de la carte brownienne

Nous terminons cet exposé par l'énoncé de certaines propriétés de la carte brownienne qui ont une contrepartie en termes combinatoires pour des cartes planaires aléatoires uniformes. La première est une réinterprétation du fait que la normalisation naturelle de la distance de graphe fasse intervenir l'exposant $\frac{1}{4}$:

THÉORÈME 3.7 (Le Gall [19, théorème 6.1]). — *La dimension de Hausdorff de la carte brownienne est presque sûrement égale à 4.*

Cela correspond au fait qu'une boule de rayon R dans une grande carte aléatoire aura de l'ordre de R^4 sommets — un énoncé précis dans le cas de la triangulation infinie se trouve dans l'article [2].

Un résultat plus récent, et non encore publié, de Le Gall ([20]) concerne les géodésiques dans les cartes planaires et dans la carte brownienne.

DÉFINITION 3.8. — *Soit e une excursion brownienne normalisée. On appelle squelette de l'arbre \mathcal{T}_e l'ensemble $\text{Skel}(\mathcal{T}_e)$ des sommets de \mathcal{T}_e dont le complémentaire n'est pas connexe. On appellera squelette de la carte brownienne \mathbf{m}_∞ l'image de $\text{Skel}(\mathcal{T}_e)$ par la projection canonique, que l'on notera également $\text{Skel}(\mathbf{m}_\infty)$.*

THÉORÈME 3.9 (Le Gall [20, théorème 1.4]). — Soit $\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \sim_Z$ une carte brownienne et soit ∂ sa racine. Presque sûrement, pour tout point x de \mathbf{m}_∞ :

- si x n'est pas dans le squelette de \mathbf{m}_∞ , alors il existe une unique géodésique joignant ∂ à x dans \mathbf{m}_∞ ;
- si x est dans le squelette de \mathbf{m}_∞ , alors il a un unique antécédent ξ dans \mathcal{T}_e , et le nombre de géodésiques joignant ∂ à x est égal au nombre de composantes connexes de $\mathcal{T}_e \setminus \{\xi\}$. Ce nombre est au plus égal à 3.

Ce théorème est bien sûr faux pour une carte aléatoire finie : il est en effet facile de construire une carte possédant un nombre arbitrairement grand de géodésiques disjointes entre deux de ses sommets. En revanche, il a une contrepartie à grande échelle qui en est un corollaire. Nous concluons cet exposé par l'énoncé de ce résultat.

Soit (\mathbf{m}_n, d_n) une carte planaire aléatoire à n sommets ; rappelons que d_n est la distance de graphe sur \mathbf{m}_n , renormalisée par un facteur proportionnel à $n^{-1/4}$. Pour $j \in \{1, 2\}$, soit $\gamma_j : \{0, \dots, l_j\} \rightarrow \mathbf{m}_n$ un chemin de longueur $n^{-1/4}l_j$ dans cette carte. On définit la distance entre ces deux chemins par

$$d_n(\gamma_1, \gamma_2) := \max_k d_n(\gamma_1(k \wedge l_1), \gamma_2(k \wedge l_2)).$$

Soit ε_n une suite de réels positifs tendant vers 0, et soit $\delta > 0$ fixé ; on appellera *géodésique approchée* entre deux points a et b de \mathbf{m}_n un chemin de longueur au plus $d_n(a, b) + \varepsilon_n$ les joignant. On notera $\text{Geo}_n(a, b)$ (resp. $\overline{\text{Geo}}_n(a, b)$) l'ensemble des géodésiques (resp. géodésiques approchées) entre a et b , et on appellera *multiplicité* (resp. *multiplicité approchée*) entre a et b , notée $\text{Mult}_{n,\delta}(a, b)$ (resp. $\overline{\text{Mult}}_{n,\delta}(a, b)$), le cardinal maximal d'une partie δ -séparée de $\text{Geo}_n(a, b)$ (resp. $\overline{\text{Geo}}_n(a, b)$). On peut voir la multiplicité entre a et b comme le nombre de géodésiques « vraiment différentes » entre a et b . On a toujours $1 \leq \text{Mult} \leq \overline{\text{Mult}}$.

THÉORÈME 3.10 (Le Gall [20]). — Soit (\mathbf{m}_n, d_n) une suite de cartes planaires aléatoires, et soit ∂ la racine de \mathbf{m}_n ; soit a_n un point de \mathbf{m}_n choisi aléatoirement selon la mesure uniforme. Alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P [\overline{\text{Mult}}_{n,\delta}(\partial_n, a_n) = 1] &= 1 ; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P [\exists a \in \mathbf{m}_n : \overline{\text{Mult}}_{n,\delta}(\partial_n, a) \geq 4] &= 0 ; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} P [\exists a \in \mathbf{m}_n : \text{Mult}_{n,\delta}(\partial_n, a) = 3] &= 1. \end{aligned}$$

En d'autres termes : la multiplicité entre deux points génériques de \mathbf{m}_n tend vers 1 en probabilité, et la multiplicité maximale entre deux points de \mathbf{m}_n tend vers 3 en probabilité.

RÉFÉRENCES

- [1] D. ALDOUS – The continuum random tree I, *Ann. Probab.* **19** (1991), p. 1–28.
- [2] O. ANGEL – Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), p. 935–974.
- [3] O. ANGEL & O. SCHRAMM – Uniform infinite planar triangulations, *Comm. Math. Phys.* **241** (2003), p. 191–213.
- [4] F. BONAHOON – Geodesic laminations on surfaces, in *Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, Contemp. Math., vol. 269, Amer. Math. Soc., 2001, p. 1–37.
- [5] J. BOUTTIER – Physique statistique des surfaces aléatoires et combinatoire bijective des cartes planaires, Thèse, Université Paris 6, 2005.
- [6] J. BOUTTIER, P. DI FRANCESCO & E. GUITTER – Planar maps as labeled mobiles, *Electron. J. Combin.* **11** (2004), Research Paper 69.
- [7] J. BOUTTIER & E. GUITTER – Statistics of geodesics in large quadrangulations, *J. Phys. A : Math. Theor.* **41** (2008), 145001.
- [8] D. BURAGO, Y. BURAGO & S. IVANOV – *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., 2001.
- [9] P. CHASSAING & G. SCHAEFFER – Random planar lattices and integrated superBrownian excursion, *Probab. Theory Related Fields* **128** (2004), p. 161–212.
- [10] R. CORI & B. VAUQUELIN – Planar maps are well labeled trees, *Canad. J. Math.* **33** (1981), p. 1023–1042.
- [11] B. DUPLANTIER & S. SHEFFIELD – Liouville quantum gravity and KPZ, prépublication arXiv:0808.1560, 2008.
- [12] ———, Duality and KPZ in Liouville quantum gravity, prépublication arXiv:0901.0277, 2009.
- [13] T. DUQUESNE & J.-F. LE GALL – Probabilistic and fractal aspects of Lévy trees, *Probab. Theory Related Fields* **131** (2005), p. 553–603.
- [14] M. GROMOV – *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Math., vol. 152, Birkhäuser, 1999.
- [15] V. G. KNIZHNIK, A. M. POLYAKOV & A. B. ZAMOLODCHIKOV – Fractal structure of 2D-quantum gravity, *Modern Phys. Lett. A* **3** (1988), p. 819–826.
- [16] S. K. LANDO & A. K. ZVONKIN – *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Math. Sciences, vol. 141, Springer, 2004.
- [17] J.-F. LE GALL – A conditional limit theorem for tree-indexed random walk, *Stochastic Process. Appl.* **116** (2006), p. 539–567.
- [18] ———, Random real trees, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **15** (2006), p. 35–62.

- [19] ———, The topological structure of scaling limits of large planar maps, *Invent. Math.* **169** (2007), p. 621–670.
- [20] ———, Geodesics in large planar maps and in the Brownian map, prépublication arXiv:0804.3012.
- [21] J.-F. LE GALL & F. PAULIN – Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere, *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), p. 893–918.
- [22] J.-F. LE GALL & M. WEILL – Conditioned Brownian trees, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **42** (2006), p. 455–489.
- [23] J.-F. MARCKERT & G. MIERMONT – Invariance principles for random bipartite planar maps, *Ann. Probab.* **35** (2007), p. 1642–1705.
- [24] J.-F. MARCKERT & A. MOKKADEM – Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map, *Ann. Probab.* **34** (2006), p. 2144–2202.
- [25] E. MAUREL-SEGALA – Étude de l'énergie libre de certains modèles matriciels, grandes déviations et relation avec des objets combinatoires, Thèse, ENS de Lyon, 2007.
- [26] G. MIERMONT – On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations, *Electron. Commun. Probab.* **13** (2008), p. 248–257.
- [27] G. MIERMONT & M. WEILL – Radius and profile of random planar maps with faces of arbitrary degrees, *Electron. J. Probab.* **13** (2008), p. 79–106.
- [28] R. L. MOORE – Concerning upper semi-continuous collections of continua, *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), p. 416–428.
- [29] G. SCHAEFFER – Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires, Thèse, Université de Bordeaux I, 1998.
- [30] S. SHEFFIELD – Gaussian free fields for mathematicians, *Probab. Theory Related Fields* **139** (2007), p. 521–541.
- [31] W. VERVAAT – A relation between Brownian bridge and Brownian excursion, *Ann. Probab.* **7** (1979), p. 143–149.
- [32] M. WEILL – Asymptotics for rooted bipartite planar maps and scaling limits of two-type spatial trees, *Electron. J. Probab.* **12** (2007), p. 887–925.

Vincent BEFFARA

U.M.P.A.

École normale supérieure de Lyon

46 allée d'Italie

F-69364 Lyon Cedex 07

E-mail : vbeffara@ens-lyon.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(993) *Géométrie quasiconforme,
analyse au bord des espaces
métriques hyperboliques et rigidités*

Peter HAÏSSINSKY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**GÉOMÉTRIE QUASICONFORME, ANALYSE AU BORD DES
ESPACES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES ET RIGIDITÉS**
[d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...]

par **Peter HAÏSSINSKY**

Dans son *Mémoire sur les groupes kleinéens*, H. Poincaré montre qu'une homographie de la sphère de Riemann se prolonge en une transformation conforme de l'espace et définit une isométrie de l'espace hyperbolique. Il établit ainsi un lien entre la géométrie conforme et la géométrie hyperbolique en soulignant que cette interprétation lui est indispensable pour construire des groupes kleinéens.

Un des buts de cet exposé est de montrer comment cette relation très profonde se manifeste dans le contexte plus général des groupes hyperboliques au sens de M. Gromov [34]. On appliquera ce point de vue pour mettre en évidence des phénomènes de rigidité en courbure strictement négative et en donner des preuves synthétiques.

1. INTRODUCTION

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *propre* si les boules fermées (de rayon fini) sont compactes. Une courbe *géodésique* dans X est une application $\gamma : I \rightarrow X$ définie sur un intervalle I telle que, pour tous $s, t \in I$, $d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$. Si deux points quelconques de X sont joints par un segment géodésique, alors X est une *espace géodésique*.

DÉFINITION 1.1 (Action géométrique). — *Un groupe G opère géométriquement sur un espace métrique propre X si*

- (1) *chaque élément opère par isométrie ;*
- (2) *l'action est proprement discontinue, c'est-à-dire que, pour tous compacts K et L de X , le nombre d'éléments $g \in G$ du groupe tels que $g(K) \cap L \neq \emptyset$ est fini ;*
- (3) *l'action est cocompacte.*

(*) L'auteur est partiellement financé par le projet ANR « Cannon » (ANR-06-BLAN-0366).

Par exemple, si G est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de G , on peut considérer le graphe de Cayley \mathcal{G} associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et une paire $(g, g') \in G \times G$ définit une arête si $g^{-1}g' \in S$. En munissant \mathcal{G} de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$, on obtient la *métrique des mots associée à S* . Elle fait de \mathcal{G} un espace géodésique et propre, et l'action de G sur lui-même par translations à gauche induit une action géométrique sur \mathcal{G} .

Le lemme de Švarc-Milnor montre que la relation d'équivalence naturelle des groupes qui opèrent géométriquement est donnée par la notion de quasi-isométrie, introduite sous cette forme par G. Margulis [52].

DÉFINITION 1.2 (Quasi-isométrie, quasigéodésique). — *Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1, c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \rightarrow Y$ est un plongement (λ, c) -quasi-isométrique si, pour tous $x, x' \in X$, on a*

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda}d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c.$$

On dit que f est une (λ, c) -quasi-isométrie s'il existe $g : Y \rightarrow X$ qui vérifie aussi (1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$.

Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de \mathbb{R} par un plongement quasi-isométrique.

LEMME 1.3 (Švarc-Milnor). — *Soient X un espace géodésique et propre, et G un groupe qui opère géométriquement sur X . Alors G est de type fini et X est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de G .*

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

Un *triangle* de X est la donnée de trois points et de trois segments géodésiques qui les relient.

DÉFINITION 1.4 (Espace et groupe hyperboliques). — *Un espace géodésique propre (X, d) est hyperbolique s'il existe une constante δ telle que n'importe quel côté d'un triangle est contenu dans le δ -voisinage des deux autres. Un groupe est hyperbolique s'il opère géométriquement sur un espace hyperbolique, propre et géodésique.*

L'hyperbolicité d'un espace s'exprime notamment par le *lemme de poursuite* de M. Morse qui affirme que toute quasigéodésique d'un espace hyperbolique est à distance finie d'une géodésique. Cela implique que la propriété d'hyperbolicité est invariante par quasi-isométries dans la catégorie des espaces métriques géodésiques.

Une classe importante d'espaces hyperboliques est celle des espaces CAT(-1) : leurs triangles sont plus fins que ceux du plan hyperbolique de Poincaré $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$. Elle comprend notamment les variétés de Hadamard de courbure sectionnelle majorée par -1 .

Un *rayon* est une géodésique définie sur \mathbb{R}_+ . Deux rayons d'un espace hyperbolique X sont équivalents s'ils sont à distance de Hausdorff finie. Suivant P. Eberlein et B. O'Neill [30], on définit le *bord visuel* (compact) ∂X d'un espace hyperbolique comme l'ensemble des classes de rayons hyperboliques. Il est naturellement muni d'une structure grossièrement conforme qui est préservée par les isométries de X . Les propriétés du bord d'un espace hyperbolique sont établies en utilisant la dynamique à l'infini de ses isométries. Dans le cas des espaces symétriques non compacts de rang 1 et des immeubles fuchsien, la géométrie de leur bord s'avère être très particulière. Elle est en partie responsable de la rigidité de ces espaces, et plus précisément à l'origine des solutions aux problèmes suivants.

- (1) Détermination des variétés compactes localement symétriques de rang 1 par leur groupe fondamental (G.D. Mostow).
- (2) Rigidité des espaces symétriques de rang 1 quaternioniens et du plan de Cayley (P. Pansu) ; de même pour les immeubles fuchsien (M. Bourdon et H. Pajot, et X. Xie).
- (3) Caractérisation des réseaux cocompacts de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *via* leurs bords (J. Cannon *et al.* et M. Bonk et B. Kleiner).

Ces notes contiennent tous les ingrédients pour établir la rigidité des réseaux cocompacts des espaces symétriques hyperboliques et des immeubles fuchsien :

THÉORÈME 1.5. — *Un groupe quasi-isométrique à un espace symétrique hyperbolique de dimension topologique au moins 3 ou à un immeuble fuchsien agit géométriquement sur l'espace symétrique ou l'immeuble fuchsien en question.*

AVERTISSEMENT.— La thématique que nous abordons ici est en pleine expansion, et des choix sont obligatoirement faits. Ils le sont en fonction du goût de l'auteur, en espérant toutefois qu'ils reflètent bien l'état d'esprit du sujet. En particulier, les énoncés ne seront pas toujours les plus généraux. Signalons aussi que les arguments présentés ici sont empruntés à beaucoup d'auteurs. Étant simplifiés à l'extrême et souvent plus récents que les arguments originaux, ils peuvent sembler ne pas rendre hommage au travail présenté ici tels qu'ils le devraient.

Nous renvoyons à [1, 28, 32, 34] au sujet des groupes hyperboliques. On peut consulter [45] pour les propriétés de leur bord, et [3, 15, 47] pour les liens entre géométrie hyperbolique, géométrie quasiconforme et dynamique conforme.

CONVENTIONS.— Tous les espaces hyperboliques seront supposés géodésiques et propres non bornés, avec un bord connexe non trivial. Si X est hyperbolique,

$\text{Isom}(X)$ désignera le groupe d'isométries de X muni de la topologie compacte-ouverte, ce qui le rend localement compact. Un réseau cocompact est dans ce contexte un sous-groupe discret cocompact. Si $p \geq 2$ et X est hyperbolique, on désigne par $\partial^p X$ l'ensemble des p -uplets non ordonnés du bord de X deux à deux distincts.

Si a, b sont des fonctions à valeurs positives, on écrit $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ s'il existe une constante universelle $u > 0$ telle que $a \leq ub$. On écrit $a \asymp b$ si $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$.

REMERCIEMENTS. — Je tiens tout particulièrement à remercier M. Bourdon, H. Pajot et P. Pansu pour m'avoir expliqué avec beaucoup de patience et de gentillesse leurs travaux. Je les remercie aussi, ainsi que C. Pittet, pour leur lecture attentive de versions préliminaires de ce texte.

2. NOTIONS DE GÉOMÉTRIE QUASICONFORME

On présente quelques notions de géométrie quasiconforme qui seront motivées par la théorie géométrique des fonctions de l'espace euclidien.

2.1. Du conforme au quasiconforme

Les homéomorphismes quasiconformes sont obtenus en assouplissant certaines propriétés des transformations conformes. On obtient ainsi plusieurs variantes. On s'appuie essentiellement sur [42, 71].

2.1.1. *Quasisymétrie.* — Une transformation conforme du plan complexe (qui préserve l'orientation) est une transformation affine $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$. Sa propriété principale est de préserver les rapports de distances. P. Tukia et J. Väisälä assouplissent cette condition comme suit [68].

DÉFINITION 2.1 (Homéomorphisme quasisymétrique). — *Soit $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Étant donné un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, on dit que f est η -quasisymétrique si, pour tous x, y, z tels que $d(x, y) \leq td(x, z)$, on a $d'(fx, fy) \leq \eta(t)d'(fx, fz)$. On dira tout simplement que f est quasisymétrique s'il existe η telle que la relation ci-dessus soit vraie. La fonction η est une fonction de distorsion de f .*

Si f est un homéomorphisme η -quasisymétrique alors f^{-1} est η' -quasisymétrique avec $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$. Si f est L -bilipschitz alors f est quasisymétrique avec $\eta(t) = L^2t$.

Cette condition est forte car elle implique de la distorsion bornée, comme le théorème de Koebe pour les applications univalentes [42, Prop. 10.8] :

LEMME 2.2. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme η -quasisymétrique. Si $A \subset B$ avec $\text{diam } B < \infty$, alors $\text{diam } f(B) < \infty$ et

$$\frac{1}{2\eta\left(\frac{\text{diam } B}{\text{diam } A}\right)} \leq \frac{\text{diam } f(A)}{\text{diam } f(B)} \leq \eta\left(2\frac{\text{diam } A}{\text{diam } B}\right).$$

On en déduit facilement un théorème de compacité.

THÉORÈME 2.3. — Soient (X, x_0) , (Y, y_0) , des espaces métriques propres marqués, η un homéomorphisme croissant de \mathbb{R}_+ , et \mathcal{F} la famille d'applications η -quasiymétriques $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(x_0) = y_0$ et telles qu'il existe un point $x'_0 \neq x_0$ et une constante $M < \infty$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $(1/M) \leq |f(x_0) - f(x'_0)| \leq M$. Alors \mathcal{F} est une famille compacte.

2.1.2. *Birapports.* — Une transformation conforme de la sphère de Riemann (qui préserve l'orientation) est une homographie. Sa propriété principale est de préserver les birapports. Si X est un espace métrique, et a, b, c, d sont quatre points distincts, on pose

$$[a : b : c : d] = \frac{|a - b|}{|a - c|} \cdot \frac{|c - d|}{|b - d|}.$$

J. Väisälä introduit la classe suivante [72].

DÉFINITION 2.4 (Transformation quasimöbius). — Une application $f : X \rightarrow X'$ est η -quasimöbius s'il existe un homéomorphisme $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a, b, c, d \in X$ deux à deux distincts, on ait

$$[f(a) : f(b) : f(c) : f(d)] \leq \eta([a : b : c : d]).$$

M. Bonk et B. Kleiner proposent l'interprétation suivante du birapport : si x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre points distincts de X , on définit

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \frac{\min\{|x_1 - x_2|, |x_3 - x_4|\}}{\min\{|x_1 - x_3|, |x_2 - x_4|\}}.$$

Alors

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \leq \eta_0([x_1 : x_2 : x_3 : x_4]) \quad \text{et} \quad [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \leq \eta_1(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$$

où $\eta_0(t) = t + \sqrt{t^2 + t}$ et $\eta_1(t) = t(2 + t)$.

Il vient

THÉORÈME 2.5 (J. Väisälä, [72]). — (i) Une application quasisymétrique est quasimöbius quantitativement.

(ii) Une application quasimöbius est localement quasisymétrique quantitativement.

(iii) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application quasimöbius. Si X et Y sont non bornés, alors f est quasisymétrique, et ce, quantitativement, si et seulement si $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Si X et Y sont bornés et si, pour trois points

$z_1, z_2, z_3 \in X$, on a $|z_i - z_j| \geq \text{diam } X/\lambda$ et $|f(z_i) - f(z_j)| \geq \text{diam } Y/\lambda$ pour un $\lambda > 0$, alors f est η -quasisymétrique, où η ne dépend que de λ et du contrôle de la distorsion des birapports.

Le point (iii) et le théorème 2.3 nous fournissent directement un théorème de compacité.

2.2. Modules de courbes

Un principe de L. Ahlfors et A. Beurling exprime que tout invariant conforme est une fonction du module d'une famille de courbes bien choisies. Nous en verrons plusieurs illustrations.

Une courbe γ dans (X, d) est une application continue d'un intervalle compact I de \mathbb{R} dans X . On peut, comme dans les espaces euclidiens, définir la longueur de γ par

$$\ell(\gamma) = \sup \sum_{0 \leq j < n} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$$

où le supremum est pris sur toutes les subdivisions $(t_j)_{0 \leq j \leq n}$ de I telles que $[t_0, t_n] = I$. Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est *rectifiable*. Dans ce cas, on peut paramétrer γ par la longueur d'arc $\gamma_s : [0, \ell(\gamma)] \rightarrow X$ et pour toute fonction borélienne $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$, on définit

$$\int_{\gamma} \rho ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma_s(t) dt.$$

DÉFINITION 2.6 (Module de familles de courbes). — Soient (X, μ) un espace métrique mesuré, Γ une famille de courbes de X et $p > 1$ un réel. On définit le p -module de Γ par

$$\text{mod}_p \Gamma = \inf \int_X \rho^p d\mu$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques (dites admissibles) $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ telles que, pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$, $\int_{\gamma} \rho ds \geq 1$.

Donnons quelques propriétés élémentaires du module.

- (1) $\text{mod}_p(\emptyset) = 0$;
- (2) si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\text{mod}_p \Gamma_1 \leq \text{mod}_p \Gamma_2$;
- (3) $\text{mod}_p \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}_p \Gamma_i$;
- (4) si Γ_1 et Γ_2 sont deux familles de courbes telles que toute courbe γ_1 dans Γ_1 possède une sous-courbe $\gamma_2 \in \Gamma_2$, alors $\text{mod}_p \Gamma_1 \leq \text{mod}_p \Gamma_2$.

Les modules mod_p définissent donc une famille de mesures extérieures sur les familles de courbes. D'après ci-dessus, le module d'une famille de courbes ne dépend que de ses courbes rectifiables, et si $\Gamma_0 \subset \Gamma$ est de module nul, alors $\text{mod}_p \Gamma = \text{mod}_p \Gamma \setminus \Gamma_0$.

Il suffit en général de se restreindre aux familles de courbes suivantes.

DÉFINITION 2.7 (Condensateurs et capacités). — *Si X est un espace topologique, un condensateur est défini par une paire de continua disjoints $\{E, F\}$. On note $\Gamma(E, F)$ la famille des courbes qui joignent E et F . On définit la p -capacité du condensateur par*

$$\text{cap}_p(E, F) = \text{mod}_p(E, F) = \text{mod}_p \Gamma(E, F).$$

Dans un espace de dimension Q , le module mod_Q tient un rôle particulier car c'est un invariant conforme :

PROPOSITION 2.8. — *Soit $f : M \rightarrow M'$ un difféomorphisme conforme entre deux variétés riemanniennes de dimension $Q > 1$. Si Γ est une famille de courbes sur M et $f(\Gamma)$ désigne la famille $\{f(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$, alors*

$$\text{mod}_Q \Gamma = \text{mod}_Q f(\Gamma).$$

Démonstration. — Si ρ' est une métrique admissible pour $f(\Gamma)$, on définit

$$\rho = \rho' \circ f \cdot \|Df\|.$$

On obtient par changement de variables et du fait que le jacobien d'une transformation conforme est la puissance Q -ième de la norme de sa dérivée :

$$\text{mod}_Q \Gamma \leq \int_M \rho^Q = \int_{M'} (\rho')^Q$$

donc $\text{mod}_Q \Gamma \leq \text{mod}_Q f(\Gamma)$ et on conclut par symétrie. \square

DÉFINITION 2.9 (Homéomorphisme quasiconforme). — *On dit qu'un homéomorphisme $f : X \rightarrow X'$ entre espaces de dimension Q est quasiconforme s'il existe une constante K telle que, pour toute famille de courbes Γ de X ,*

$$\frac{1}{K} \text{mod}_Q \Gamma \leq \text{mod}_Q f(\Gamma) \leq K \text{mod}_Q \Gamma.$$

La proposition suivante illustre bien la manière d'utiliser les modules : les capacités imposent des contraintes géométriques sur les condensateurs ; les homéomorphismes quasiconformes permettent alors de confronter différentes configurations.

PROPOSITION 2.10. — *Soit $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ un homéomorphisme quasiconforme. Alors il existe une constante $H < \infty$ telle que, si $|x - y| \leq |x - z|$, alors*

$$|f(x) - f(y)| \leq H |f(x) - f(z)|.$$

Démonstration. — On se ramène au cas où aucun des trois points x, y, z n'est à l'infini, ce qui nous permet de travailler avec la métrique euclidienne. Supposons qu'il existe $H \geq 10$ telle que $|f(x) - f(y)| = H|f(x) - f(z)|$. On choisit pour E' le segment $[f(x), f(z)]$ et pour F' une demi-droite issue de $f(y)$ qui va à l'infini de sorte que $\text{dist}(E', F') = |f(z) - f(y)|$. On note Γ' la famille des courbes qui joignent E' à F' dont on évalue le n -module en considérant $\rho(w) = 1/|x - w|$. Pour chaque courbe, on a

$$\int \rho \geq \log H$$

et on a aussi

$$\int \rho^n \leq C \cdot \log H$$

donc

$$\text{mod}_n \Gamma' \leq C \log H^{1-n}.$$

Par ailleurs, $\Gamma = f^{-1}(\Gamma')$ est la famille des courbes qui joignent $E = f^{-1}(E')$ à $F = f^{-1}(F')$. On remarque que $\text{dist}(E, F) \leq 2 \text{diam } E$; un résultat de C. Loewner implique l'existence d'une constante m telle que $\text{mod}_n \Gamma \geq m > 0$ [51]. On obtient ainsi

$$m \leq \text{mod}_n \Gamma \leq K \text{mod}_n \Gamma' \leq KC \log H^{1-n},$$

ce qui permet de conclure. □

2.3. Propriétés analytiques

Dans la sphère \mathbb{S}^n , $n \geq 2$, les homéomorphismes quasimöbius, quasisymétriques et quasiconformes représentent la même classe.

On a de plus les propriétés suivantes :

THÉORÈME 2.11. — *Un homéomorphisme quasiconforme de la sphère \mathbb{S}^n , $n \geq 2$, est*

- (1) *absolument continu, c'est-à-dire qu'il préserve les ensembles de mesure nulle,*
- (2) *absolument continu sur presque toute courbe, c'est-à-dire que le n -module des courbes dont l'image n'est pas absolument continue est nul,*
- (3) *différentiable presque partout.*

Ces propriétés ont d'abord été établies en dimension 2 après une longue succession d'étapes. L. Ahlfors, L. Bers, F. Gehring, A. Mori, A. Pfluger et K. Strebel y ont contribué. En dimension 3, on les attribue à F. Gehring et J. Väisälä. Elles sont ensuite généralisées par G.D. Mostow en toute dimension. La différentiation des homéomorphismes quasiconformes découle d'un théorème de Stepanov en toute dimension (un argument de F. Gehring et O. Lehto permet de s'en passer en dimension 2).

2.4. Espaces de Loewner

J. Heinonen et P. Koskela ont développé une théorie des homéomorphismes quasi conformes dans certains espaces métriques mesurés, qualifiés de Loewner, dans lesquels le type de raisonnement de la proposition 2.10 s'applique [43]. On définit ici une classe un peu plus restrictive d'espaces de Loewner (en imposant la condition (2)). Si (E, F) est un condensateur, sa *distance relative* $\Delta(E, F)$ se définit par la formule

$$\Delta(E, F) = \frac{\text{dist}(E, F)}{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}},$$

quantité quasi-invariante par les homéomorphismes quasimöbius.

DÉFINITION 2.12 (Espace loewnesque). — *Un espace métrique mesuré (X, d, μ) est un espace loewnesque s'il existe une dimension $Q > 1$ telle que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*

(1) **CONDITION DE LOEWNER.** *Il existe une fonction décroissante $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour chaque condensateur (E, F) ,*

$$\text{mod}_Q(E, F) \geq \psi(\Delta(E, F)).$$

(2) **AHLFORS-RÉGULARITÉ.** *(X, d, μ) est Q -Ahlfors-régulier, c'est-à-dire que, pour toute boule $B(R)$ de rayon $R \in]0, \text{diam } X]$, on a $\mu(B(R)) \asymp R^Q$.*

Le point (2) permet d'obtenir des bornes supérieures sur les Q -modules comme dans la preuve de la proposition 2.10. Le point (1) impose des bornes inférieures.

C. Loewner a démontré que la capacité d'un condensateur non dégénéré de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, est toujours non nulle [51]. Cette propriété implique ensuite la condition qualifiée de Loewner ci-dessus. À l'origine de cette condition dans un contexte non-riemannien, H.-M. Reimann a aussi établi cette propriété dans les groupes de Heisenberg [60].

Notons qu'un espace loewnesque a de bonnes propriétés de connexité. Par exemple on a la propriété suivante, cruciale pour construire le condensateur (E', F') dans la proposition 2.10.

DÉFINITION 2.13 (Connexité locale linéaire). — *Un espace métrique X est linéairement localement connexe s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, on ait :*

(1) *tout couple de points dans $B(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $B(x, Cr)$;*

(2) *tout couple de points dans $X \setminus \overline{B(x, r)}$ appartient à un continuum contenu dans $X \setminus \overline{B(x, (1/C)r)}$.*

Remarque 2.14. — En général, on montre qu'un espace Q -régulier est loewnesque en montrant qu'il vérifie une inégalité de type « Poincaré ». Ce lien entre les minorations des capacités et des inégalités de Poincaré a été mis en évidence par J. Heinonen [41]. N'en faisant pas un usage explicite dans ces notes, on peut consulter [42, 43] et les références qui s'y trouvent.

Les inégalités de Poincaré servent aussi de point de départ à J. Cheeger pour élaborer un calcul différentiel dans des espaces métriques [24]. Cette théorie semble avoir des applications prometteuses aux groupes hyperboliques [47].

Les espaces de Loewner sont suffisamment réguliers pour obtenir les propriétés suivantes.

THÉORÈME 2.15. — *Soient X un espace Q -loewnesque compact, $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme sur un espace Q -régulier linéairement localement connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *f est quasisymétrique,*
- (2) *f est quasimöbius,*
- (3) *f est quasiconforme pour le Q -module.*

Si l'une de ces propriétés est satisfaite, alors f est absolument continu et absolument continu sur Q -presque toute courbe de X , et Y est loewnesque.

Ce théorème synthétise plusieurs résultats, voir [43, 44, 69, 70]. G.D. Mostow est le premier à avoir étudié ces propriétés de continuité absolue dans un cadre non riemannien, c'est-à-dire au bord des espaces symétriques non compact de rang 1 [56]. L'état actuel des propriétés des homéomorphismes quasisymétriques se trouvent dans [2].

3. GÉOMÉTRIES HYPERBOLIQUE/QUASICONFORME

Un espace hyperbolique a la propriété de visibilité, c'est-à-dire que deux rayons non équivalents peuvent être approchés par une même géodésique en temps positif et négatif. Étant donné un point-base $w \in X$, une *métrique visuelle* vue de w et de paramètre $\varepsilon > 0$ est une distance d_ε sur ∂X telle que $d_\varepsilon(a, b)$ est comparable à $e^{-\varepsilon[a|b]_w}$, où $[a|b]_w = \inf d(w,]a, b[)$ et l'infimum est pris sur toutes les géodésiques joignant a et b . Il existe toujours des métriques visuelles pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

3.1. Structure quasiconforme au bord d'un espace hyperbolique

THÉOREME 3.1. — Une (λ, c) -quasi-isométrie $\Phi : X \rightarrow Y$ entre espaces hyperboliques se prolonge continûment en un homéomorphisme $\phi : \partial X \rightarrow \partial Y$ et, si d_X et d_Y sont des métriques visuelles de paramètre $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$, alors il existe $C = C(\lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y) > 0$ et $\alpha = \alpha(\lambda, c, \varepsilon_X/\varepsilon_Y) \geq 1$ telle que ϕ est η -quasimöbius, avec $\eta(t) = C \cdot \max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}$.

Si Φ est une isométrie et si $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$, alors on peut choisir $\alpha = 1$.

Dans un arbre, on a $[a|b]_w = (1/2)(|w - a| + |w - b| - |a - b|)$ et la formule $e^{-[a|b]_w}$ définit une distance sur son bord. Si a, b, c, d sont quatre points au bord, leur configuration est essentiellement l'une des deux suivantes :

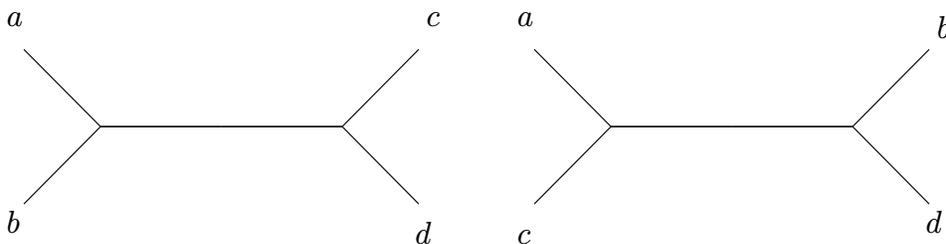


FIGURE 1. Configurations de quatre points dans un arbre

Dans un arbre donc, le logarithme du birapport $[a : b : c : d]$ correspond à la distance entre les segments géodésiques $[a, b]$ et $[c, d]$ au signe près. Dans un espace δ -hyperbolique général X , on peut approcher leur configuration par un arbre. Autrement dit, le birapport entre quatre points est une mesure de la distance entre deux segments géodésiques.

Démonstration. — Comme Φ est une quasi-isométrie, elle transforme les rayons géodésiques asymptotes en quasi-rayons asymptotes de Y . Le lemme de poursuite de Morse montre que ces quasirayons sont à distance bornée de véritables rayons asymptotes. L'application Φ définit ainsi une application entre les bords.

Soient $a, b, c, d \in \partial X$. Comme Φ est une quasi-isométrie et que le birapport mesure essentiellement la distance entre les segments géodésiques, il est quasi-invariant. \square

Par conséquent, les métriques visuelles de deux espaces hyperboliques géodésiques propres quasi-isométriques sont quasimöbius, donc quasisymétriquement équivalentes puisque les bords sont compacts.

En particulier, d'après le lemme de Švarc-Milnor, si G opère géométriquement sur deux espaces métriques hyperboliques géodésiques et propres X et Y , alors il existe une quasi-isométrie qui se prolonge en transformation quasisymétrique entre

les bords. Les bords appartiennent à la même classe quasiconforme, au sens qu'il existe un homéomorphisme quasismétrique entre les deux.

Nous avons une réciproque. À un triplet $\{a, b, c\} \in \partial^3 X$, on associe un triangle idéal de sommets $\{a, b, c\}$. L'hyperbolicité de X nous permet de considérer un centre du triangle, c'est-à-dire un point x dont la distance aux trois côtés est minimale. Cela définit une application $p_X : \partial^3 X \rightarrow X$.

Disons qu'un espace hyperbolique X est *quasi-enveloppé* s'il existe une constante D telle que tout point de X est à distance au plus D de $p_X(\partial^3 X)$. Cette condition est équivalente à X d'être quasi-étoilé (il existe $w \in X$ tel que tout x est à distance au plus D' d'un rayon géodésique issu de w). Elle est vérifiée dès que X admet une action géométrique.

On a alors

THÉORÈME 3.2 (F. Paulin). — *Soient X, Y des espaces hyperboliques D -enveloppés. Toute transformation quasimöbius $\varphi : \partial X \rightarrow \partial Y$ se prolonge en une quasi-isométrie $\Phi : X \rightarrow Y$.*

Pour des énoncés plus précis, on peut consulter [8].

Démonstration. — On suit l'argument de F. Paulin [59] qui utilise la construction de J. Cheeger : tout point x de X est approximativement l'image d'un triplet $\{a, b, c\}$ de $\partial^3 X$. On associe à x le point $\Phi(x) = p_Y(\{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\})$. On vérifie que Φ est une quasi-isométrie en utilisant que les birapports sont contrôlés. \square

3.2. Jauge conforme

Le paragraphe précédent nous conduit naturellement à introduire la jauge conforme d'un espace métrique et d'un groupe hyperbolique.

DÉFINITION 3.3 (Jauge conforme). — *Si (Z, d) est un espace métrique, la jauge conforme $\mathcal{C}(Z, d)$ est l'ensemble des métriques δ sur Z telles que $Id : (Z, d) \rightarrow (Z, \delta)$ est quasismétrique. Si X est un espace hyperbolique, ou si G est un groupe hyperbolique, leurs jauges conformes $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}(G)$ sont les jauges de leurs bords munis d'une métrique visuelle.*

On constate que la jauge d'un espace ou d'un groupe hyperbolique est un invariant de quasi-isométrie. On cherche à déterminer deux types de propriétés relatives à une jauge.

- (1) Les propriétés qui ne dépendent pas de la métrique choisie dans la jauge, comme les propriétés purement topologiques, de complétude, la connexité locale linéaire, le groupe des transformations quasimöbius, etc.

- (2) Les propriétés qui sont satisfaites pour au moins une métrique de la jauge, comme le fait d'être Ahlfors-régulier, loewnesque, d'avoir un groupe dénombrable de transformations conformes, etc.

3.2.1. *Dimension conforme.* — P. Pansu tire de la jauge conforme une caractéristique numérique : la dimension conforme $\dim \mathcal{C}(Z)$, qui est définie comme l'infimum des dimensions de Hausdorff $\dim_H(Z, d)$ de (Z, d) lorsque d parcourt la jauge de Z . Cette quantité est toujours minorée par la dimension topologique de l'espace. En pratique, les jauges contiennent des métriques Ahlfors-régulières, et on s'intéresse alors plutôt à la dimension conforme Ahlfors-régulière $\dim_{AR} \mathcal{C}(Z)$, c'est-à-dire à l'infimum des dimensions de Hausdorff parmi les distances Ahlfors-régulières de la jauge de Z .

Ces deux quantités sont en général difficiles à évaluer. Elles sont cependant calculées par P. Pansu pour les bords des espaces homogènes de courbure strictement négative [57].

Par ailleurs, J. Tyson montre que $\dim \mathcal{C}(Z) = \dim_{AR} \mathcal{C}(Z) = \dim_H Z$ si Z est loewnesque [69]. En fait, si Z est Q -régulier, $Q > 1$, et admet une famille de courbes de Q -module positif, alors Z atteint aussi sa dimension conforme (Ahlfors-régulière), cf. Corollaire 3.6. Certainement plus surprenant, S. Keith et T. Laakso montrent que cette condition est presque nécessaire au sens suivant [46].

THÉORÈME 3.4 (S. Keith et T. Laakso). — *Si Z est Q -régulier, $Q > 1$, et si $\dim_{AR} \mathcal{C}(Z) = \dim_H Z$, alors il existe un espace tangent de Z qui admet une famille de courbes de Q -module positif.*

Pour une définition de l'espace tangent d'un espace métrique, voir § 3.4.

3.2.2. *Modules discrets.* — On introduit une notion de modules robuste par homéomorphismes qui permet d'estimer la dimension conforme Ahlfors-régulière. Elle part d'une idée de P. Pansu et est plus directement inspirée des travaux de J. Cannon et de M. Bonk et B. Kleiner. D'autres variantes de modules discrets ont aussi été définies par J. Heinonen et P. Koskela, J. Tyson, et S. Keith et T. Laakso.

Soient X un espace topologique et \mathcal{J} un recouvrement fini de X . On note $\mathcal{M}_Q(\mathcal{J})$ l'ensemble des applications $\rho : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \sum \rho(s)^Q < \infty$ que l'on appelle *métriques admissibles*.

Soit $K \subset X$; on note $\mathcal{J}(K)$ l'ensemble des $s \in \mathcal{J}$ qui intersectent K . La ρ -longueur de K est par définition

$$\ell_\rho(K) = \sum_{\mathcal{J}(K)} \rho(s)$$

et son Q -volume

$$V_{Q,\rho}(K) = \sum_{\mathcal{J}(K)} \rho(s)^Q.$$

Si Γ est une famille de courbes dans X et $\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{J})$, on définit

$$L_\rho(\Gamma, \mathcal{J}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma),$$

et son Q -module combinatoire par

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{J}) = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{J})} \frac{V_{Q,\rho}(X)}{L_\rho(\Gamma, \mathcal{J})^Q} = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{J})} \text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{J}).$$

Plaçons-nous maintenant dans un contexte géométrique. Soit (X, μ) un espace Q -régulier. Un K -quasi-empilement est un recouvrement \mathcal{J} tel que, pour chaque $s \in \mathcal{J}$,

- il existe deux boules concentriques $B(s) \subset s \subset KB(s)$;
- chaque boule interne $B(s)$ intersecte au plus K autres boules internes.

Notons que l'image d'un quasi-empilement par un homéomorphisme quasisymétrique reste un quasi-empilement.

Une *approximation* d'un espace métrique X est une suite $(\mathcal{J}_n)_n$ de K -quasi-empilements dont la maille tend vers 0.

PROPOSITION 3.5 ([37]). — *Pour $L > 0$, on note Γ_L les courbes de X de diamètre au moins L . Pour n assez grand, on a*

$$\text{mod}_Q(\Gamma_L, \mathcal{J}_n) \asymp \text{mod}_Q \Gamma_L$$

si $\text{mod}_Q \Gamma_L > 0$ et sinon, $\lim \text{mod}_Q(\Gamma_L, \mathcal{J}_n) = 0$. De même, pour tout condensateur (E, F) et pour n assez grand, on a

$$\text{mod}_Q(E, F, \mathcal{J}_n) \asymp \text{mod}_Q(E, F)$$

si $\text{mod}_Q(E, F) > 0$ et sinon, $\lim \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{J}_n) = 0$.

On obtient ainsi une estimée de la dimension conforme Ahlfors-régulière.

COROLLAIRE 3.6. — *Soit X un espace métrique compact Ahlfors-régulier muni d'une approximation $(\mathcal{J}_n)_n$. Si $Q > \dim_{AR} X$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{J}_n) = 0$$

pour toute famille de courbes de diamètre uniformément minoré.

Ceci nous permet d'établir un critère utilisé par P. Pansu et M. Bourdon, basé sur la méthode longueur-aire [57].

PROPOSITION 3.7 (P. Pansu). — *Soit X un espace compact Q régulier ($Q > 1$) muni d'une approximation (\mathcal{J}_n) . On suppose qu'il existe une famille de courbes Γ de diamètre minoré et une mesure de probabilité μ sur Γ telle que $\mu(\Gamma(s)) \lesssim (\text{diam } s)^{Q-1}$ pour tout s , où $\Gamma(s)$ désigne les courbes de Γ qui traversent s . Alors $\dim_{AR} X = Q$.*

Démonstration. — On se fixe n et $\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{J}_n)$. On a, en intégrant par rapport à Γ ,

$$\begin{aligned} L(\Gamma, \mathcal{J}_n) &\leq \sum_{\mathcal{J}_n} \rho(s) \mu(\Gamma(s)) \\ &\lesssim \sum_{\mathcal{J}_n} \rho(s) (\text{diam } s)^{Q-1} \\ &\lesssim \left(\sum_{\mathcal{J}_n} \rho(s)^Q \right)^{1/Q} \cdot \left(\sum_{\mathcal{J}_n} (\text{diam } s)^Q \right)^{1-1/Q}. \end{aligned}$$

Puisque \mathcal{J}_n est un quasi-empilement, on a $\sum_{\mathcal{J}_n} (\text{diam } s)^Q \lesssim 1$, donc $\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{J}_n) \gtrsim 1$, et le corollaire 3.6 permet de conclure. \square

3.3. Structure hyperbolique des points de vue d'un espace compact

On reproduit une construction de G. Elek revue par M. Bourdon et H. Pajot dans [16]. Soit Z un espace métrique compact connexe de diamètre D . On suppose pour simplifier que Z est *doublant*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre N tel que chaque boule puisse être recouverte par au plus N boules de rayon moitié (un espace Ahlfors-régulier est doublant).

Notons $A_k = [1, N^2]^k$ et $p_k : A_{k+1} \rightarrow A_k$ l'application qui oublie la dernière coordonnée.

On construit une suite $(\mathcal{B}_k)_{k \geq 0}$ de recouvrements par des boules de rayon $D/2^k$ de Z par récurrence. Le premier recouvrement est donné par une boule B_0 de rayon D . Si $(B_\alpha)_{\alpha \in A_k}$ est le recouvrement \mathcal{B}_k de la génération k , on recouvre chacune des boules B_α de \mathcal{B}_k par N^2 boules $B(x_\beta, D/2^{k+2})$, $\beta \in A_{k+1}$, avec $p_{k+1}(\beta) = \alpha$. On définit $\mathcal{B}_{k+1} = \{B(x_\beta, D/2^{k+1})\}_{\beta \in A_{k+1}}$.

Si $B \in \mathcal{B}_k$, on écrit $|B| = k$. On définit alors un graphe $X = (S, A)$, où les sommets sont les boules de $\cup_k \mathcal{B}_k$. On met une arête (B_i, B_j) si $||B_i| - |B_j|| \leq 1$ et si $B_i \cap B_j \neq \emptyset$. On munit X de la métrique qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$.

On a

PROPOSITION 3.8. — *L'espace X est hyperbolique, et il existe une métrique visuelle d_X basée en B_0 sur ∂X , équivalente à $2^{-[x|y]}$, qui rend ∂X bilipschitz équivalent à Z .*

Cette proposition repose sur le lemme suivant.

LEMME 3.9. — *Si A et B sont deux sommets, alors*

$$\text{diam}(A \cup B) \asymp 2^{-[A|B]}.$$

3.4. Topologie de Hausdorff-Gromov, espace tangent

On reprend les hypothèses et les notations du paragraphe précédent. Les rayons géodésiques de X permettent de coder les points de Z avantageusement. Pour cela, on définit

$$A = \varprojlim (A_k, p_k) = \left\{ (\alpha_k) \in \prod_{k \geq 0} A_k, p_k(\alpha_{k+1}) = \alpha_k \right\}.$$

Cet espace est compact, et on peut définir une ultra-métrique d_A comme suit

$$d_A((\alpha_k), (\beta_k)) = 2^{-\max\{j, \alpha_j = \beta_j\}}.$$

On définit une application $\pi_Z : A \rightarrow Z$ où on identifie chaque suite par un rayon géodésique $(B_{\alpha_k})_{\alpha_k \in A_k}$ tel que $(\alpha_k) \in A$. On vérifie que $\pi_Z : A \rightarrow Z$ est surjective et $2D$ -lipschitz.

L'intérêt de ce codage est qu'il présente tous les espaces métriques compacts de diamètre fixé N -doublants à l'aide du même espace A .

Si X et Y sont deux espaces métriques, on note

$$d_{HG}(X, Y) = \inf d_H(f(X), g(Y))$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques $f : X \rightarrow Z$ et $g : Y \rightarrow Z$ dans un espace métrique Z que l'on fait aussi varier. Cela définit une distance, et l'espace des compacts N -doublants non vides muni de cette distance est compact. En effet, chaque espace métrique Z peut être plongé isométriquement dans l'espace des fonctions 1-lipschitz de Z dans \mathbb{R} via l'application $z_0 \mapsto (z \mapsto |z - z_0|)$. Du coup, on a un plongement isométrique ι_Z de Z dans l'espace compact $\text{Lip}_{2D}(A)$ (théorème d'Arzéla-Ascoli). La convergence des espaces se ramène ainsi à la convergence des fonctions.

De même, si $(X_n)_n$ est une suite d'espaces compacts codés par un espace A , $(Y_n)_n$ par B , et si $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ est une suite de fonctions, la convergence de (f_n) se ramène à celle de $\iota_{Y_n} \circ f_n \circ \pi_{X_n} : A \rightarrow \text{Lip}_{2D}(B)$, où D est un majorant des diamètres de (Y_n) .

On dit qu'une suite d'espaces pointés $(X_n, x_n)_n$ tend vers (X, x) si on a convergence des boules fermées $B_{X_n}(x_n, R)$ vers $B_X(x, R)$ pour tout $R > 0$.

M. Gromov montre [33]

THÉORÈME 3.10. — *Soit (X_n, x_n) une suite d'espaces métriques propres N -doublants. Il existe une sous-suite (n_k) et un espace (X, x) tels que (X_{n_k}, x_{n_k}) tende vers (X, x) .*

Cela permet de définir la notion d'espace tangent pour un espace métrique propre et doublant Z : il s'agit de n'importe quelle limite de $(Z, z_n, R_n d_Z)$ où (z_n) est une suite de Z et R_n est une suite positive qui tend vers $+\infty$.

4. DYNAMIQUE À L'INFINI DES GROUPES HYPERBOLIQUES

On considère un espace hyperbolique X muni d'une action géométrique d'un groupe G . La dynamique topologique de G à l'infini est décrite par la notion de groupe de convergence uniforme, introduite par F. Gehring et G. Martin sur S^n , puis généralisée et systématiquement étudiée par B. Bowditch [18] et P. Tukia [67].

DÉFINITION 4.1 (Groupe de convergence). — *Un groupe G est un groupe de convergence si G agit par homéomorphismes sur un compact (métrique) Z et que cette action est proprement discontinue sur les triples distincts $\Theta(Z)$. On dit que l'action est uniforme si l'action est cocompacte sur $\Theta(Z)$.*

L'action proprement discontinue est fortement liée à la notion d'éroulement :

DÉFINITION 4.2 (Éroulement). — *Soient Z, Z' des espaces métriques compacts. Soit Φ un ensemble d'homéomorphismes de Z dans Z' . Étant donnés $x \in X$ et $y \in Y$, un sous-ensemble $\Phi' \subset \Phi$ est un éroulement de base (x, y) si pour tout compact $K \subset X \setminus \{x\}$, et tout compact $L \subset Y \setminus \{y\}$, l'ensemble*

$$\{\phi \in \Phi', \phi(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini. Cela implique notamment l'existence d'une suite d'homéomorphismes de Φ' qui converge uniformément sur les compacts de $Z \setminus \{x\}$ vers y .

Si G est un groupe de convergence, alors toute suite d'éléments distincts de G contient un éroulement.

THÉORÈME 4.3 (P. Tukia, B. Bowditch). — *Un groupe G opérant géométriquement sur un espace hyperbolique géodésique propre X est un groupe de convergence uniforme sur ∂X et $X \cup \partial X$.*

La démonstration repose de manière essentielle sur l'observation fondamentale suivante.

Supposons que G agisse par homéomorphismes sur deux espaces localement compacts X et Y et que $f : X \rightarrow Y$ soit une application continue surjective propre et G -équivariante.

- *G agit proprement discontinûment sur X si et seulement si G agit proprement discontinûment sur Y .*

- L'action de G est cocompacte sur X si et seulement si l'action de G est cocompacte sur Y .

En fait, B. Bowditch montre aussi la réciproque [17] :

THÉORÈME 4.4. — *Si G est un groupe de convergence uniforme opérant sur un espace métrique compact parfait Z , alors G est hyperbolique et son bord est homéomorphe à Z .*

La démonstration consiste en plusieurs étapes. D'abord, il s'agit de construire une notion de birapport sur X quasi-invariant par l'action du groupe G . Ce birapport permet alors de définir une « quasimétrie » q sur $\Theta(X)$ au sens que l'inégalité triangulaire n'est vérifiée qu'à l'ajout d'une constante additive près. Dans la troisième étape, on montre que les ensembles finis de $(\Theta(X), q)$ sont bien approchés par les arbres, ce qui permet d'avoir une hyperbolicité grossière sur $\Theta(X)$. Enfin, puisque G est un groupe de convergence uniforme sur X , on montre que cette hyperbolicité grossière se traduit par l'hyperbolicité du groupe.

En conclusion, la donnée d'un groupe hyperbolique est équivalente à celle d'un groupe de convergence uniforme. De plus, en considérant des métriques dans la jauge conforme d'une métrique visuelle, ce groupe de convergence est aussi un groupe uniformément quasimöbius (cf. théorème 3.1). Le théorème 4.4 implique notamment que la structure quasiconforme est incluse dans la notion purement topologique de groupe de convergence uniforme.

Ces remarques sont le point de départ des travaux de M. Bonk et B. Kleiner et suggèrent une approche inspirée de la dynamique conforme : la définition de groupe de convergence uniforme implique qu'il existe une constante $m > 0$ telle que, quel que soit $\{x, y, z\} \in \partial^3 X = \Theta(\partial X)$, il existe $g \in G$ telle que $\min\{d_\varepsilon(gx, gy), d_\varepsilon(gx, gz), d_\varepsilon(gz, gy)\} \geq m$. Comme G est un groupe uniformément quasimöbius, on est dans la situation « expansion et distorsion bornée » qui a été tant exploitée par D. Sullivan dans le cadre des groupes kleinéens et des fractions rationnelles.

Remarque 4.5. — La propriété de convergence est aussi utilisée par J. Lelong-Ferrand dans sa résolution de la conjecture de Lichnerowicz : une transformation conforme d'une variété riemannienne compacte est quasimöbius. Si le groupe conforme n'est pas compact, alors il contient un écroulement et la variété doit être 1-quasiconformément équivalente à une sphère. Elle conclut en montrant qu'une telle application est un difféomorphisme conforme [49].

4.1. L'ascenseur conforme

Le principe de l'ascenseur conforme, mis en évidence par D. Sullivan, exprime que la dynamique permet de changer d'échelle avec distorsion bornée [64]. Il est responsable de l'aspect fractal des ensembles limites et des ensembles de Julia de fractions rationnelles. Il permet notamment de quantifier des propriétés qualitatives.

Dans notre contexte, on peut l'énoncer ainsi.

PROPOSITION 4.6 (Principe de l'ascenseur conforme). — *Soit G un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius opérant sur un espace métrique compact connexe Z . Il existe $r_0 > 0$ et une fonction de distorsion η telles que, pour tout $z \in Z$, pour tout rayon $r \in]0, \text{diam } Z/2]$, il existe $g \in G$ telle que $g(B(z, r)) \supset B(g(z), r_0)$ et $g|_{B(z, r)}$ soit η -quasisymétrique.*

Démonstration. — Comme Z est connexe, on considère x, y dans Z avec $|x - z| = r$ et $|y - z| = r/2$. La propriété de convergence uniforme nous fournit un homéomorphisme $g \in G$ tel que $g\{x, y, z\}$ soit m -séparé. Par le théorème 2.5, (3), la restriction de g à $B(z, r)$ est η -quasisymétrique, où η ne dépend que de la distorsion des birapports. Par suite, $g(B(z, r))$ contient la boule $B(g(z), m/\eta(1))$. \square

Nous obtenons les corollaires suivants [5, 7] :

COROLLAIRE 4.7 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Soit G un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius opérant sur un espace métrique compact connexe Z .*

(1) *Tous les ouverts de Z ont la même dimension topologique. Si un ouvert est homéomorphe à une boule de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, alors Z est homéomorphe à \mathbb{S}^n .*

(2) *L'espace Z est doublant.*

(3) *Tout espace tangent est quasimöbius équivalent à Z épointé.*

(4) *L'espace Z est linéairement localement connexe.*

On esquisse les démonstrations de (2) et (3) afin d'illustrer la méthode.

Démonstration. — (2) Soient $z \in Z$ et $r > 0$; par le principe de l'ascenseur conforme, il existe $g \in G$ tel que $g(B(z, r)) \supset B(g(z), r_0)$ et $g|_{B(z, r)}$ soit η -quasisymétrique.

On se fixe $\varepsilon > 0$ que l'on déterminera ci-dessous. Comme $\text{diam } g(B(z, r)) \geq r_0$, on peut recouvrir $g(B(z, r))$ par $N(\varepsilon)$ boules de rayon εr_0 . Soit B une de ces boules, la proposition 2.2 indique que

$$\text{diam } g^{-1}(B) \geq \frac{\text{diam } B(z, r)}{2\eta\left(\frac{\text{diam } B}{\text{diam } g(B(z, r))}\right)} \geq \frac{r}{2\eta(2\varepsilon)}.$$

Il suffit de choisir ε pour que $\eta(2\varepsilon) \leq 1$.

(3) Soit T un espace tangent faible de Z . Il existe une suite (z_n) de Z et une suite (r_n) de réels tendant vers l'infini telles que $(Z, z_n, r_n d)$ tende vers (T, z_∞) .

On utilise le principe de l'ascenseur conforme pour obtenir une suite (g_n) de G , ainsi que des points (x_n, y_n) de sorte que les points de chaque paire de (x_n, y_n, z_n) sont à distance de l'ordre de $1/r_n$, et de sorte que $g_n(x_n, y_n, z_n)$ est m -séparé. Quitte à extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que (g_n) est un écroulement de base $\{a, b\}$. Il en résulte que les points (x_n, y_n, z_n) tendent vers a ; on peut supposer que les suites $(gx_n)_n$ et $(gy_n)_n$ restent écartées de b .

Pour tout $R > 0$, la suite $(g_n|_{B(z_n, Rr_n)})_n$ est uniformément quasimétrique, donc on peut supposer que la suite $\{(Z, z_n, r_n d) \xrightarrow{g_n} (Z, g_n(z_n), d)\}$ tend uniformément sur les compacts vers une application continue injective $\varphi : T \rightarrow Z$, qui est clairement quasimöbius.

Comme T n'est pas compact, il suffit de montrer que $Z \setminus \{b\}$ est contenu dans $\varphi(T)$ pour conclure. Soit $w \in Z \setminus \{b\}$, et soit $w' \in Z \setminus \{a\}$. On peut supposer que $|g_n x_n - w| \geq m/2$. Comme g_n^{-1} est η -quasimöbius, il vient

$$\frac{|g_n^{-1}w - x_n|}{|g_n^{-1}w - w'|} \cdot \frac{|w' - y_n|}{|x_n - y_n|} \leq \eta \left(\frac{|w - g_n x_n|}{|w - g_n w'|} \cdot \frac{|g_n w' - g_n y_n|}{|g_n x_n - g_n y_n|} \right).$$

Mais puisque $g_n w'$ tend vers b et $g_n^{-1}w$ tend vers a , on obtient

$$\frac{|g_n^{-1}w - x_n|}{r_n} \lesssim \eta \left(\frac{(\text{diam } X)^2}{|w - b|m} \right).$$

Ceci montre que w est dans l'image de φ . □

On tire une dernière application du principe de l'ascenseur conforme [6].

THÉORÈME 4.8 (M. Bonk & B. Kleiner). — *Si la dimension Ahlfors-régulière de la jauge d'un groupe hyperbolique G est atteinte et strictement supérieure à 1, alors la jauge contient une métrique de Loewner.*

Démonstration. — Le théorème 3.4 implique que si d est une métrique Q -régulière sur ∂G de dimension minimale, alors il existe un espace tangent faible T de ∂G et une famille de courbes sur T de Q -module strictement positif. Puisque T est quasimöbius à un époinement de ∂G , on en déduit l'existence d'une famille de courbes sur $(\partial G, d)$ de Q -module strictement positif. La suite se déroule en trois temps. On utilise d'abord la dynamique sur $\partial^2 G$ pour montrer que le module des courbes qui relient deux boules disjointes est toujours strictement positif. Ensuite, on utilise l'ascenseur conforme pour quantifier ces modules. Enfin, on en déduit qu'un tel espace est loewnesque. □

Remarque 4.9. — M. Bourdon et H. Pajot relient la dimension conforme Ahlfors-régulière d'un groupe à un autre invariant numérique de quasi-isométrie : l'exposant critique de cohomologie ℓ_p du groupe. Cela leur permet notamment de construire des

exemples de groupes hyperboliques dont le bord a toutes les propriétés topologiques pour admettre une métrique loewnesque, mais pour lesquels la dimension conforme Ahlfors-régulière n'est pas atteinte [16] : la condition de Loewner dans une jauge ne serait pas topologique.

4.2. Ergodicité

On définit les *fonctions de Busemann*

$$\beta_a(x, y) = \sup \liminf_{t \rightarrow \infty} \{d(x, \gamma(t)) - t\}$$

où le supremum est pris sur tous les rayons géodésiques issus de y et définissant $a \in \partial X$.

Rappelons que si g est une isométrie de X , alors tout point du bord $a \in \partial X$ admet un voisinage $V \subset \partial X$ tel que, pour $b, c \in V$, on ait

$$d_\varepsilon(g(b), g(c)) \asymp L_g(a) d_\varepsilon(b, c) = e^{\varepsilon \beta_a(w, g^{-1}(w))} d_\varepsilon(b, c).$$

M. Coornaert généralise la construction des mesures conformes de S. Patterson et D. Sullivan dans ce cadre [27, 61].

THÉORÈME 4.10 (M. Coornaert). — *Soit (X, w) un espace hyperbolique pointé muni d'une action géométrique d'un groupe G , et soit d_ε une métrique visuelle. On a*

$$v = \limsup \frac{1}{R} \log |\{G(w) \cap B(w, R)\}| = \varepsilon \cdot \dim(\partial X, d_\varepsilon).$$

Soit ν la mesure de Hausdorff dans la dimension $\alpha = v/\varepsilon$ de $(\partial X, d_\varepsilon)$;

(i) la mesure ν est Ahlfors-régulière de dimension α ;

(ii) la mesure ν est une mesure G -quasiconforme i.e., pour tout $g \in G$, $\nu \ll g^* \nu \ll \nu$ et

$$\frac{d(g^* \nu)}{d\nu} \asymp (L_g)^\alpha \nu - \text{presque partout};$$

(iii) l'action de G est ergodique pour ν .

De plus, si ν' est une autre mesure G -quasiconforme, alors $\nu \ll \nu' \ll \nu$ et

$$\frac{d\nu'}{d\nu} \asymp 1.$$

Il en ressort que v ne dépend pas du groupe opérant géométriquement sur X , ce qui justifie de l'appeler *l'entropie volumique de X* .

5. RIGIDITÉ DES ESPACES HYPERBOLIQUES

Le but de ce paragraphe est d'établir les deux théorèmes suivants dus à G.D. Mostow, M. Bourdon, P. Pansu, M. Bourdon et H. Pajot, et X. Xie. Les hypothèses sont expliquées plus bas.

THÉORÈME 5.1 (Rigidité à la Mostow). — (a) *Si un groupe opère géométriquement sur un espace symétrique hyperbolique X différent du plan hyperbolique et sur un espace géodésiquement complet Y de type $CAT(-1)$ de même entropie volumique, alors X et Y sont isométriques.*

(b) *Soient Δ et Δ' deux immeubles fuchsien modelés sur un polygone régulier. On suppose que ces deux espaces admettent une action géométrique d'un même groupe. Alors Δ et Δ' sont isométriques.*

THÉORÈME 5.2 (Rigidité à la Pansu). — (a) *Toute quasi-isométrie d'un espace symétrique quaternionien ou du plan de Cayley est à distance bornée d'une isométrie.*

(b) *Soient Δ et Δ' deux immeubles fuchsien modelés sur un polygone régulier dont le groupe d'isométries admet un réseau cocompact. Toute quasi-isométrie entre ces immeubles est à distance bornée d'une isométrie.*

Remarque 5.3. — Si deux quasi-isométries ont même extension au bord, alors le lemme de poursuite de Morse entraîne qu'elles sont à distance finie l'une de l'autre.

Ces théorèmes de rigidité sont établis selon le même schéma, élaboré par G.D. Mostow [55].

- (1) Une quasi-isométrie $\Phi : X \rightarrow X'$ entre deux espaces hyperboliques se prolonge en une transformation quasimöbius $\varphi : \partial X \rightarrow \partial X'$ entre les bords. Dans les théorèmes à la Mostow, la quasi-isométrie provient du lemme de Švarc-Milnor, alors qu'elle est donnée dans les théorèmes à la Pansu.
- (2) Les hypothèses impliquent que cet homéomorphisme φ est en fait une transformation plus régulière que l'on qualifiera de Möbius. On utilise la dynamique conforme des groupes et leurs propriétés ergodiques; dans le second cas, cela proviendra aussi d'un théorème de type Rademacher-Stepanov qui implique une rigidité infinitésimale des homéomorphismes quasimétriques.
- (3) La structure des espaces hyperboliques montre qu'il s'agit de l'extension à l'infini d'une isométrie.

Ces résultats sont notamment établis entre des espaces pour lesquels on peut complètement caractériser les isométries par leurs extensions aux bords.

Une partie des arguments communs aux différents contextes peut être axiomatisée naturellement. D'autres points semblent plus spécifiques aux espaces symétriques et immeubles fuchsien et requièrent des arguments particuliers.

Dressons d'ores et déjà une liste de points communs partagés par les espaces symétriques et les immeubles fuchsien.

- Ils admettent des gros groupes d'isométries : ils contiennent des réseaux cocompacts.
- Ils sont CAT(-1) et possèdent de nombreuses copies isométriques du plan de Poincaré. Elles sont responsables de nombreuses courbes rectifiables à l'infini.
- Certaines métriques loewnesques à l'infini sont munies d'une structure conforme fine.

5.1. Structure conforme et rigidités au bord d'espaces hyperboliques

On introduit une classe d'espaces hyperboliques pour lesquels les notions d'homéomorphismes de Möbius et d'homéomorphismes conformes ont une signification.

Si X est un espace hyperbolique géodésique propre, on dit qu'il appartient à la classe (\mathcal{C}) , à défaut de fixer une terminologie, s'il admet une action géométrique, et s'il existe une constante $C < \infty$ et des fonctions

$$\{\cdot|\cdot\} : \partial X \times \partial X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ et } B : \partial X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que :

- si $x, y \in X$, $a, b \in \partial X$, alors $|\{a|b\}_x - [a|b]_x| \leq C$ et $|B_a(x, y) - \beta_a(x, y)| \leq C$ (les fonctions $[\cdot|\cdot]$ et $\beta(\cdot, \cdot)$ sont définies au début des paragraphes §3 et §4.2) ;
- si $x, y \in X$, $a, b \in \partial X$ et g est une isométrie de X , alors $\{ga|gb\}_{gx} = \{a|b\}_x$, $\{a|b\}_x = \{b|a\}_x$ et $B_{ga}(gx, gy) = B_a(x, y)$;
- pour tout $(x, y) \in X^2$, l'application $a \in \partial X \mapsto B_a(x, y)$ est continue presque partout (pour la mesure de Hausdorff du théorème 4.10) ;
- si $x, y \in X$, $a, b \in \partial X$, alors

$$\{a|b\}_x = \{a|b\}_y + \frac{1}{2} (B_a(x, y) + B_b(x, y)) .$$

On dira qu'une métrique visuelle est *naturelle* si elle est définie par

$$d_\varepsilon(a, b) = \inf \sum_{0 \leq j < n} \exp(-\varepsilon \{a_j|a_{j+1}\}_w)$$

où l'infimum est pris sur toutes les chaînes finies $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ de ∂X telles que $a_0 = a$ et $a_n = b$.

Remarque 5.4. — Les espaces CAT(-1) sont dans la classe (\mathcal{C}) munis du produit de Gromov $\{x|y\}_w = (1/2)(|x - w| + |y - w| - |x - y|)$, qui se prolonge au bord par continuité. Pour a, b au bord, la formule $d_w(x, y) = e^{-\{x|y\}_w}$ définit une métrique visuelle naturelle [9].

Passons aux définitions d'homéomorphismes de Möbius et conformes. Si X est de la classe (\mathcal{C}) , on définit le *birapport hyperbolique* sur $\partial^4 X$ par

$$[a, b, c, d]_h = v(\{a|c\} + \{b|d\} - \{a|b\} - \{c|d\}),$$

où v est l'entropie volumique de X . On vérifie aisément qu'il ne dépend pas du point-base choisi dans X .

DÉFINITION 5.5 (Homéomorphisme de Möbius). — *Soient X et Y des espaces de la classe (\mathcal{C}) . Un homéomorphisme $\varphi : \partial X \rightarrow \partial Y$ est de Möbius s'il préserve le birapport hyperbolique.*

Si Z, Z' sont des espaces métriques, et $f : Z \rightarrow Z'$ un homéomorphisme, on introduit les quantités suivantes :

$$\begin{cases} L_f(z, r) &= \sup\{|f(z) - f(w)|, |z - w| \leq r\} \\ \ell_f(z, r) &= \inf\{|f(z) - f(w)|, |z - w| \geq r\} \\ L_f(z) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L_f(z, r)}{r} \\ \ell_f(z) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\ell_f(z, r)}{r}. \end{cases}$$

DÉFINITION 5.6 (Homéomorphisme conforme). — *Un homéomorphisme $f : Z \rightarrow Z'$ entre espaces métriques réguliers est conforme s'il est quasisymétrique et si L_f et ℓ_f sont finis, non nuls et égaux presque partout, ainsi que pour son inverse.*

Les prochains énoncés se démontrent comme dans les cas standard [9, 14].

FAIT 5.7. — *Si X, Y sont de la classe (\mathcal{C}) , et si d_X et d_Y sont des métriques visuelles naturelles, alors*

- (1) *une isométrie entre X et Y se prolonge en homéomorphisme de Möbius entre ∂X et ∂Y ;*
- (2) *un homéomorphisme de Möbius est conforme si les dimensions des bords coïncident.*

PROPOSITION 5.8 (Structure conforme). — *Soit X un espace de la classe (\mathcal{C}) .*

- (1) *Si $x, y \in X$ et si d_x et d_y sont des métriques visuelles vues de x et y de même paramètre $\varepsilon > 0$, alors $Id : (\partial X, d_x) \rightarrow (\partial X, d_y)$ est conforme et*

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{d_y(a, b)}{d_x(a, b)} = e^{\varepsilon B_a(x, y)}$$

pour presque tout $a \in \partial X$.

- (2) *Si $g : X \rightarrow X$ est une isométrie, alors*

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{d_x(g(a), g(b))}{d_x(a, b)} = e^{\varepsilon B_a(x, g^{-1}(x))}$$

pour presque tout $a \in \partial X$.

Les estimations approchées que nous avons dans le cas général sont maintenant exactes. Les mesures quasiconformes deviennent par conséquent conformes (cf. théorème 4.10 pour les notations) :

COROLLAIRE 5.9 (Propriétés ergodiques). — Soient X de la classe (\mathcal{C}) muni d'une action géométrique d'un groupe G , et $\{d_x\}_{x \in X}$ une famille de métriques visuelles de paramètre ε . Il existe une famille de mesures de probabilités G -ergodiques $\{\nu_x\}_{x \in X}$ dites conformes dans la classe de la mesure de Hausdorff de dimension v/ε de ∂X telles que les dérivées de Radon-Nikodym vérifient

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_y}{d\nu_x}(a) &= e^{vB_a(x,y)} \\ \frac{d(g^*\nu_x)}{d\nu_x}(a) &= e^{vB_a(x,g^{-1}(x))} \end{aligned}$$

pour presque tout $a \in \partial X$ et toute isométrie g de X .

D'autre part, la mesure σ -finie μ définie sur $\partial^2 X$ par

$$d\mu(a, b) = e^{-2v(a|b)_x} d\nu_x(a) \otimes d\nu_x(b)$$

est indépendante du choix de x , invariante par $\text{Isom}(X)$ et G -ergodique.

La mesure μ prend ses origines dans l'étude du flot géodésique d'une variété compacte de courbure strictement négative [61]. D. Sullivan en tire l'observation suivante.

FAIT 5.10. — Soient X, Y de la classe (\mathcal{C}) . Un homéomorphisme $\varphi : \partial X \rightarrow \partial Y$ est de Möbius si et seulement si $\varphi^*\mu_Y$ est proportionnelle à μ_X , où μ_X, μ_Y sont les mesures invariantes sur $\partial^2 X$ et $\partial^2 Y$.

Ce sera le fondement des rigidités à l'infini.

THÉORÈME 5.11 (Rigidité à l'infini à la Mostow). — Soient X, Y de la classe (\mathcal{C}) . On suppose qu'il existe une métrique visuelle d_X loewnesque sur ∂X et une métrique visuelle d_Y de même dimension. S'il existe deux groupes isomorphes G et H qui opèrent géométriquement sur X et Y respectivement, alors il existe une transformation de Möbius $\varphi : \partial X \rightarrow \partial Y$ équivariante.

L'argument qui suit est dû à D. Sullivan [63, théorème 5], et adapté par M. Bourdon [11].

Démonstration. — D'après le lemme de Švarc-Milnor, il existe une quasi-isométrie équivariante $\Phi : X \rightarrow Y$. Cette application se prolonge à l'infini en une quasisymétrie équivariante $\varphi : \partial X \rightarrow \partial Y$. Notons ν_X et ν_Y deux mesures conformes sur X et Y respectivement. Le théorème 2.15 implique que $(\partial Y, \nu_Y)$ est loewnesque et que φ est absolument continue. Par suite, il existe une fonction ν_X -intégrable h telle que $d(\varphi^*\nu_Y) = h d\nu_X$. Donc les mesures μ_X et $\varphi^*\mu_Y$ sur $\partial^2 X$ sont dans la même classe.

Étant ergodiques, on en déduit qu'elles sont proportionnelles. Par le fait 5.10, on conclut que φ est de Möbius. \square

On reproduit ici un argument de M. Bourdon et H. Pajot qui servira pour les théorèmes de rigidités des homéomorphismes quasi-isométriques (sans hypothèse d'équivariance) [14].

THÉORÈME 5.12 (M. Bourdon et H. Pajot). — *Soient X, Y de la classe (\mathcal{C}) . On suppose qu'il existe une métrique visuelle naturelle d_X loewnesque sur ∂X et une métrique visuelle d_Y de même dimension. Toute transformation conforme $\varphi : \partial X \rightarrow \partial Y$ est une transformation de Möbius.*

L'ingrédient principal de la démonstration est une version du birapport introduite par J. Lelong-Ferrand [50].

DÉFINITION 5.13 (Birapport par les capacités, groupe LF-möbius)

Soit Z un espace Q -loewnesque, $Q > 1$. Le birapport $[a, b, c, d]_{LF}$ est défini comme l'infimum des Q -capacités des condensateurs qui relient $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Le groupe des transformations LF-möbius, noté $M_{LF}(Z)$, est le groupe des transformations de Z qui préservent le LF-birapport.

PROPOSITION 5.14. — *Soit X de la classe (\mathcal{C}) muni d'une action géométrique d'un groupe G . On suppose qu'il existe une métrique visuelle naturelle d_X loewnesque sur ∂X . Les transformations LF-möbius sont de Möbius.*

Démonstration de la proposition 5.14. — Dans un espace loewnesque, le LF-birapport est petit si et seulement si le birapport standard l'est quantitativement [4] : cela suffit pour montrer que $M_{LF}(\partial X)$ est un groupe uniformément quasimöbius qui contient G . Il opère donc proprement sur $\partial^3 X$ par le théorème 2.5 (iii). Du coup, G en est un réseau cocompact. Soit m la mesure image sur $G \backslash M_{LF}(\partial X)$ de la restriction à un domaine fondamental de la mesure de Haar de $M_{LF}(\partial X)$. On définit sur $\partial^2 X$ la mesure

$$\rho(B) = \int_{G \backslash M_{LF}(\partial X)} \mu(s(\bar{g}) \cdot B) dm(\bar{g})$$

où B est un borélien de $\partial^2 X$, μ est la mesure du corollaire 5.9, et $s : G \backslash M_{LF}(\partial X) \rightarrow M_{LF}(\partial X)$ est une section mesurable. On en déduit que ρ est invariante par $M_{LF}(\partial X)$. Comme les applications de $M_{LF}(\partial X)$ sont quasimöbius, elles sont aussi absolument continues, donc ρ est dans la classe de μ . Par l'ergodicité de G , on en déduit qu'elles sont proportionnelles, donc le fait 5.10 conclut. \square

Démonstration du théorème 5.12. — On peut supposer que la métrique visuelle d_Y est naturelle. À l’instar des transformations conformes entre variétés riemanniennes, proposition 2.8, φ préserve les Q -modules où Q est la dimension de d_X et d_Y , donc φ est LF-möbius. Par conséquent, il conjugue les groupes LF-möbius sur ∂X et ∂Y , soit les groupes de Möbius d’après la proposition 5.14. Du coup, $\varphi^* \mu_Y$ est proportionnel à μ_X , et on conclut aussi par le fait 5.10. \square

Remarque 5.15. — Si on suppose que le groupe des homéomorphismes quasismétriques d’un espace X de la classe (\mathcal{C}) est uniformément quasimöbius, alors l’argument de la proposition 5.14 montre que tout homéomorphisme quasismétrique de X est de Möbius, voir [73, Dém. Thm 1.1]. Si Y est un autre espace qui vérifie les mêmes propriétés que X , alors le même argument adapté par X . Xie montre que tout homéomorphisme quasismétrique entre ∂X et ∂Y est de Möbius.

5.2. Espaces symétriques

Les espaces symétriques de courbure strictement négative (ou de rang 1 non compacts) sont classés par É. Cartan en quatre catégories : pour $n \geq 1$, les espaces hyperboliques réels $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^n$, complexes $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^{2n}$, quaternioniens $\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^{4n}$, et le plan de Cayley $\mathbf{H}_{\mathbb{C}a}^{16}$, que l’on normalise de sorte que la courbure sectionnelle maximale soit (-1) . On note \mathbb{K} un des corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou l’algèbre des octaves de Cayley $\mathbb{C}a$, et k sa dimension réelle qui vaut respectivement 1, 2, 4 ou 8.

Les espaces réels exceptés, la courbure sectionnelle d’un espace symétrique $X = \mathbf{H}_{\mathbb{K}}^{nk}$ varie alors entre (-1) et (-4) ; la courbure est constante pour les espaces réels. À chaque point $p = (x, v)$ du fibré unitaire tangent, l’orthogonal v^\perp de v dans l’espace tangent $T_x X$ contient un unique sous-espace \mathbb{K} -vectoriel P_p isomorphe à $\mathbb{K}^{(n-1)}$, dont chacun des vecteurs associé à v porte une copie isométrique de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ plongée dans X . Un supplémentaire de P_p est donné par $\mathbb{K}v \cap v^\perp$ de courbure (-4) (si $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$).

Le groupe d’isométries opère transitivement sur le fibré unitaire tangent, donc préserve cette distribution d’hyperplans $P_p, p \in T^1 X$.

Étant de courbure strictement négative, ces espaces symétriques sont de la classe (\mathcal{C}) . Le bord à l’infini peut s’identifier à la limite au sens de Hausdorff-Gromov des sphères $S(x, R)$ normalisées et centrées en un point x quand R tend vers $+\infty$ [35, § 3.6]. Plus précisément, les géodésiques issues de x permettent d’identifier les sphères $S(x, R)$ avec la sphère unité $S(x) \subset T_x X$ que l’on munit des métriques (g_R) obtenues par rapatriement sur $S(x)$ de la restriction à $S(x, R)$ de la métrique riemannienne de X , que l’on normalise pour que le diamètre de $(S(x), g_R)$ soit π . Pour les espaces réels, on obtient la sphère unité \mathbb{S}^{n-1} de \mathbb{R}^n . Pour les autres, le processus

de renormalisation fait tendre les métriques de g_R vers une métrique de Carnot-Carathéodory : la distance entre deux points de la sphère limite se mesure *via* la longueur des courbes tangentes presque partout à la distribution P_v , $v \in S(x)$, dite *horizontale* [58]. Cette distance est une distance visuelle naturelle. Par un théorème de J. Mitchell [54], l'espace tangent (métrique) en un point $v \in S(x)$ est naturellement un groupe de Lie nilpotent N . Lorsque le corps \mathbb{K} est \mathbb{R} , N est abélien. Sinon, l'algèbre de Lie \mathfrak{N} de N admet une graduation $\mathfrak{N} = V^1 \oplus V^2$, où V^1 s'identifie à \mathbb{K}^{n-1} . Les translations portées par la géodésique définie par (x, v) définit une famille à un paramètre d'homothéties $\{e^{t\alpha}\}_{t \in \mathbb{R}}$, induite par une dérivation graduée α sur \mathfrak{N} , de valeurs propres 1 sur V^1 et 2 sur V^2 . Nous avons donc affaire à un *groupe de Carnot* : N est simplement connexe, et son algèbre de Lie est engendrée par $\ker(\alpha - I) = V^1$. L'orbite de V^1 par N est la *distribution horizontale* du groupe de Carnot.

Cet espace tangent est conforme à un époinement $\partial X \setminus \{a\}$ par le corollaire 4.7. Autrement dit, considérons un point (x, v) de T^1X qui porte une géodésique γ issue de a . La variété fortement instable $W^{us}(x, v)$ du flot géodésique représente $\partial X \setminus \{a\}$, et s'identifie au sous-groupe minimal du stabilisateur de $\{a\}$. Les homothéties $(e^{t\alpha})_t$ proviennent des translations le long de γ .

THÉORÈME 5.16 (P. Pansu). — *La métrique de Carnot-Carathéodory portée par la distribution horizontale d'un groupe de Carnot de dimension topologique au moins 2 atteint la dimension conforme Ahlfors-régulière de sa jauge.*

COROLLAIRE 5.17. — *Un groupe de Carnot de dimension topologique au moins 2 muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory portée par la distribution horizontale est loewnesque.*

Démonstration du théorème et du corollaire. — Il découle des travaux de J. Mitchell que la distance est régulière. P. Pansu construit des familles de courbes de modules positifs en considérant des orbites de champs de vecteurs horizontaux auxquels il applique le critère de la proposition 3.7. Ensuite, l'action du groupe des automorphismes conformes permet d'obtenir la condition loewnesque, cf. théorème 4.8. \square

Remarque 5.18. — Les sphères euclidiennes \mathbb{S}^n sont loewnesques dès que $n \geq 2$. La dimension conforme (Ahlfors-régulière) du bord de $\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^{nk}$ est $nk + k - 2$ [54, 58].

5.2.1. *Différentiabilité.* — P. Pansu généralise la notion de différentiabilité aux groupes de Carnot. Une application $f : U \rightarrow N'$ définie sur un ouvert U d'un groupe de Carnot N est dite *différentiable* si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\alpha'} f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha})$$

existe et définit une application $D_x f : N \rightarrow N'$. Cela implique que f préserve la structure horizontale, et que l'application soit différentiable restreinte au plan horizontal.

Il généralise un fameux théorème de Rademacher qui concerne les applications lipschitzienne et de Stepanov qui implique qu'un homéomorphisme quasisymétrique de \mathbb{R}^n est différentiable presque partout :

THÉORÈME 5.19 (P. Pansu). — *Un homéomorphisme quasisymétrique $f : N \rightarrow N'$ entre groupes de Carnot de dimension topologique au moins 2 est différentiable presque partout, et la différentielle est un automorphisme gradué de N .*

Démonstration. — Tout d'abord, (N, d, μ) et (N', d', μ') ont la même dimension $Q > 1$ car il s'agit de leur dimension conforme. Puisque ce sont des espaces loewnesques, f est absolument continue, donc on contrôle L_f^Q par la dérivée de Radon-Nikodym de $f^*\mu'$ par rapport à μ : L_f est donc finie presque partout. Un non-sens abstrait montre qu'il suffit de montrer que, pour tout champ de vecteurs horizontal v , la limite

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{t\alpha'} f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha} v)$$

existe presque partout, afin d'avoir l'existence d'une différentielle presque partout qui soit un morphisme de groupes, [58, Cor. 3.3].

On se ramène à l'étude des courbes rectifiables : une courbe rectifiable de N est différentiable presque partout et sa tangente est horizontale là où elle est définie [58, Prop. 4.1]. Comme f est aussi absolument continue sur presque toutes courbes, presque toute courbe rectifiable est transformée par f en une courbe rectifiable, tangente à la distribution horizontale. Le théorème de différentiation de Lebesgue s'applique pour établir (2). \square

Ces résultats sont généralisés aux espaces de Carnot-Carathéodory dans [53].

5.2.2. *Groupes quasiconformes.* — Notre premier résultat concerne les espaces symétriques réels et complexes ; il est dû à D. Sullivan en dimension 2 réelle [62], P. Tukia en dimension plus grande [65], et R. Chow dans le cas complexe [25].

THÉORÈME 5.20. — *Soit G un groupe de convergence uniforme, uniformément quasimöbius sur le bord d'un espace symétrique réel ou complexe. Alors son action est conjuguée à une action par transformations de Möbius.*

Démonstration. — Une structure conforme sur l'algèbre de Lie \mathfrak{N} est donnée par une forme quadratique définie positive sur l'espace horizontal à un facteur réel près, soit par un élément de $\mathrm{SL}(kn, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(kn, \mathbb{R})$. Cet espace est naturellement un espace $\mathrm{CAT}(0)$, et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ opère par isométries. Une structure conforme sur N est donnée par une distribution mesurable de structures conformes $(M(x))_{x \in N}$ d'excentricité essentiellement bornée.

Puisque les homéomorphismes quasimöbius sont différentiables presque partout, ils opèrent sur ces structures conformes par isométries. Le groupe G étant dénombrable, on peut construire une structure conforme mesurable invariante par G en prenant le centre de Young $\phi(x)$ de $\{g^*S(g(x))\}_{g \in G}$ pour presque tout x , où $S(x)$ désigne la structure initiale.

Le groupe des homéomorphismes quasiconformes contenant $GL(n, \mathbb{R})$ ou $Sp(n, \mathbb{R})$, on peut conjuguer G pour supposer que l'origine est un point de continuité de ϕ , et que cette structure à l'origine est la structure standard. Par le principe de l'ascenseur conforme, il existe des facteurs $t_n \rightarrow +\infty$ et des éléments (g_n) tels que $(\exp(t_n \alpha) g_n^{-1})_n$ soit une famille précompacte. Toute limite f redresse la structure ϕ et fGf^{-1} est un groupe de transformations de Möbius. \square

5.2.3. *Rigidités des espaces symétriques.* — On commence par rappeler la caractérisation des isométries par les transformations de Möbius, due originalement à G.D. Mostow [56], et généralisée par M. Bourdon [10]. Sa démonstration repose sur la construction de J. Cheeger.

THÉORÈME 5.21 (M. Bourdon). — *Soit X un espace symétrique, et soit Y un espace CAT(-1) géodésiquement complet. Ces espaces sont isométriques si et seulement si leurs bords munis de métriques visuelles naturelles sont Möbius-équivalents.*

Notons que ces espaces étant CAT(-1), les paramètres visuels sont pris égaux à 1. Le bord d'un espace symétrique est alors de dimension minimale.

On établit maintenant les résultats annoncés.

Démonstration du théorème 5.1 (a). — Le théorème 5.11 implique que les bords sont Möbius équivalents. Le théorème 5.21 permet de conclure. \square

Démonstration du théorème 5.2 (a). — Une quasi-isométrie se prolonge en homéomorphisme quasisymétrique entre les bords. Ceux-ci sont différentiables presque partout, et la différentielle est un automorphisme gradué. Or, pour les bords des espaces quaternioniens et de Cayley, les seuls automorphismes sont des similitudes [58, Prop. 10.1] : l'homéomorphisme quasisymétrique est en fait conforme. Le théorème 5.12 implique que l'homéomorphisme est une transformation de Möbius, donc la restriction d'une isométrie par le théorème 5.21. \square

Remarque 5.22. — U. Hamenstädt caractérise les variétés compactes localement symétriques de courbure strictement négative par la propriété suivante [40] : chaque géodésique de son revêtement universel est contenue dans un plan totalement géodésique de courbure constante maximale. Sa démonstration consiste à reconstruire la

structure de Carnot-Carathéodory à l'infini afin de montrer que le groupe des homéomorphismes conformes de son bord est très gros et d'en déduire que la variété est homogène. Cette caractérisation permet de montrer que les seuls revêtements universels de variétés compactes de courbure strictement négative qui admettent des métriques visuelles loewnesques sont symétriques [26].

5.3. Immeubles fuchsien

On se restreint à une sous-classe d'immeubles fuchsien, voir [12, 73] pour une situation plus générale. Soit R un p -gone régulier de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$, $p \geq 5$, d'angle π/m , $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; d'après un théorème de H. Poincaré, R pave le plan hyperbolique. On étiquette chaque arête par une classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On se fixe aussi un p -uplet \mathbf{q} d'entiers $q_j \geq 2$, $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Un *immeuble fuchsien* $\Delta = \Delta_{p,m,\mathbf{q}}$ de type (R, \mathbf{q}) est un 2-complexe cellulaire contractile dont les cellules, appelées *chambres*, sont isomorphes au polygone R étiqueté, et tel que (a) chaque arête de type $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit attachée à $q_j + 1$ copies de R , (b) par deux chambres passe toujours une copie de $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^2$ pavée par R , appelée *appartement*, et (c) si deux appartements ont une chambre commune, il existe un isomorphisme entre les deux appartements qui fixe la chambre. Notons que l'existence d'un immeuble impose des conditions sur m et \mathbf{q} , et que les propriétés ci-dessus ne suffisent pas à définir un unique immeuble lorsque $m \neq 2$ [12]. Les immeubles à angle droit ($m = 2$) étant mieux compris, on les distinguera par la suite.

On ne considère dans ce qui suit que des immeubles qui admettent des actions géométriques. Lorsque $m = 2$, le groupe G de présentation

$$(3) \quad G = \langle s_j, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, (s_j s_{j+1})^2 = s_j^{q_j} = 1 \rangle$$

est un sous-groupe d'isométries qui opère géométriquement sur Δ et qui préserve les étiquettes.

Muni de la distance induite par celle de R , Δ est un espace CAT(-1), donc hyperbolique. Son bord est homéomorphe à l'éponge de Menger, et chacun de ses points appartient au bord d'au moins un appartement. Un *mur* de Δ est une géodésique contenue dans le 1-squelette. Soit $\partial_{reg}\Delta$ les points du bord qui ne sont pas l'extrémité d'un mur de Δ .

On considère le sous-groupe $\text{Isom}_0(\Delta)$ des isométries de Δ qui préservent l'étiquetage. Ce sous-groupe étant d'indice fini, il contient aussi un groupe G qui opère géométriquement sur Δ . Soit \mathcal{G} le graphe dual de Δ , dont les sommets sont les chambres et les arêtes sont les paires de chambres contiguës. Quand $m = 2$, \mathcal{G} représente un graphe de Cayley du groupe défini par (3). M. Bourdon considère la métrique géodésique d_q sur \mathcal{G} telle que chaque arête duale à une arête de type $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit de longueur $\log q_j$. Le groupe d'isométries $\text{Isom}_0(\Delta)$ opère toujours par isométries pour cette nouvelle distance.

THÉORÈME 5.23 (M. Bourdon). — *La métrique d_q est de la classe (\mathcal{C}) , et il existe une métrique visuelle δ naturelle qui atteint la dimension conforme Ahlfors-régulière.*

Démonstration. — Si a, b, w sont des chambres, on pose $(a|b)_w = (1/2)\{d_q(w, a) + d_q(w, b) - d_q(a, b)\}$ et $B_w(a, b) = d_q(a, w) - d_q(b, w)$. Si $c_w \in w$ et $a \in \partial\Delta$, on note $(a_n)_{n \geq 0}$ l'ensemble ordonné des chambres traversées par le rayon géodésique $[c_w, a[$ pour la métrique CAT(-1). Étant donnés deux chambres w, w' et deux points du bord a, b , on définit

$$\{a|b\}_w = \sup \liminf_{m, n \rightarrow \infty} (a_n|b_m)_w$$

où le supremum est pris sur tous les rayons géodésiques joignant un point de w à a et b . On définit aussi $B_a(w, w') = \lim B_{a_n}(w, w')$ où la limite existe, et ne dépend pas du rayon choisi. On vérifie que $\partial_{reg}\Delta$ est de mesure pleine pour la mesure de Hausdorff associée à d_q . Les fonctions $\{\cdot|\cdot\}$ et B vérifient les propriétés définissant la classe (\mathcal{C}) sur $\partial_{reg}\Delta$: l'espace (\mathcal{G}, d_q) appartient bien à la classe (\mathcal{C}) . On peut vérifier que $\{\cdot|\cdot\}$ et B sont localement constants sur $\partial_{reg}\Delta$.

On se fixe une chambre w . On observe que chaque appartement A étant pavé admet une action géométrique (pour les deux métriques hyperboliques) d'un groupe de Coxeter W_A fixant son pavage. Le bord étant un cercle, une distance géodésique peut être définie par une mesure finie sur ∂A . L'idée est donc de considérer sur chaque bord d'appartement les mesures quasiconformes ν_x^A , $x \in A$, associées à W_A . Ces mesures ν_x^A sont régulières de dimension $\tau > 1$, où τ est le taux de croissance logarithmique de W_A muni de d_q . Notons que tous les W_A sont conjugués par une isométrie, donc τ est indépendant de l'appartement.

On définit une structure d'espace de longueur sur $\partial\Delta$ où on ne définit au préalable que la longueur des bords des appartements. À un appartement fixé A , il existe une unique chambre x_A de A qui réalise la d_q -distance de w à A . On considère sur ∂A la mesure $e^{-\tau d_q(w, x_A)} \nu_{x_A}^A$, qui induit une longueur de ses segments. Les propriétés combinatoires des immeubles montrent que ces différentes distances induisent une métrique géodésique δ sur $\partial\Delta$, pour laquelle les bords des appartements qui contiennent w sont géodésiques. Cette distance est une métrique visuelle de paramètre τ .

La famille des bords des appartements qui contiennent une chambre donnée a naturellement une structure d'espace de Cantor décrit par des cylindres. Cela permet de définir une mesure de probabilité uniforme sur ces courbes pour appliquer la proposition 3.7 et montrer que la dimension conforme Ahlfors-régulière est atteinte. Quand $m = 2$, le stabilisateur d'une chambre est lui-même un espace de Cantor, et on peut utiliser sa mesure de Haar. Voir [11, 12] pour plus de détails. \square

On remarque que la dimension conforme ne permet pas de distinguer tous les immeubles les uns des autres. Le théorème 4.8 implique que la métrique ainsi définie

est loewnesque. L'argument initial montre plus précisément que les bords d'immeubles vérifient une 1-inégalité de Poincaré [13]. Notons qu'ils sont les premiers exemples d'espaces loewnesques de dimension non entière.

On énonce la caractérisation des isométries des immeubles par leurs extensions, due à M. Bourdon pour les immeubles à angle droit et à X. Xie dans le cas général [11, 73].

THÉORÈME 5.24. — *Une transformation de Möbius entre bords d'immeubles se prolonge en isométrie.*

Les homéomorphismes de Möbius préservent un birapport bien particulier, et adapté à la combinatoire des immeubles, ce qui permet notamment de repérer le 1-squelette. Cependant, la démonstration n'en reste pas moins très technique dans le cas général ($m \neq 2$).

La clef de la rigidité à la Pansu est le

THÉORÈME 5.25 (M. Bourdon et H. Pajot). — *Un homéomorphisme quasisymétrique $\varphi : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta'$ entre bords d'immeubles fuchsien à angle droit est conforme.*

Démonstration. — Comme dans le cadre des espaces symétriques, φ est un homéomorphisme entre espaces loewnesques, donc absolument continu sur presque toutes courbes rectifiables, et en particulier sur presque tout bord d'appartements. La restriction de φ à chacun d'eux est dérivable presque partout. Le théorème de Fubini fournit l'existence de dérivées partielles en presque tout point le long de presque tout bord d'appartements contenant ce point. Aux points réguliers, cette quantité ne dépend pas de l'appartement : si un point x est au bord de deux appartements A_1 et A_2 , alors il en existe un troisième qui contient x et dont un voisinage se partage en des demi-morceaux de ∂A_1 et ∂A_2 . La combinatoire des immeubles à angle droit intervient à ce stade pour contrôler la convergence du taux d'accroissement vers la dérivée et pour conclure que φ est conforme. \square

Ceci permet de conclure à la rigidité.

Démonstration des théorèmes 5.1 (b) et 5.2 (b). — Une quasi-isométrie se prolonge en quasisymétrie entre les bords. Quand $m = 2$, le théorème 5.25 implique qu'une telle application est conforme et donc le théorème 5.12 implique que l'homéomorphisme est une transformation de Möbius. Lorsque les immeubles ne sont pas à angle droit, X. Xie utilise un résultat de B. Kleiner qui montre que le groupe des homéomorphismes quasisymétriques d'un immeuble fuchsien est uniformément quasimöbius, cf. la remarque 5.15.

Le théorème 5.24 conclut dans tous les cas. \square

Remarque 5.26. — Comme le montre M. Bourdon [11], aucune métrique visuelle d'une structure CAT(-1) sur Δ ne peut être loewnesque. En effet, le théorème précédent impliquerait que le birapport devrait être localement constant sur $\partial_{reg}\Delta$.

6. CARACTÉRISATION DES GROUPES KLEINÉENS COCOMPACTS OPÉRANT SUR L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Le problème posé est dû à J. Cannon [19].

CONJECTURE 6.1 (J. Cannon). — *Un groupe hyperbolique dont le bord est homéomorphe à \mathbb{S}^2 opère sur $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$ géométriquement.*

Cette conjecture est vraie en dimension 2 [23, 31, 66], et fautive en dimension strictement plus grande que 3. Cela découle de constructions par M. Gromov et W. Thurston de variétés compactes de courbure pincée entre (-1) et $(-1 - \varepsilon)$ qui n'admettent pas de métrique de courbure constante et ce, pour tout $\varepsilon > 0$ et en toute dimension $n \geq 4$, [36]. Notons que P. Pansu montre que la courbure des déformations des variétés localement symétriques non réelles ne peut devenir arbitrairement pincée [57]. Donc les variétés de M. Gromov et W. Thurston ne sont pas équivalentes non plus à d'autres variétés localement symétriques.

Les approches de J. Cannon *et al.* [20, 21, 22] et de M. Bonk et B. Kleiner [4, 6] consistent à reconnaître la structure conforme de la sphère de Riemann à partir de la jauge du groupe. La première approche est plus combinatoire, la seconde plus analytique. On présente ici une argumentation qui entrelace les deux approches et qui impliquera le résultat suivant, voir [37] pour des détails.

THÉORÈME 6.2 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Soit G un groupe hyperbolique de bord S^2 . Si sa jauge atteint sa dimension conforme Ahlfors-régulière, alors G admet une action kleinéenne sur l'espace hyperbolique $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^3$.*

On s'intéresse dans un premier temps à caractériser la sphère de Riemann. Soit X un espace métrique homéomorphe à une sphère. Un anneau $A \subset X$ est un sous-ensemble homéomorphe à $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$. On désigne par $\Gamma_s = \Gamma_s(A)$ la famille des courbes homotopes à $\{1/2\} \times \mathbb{S}^1$, et $\Gamma_t = \Gamma_t(A)$ les courbes qui joignent les deux composantes de bords. Étant donné un recouvrement \mathcal{J} de A , on définit suivant J. Cannon [20], $\text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{J}) = \text{mod}_2(\Gamma_s, \mathcal{J})$ et $\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{J}) = 1/\text{mod}_2(\Gamma_t, \mathcal{J})$. Notons que $\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{J}) \asymp \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{J})$ où les constantes implicites ne dépendent que de la valence de \mathcal{J} .

On dira qu'un recouvrement est K -adapté si son nerf est de valence au plus K et s'il est équivalent à une triangulation de la sphère. Nous énonçons un premier résultat de nature combinatoire.

THÉORÈME 6.3. — Soit (\mathcal{J}_n) une suite de recouvrements finis K -adaptés de X dont la maille tend vers 0. On suppose que

(1) pour tout anneau A , il existe $m > 0$ et n_0 tels que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{J}_n) \geq m;$$

(2) pour tout $x \in X$, tout voisinage V de x et tout $m > 0$, il existe un anneau $A \subset V$ qui sépare x de $X \setminus V$ et n_0 tels que, pour $n \geq n_0$,

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{J}_n) \geq m.$$

Alors il existe un homéomorphisme $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ et une sous-suite (n_k) telle que $\text{mod}_2\phi(A) \asymp \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{J}_{n_k}) \asymp \text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{J}_{n_k})$ pour tout anneau A de X et tout k assez grand.

La démonstration que nous proposons ici suit une idée de M. Bonk et B. Kleiner [4] : une triangulation de la sphère définit le graphe d'incidence d'un unique empilement de cercles sur $\widehat{\mathbb{C}}$, à transformation homographique près [48].

Cette uniformisation discrète est particulièrement bien adaptée à l'étude des modules combinatoires. À un empilement, on associe un pavage dont chaque pièce contient exactement un disque, ce qui peut être fait canoniquement. Disons qu'un anneau est *empilé* s'il est réunion de pièces du pavage.

LEMME 6.4 (du pont). — Si \mathcal{E} est un empilement de valence bornée et si A est un anneau empilé tel que la distance combinatoire entre les deux bords soit au moins 2, alors

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{E}) \asymp \text{mod}_2 A \asymp \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{E}),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de la valence.

Démonstration du théorème 6.3. — Pour chaque n et chaque pièce $s \in \mathcal{J}_n$, on se fixe un point-base $b_s \in s$. À chaque n , on associe un empilement (normalisé) \mathcal{E}_n de $\widehat{\mathbb{C}}$ de graphe équivalent à celui de \mathcal{J}_n . On définit une application $\phi_n : \{b_s, s \in \mathcal{J}_n\} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ en associant le centre du disque correspondant. On rappelle que le module d'un anneau de la sphère est d'autant plus grand qu'une des composantes de son complémentaire a un petit diamètre. Les hypothèses du théorème et le lemme du pont montrent donc que cette famille est équicontinue et que chaque limite est injective, donc est un homéomorphisme. Les estimées sur les modules proviennent aussi du lemme du pont. \square

On en déduit une caractérisation de nature analytique de la sphère de Riemann.

COROLLAIRE 6.5 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Si X est un espace loewnesque homéomorphe à S^2 , alors X est quasimétrique à \widehat{C} .*

Démonstration. — Puisque X est loewnesque, il est localement linéairement localement connexe et Q -régulier, pour une dimension $Q \geq 2$. Ceci produit l'existence d'une constante K et une suite de quasi-empilements K -adaptés (ϕ_n) de X dont la maille tend vers 0. Du coup, les Q -modules combinatoires et analytiques sont comparables (Prop. 3.5). La propriété loewnesque de X , la décroissance des modules combinatoires en fonction de la dimension, et la régularité de la sphère impliquent facilement l'existence d'un homéomorphisme croissant ψ de \mathbb{R}_+ tel que $\Delta(E, F) \geq \psi(\Delta(\phi_n(E), \phi_n(F)))$, pour tout $n \geq 1$, et tout condensateur (E, F) défini par des pièces de ϕ_n . Ceci conduit à des bornes sur les modules, mais elles sont opposées à celles recherchées : un travail plus technique permet alors de les renverser pour appliquer le théorème 6.3. Pour montrer qu'une application limite est quasimöbius, il est en fait plus naturel de travailler avec la suite inverse, en vertu de l'estimée ci-dessus. \square

On peut maintenant conclure.

Démonstration du théorème 6.2. — D'après le théorème 4.8, ∂G admet une métrique loewnesque. Le corollaire 6.5 implique que \widehat{C} est dans la jauge. Par suite, G opère comme un groupe de convergence uniforme uniformément quasimöbius sur \widehat{C} . Le théorème 5.20 implique que cette action est quasiconformément conjuguée à une action kleinéenne. \square

7. PARALLÈLE AVEC LA DYNAMIQUE DES REVÊTEMENTS RAMIFIÉS

Dans l'état d'esprit du dictionnaire de D. Sullivan [64], on peut étudier la dynamique de revêtements ramifiés en utilisant les techniques hyperboliques [39].

Soit $f : X \rightarrow X$ un revêtement ramifié d'un compact localement connexe et supposons qu'on ait un recouvrement fini \mathcal{U} par des ouverts connexes. On construit une suite de recouvrements (\mathcal{U}_n) en prenant les composantes connexes des antécédents des éléments de \mathcal{U} par f^{n-1} . Supposons aussi que la réunion $\cup_n \mathcal{U}_n$ est une base de la topologie de X . On peut alors construire un graphe \mathcal{G} à l'instar du paragraphe 3.3. Comme les graphes de Cayley localement finis d'un groupe hyperbolique, ce graphe est hyperbolique, sa classe de quasi-isométrie est bien définie, et son bord est homéomorphe à X .

L'application f opère sur \mathcal{G} de manière simpliciale, et se prolonge à l'infini en une application conjuguée à f . La construction de Patterson-Sullivan conduit alors à la mesure d'équilibre, qui devient maintenant quasiconforme.

En munissant X d'une distance visuelle de paramètre ε , f dilate les boules suffisamment petites par le facteur e^ε , et devient donc une application grossièrement conforme. La jauge conforme définit donc un invariant topologique de f .

Le théorème de caractérisation topologique des fractions rationnelles de Thurston [29] devient le pendant de la conjecture de Cannon. Dans ce contexte, les obstructions de Thurston des revêtements ramifiés expansifs à ensemble postcritique fini de la sphère deviennent des obstructions à ce que la dimension conforme Ahlfors-régulière de la jauge soit 2 [38].

RÉFÉRENCES

- [1] J. M. ALONSO *et al.* – Notes on word hyperbolic groups, in *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, Edited by H. Short, p. 3–63.
- [2] Z. M. BALOGH, P. KOSKELA & S. ROGOVIN – Absolute continuity of quasiconformal mappings on curves, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), p. 645–664.
- [3] M. BONK – Quasiconformal geometry of fractals, in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 1349–1373.
- [4] M. BONK & B. KLEINER – Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres, *Invent. Math.* **150** (2002), p. 127–183.
- [5] ———, Rigidity for quasi-Möbius group actions, *J. Differential Geom.* **61** (2002), p. 81–106.
- [6] ———, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary, *Geom. Topol.* **9** (2005), p. 219–246.
- [7] ———, Quasi-hyperbolic planes in hyperbolic groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), p. 2491–2494.

- [8] M. BONK & O. SCHRAMM – Embeddings of Gromov hyperbolic spaces, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), p. 266–306.
- [9] M. BOURDON – Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace, *Enseign. Math.* **41** (1995), p. 63–102.
- [10] ———, Sur le birapport au bord des CAT(−1)-espaces, *Publ. Math. I.H.É.S.* **83** (1996), p. 95–104.
- [11] ———, Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), p. 245–268.
- [12] ———, Sur les immeubles fuchsien et leur type de quasi-isométrie, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **20** (2000), p. 343–364.
- [13] M. BOURDON & H. PAJOT – Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), p. 2315–2324.
- [14] ———, Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), p. 701–736.
- [15] ———, Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry, in *Rigidity in dynamics and geometry (Cambridge, 2000)*, Springer, 2002, p. 1–17.
- [16] ———, Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov, *J. reine angew. Math.* **558** (2003), p. 85–108.
- [17] B. H. BOWDITCH – A topological characterisation of hyperbolic groups, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), p. 643–667.
- [18] ———, Convergence groups and configuration spaces, in *Geometric group theory down under (Canberra, 1996)*, de Gruyter, 1999, p. 23–54.
- [19] J. W. CANNON – The theory of negatively curved spaces and groups, in *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, 1991, p. 315–369.
- [20] ———, The combinatorial Riemann mapping theorem, *Acta Math.* **173** (1994), p. 155–234.
- [21] J. W. CANNON, W. J. FLOYD & W. R. PARRY – Sufficiently rich families of planar rings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), p. 265–304.
- [22] J. W. CANNON & E. L. SWENSON – Recognizing constant curvature discrete groups in dimension 3, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), p. 809–849.
- [23] A. CASSON & D. JUNGREIS – Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds, *Invent. Math.* **118** (1994), p. 441–456.
- [24] J. CHEEGER – Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.* **9** (1999), p. 428–517.
- [25] R. CHOW – Groups quasi-isometric to complex hyperbolic space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), p. 1757–1769.

- [26] C. CONNELL – Minimal Lyapunov exponents, quasiconformal structures, and rigidity of non-positively curved manifolds, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **23** (2003), p. 429–446.
- [27] M. COORNAERT – Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov, *Pacific J. Math.* **159** (1993), p. 241–270.
- [28] M. COORNAERT, T. DELZANT & A. PAPADOPOULOS – *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Math., vol. 1441, Springer, 1990.
- [29] A. DOUADY & J. H. HUBBARD – A proof of Thurston's topological characterization of rational functions, *Acta Math.* **171** (1993), p. 263–297.
- [30] P. EBERLEIN & B. O'NEILL – Visibility manifolds, *Pacific J. Math.* **46** (1973), p. 45–109.
- [31] D. GABAI – Convergence groups are Fuchsian groups, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **25** (1991), p. 395–402.
- [32] É. GHYS & P. DE LA HARPE (éds.) – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, 1990.
- [33] M. GROMOV – Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. I.H.É.S.* **53** (1981), p. 53–73.
- [34] ———, Hyperbolic groups, in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, 1987, p. 75–263.
- [35] M. GROMOV & P. PANSU – Rigidity of lattices : an introduction, in *Geometric topology : recent developments (Montecatini Terme, 1990)*, Lecture Notes in Math., vol. 1504, Springer, 1991, p. 39–137.
- [36] M. GROMOV & W. THURSTON – Pinching constants for hyperbolic manifolds, *Invent. Math.* **89** (1987), p. 1–12.
- [37] P. HAÏSSINSKY – Empilements de cercles et modules combinatoires, à paraître aux *Ann. Inst. Fourier*.
- [38] P. HAÏSSINSKY & K. M. PILGRIM – Thurston obstructions and Ahlfors regular conformal dimension, *J. Math. Pures Appl.* **90** (2008), p. 229–241.
- [39] ———, Coarse expanding conformal dynamics, à paraître dans *Astérisque*.
- [40] U. HAMENSTÄDT – A geometric characterization of negatively curved locally symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **34** (1991), p. 193–221.
- [41] J. HEINONEN – A capacity estimate on Carnot groups, *Bull. Sci. Math.* **119** (1995), p. 475–484.
- [42] ———, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer, 2001.
- [43] J. HEINONEN & P. KOSKELA – Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry, *Acta Math.* **181** (1998), p. 1–61.

- [44] J. HEINONEN, P. KOSKELA, N. SHANMUGALINGAM & J. T. TYSON – Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings, *J. Anal. Math.* **85** (2001), p. 87–139.
- [45] I. KAPOVICH & N. BENAKLI – Boundaries of hyperbolic groups, in *Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001)*, Contemp. Math., vol. 296, Amer. Math. Soc., 2002, p. 39–93.
- [46] S. KEITH & T. LAAKSO – Conformal Assouad dimension and modulus, *Geom. Funct. Anal.* **14** (2004), p. 1278–1321.
- [47] B. KLEINER – The asymptotic geometry of negatively curved spaces : uniformization, geometrization and rigidity, in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 743–768.
- [48] P. KOEBE – Kontaktprobleme der konformen abbildung, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **88** (1936), p. 141–164.
- [49] J. LELONG-FERRAND – Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de A. Lichnerowicz), *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll. in-8°* **39** (1971), p. 44.
- [50] ———, Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes, *J. Differential Geometry* **8** (1973), p. 487–510.
- [51] C. LOEWNER – On the conformal capacity in space, *J. Math. Mech.* **8** (1959), p. 411–414.
- [52] G. A. MARGULIS – The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with the same fundamental group, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **192** (1970), p. 736–737.
- [53] G. A. MARGULIS & G. D. MOSTOW – The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), p. 402–433.
- [54] J. MITCHELL – On Carnot-Carathéodory metrics, *J. Differential Geom.* **21** (1985), p. 35–45.
- [55] G. D. MOSTOW – Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms, *Publ. Math. I.H.É.S.* **34** (1968), p. 53–104.
- [56] ———, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton Univ. Press, 1973, Annals of Mathematics Studies, No. 78.
- [57] P. PANSU – Dimension conforme et sphère à l’infini des variétés à courbure négative, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14** (1989), p. 177–212.
- [58] ———, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, *Ann. of Math.* **129** (1989), p. 1–60.
- [59] F. PAULIN – Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord, *J. London Math. Soc.* **54** (1996), p. 50–74.

- [60] H. M. REIMANN – An estimate for pseudoconformal capacities on the sphere, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14** (1989), p. 315–324.
- [61] D. SULLIVAN – The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, *Publ. Math. I.H.É.S.* **50** (1979), p. 171–202.
- [62] ———, On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions, in *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, 1981, p. 465–496.
- [63] ———, Discrete conformal groups and measurable dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), p. 57–73.
- [64] ———, Seminar on hyperbolic geometry and conformal dynamical systems, pré-publication I.H.É.S., 1982.
- [65] P. TUKIA – On quasiconformal groups, *J. Analyse Math.* **46** (1986), p. 318–346.
- [66] ———, Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups, *J. reine angew. Math.* **391** (1988), p. 1–54.
- [67] ———, Convergence groups and Gromov’s metric hyperbolic spaces, *New Zealand J. Math.* **23** (1994), p. 157–187.
- [68] P. TUKIA & J. VÄISÄLÄ – Quasisymmetric embeddings of metric spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **5** (1980), p. 97–114.
- [69] J. T. TYSON – Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **23** (1998), p. 525–548.
- [70] ———, Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces, *Conform. Geom. Dyn.* **5** (2001), p. 21–73.
- [71] J. VÄISÄLÄ – *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., vol. 229, Springer, 1971.
- [72] ———, Quasi-Möbius maps, *J. Analyse Math.* **44** (1984/85), p. 218–234.
- [73] X. XIE – Quasi-isometric rigidity of Fuchsian buildings, *Topology* **45** (2006), p. 101–169.

Peter HAÏSSINSKY

L.A.T.P./C.M.I.

Université de Provence

39, rue Frédéric Joliot-Curie

F-13453 Marseille Cedex 13

E-mail : phaissin@cmi.univ-mrs.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(994) *La dualité étrange*

Christian PAULY

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LA DUALITÉ ÉTRANGE
[d'après P. Belkale, A. Marian et D. Oprea]

par **Christian PAULY**

Introduction

Le but de ces notes est de donner un bref aperçu d'un résultat important sur les fibrés vectoriels sur une courbe algébrique : la dualité étrange ou la dualité rang-niveau.

En 1994, disposant de la formule de Verlinde qui donne la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées d'ordre k sur les espaces de modules de fibrés de rang r (voir sections 1.2 et 1.3), on a conjecturé que les deux espaces associés aux couples (r, k) et (k, r) sont naturellement duaux, la dualité entre ces espaces vectoriels étant induite par le produit tensoriel des fibrés vectoriels. Cette conjecture a été démontrée seulement en 2006, d'abord par P. Belkale pour une courbe générale et ensuite par A. Marian et D. Oprea pour toute courbe.

Une des idées principales, commune aux deux démonstrations, est de construire une base explicite de fonctions thêta généralisées d'ordre r indexée par des fibrés vectoriels particuliers de rang r . P. Belkale obtient ces fibrés particuliers comme sous-fibrés d'un fibré de rang $r + k$ sur la droite projective, et A. Marian et D. Oprea considèrent les sous-fibrés de degré maximal d'un fibré fixé de rang $r + k$ sur une courbe quelconque. La deuxième idée clé est alors de montrer que le nombre de ces fibrés particuliers est égal à la dimension des espaces de fonctions thêta généralisées donnée par la formule de Verlinde — notons que les deux problèmes énumératifs et leur nombre de solutions sont différents. C'est à ce niveau-là qu'interviennent la combinatoire de la formule de Verlinde et le lien entre l'anneau de fusion et la cohomologie quantique de la grassmannienne $\text{Gr}(r, r + k)$, déjà observé par E. Witten dans [33]. Tandis que P. Belkale montre que le nombre de ses fibrés particuliers vérifie les mêmes relations de récurrence que les nombres de Verlinde, A. Marian et D. Oprea utilisent la formule de Vafa et Intiligator donnant les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne $\text{Gr}(r, r + k)$.

Dans la dernière section, je décris quelques généralisations de la dualité étrange, notamment aux fibrés vectoriels avec structure parabolique et aux G -fibrés principaux. Dans ce dernier cas, de nombreuses questions restent ouvertes.

Dans ces notes, je ne mentionne que les constructions de dualité étrange sur les courbes. Des constructions analogues existent sur les surfaces projectives, en particulier sur le plan projectif et sur les surfaces abéliennes — voir [19].

Il existe des « surveys » récents sur la dualité étrange : les notes de cours de M. Popa [27], section 5, et l'article de A. Marian et D. Oprea [19].

J'aimerais remercier P. Belkale et R. Oudompheng pour leurs commentaires sur ces notes.

1. ESPACES DE MODULES DE FIBRÉS VECTORIELS SUR UNE COURBE

Dans cette section, on rappelle brièvement les principaux résultats concernant les espaces de modules de fibrés vectoriels sur les courbes et les espaces de fonctions thêta généralisées. Pour plus de détails on renvoie par exemple au livre de J. Le Potier [16] et aux notes de M. Popa [27] et de C. Sorger [30].

1.1. Propriétés des espaces de modules

Soit X une courbe projective lisse complexe de genre $g \geq 1$. Étant donné un fibré vectoriel E sur la courbe X , on peut lui associer deux entiers : son rang $r = \text{rg}(E)$ et son degré $d = \text{deg}(E) := \text{deg}(\Lambda^r E)$. Ce sont des invariants topologiques. Si l'on se donne la courbe X ainsi que r et d , il existe une variété projective, notée $\mathcal{U}_X(r, d)$, qui paramètre les classes de S -équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et de degré d sur la courbe X . Rappelons que $\mathcal{U}_X(r, d)$ est une variété irréductible, de dimension $r^2(g - 1) + 1$ et que les points fermés de $\mathcal{U}_X(r, d)$ correspondent aux sommes directes de fibrés vectoriels stables.

Si $r = 1$, l'espace de modules $\mathcal{U}_X(1, d)$ coïncide avec la variété de Picard $\text{Pic}^d(X)$ paramétrant les fibrés en droites de degré d . Nous notons $\text{Jac}(X) := \text{Pic}^0(X)$ la jacobienne de la courbe X .

Il existe un morphisme de variétés induit par le déterminant

$$\det : \mathcal{U}_X(r, d) \longrightarrow \text{Pic}^d(X), \quad E \mapsto \det(E).$$

Nous notons $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, L)$ la fibre $\det^{-1}(L)$ au-dessus du fibré en droites $L \in \text{Pic}^d(X)$ et $\mathcal{S}\mathcal{U}_X(r) := \mathcal{S}\mathcal{U}_X(r, \mathcal{O})$. Afin de simplifier la notation, nous introduisons aussi $\mathcal{U}_X^*(r) := \mathcal{U}_X(r, r(g - 1))$.

À plusieurs reprises dans le texte, on utilisera le résultat élémentaire suivant : le morphisme induit par le produit tensoriel

$$(1) \quad t : \mathcal{U}_X(r) \times \text{Pic}^{g-1}(X) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(r), \quad (E, L) \mapsto E \otimes L$$

est un revêtement étale galoisien de groupe de Galois égal au groupe $\text{Jac}(X)[r] \cong (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^{2g}$ des points de r -torsion de la jacobienne.

1.2. Fonctions thêta généralisées

Avant de définir les fonctions thêta généralisées, on rappelle quelques notions sur les fonctions thêta abéliennes. L'ensemble

$$\Theta := \{M \in \text{Pic}^{g-1}(X) \mid h^0(X, M) > 0\} \subset \text{Pic}^{g-1}(X)$$

détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta* — dans $\text{Pic}^{g-1}(X)$, qui définit, après translation $T_L : \text{Jac}(X) \rightarrow \text{Pic}^{g-1}(X)$ par un fibré en droites L de degré $g - 1$, un diviseur $\Theta_L := T_L^*\Theta$ dans la jacobienne donnant une polarisation principale, c'est-à-dire $h^0(\text{Jac}(X), \mathcal{O}(\Theta_L)) = 1$. Les sections globales du fibré $\mathcal{O}(k\Theta_L)$ sont appelées les fonctions thêta d'ordre k .

La construction précédente se généralise sans trop d'obstacles aux espaces de modules $\mathcal{U}_X(r, d)$: on montre que l'ensemble

$$(2) \quad \Theta := \{[E] \in \mathcal{U}_X^*(r) \mid h^0(X, E) > 0\} \subset \mathcal{U}_X^*(r),$$

où $[E]$ désigne la classe de S -équivalence d'un fibré semi-stable E , détermine un diviseur de Cartier effectif — le *diviseur thêta généralisé* — dans $\mathcal{U}_X^*(r)$. Comme en rang 1, on a aussi la relation [5]

$$h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(\Theta)) = 1.$$

En prenant l'image inverse par le morphisme induit par produit tensoriel $T_L : \mathcal{U}_X(r, 0) \rightarrow \mathcal{U}_X^*(r)$ avec un fibré en droites L de degré $g - 1$ et en restreignant à la sous-variété $\mathcal{U}_X(r) \subset \mathcal{U}_X(r, 0)$, on obtient un diviseur de Cartier Θ_L dans $\mathcal{U}_X(r)$ dont le support est

$$\Theta_L = \{[E] \in \mathcal{U}_X(r) \mid h^0(X, E \otimes L) > 0\}.$$

On sait [13] que le fibré en droites associé $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\Theta_L)$ est ample, ne dépend pas du choix de L et engendre le groupe de Picard

$$\text{Pic}(\mathcal{U}_X(r)) = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{L}.$$

Par analogie avec le cas $r = 1$, on appelle les sections globales de \mathcal{L}^k sur $\mathcal{U}_X(r)$ les *fonctions thêta généralisées* d'ordre k .

1.3. La formule de Verlinde

La formule de Verlinde donne la dimension de l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre k sur $\mathcal{U}_X(r)$. Remarquons que la formule de Verlinde donne en fait la dimension des espaces de blocs conformes, qu'on peut identifier aux espaces de fonctions thêta généralisées. On renvoie aux notes de A. Beauville [3] et de C. Sorger [30] pour une discussion détaillée et les démonstrations. Dans notre cas, on utilisera la formule de Verlinde sous la forme suivante (due à D. Zagier) : on pose $N = r + k$.

$$(3) \quad N_k(\mathrm{SL}(r)) := h^0(\mathcal{U}_X(r), \mathcal{L}^k) = \left(\frac{r}{N}\right)^g \sum_{\substack{S \cup T = \{0, \dots, N-1\} \\ |S|=k, |T|=r}} \prod_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \left| 2 \sin \pi \frac{s-t}{N} \right|^{g-1}.$$

On observe que cette formule présente une symétrie en les variables r et k . Plus précisément on a la relation

$$(4) \quad \frac{N_k(\mathrm{SL}(r))}{r^g} = \frac{N_r(\mathrm{SL}(k))}{k^g}.$$

On déduit la dimension $N_k(\mathrm{GL}(r))$ de $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ à partir de la formule de Verlinde (3) en utilisant le revêtement étale galoisien (1) : on calcule l'image inverse

$$t^* \mathcal{O}(k\Theta) = \mathcal{L}^k \boxtimes \mathcal{O}(kr\Theta),$$

ce qui permet de déduire

$$(5) \quad N_k(\mathrm{GL}(r)) = \frac{k^g}{r^g} N_k(\mathrm{SL}(r)) = N_r(\mathrm{SL}(k)).$$

2. LA DUALITÉ ÉTRANGE

2.1. La construction de Beauville-Donagi-Tu

Dans cette section, on va énoncer le théorème principal de l'exposé. Ce théorème avait été conjecturé en 1994 par A. Beauville [3], ainsi que par R. Donagi et L. Tu [12]. Cette conjecture était fondée sur des travaux antérieurs en théorie conforme des champs — voir par exemple [21]. La construction de la « dualité étrange » est la suivante : on considère deux entiers r et k et le morphisme entre espaces de modules de fibrés vectoriels semi-stables de rang r et k induit par le produit tensoriel

$$t : \mathcal{U}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r) \longrightarrow \mathcal{U}_X^*(kr), \quad (E, F) \mapsto E \otimes F.$$

Notons que cette flèche est bien un morphisme, car la semi-stabilité des fibrés est préservée par produit tensoriel. On calcule comme précédemment l'image inverse

$$t^* \mathcal{O}(\Theta) = \mathcal{L}^r \boxtimes \mathcal{O}(k\Theta).$$

L'image inverse par t du diviseur thêta généralisé (2) donne un élément $t^*\Theta$ de $H^0(t^*\mathcal{O}(\Theta))$ qui se décompose par la formule de Künneth

$$H^0(\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r) \otimes H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta)).$$

On peut donc considérer le tenseur $t^*\Theta$ comme une application linéaire

$$(6) \quad SD : H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r)$$

entre deux espaces vectoriels de même dimension (5). Le résultat principal est le

THÉORÈME 2.1 ([17] Theorem 2, [6], [8]). — *L'application linéaire SD est un isomorphisme pour toute courbe X .*

Remarque 2.2. — Le fait que SD est un isomorphisme admet l'interprétation géométrique suivante. Étant donné un fibré semi-stable F avec $[F] \in \mathcal{U}_X^*(r)$, on peut considérer l'ensemble

$$\Theta_F := \{[E] \in \mathcal{U}_X(k) \mid h^0(X, E \otimes F) > 0\}.$$

Pour F général, Θ_F détermine un diviseur dans le système linéaire $|\mathcal{L}^r|$ et l'application rationnelle

$$\mathcal{U}_X^*(r) \dashrightarrow |\mathcal{L}^r|, \quad F \mapsto \Theta_F,$$

se factorise à travers l'application linéaire SD projectivée. On observe alors que SD est un isomorphisme si et seulement si les diviseurs Θ_F , quand F parcourt $\mathcal{U}_X^*(r)$, engendrent linéairement le système $|\mathcal{L}^r|$.

2.2. La dualité de Wirtinger généralisée

Un défaut de l'énoncé précédent est qu'il met en relation deux groupes structuraux de type différent $SL(k)$ et $GL(r)$. Un énoncé plus symétrique a été formulé et démontré par A. Marian et D. Oprea : on considère le morphisme

$$\pi : \mathcal{U}_X(k, 0) \times \mathcal{U}_X(r, 0) \longrightarrow \mathcal{U}_X(kr, 0) \times \text{Jac}(X), \quad (E, F) \mapsto (E \otimes F, (\det E)^{-1} \otimes \det F).$$

On fixe deux fibrés en droites L et M de degré $g - 1$ sur X et on note K le fibré canonique de X . L'image inverse par π du diviseur thêta généralisé produit

$$\Theta_M \boxtimes \Theta_{L^{-1}K} \subset \mathcal{U}_X(kr, 0) \times \text{Jac}(X)$$

peut être considéré (voir [17], Lemma 1) comme une application linéaire

$$(7) \quad D : H^0(\mathcal{U}_X(k, 0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^*\Theta_L))^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K})).$$

THÉORÈME 2.3 (Dualité de Wirtinger généralisée, [17] Theorem 1)

L'application linéaire D est un isomorphisme pour toute courbe X et pour tous fibrés en droites L et M .

Remarque 2.4. — Ce théorème généralise aux fibrés vectoriels un résultat sur les fonctions thêta abéliennes [20] appelé *dualité de Wirtinger*. On obtient ce résultat classique en prenant dans le théorème précédent $r = k = 1$ et $L = M = \kappa$ une thêta-caractéristique de X . Nous notons alors $\Theta = \Theta_\kappa$ le diviseur thêta symétrique dans $\text{Jac}(X)$. Le morphisme π est une isogénie et on a la relation $\pi^*(\Theta \boxtimes \Theta) = 2\Theta \boxtimes 2\Theta$. L’isomorphisme D fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & |2\Theta|^\vee \\ & \nearrow & \downarrow^D \\ \text{Jac}(X) & \xrightarrow{i} & |2\Theta|, \end{array}$$

avec $i(x) = T_x^*\Theta + T_{-x}^*\Theta$, où T_x désigne la translation par x dans $\text{Jac}(X)$. Remarquons que la dualité de Wirtinger est démontrée pour toute variété abélienne avec polarisation principale.

La dualité étrange (Théorème 2.1), telle qu’elle avait été conjecturée par Beauville-Donagi-Tu, est alors un corollaire de la dualité de Wirtinger généralisée.

PROPOSITION 2.5 ([17] section 4). — *Si D est un isomorphisme, alors SD est aussi un isomorphisme.*

PREUVE (esquisse) — Le produit tensoriel avec M induit un isomorphisme entre $H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M))$ et $H^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$. D’autre part les deux applications linéaires D et SD apparaissent dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r)^\vee & \xrightarrow{\rho^\vee} & H^0(\mathcal{U}_X(k, 0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^*\Theta_L))^\vee \\ \downarrow^{SD^\vee} & & \downarrow^D \\ H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M)) & \hookrightarrow & H^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K})) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont la duale de la restriction ρ et la multiplication par la section $\det^*\Theta_{L^{-1}K}$ respectivement. Cette dernière flèche est injective. Comme D est un isomorphisme, il suffit donc de montrer que l’application de restriction ρ des sections globales à $\mathcal{U}_X(k)$ est surjective. Étant donné $s \in H^0(\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r)$, on construit « à la main » une section $\text{Jac}(X)[k]$ -invariante sur le revêtement étale galoisien $\mathcal{U}_X(k) \times \text{Jac}(X) \rightarrow \mathcal{U}_X(k, 0)$ qui se restreint à s sur $\mathcal{U}_X(k) \times \{\Theta_X\}$. □

3. LA DÉMONSTRATION DE A. MARIAN ET D. OPREA

Dans cette section, nous allons expliquer brièvement la démonstration de la dualité de Wirtinger généralisée (Théorème 2.3).

3.1. L'idée principale

L'idée clé, qui avait déjà été utilisée dans l'article antérieur de P. Belkale [6] sur une courbe singulière, est de construire de manière explicite deux familles de fibrés vectoriels, dont les diviseurs thêta associés forment des bases duales des deux espaces vectoriels, qui apparaissent dans (7). On notera leur dimension

$$\begin{aligned} q &= h^0(\mathcal{U}_X(k, 0), \mathcal{O}(r\Theta_M + \det^*\Theta_L)) = h^0(\mathcal{U}_X(r, 0), \mathcal{O}(k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K})) \\ &= \left(\frac{N}{r}\right)^g h^0(\mathcal{A}\mathcal{U}_X(r), \mathcal{L}^k). \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en utilisant le revêtement étale (1). Plus précisément, on montre le

THÉORÈME 3.1 ([17] Proposition 3). — *Il existe q couples de fibrés vectoriels stables*

$$(A_i, B_i) \in \mathcal{U}_X(k, 0) \times \mathcal{U}_X(r, 0), \quad 1 \leq i \leq q,$$

vérifiant les conditions

1. $h^0(X, A_i \otimes B_j \otimes M) \neq 0$ si $i \neq j$, et $= 0$ si $i = j$,
2. $h^0(X, (\det A_i)^{-1}(\det B_i)L^{-1}K) = 0$.

Ce théorème signifie que les q diviseurs $\Theta_{A_i} \subset \mathcal{U}_X(r, 0)$ du système linéaire $|k\Theta_M + \det^*\Theta_{L^{-1}K}|$ dont le support est donné par

$$\Theta_{A_i} = \{[F] \in \mathcal{U}_X(r, 0) \mid h^0(X, A_i \otimes F \otimes M) > 0 \text{ ou } h^0((\det A_i)^{-1}(\det F)L^{-1}K) > 0\}$$

contiennent les fibrés stables $B_j \in \mathcal{U}_X(r, 0)$ pour $j \neq i$ et ne contiennent pas B_i . Ceci entraîne immédiatement que les q diviseurs Θ_{A_i} forment une famille libre, et donc que D est un isomorphisme.

3.2. Le schéma Quot de Grothendieck, invariants de Gromov-Witten et la formule de Vafa-Intriligator

Dans cette section, nous allons construire les q couples (A_i, B_i) du théorème 3.1. Pour cela nous introduisons le schéma Quot de Grothendieck $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ qui paramètre les suites exactes

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X^N \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

où E est un sous-faisceau de \mathcal{O}_X^N de rang k et de degré $-d$ et F un faisceau de rang r . Rappelons la notation $N = r + k$. Le schéma $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ est projectif, mais pour d général ce schéma peut avoir plusieurs composantes irréductibles et des singularités — voir par exemple [27] section 4 ou [18]. Il existe une suite exacte de faisceaux universels sur $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times X$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times X}^N \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs les points σ de $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ qui correspondent aux faisceaux quotients $F = \mathcal{F}|_{\{\sigma\} \times X}$ localement libres forment un ouvert

$$\text{Mor}_d(X, \text{Gr}(k, N)) \subset \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k),$$

qui paramètre les morphismes de degré d de la courbe X dans la grassmannienne $\text{Gr}(k, N)$ des sous-espaces de dimension k dans \mathbb{C}^N . Si l'on suppose le degré d assez grand, le schéma $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ est irréductible [10] et de dimension égale à

$$\dim \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) = \chi(\text{Hom}(E, F)) = Nd - rk(g - 1).$$

Par conséquent l'ouvert $\text{Mor}_d(X, \text{Gr}(k, N))$ est dense. On suppose aussi que d est divisible par k et on introduit l'entier $s = \frac{Nd}{k} - r(g - 1)$, de sorte que $\dim \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) = sk$.

Comme le faisceau \mathcal{E} est localement libre, on peut définir les classes de Chern

$$a_i = c_i(\mathcal{E}|_{\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k) \times \{x\}}).$$

On observe que ces classes de Chern ne dépendent pas du choix du point $x \in X$. Le résultat crucial est alors la

PROPOSITION 3.2 ([17] Proposition 1). — *On a l'égalité suivante*

$$q = \int_{\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)} a_k^s.$$

La preuve passe par une vérification directe de l'égalité numérique, car d'une part q est donnée par la formule de Verlinde (3) et d'autre part les nombres d'intersection de classes de Chern sur le schéma $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ sont en fait des *invariants de Gromov-Witten* associés à la grassmannienne — voir par exemple [9]. La formule de Vafa et Intriligator, qui calcule ces invariants de Gromov-Witten, a été démontrée en 1994 par B. Siebert et G. Tian [29] — voir aussi [18] pour une formulation plus explicite.

Afin de terminer la construction des q couples (A_i, B_i) , il faut donner une interprétation énumérative du nombre d'intersection $\int a_k^s$. Ceci résulte directement du travail de A. Bertram sur les invariants de Gromov-Witten : soient $H \subset \mathbb{C}^N$ un hyperplan et $x \in X$; notons \mathcal{E}_x la restriction $\mathcal{E}|_{\text{Quot} \times \{x\}}$. Alors H détermine une section globale φ de \mathcal{E}_x^\vee dont le lieu des zéros $Z \subset \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ est une extension de la sous-variété de $\text{Mor}_d(X, \text{Gr}(k, N))$ définie par

$$\{\phi : X \rightarrow \text{Gr}(k, N) \mid \phi(x) \in \text{Gr}(k, H) \subset \text{Gr}(k, N)\}.$$

PROPOSITION 3.3 ([9]). — *Pour des hyperplans H_1, \dots, H_s et des points x_1, \dots, x_s généraux, on a :*

1. les lieux des zéros Z_l , pour $1 \leq l \leq s$, sont de codimension k dans $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ et

$$[Z_l] = c_k(\mathcal{E}_{\text{Quot} \times \{x_l\}}^\vee) \cap [\text{Quot}]$$

2. les Z_l intersectent transversalement dans le lieu des fibrés stables, c'est-à-dire

$$\mathcal{Z} := Z_1 \cap \dots \cap Z_s$$

est un schéma réduit de dimension 0 correspondant à des fibrés stables.

La preuve utilise essentiellement le théorème de transversalité de Kleiman [15].

On déduit de cette proposition que le nombre d'intersection $\int a_k^s$ est égal au cardinal de \mathcal{Z} , dont les éléments correspondent à des suites exactes $0 \rightarrow E_i \rightarrow \mathcal{O}_X^N \rightarrow F_i \rightarrow 0$ avec E_i et F_i stables. D'autre part si l'on introduit le sous-faisceau $S = \ker(\mathcal{O}_X^N \xrightarrow{\oplus u_l} \oplus_l \mathbb{C}_{x_l})$ avec $(\ker u_l)_{x_l} = H_l$, on a par construction que E_i est un sous-fibré de S ; en fait les E_i sont les sous-fibrés de S de rang k et de degré maximal. Notons F'_i le conoyau de l'inclusion $E_i \subset S$. Un argument standard montre alors que l'espace tangent de Zariski au point $(E_i, F_i) \in \mathcal{Z} \subset \text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ à l'intersection \mathcal{Z} s'identifie à

$$T_{(E_i, F_i)}\mathcal{Z} \cong H^0(X, E_i^* \otimes F'_i).$$

Or comme \mathcal{Z} est lisse, on en déduit que $h^0(X, E_i^* \otimes F'_i) = 0$. D'autre part, si $i \neq j$, on montre facilement, en utilisant la stabilité des fibrés E_i , que $h^0(X, E_i^* \otimes F'_j) \neq 0$. Finalement on tensorise les deux fibrés stables E_i^* et F'_j par des fibrés en droites bien choisis (en fonction de d et M, L) et on obtient les q couples (A_i, B_i) vérifiant les conditions du théorème 3.1.

3.3. Quelques remarques

Remarque 3.4. — La coïncidence entre la dimension q calculée à partir de la formule de Verlinde et les invariants de Gromov-Witten associés à la grassmannienne $\text{Gr}(k, N)$ paraît à première vue très étonnante. L'idée qui sous-tend l'égalité de la proposition 3.2 repose sur un argument de physique théorique (voir l'article de Witten [33]) établissant un lien entre le modèle de Wess-Zumino-Witten associé au groupe $GL(k)$ et au niveau r , c'est-à-dire l'espace des fonctions thêta généralisées d'ordre r , et le modèle sigma de la grassmannienne $\text{Gr}(k, N)$, c'est-à-dire les invariants de Gromov-Witten.

D'autre part, rappelons (voir par exemple [30]) que la combinatoire de la formule de Verlinde, dérivée des règles de factorisations de blocs conformes [32], est liée à la structure de l'anneau de fusion et de ses caractères. Dans le cas du groupe $SL(k)$ et du niveau r , l'anneau de fusion associé peut être mis en relation avec l'anneau de

cohomologie quantique de la grassmannienne $\text{Gr}(k, N)$. Pour d'autres groupes structuraux, par exemple $\text{Sp}(k)$ ou $\text{Spin}(k)$, cette relation reste mystérieuse — voir aussi section 5.2.1.

Remarque 3.5. — La dualité de Wirtinger généralisée peut être étendue aux espaces de modules de fibrés de degré quelconque ([17] Theorem 3).

4. LA DÉMONSTRATION DE P. BELKALE

La démonstration de la dualité étrange (Théorème 2.1) donnée par P. Belkale se fait en deux étapes : dans son premier article [6], antérieur à [17], il démontre la dualité pour une courbe générale et complète la preuve en montrant dans [8] que le rang de l'application SD ne varie pas avec la courbe X .

4.1. Fibrés vectoriels sur une courbe rationnelle nodale [6]

Tout d'abord P. Belkale observe — voir aussi section 3.1 — qu'il suffit de construire m couples $(E_i, F_i) \in \mathcal{F}\mathcal{U}_X(k) \times \mathcal{U}_X^*(r)$ avec $m = h^0(\mathcal{F}\mathcal{U}_X(k), \mathcal{L}^r) = h^0(\mathcal{U}_X^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ vérifiant la condition

$$h^0(X, E_i \otimes F_j) = 0 \iff i = j.$$

La construction de ces m couples est faite sur une courbe rationnelle X_0 avec g nœuds n_1, \dots, n_g , ou plus précisément sur sa normalisation $\eta : \mathbb{P}^1 \rightarrow X_0$: d'abord on montre l'égalité numérique entre le nombre de Verlinde m et le nombre m' de sous-fibrés V de rang r et de degré 0 d'un fibré général T de rang N et de degré $k(g-1)$ sur \mathbb{P}^1 vérifiant les deux conditions suivantes pour $1 \leq l \leq g$

$$\gamma_l(V_{p_l}) \subset V_{q_l}, \quad \text{et} \quad \ker(\gamma_l) \subset V_{p_l},$$

où les $\gamma_l : T_{p_l} \rightarrow T_{q_l}$ sont des applications linéaires de rang $N-1$, et $p_l, q_l \in \mathbb{P}^1$ tels que $\eta(p_l) = \eta(q_l) = n_l$. L'égalité $m = m'$ est obtenue en vérifiant que ces deux nombres satisfont aux mêmes relations de récurrence — voir [6], section 8 ; rappelons que les blocs conformes satisfont aux règles de factorisation [32] qui donnent une relation entre leurs dimensions en genre g et $g-1$.

Ensuite on observe que les applications quotient $\bar{\gamma}_l : (T/V)_{p_l} \rightarrow (T/V)_{q_l}$ sont des isomorphismes, ce qui donne par recollement aux points p_l et q_l les fibrés vectoriels F_i sur X_0 . Les fibrés E_i sur X_0 sont obtenus après déformation des applications linéaires γ_l . Finalement on déforme les m couples (E_i, F_i) vers une courbe lisse ; d'où la dualité pour une courbe X générale.

4.2. La connexion projectivement plate [8]

La construction de l'application de dualité étrange SD peut se faire pour une famille de courbes lisses $\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$: il existe des fibrés vectoriels \mathcal{V} et \mathcal{W} sur S tels que $\mathcal{V}_s \cong H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}(k), \mathcal{L}^r)$ et $\mathcal{W}_s \cong H^0(\mathcal{U}_{\mathcal{X}_s}^*(r), \mathcal{O}(k\Theta))$ et un morphisme entre fibrés vectoriels

$$\mathcal{SD} : \mathcal{W}^\vee \longrightarrow \mathcal{V},$$

tel que \mathcal{SD}_s coïncide avec SD (6) sur la courbe \mathcal{X}_s . D'autre part, ces fibrés sont munis de deux connexions $\nabla_{\mathcal{V}}$ et $\nabla_{\mathcal{W}}$ (la connexion de Hitchin [14] ou connexion WZW [32]), qui sont projectivement plates. Le résultat principal est le

THÉORÈME 4.1 ([6] Theorem 1.1). — *L'homomorphisme \mathcal{SD} est horizontal.*

Un corollaire est que le rang de \mathcal{SD}_s ne dépend pas de $s \in S$.

Remarque 4.2. — Le théorème précédent peut être démontré dans un contexte plus général — voir section 5.2 et [8] section 5.

5. AUTRES CAS DE DUALITÉ ÉTRANGE

Dans cette section, je présenterai quelques généralisations des théorèmes 2.1 et 2.3.

5.1. Fibrés vectoriels avec structure parabolique

Une structure parabolique sur un fibré vectoriel E de rang r est la donnée d'un nombre fini de points $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ de X , de poids dominants $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de l'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_r (représentés par leur tableau de Young) et de drapeaux $F_\bullet(E_{p_i})$ dans la fibre E_{p_i} de type λ_i . Rappelons que l'espace des fonctions thêta généralisées paraboliques, c'est-à-dire les sections globales d'un fibré en droites \mathcal{L}^{par} sur l'espace de modules $\mathcal{M}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda})$ paramétrant les fibrés paraboliques, peut être identifié [25] à l'espace des blocs conformes [32] associé à la donnée $(X, \underline{p}, \underline{\lambda})$, ce qui permet de donner leur dimension.

Un travail récent de R. Oudompheng [23] établit la dualité étrange pour fibrés paraboliques en suivant la démonstration de A. Marian et D. Oprea. Si l'on note λ^T le tableau de Young conjugué de λ , on observe que, pour $(E, F) \in \mathcal{M}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda}) \times \mathcal{U}_X^{par}(k, \underline{p}, \underline{\lambda}^T)$, la condition $h^0(X, \text{Hom}^{par}(E, F)) \neq 0$, où $\text{Hom}^{par}(E, F)$ désigne le faisceau des homomorphismes compatibles avec les structures paraboliques sur E et F , détermine un diviseur dans le produit et par conséquent une application linéaire

$$SD^{par} : H^0(\mathcal{U}_X^{par}(k, \underline{p}, \underline{\lambda}^T), \mathcal{L}^{par})^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X^{par}(r, \underline{p}, \underline{\lambda}), \mathcal{L}^{par}),$$

qui est un isomorphisme [23].

Remarquons que la proposition 3.2 a un analogue parabolique, qui identifie le nombre de Verlinde parabolique à un nombre d'intersection dans $\text{Quot}_d(\mathcal{O}_X^N, k)$ associé aux variétés de Schubert de type λ_i dans $\text{Gr}(k, N)$.

5.2. G -fibrés principaux

La formule de Verlinde est démontrée en fait pour les espaces de modules de G -fibrés principaux sur une courbe X — voir par exemple [30]. On suppose que G est un groupe de Lie complexe, simple et simplement connexe. Afin d'avoir des théorèmes d'uniformisation des G -fibrés principaux et une description commode des fibrés en droites sur les espaces de modules, on travaille sur le *champ* de modules $\mathcal{M}_X(G)$ paramétrant les G -fibrés principaux sur X . On sait que le groupe de Picard $\text{Pic}(\mathcal{M}_X(G))$ est \mathbb{Z} et on note \mathcal{L}_G son générateur ample. La formule de Verlinde (par exemple [30] Théorème 4.2.2) donne alors la dimension

$$N_k(G) := \dim H^0(\mathcal{M}_X(G), \mathcal{L}_G^k).$$

5.2.1. *Groupes classiques.* — Motivés par les relations (4) et (5), W.M. Oxbury et S.M.J. Wilson [24] étudient les symétries rang-niveau de la formule de Verlinde pour les groupes classiques. Pour les groupes symplectiques, ils montrent que $N_k(\text{Sp}(2r)) = N_r(\text{Sp}(2k))$. Par ailleurs, en utilisant une construction pfaffienne du diviseur thêta généralisé pour fibrés orthogonaux [4], on peut construire une application linéaire

$$SD^{Sp} : H^0(\mathcal{M}_X(\text{Sp}(2r)), \mathcal{L}^k)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(\text{Sp}(2k)), \mathcal{L}^r).$$

Les travaux récents de T. Abe [2], [1] et P. Belkale [7] montrent que SD^{Sp} est un isomorphisme.

Pour les groupes $\text{Spin}(2m)$ et $\text{Spin}(2m+1)$, certaines symétries rang-niveau sont formulées dans [24], mais une construction générale d'une dualité SD^{Spin} fait (à ce jour) défaut. Mentionnons une première approche [26], qui établit un isomorphisme

$$H^0(\mathcal{M}_X(\text{Spin}(2m+1)), \mathcal{L}^2)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(\text{Pin}(2)), \mathcal{L}^{2m+1})_+,$$

où l'espace de modules $\mathcal{M}_X(\text{Pin}(2))$ peut être identifié à la réunion de toutes les variétés de Prym des revêtements étales doubles de X .

5.2.2. *Groupes exceptionnels.* — Dans le cadre des groupes exceptionnels, il est possible de construire certaines applications de type « dualité étrange » en imitant la construction de l'application SD pour les groupes $\text{SL}(k)$ et $\text{GL}(r)$. On part de l'observation suivante [31] : pour le groupe exceptionnel E_8 , la formule de Verlinde donne $\dim H^0(\mathcal{M}_X(E_8), \mathcal{L}_{E_8}) = 1$, ce qui entraîne l'existence d'un diviseur thêta $\Theta_{E_8} \subset \mathcal{M}_X(E_8)$ distingué, qu'on peut considérer comme un analogue du diviseur

thêta généralisé $\Theta \subset \mathcal{U}_X^*(r)$. D'autre part, le groupe E_8 possède plusieurs couples (A, B) de sous-groupes commutants, par exemple :

$$(\mathrm{SL}(2), E_7), \quad (\mathrm{SL}(3), E_6), \quad (G_2, F_4), \quad (\mathrm{Spin}(8), \mathrm{Spin}(8)).$$

Il existe alors un morphisme entre champs de modules

$$t : \mathcal{M}_X(A) \times \mathcal{M}_X(B) \longrightarrow \mathcal{M}_X(E_8),$$

et, si (A, B) est l'un des quatre couples précédents, le diviseur $t^*(\Theta_{E_8})$ détermine une application linéaire

$$(8) \quad SD : H^0(\mathcal{M}_X(A), \mathcal{L}_A)^\vee \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_X(B), \mathcal{L}_B)$$

entre espaces vectoriels de même dimension [11]. On conjecture que SD est un isomorphisme.

Remarque 5.1. — Il est intéressant de constater que les quatre cas de sous-groupes (A, B) donnent des *plongements conformes* — voir par exemple [28] — entre leurs algèbres de Lie associées $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \subset \mathfrak{e}_8$. D'autre part, en s'appuyant sur l'article [22], P. Belkale a montré ([8] Proposition 5.8) que pour tout plongement conforme $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ le morphisme induit par ce plongement entre les fibrés vectoriels des fonctions thêta généralisées associées aux groupes de Lie H et G et munies des connexions WZW est horizontal, ce qui prouve en particulier que le rang de l'application SD (8) ne dépend que du genre de la courbe X . On peut donc espérer que tout plongement conforme, dont la classification complète est faite dans [28], Tables I et II, donne lieu à des tenseurs intéressants entre espaces de fonctions thêta généralisées.

RÉFÉRENCES

- [1] T. ABE – Strange duality for parabolic symplectic bundles on a pointed projective line, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), art. ID rnn121.
- [2] ———, Degeneration of the strange duality map for symplectic bundles, à paraître dans *J. reine angew. Math.*
- [3] A. BEAUVILLE – Vector bundles on curves and generalized theta functions : recent results and open problems, in *Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 28, Cambridge Univ. Press, 1995, p. 17–33.
- [4] ———, Orthogonal bundles on curves and theta functions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), p. 1405–1418.
- [5] A. BEAUVILLE, M. S. NARASIMHAN & S. RAMANAN – Spectral curves and the generalised theta divisor, *J. reine angew. Math.* **398** (1989), p. 169–179.

- [6] P. BELKALE – The strange duality conjecture for generic curves, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), p. 235–258.
- [7] ———, Orthogonal bundles, theta characteristics and the symplectic strange duality, prépublication arXiv:0808.0863.
- [8] ———, Strange duality and the Hitchin/WZW connection, prépublication arXiv:0705.0717.
- [9] A. BERTRAM – Towards a Schubert calculus for maps from a Riemann surface to a Grassmannian, *Internat. J. Math.* **5** (1994), p. 811–825.
- [10] A. BERTRAM, G. DASKALOPOULOS & R. WENTWORTH – Gromov invariants for holomorphic maps from Riemann surfaces to Grassmannians, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), p. 529–571.
- [11] A. BOYSAL & C. PAULY – Strange duality for verlinde spaces of exceptional groups at level 1, prépublication, 2008.
- [12] R. DONAGI & L. W. TU – Theta functions for $SL(n)$ versus $GL(n)$, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), p. 345–357.
- [13] J.-M. DREZET & M. S. NARASIMHAN – Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.* **97** (1989), p. 53–94.
- [14] N. J. HITCHIN – Flat connections and geometric quantization, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990), p. 347–380.
- [15] S. L. KLEIMAN – The transversality of a general translate, *Compositio Math.* **28** (1974), p. 287–297.
- [16] J. LE POTIER – *Lectures on vector bundles*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 54, Cambridge University Press, 1997.
- [17] A. MARIAN & D. OPREA – The level-rank duality for non-abelian theta functions, *Invent. Math.* **168** (2007), p. 225–247.
- [18] ———, Virtual intersections on the Quot scheme and Vafa-Intriligator formulas, *Duke Math. J.* **136** (2007), p. 81–113.
- [19] ———, A tour of theta dualities on moduli spaces of sheaves, prépublication arXiv:0710.2908.
- [20] D. MUMFORD – Prym varieties. I, in *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, Academic Press, 1974, p. 325–350.
- [21] S. G. NACULICH & H. J. SCHNITZER – Duality relations between $SU(N)_k$ and $SU(k)_N$ WZW models and their braid matrices, *Phys. Lett. B* **244** (1990), p. 235–240.
- [22] T. NAKANISHI & A. TSUCHIYA – Level-rank duality of WZW models in conformal field theory, *Comm. Math. Phys.* **144** (1992), p. 351–372.

- [23] R. OUDOMPHENG – Rank-level duality for conformal blocks of GL_n and SL_n , prépublication arXiv:0805.1738.
- [24] W. M. OXBURY & S. M. J. WILSON – Reciprocity laws in the Verlinde formulae for the classical groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), p. 2689–2710.
- [25] C. PAULY – Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes, *Duke Math. J.* **84** (1996), p. 217–235.
- [26] C. PAULY & S. RAMANAN – A duality for spin Verlinde spaces and Prym theta functions, *J. London Math. Soc.* **63** (2001), p. 513–532.
- [27] M. POPA – Generalized theta linear series on moduli spaces of vector bundles on curves, prépublication arXiv:0712.3192.
- [28] A. N. SCHELLEKENS & N. P. WARNER – Conformal subalgebras of Kac-Moody algebras, *Phys. Rev. D* **34** (1986), p. 3092–3096.
- [29] B. SIEBERT & G. TIAN – On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator, *Asian J. Math.* **1** (1997), p. 679–695.
- [30] C. SORGER – La formule de Verlinde, *Astérisque* **237** (1996), p. 87–114, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, exposé n° 794.
- [31] ———, On moduli of G -bundles of a curve for exceptional G , *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), p. 127–133.
- [32] A. TSUCHIYA, K. UENO & Y. YAMADA – Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, in *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 19, Academic Press, 1989, p. 459–566.
- [33] E. WITTEN – The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian, in *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, p. 357–422.

Christian PAULY

Université de Montpellier II

Département de mathématiques

Case Courrier 051

Place Eugène Bataillon

F-34095 Montpellier Cedex 5

E-mail : pauly@math.univ-montp2.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(995) *Amalgames de Hrushovski*

Bruno POIZAT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

AMALGAMES DE HRUSHOVSKI

par **Bruno POIZAT**

En juillet 1988, Ehud Hrushovski annonçait lors d'un congrès de logique tenu à Durham qu'il avait obtenu, grâce à une construction par amalgamation, un nouvel objet de dimension un dont la géométrie n'était ni celle d'un ensemble sans structure (dimension combinatoire = cardinalité), ni celle d'un espace vectoriel (dimension combinatoire = dimension linéaire), ni celle d'un corps (dimension combinatoire = degré de transcendance) ; cela répondait négativement à une conjecture de Boris Zil'ber (voir [3]).

Les constructions de ce type ont produit depuis de nombreux exemples et contre-exemples en théorie des modèles, dont les plus sophistiqués sont souvent dus à Hrushovski lui-même. Un catalogue de celles qui ont été publiées au vingtième siècle est donné par [7] ; pour un grand nombre de celles qui sont parues ensuite, on consultera [1] et sa bibliographie.

Comme dans ma jeunesse j'étais un auditeur fidèle de Dieudonné, et que je ne voudrais pas que son fantôme vienne me hanter, j'éviterai d'introduire de la logique dans son séminaire favori (si vous ne partagez pas cette crainte, vous pouvez consulter [6]). Je me contenterai de présenter ici deux objets, à forte saveur géométrique, dont l'intérêt et la construction par amalgame de Hrushovski devraient, selon moi, être facilement compris par les mathématiciens significatifs. Ce sont : 1. la « courbe » limite des courbes génériques ; 2. la fausse exponentielle de Zil'ber.

1. LA LIMITE DES COURBES GÉNÉRIQUES

On fixe une caractéristique.

Soient K un corps algébriquement clos, de degré de transcendance infini dénombrable, et $N = (d + 1)(d + 2)/2$ de ses éléments a_{ij} , $0 \leq i + j \leq d$, algébriquement indépendants.

La courbe plane C_d définie par l'équation $\sum a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j = 0$ est dite courbe générique de degré d .

Toutes ces courbes génériques C_d se correspondent par automorphisme de K (elles ne sont pas géométriquement isomorphes si $d > 2$).

On se demande vers quoi tend C_d lorsque le degré d tend vers l'infini.

Comme C_d n'est définie qu'à isomorphie près, il ne peut s'agir d'une limite ponctuelle.

Il s'agit d'une limite logique (aïe!), c'est-à-dire de l'existence d'une partie C de $K \times K$ telle que chaque propriété possédée par (K, C) le soit par (K, C_d) pour d assez grand.

La question n'a de sens que si on limite sévèrement, mais cependant significativement, la notion de « propriété » : en effet, la notion de limite dans une topologie discrète n'a pas plus d'intérêt que celle de limite dans une topologie triviale. Nous nous contenterons des propriétés exprimables dans la logique finitiste du premier ordre, que nous éviterons de définir, quitte à rendre l'exposé parfois acrobatique.

Par compacité de cette logique, la suite (K, C_d) est convergente ssi chaque propriété y est satisfaite pour d assez grand, ou bien sa négation l'est.

Cette remarque n'est pas très utile, car il est plus facile, au moins pour un étudiant de première année de licence, de montrer que la suite $1/n$ tend vers 0, que de montrer que la suite $1/n$ est de Cauchy.

Dans le cas présent, un raisonnement direct sur la suite des ensembles P_d des propriétés des courbes C_d semble inabordable, tandis qu'il est plus facile de montrer la convergence d'une suite si on a une idée de ce qu'est sa limite.

Une stratégie raisonnable est donc la suivante :

- construire une candidate C à être cette limite, grâce à un amalgame de Hrushovski (pourquoi cette candidate plutôt qu'une autre ? C'est là qu'est intervenu le génie de Hrushovski !);
- dresser la liste des propriétés de (K, C) , ce qui revient à choisir entre chaque propriété et sa négation;
- vérifier que chaque propriété de (K, C) est satisfaite par (K, C_d) , pour d assez grand.

Comme la partie logique de ce programme nous entraînerait trop loin, nous nous contenterons tout d'abord de vérifier en deux lemmes très faciles une propriété possédée par la courbe-limite : *Si n points distincts $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ sont sur la courbe C , le degré de transcendance de leurs $2n$ coordonnées $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ vaut au moins n .*

LEMME 1.1. — Si $d \geq n - 1$, les coefficients des courbes planes de degré $\leq d$ qui passent par n points distincts du plan forment un espace vectoriel de dimension $N - n$.

Démonstration. — Les équations linéaires exprimant que la courbe passe par chacun des points sont linéairement indépendantes ; en effet la courbe de degré $\leq d$ d'équation $\prod_{i < n, a_i \neq a_n} (x - a_i) \times \prod_{j < n, a_j = a_n} (y - b_j) = 0$ passe par $(a_1, b_1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1})$, et pas par le dernier point (a_n, b_n) . \square

COROLLAIRE 1.2. — Si $d \geq n - 1$, et si une courbe générique de degré d passe par n points $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ du plan distincts, le degré de transcendance de leurs coordonnées vaut au moins n .

Démonstration. — Les coefficients de la courbe ont un degré de transcendance N sur \emptyset ; leur degré de transcendance sur $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ est au plus $N - n$; il faut donc que le degré de transcendance de $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ soit au moins n . \square

Et ensuite de donner quelques détails sur la construction de la limite.

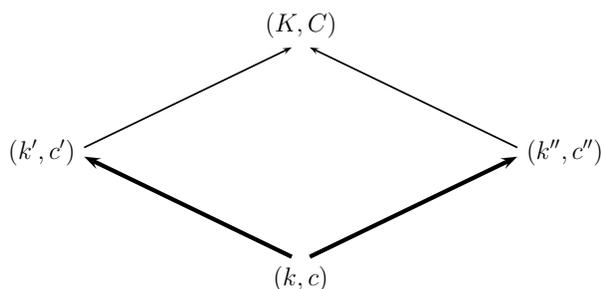
Construction de la limite

Nous amalgamons des structures (k, c) , où k est un corps algébriquement clos de degré de transcendance finie, et c une partie finie de $k \times k$; la prédimension de (k, c) est :

$$\delta(k, c) = d^\circ \text{trans}(k) - \text{nombre de points de } c$$

et, pour être en harmonie avec la propriété ci-dessus, nous demandons que tout sous-corps de k soit de prédimension positive ou nulle ; nous notons U_0 la classe formée des structures (k, c) ayant cette propriété de positivité.

On dit que (k, c) est plongé dans (k', c') si k est un sous-corps de k' et si les points de c sont les points de c' à coordonnées dans k ; amalgamer deux plongements dessinés en gras dans la figure ci-dessous, c'est trouver deux plongements dessinés en maigre de manière à ce que le diagramme commute :



Mais on ne peut pas amalgamer tous les plongements dans la classe U_0 (en restant dans cette classe!).

En effet, prenons pour exemple (k, c) un corps k de base de transcendance $\{a\}$, avec $c = \emptyset$; $\delta(k, c) = 1$.

Formons (k', c') en ajoutant x transcendant sur k tel que $(x, x+a)$ et $(x+a, x)$ soient sur la courbe c' ; $\delta(k', c') = 0$. De même formons (k'', c'') en mettant $(y, a.y)$ et $(a.y, y)$ sur la courbe c'' ; $\delta(k'', c'') = 0$.

(k', c') et (k'', c'') sont bien dans U_0 , mais on ne peut les mettre ensemble sans rendre la prédimension négative!

Si (k, c) est une restriction de (k', c') ($\in U_0$), sa dimension dans (k', c') est : $d_{(k', c')}(k, c) = \text{Min } \delta(\kappa, \gamma)$ où $(k, c) \subseteq (\kappa, \gamma) \subseteq (k', c')$. Un plongement est *autosuffisant* s'il conserve la dimension ($d_{(k', c')}(k, c) = \delta(k, c)$).

On voit facilement que les plongements autosuffisants, eux, sont amalgamables, c'est-à-dire que, si les flèches grasses sont autosuffisantes, on peut trouver (K, C) dans U_0 avec deux flèches maigres autosuffisantes qui font commuter le diagramme : prendre k' et k'' linéairement disjoints au-dessus de k , et $C = c' \cup c''$.

On fait alors une suite d'amalgames systématiques $(k_0, c_0) \subset (k_1, c_1) \dots (k_n, c_n) \subset \dots$, sans jamais oublier personne : si (k', c') est une extension autosuffisante d'une restriction idem (k, c) de (k_n, c_n) , il faudra penser un jour à amalgamer (k_{n+m}, c_{n+m}) et une copie de (k', c') au-dessus de (k, c) .

La réunion des (k_n, c_n) est un corps K de degré de transcendance dénombrable, avec une partie infinie C de $K \times K$, qui est *homogène* et *universel* pour U_0 .

Homogène : tout isomorphisme entre deux restrictions autosuffisantes (k, c) et (k', c') de (K, C) , de degré de transcendance fini, s'étend en un automorphisme de (K, C) .

Universel : tout élément de U_0 de degré de transcendance fini, ou même dénombrable, se plonge de manière autosuffisante dans (K, C) .

Comment voit-on que c'est bien la limite ?

Avec un peu d'expérience en logique, on arrive à axiomatiser les propriétés de (K, C) en approximant sa construction : il faut dire que toute variété algébrique $V(\underline{x}, \underline{y}, \underline{a})$ de $K^{2 \cdot n}$ contient un n -uplet $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ de points distincts sur la courbe C , sauf si cela fait obstacle à la positivité de la prédimension. Ensuite on triture un peu les axiomes, grâce au Théorème des Mariages, pour leur donner une forme plus agréable facilitant la suite.

Pour voir que chaque axiome de la liste est satisfait par T_d pour les grandes valeurs de d , on utilise une astuce reposant sur le Hauptidealsatz, permettant de calculer les

dimensions des intersections de variétés projectives (remarquons que les coefficients des courbes interviennent à une constante près). Tout ça est fait dans [2].

Transition entre 1 et 2 : la limite des polynômes génériques

Pascal Koiran (voir [5]) a étendu le résultat aux polynômes génériques $P_d(x) = a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \dots + a_1 \cdot x$, et construit par amalgame leur fonction limite $P(x)$.

Cette limite satisfait à la condition schanuelienne suivante : si b_1, \dots, b_n sont distincts et $\neq 0$, le degré de transcendance de $\{b_1, \dots, b_n, P(b_1), \dots, P(b_n)\}$ vaut au moins n .

C'est ainsi que, si le corps de base est algébriquement clos, aucun énoncé du premier ordre ne permet de distinguer les polynômes de degré pair des polynômes de degré impair, contrairement à ce qu'il se passe pour un corps réel-clos (où $P(x)$ est de degré pair ssi $P(x) \cdot P(-x)$ est positif pour les grandes valeurs de x).

Mais il y a mieux : en caractéristique nulle, cette limite a une interprétation analytique, comme somme d'une série de Liouville, dont les coefficients sont des inverses d'entiers croissant rapidement ; [4], en s'inspirant de travaux de Wilkie, a vérifié que ces fonctions satisfont les axiomes-limites des polynômes génériques ; c'est une réponse partielle à la nouvelle vision analytique de Zil'ber, exprimée dans [9] !

Plus modestement, cela montre que, sur un corps algébriquement clos, le coefficient a_1 d'un polynôme $P(x)$ de degré non précisé ne peut être défini par une formule du premier ordre ; il en est de même de son polynôme dérivé, car $a_1 = P'(0)$. Cela contraste avec les corps réel-clos, où la définition des limites en $\delta - \varepsilon$ permet de dériver les polynômes sans les exprimer comme somme de monômes, c'est-à-dire sans connaître leur degré.

2. C'EST QUOI, L'EXPONENTIELLE COMPLEXE ?

C'est une fonction $e(x)$ de C dans C telle que :

- e est une surjection de C dans C^* ;
- $e(x + y) = e(x) \cdot e(y)$;
- $e(x) = 1$ ssi x est dans $2i\pi \cdot Z$;
- Conjecture de Schanuel : si x_1, \dots, x_n sont Q -linéairement indépendants, $d^\circ\text{trans}(\{x_1, \dots, x_n, e(x_1), \dots, e(x_n)\}) \geq n$; cette conjecture implique tous les résultats de transcendance classiques connus ou conjecturés, par exemple : e et π sont algébriquement indépendants, $d^\circ\text{trans}(1, 2i\pi; e, 1) = 2$.

La Conjecture de Schanuel étant un peu incertaine, on va construire, avec [10], un objet (C, f) satisfaisant toutes ces conditions.

Pour cela, on amalgame hrushovskienement des structures (k, φ) où k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, φ une fonction de k dans k^* telle que $\varphi(x + y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\varphi(x) = 1$ ssi x est dans $2i\pi \cdot Z$, où $2i\pi$ est un certain nombre transcendant.

Pour prédimension, on prend $\delta(x_1, \dots, x_n) = d^\circ \text{trans}[x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)] - \dim Q\text{lin}(x_1, \dots, x_n)$; sa positivité signifie que Schanuel est satisfait.

En soignant un peu l'amalgame d'extensions autosuffisantes, on peut obtenir un corps K continupotent, avec des propriétés d'homogénéité et d'universalité de (K, f) qui le rendent unique à isomorphie près.

Question de Zil'ber : est-ce que (C, e) et (K, f) satisfont les mêmes énoncés, ou même sont isomorphes ? Soit encore : est-ce que cette fausse exponentielle n'est pas la vraie ?

Elle repose sur la philosophie que les mathématiques ont cessé d'être créatives peu après 1900, leur activité postérieure se bornant à vérifier que toute construction naturelle ne peut que donner un objet déjà connu.

RÉFÉRENCES

- [1] A. BAUDISCH, M. HILS, A. MARTIN-PIZARRO & F. O. WAGNER – Die böse Farbe, *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), p. 415–443.
- [2] O. CHAPUIS, E. HRUSHOVSKI, P. KOIRAN & B. POIZAT – La limite des théories de courbes génériques, *J. Symbolic Logic* **67** (2002), p. 24–34.
- [3] J. B. GOODE – Hrushovski's geometries, in *Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory (Wendisch-Rietz, 1989)*, Seminarberichte, vol. 104, Humboldt Univ. Berlin, 1989, p. 106–117.
- [4] P. KOIRAN – The theory of Liouville functions, *J. Symbolic Logic* **68** (2003), p. 353–365.
- [5] ———, The limit theory of generic polynomials, in *Logic Colloquium '01*, Lect. Notes Log., vol. 20, Assoc. Symbol. Logic, 2005, p. 242–254.
- [6] B. POIZAT – Cours de théorie des modèles, Nūr al-Mantiq wal-Ma'rifah, Aléas, 1985.
- [7] ———, Amalgames de Hrushovski : une tentative de classification, in *Tits buildings and the model theory of groups (Würzburg, 2000)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 291, Cambridge Univ. Press, 2002, p. 195–214.

- [8] ———, *Manuel de soureth. Initiation à l'araméen d'aujourd'hui, parlé et écrit*, Geuthner, 2008.
- [9] B. ZILBER – Analytic and pseudo-analytic structures, in *Logic Colloquium 2000*, Lect. Notes Log., vol. 19, Assoc. Symbol. Logic, 2005, p. 392–408.
- [10] ———, Pseudo-exponentiation on algebraically closed fields of characteristic zero, *Ann. Pure Appl. Logic* **132** (2005), p. 67–95.

Bruno POIZAT

Institut Camille Jordan

Université Claude Bernard

43 boulevard du 11 novembre 1918

F-69622 Villeurbanne Cedex

E-mail : poizat@math.univ-lyon1.fr

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2007/2008

EXPOSÉS 982-996

(996) *Échanges d'intervalles et surfaces de translation*

Jean-Christophe YOCCOZ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCHANGES D'INTERVALLES ET SURFACES DE TRANSLATION

par Jean-Christophe YOCCOZ

1. INTRODUCTION

Soit M une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 1$ et ω une 1-forme holomorphe sur M , non identiquement nulle. Notons Σ l'ensemble des zéros de ω . Les primitives locales de ω constituent un atlas sur $M - \Sigma$ dont les changements de carte sont localement des translations. Inversement, un tel atlas munit $M - \Sigma$ d'une structure complexe (qui se prolonge à M) et d'une 1-forme holomorphe pour cette structure. On appelle *surface de translation* cette structure géométrique. Elle définit naturellement sur $M - \Sigma$ une forme d'aire et un champ de vecteurs vertical (s'écrivant $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les cartes).

Pour analyser la dynamique du flot vertical, on peut considérer l'application de premier retour sur un segment horizontal. L'application ainsi définie est un *échange d'intervalles* : une transformation biunivoque qui est localement une translation à l'exception d'un nombre fini de discontinuités.

Le cas du genre 1 est classique et bien connu : le champ de vecteurs est un champ constant, en général irrationnel : la transformation de premier retour à une ou deux discontinuités. Les échanges d'intervalles ayant une seule discontinuité sont simplement des rotations sur le cercle après identification des extrémités du segment.

Voici presque 30 ans, Rauzy [51] et Veech [52] ont défini pour les échanges d'intervalles un algorithme qui généralise l'algorithme de fraction continue si important pour étudier les propriétés diophantiennes des nombres irrationnels. La définition et quelques propriétés de cet outil fondamental sont rappelées au § 2. Veech s'en est servi pour démontrer de nombreuses propriétés profondes des échanges d'intervalles : cf. [53], [54], [55]. Une variante très utile de l'algorithme a été mise au point par Zorich [59].

Une des propriétés très surprenantes de presque tout échange d'intervalles (quand la combinatoire n'est pas celle d'une rotation) est le mélange faible : d'abord démontré par Katok-Stepin pour 3 intervalles (ou plus généralement dans le cas de genre 1), elle a ensuite été obtenue par Veech sous une hypothèse un peu moins restrictive sur la combinatoire, avant d'être prouvée en toute généralité par Avila-Forni. Ce résultat est présenté au § 4.

Auparavant, nous rappelons au § 3 quelques propriétés des surfaces de translation, leurs relations avec les échanges d'intervalles, et introduisons les espaces de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ pour les surfaces de translation d'aire 1. Cet espace de modules est naturellement muni d'une action de $SL(2, \mathbb{R})$; on appelle flot de Teichmüller la restriction de cette action au sous-groupe diagonal. La relation entre flot de Teichmüller et algorithme de Rauzy-Veech est la même qu'entre flot géodésique sur la surface modulaire et algorithme usuel de fraction continue (le cas de genre un) : l'un s'obtient comme suspension de l'extension naturelle de l'autre.

Pour définir les espaces de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$, on a fixé les multiplicités, $\kappa_1 - 1, \dots, \kappa_s - 1$ des zéros $A_1 \dots A_s$ de la 1-forme ω . Les espaces de modules ainsi définis ne sont pas toujours connexes, mais ils ont au plus 3 composantes connexes. Kontsevich et Zorich ont complètement classifié ces composantes au moyen de deux notions : hyperellipticité et parité du spin. Leur travail est présenté succinctement au § 6.

Au-dessus du flot de Teichmüller sur chaque composante de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ est défini un cocycle, dit de Kontsevich-Zorich, dont les propriétés gouvernent dans une large mesure la dynamique de presque tout échange d'intervalles. Comme le flot de Teichmüller est ergodique sur chaque composante d'après un résultat fondamental de Masur et Veech, on peut en calculer les exposants de Lyapunov. La non-nullité de ceux-ci avait été démontrée par Forni et fait l'objet d'un séminaire Bourbaki antérieur [37]. Confirmant une conjecture de Zorich, Avila et Viana ont démontré la simplicité des exposants de Lyapunov pour le cocycle de Kontsevich-Zorich. Leur résultat est présenté au § 5.

Parce que le flot de Teichmüller s'intègre dans une action de $SL(2, \mathbb{R})$, son ergodicité implique qu'il est mélangeant. Avila, Gouezel et moi-même avons montré qu'il est même exponentiellement mélangeant. Cela implique une propriété de trou spectral et est discuté au § 7.

Les échanges d'intervalles, les surfaces de translation et leurs espaces de modules ont fait l'objet de très nombreuses recherches dans la décennie écoulée et les résultats présentés ci-après ne représentent qu'une partie de cette activité. J'ai choisi de présenter des résultats se rattachant plutôt à la théorie des systèmes dynamiques. Parmi les nombreux résultats importants non abordés par cet exposé, citons

- la détermination par Eskin et Okunkov du volume des espaces de modules [12] ;

- l'estimation asymptotique du nombre de connexion de selles par Eskin-Masur [10] et Eskin-Masur-Zorich [11] ;
- les travaux de Hubert, Lanneau, Lelièvre, Möller, Schmidt sur les groupes de Veech, stabilisateurs des points de l'espace des modules pour l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ [19], [20, 21] [22, 23], [24] [25] à [29] ;
- la détermination indépendamment par McMullen [42] à [45] et Calta [8] des ensembles fermés transitifs pour l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur les espaces de modules en genre 2, et en particulier la classification des orbites fermées de cette action (surfaces de Veech) ;
- ...

Le lecteur pourra consulter avec profit le très complet exposé de Zorich [62] pour une introduction à ces questions.

2. L'ALGORITHME DE RAUZY-VEECH-ZORICH POUR LES ÉCHANGES D'INTERVALLES

2.1. Échanges d'intervalles

Un échange d'intervalles est une transformation biunivoque d'un intervalle borné dans lui-même qui est localement une translation à l'exception d'un nombre fini de singularités.

Dans l'optique de l'algorithme décrit ci-dessous, il est préférable de nommer les intervalles de continuité. On se donne donc un alphabet fini \mathcal{A} , avec $d := \#\mathcal{A} \geq 2$, et deux bijections π_t, π_b de \mathcal{A} sur $\{1, \dots, d\}$ qui indiquent l'ordre dans lequel sont rangés les sous-intervalles dans le domaine et dans l'image de la transformation. On supposera toujours que cette donnée combinatoire $\pi = (\pi_t, \pi_b)$ est irréductible :

$$\pi_t^{-1}(\{1 \dots k\}) \neq \pi_b^{-1}(\{1, \dots, k\}), \quad \forall 1 \leq k < d.$$

Sinon, la transformation considérée est une juxtaposition de deux transformations plus simples. Etant donné un vecteur de longueurs $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, on pose $I = (0, \sum \lambda_\alpha)$ et

$$I_\alpha^\varepsilon = \left(\sum_{\pi_\varepsilon \beta < \pi_\varepsilon \alpha} \lambda_\beta, \sum_{\pi_\varepsilon \beta \leq \pi_\varepsilon \alpha} \lambda_\beta \right)$$

pour $\varepsilon = t, b$ et $\alpha \in \mathcal{A}$.

On définit une matrice antisymétrique $\Omega = \Omega(\pi)$ par

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_t \alpha < \pi_t \beta, \pi_b \alpha > \pi_b \beta, \\ -1 & \text{si } \pi_t \alpha > \pi_t \beta, \pi_b \alpha < \pi_b \beta, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis l'échange d'intervalles $T = T_{\pi,\lambda}$ par

$$T(x) = x + \sum_{\beta} \Omega_{\alpha\beta} \lambda_{\beta}, \quad x \in I_{\alpha}^t$$

de sorte que $T(I_{\alpha}^t) = I_{\alpha}^b$.

Les singularités de T (resp. de T^{-1}) sont les $d - 1$ points de $I - \cup I_{\alpha}^t$ (resp. de $I - \cup I_{\alpha}^b$) et sont notées $u_1^t < \dots < u_{d-1}^t$ (resp. $u_1^b < \dots < u_{d-1}^b$). Une *connexion* est une relation $T^m(u_i^b) = u_j^t$ ($m \geq 0, 1 \leq i, j < d$) qui correspond à une orbite de T joignant deux singularités. Keane a montré [32] qu'un échange d'intervalles sans connexion est minimal, et qu'un échange d'intervalles dont les coordonnées du vecteur de longueurs sont rationnellement indépendantes est sans connexion.

Pour $d = 2$, un échange d'intervalles est sans connexion si et seulement s'il correspond à une rotation irrationnelle.

2.2. Le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech

Soit $T = T_{\pi,\lambda}$ un échange d'intervalles. Notons α_t, α_b les lettres telles que $\pi_t(\alpha_t) = \pi_b(\alpha_b) = d$.

Supposons T sans connexion. On a donc en particulier $u_{d-1}^t \neq u_{d-1}^b$. On pose $\hat{I} = (0, \max(u_{d-1}^t, u_{d-1}^b))$ et on note \hat{T} l'application de premier retour dans \hat{I} .

L'application \hat{T} est un échange d'intervalles sans connexion $T_{\hat{\pi},\hat{\lambda}}$ (sur le même alphabet \mathcal{A}). Si $u_{d-1}^t > u_{d-1}^b$, on a

$$\hat{\pi} = (\hat{\pi}_t, \hat{\pi}_b) =: R_t(\pi)$$

avec $\hat{\pi}_t = \pi_t$ et

$$\hat{\pi}_b \alpha = \begin{cases} \pi_b \alpha & \text{si } \pi_b \alpha \leq \pi_b \alpha_t, \\ \pi_b \alpha + 1 & \text{si } \pi_b \alpha_t < \pi_b \alpha < d, \\ \pi_b \alpha_t + 1 & \text{si } \pi_b \alpha = d, \end{cases}$$

ainsi que

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{\alpha} = \lambda_{\alpha} & \alpha \neq \alpha_t \\ \hat{\lambda}_{\alpha_t} = \lambda_{\alpha_t} - \lambda_{\alpha_b}. \end{cases}$$

Les formules pour $u_{d-1}^b > u_{d-1}^t$ sont analogues, en échangeant b et t .

2.3. Diagrammes de Rauzy

Une *classe de Rauzy* sur un alphabet \mathcal{A} est un ensemble non vide de données combinatoires irréductibles qui est stable par R_t et R_b et minimal (pour l'inclusion) parmi les ensembles ayant cette propriété. Le *diagramme de Rauzy* associé est le graphe dont les sommets sont les éléments de la classe et les flèches (de type top ou bottom) joignent un sommet π à $R_t \pi$ et $R_b \pi$. Comme R_t et R_b sont biunivoques, chaque sommet est aussi extrémité d'une flèche de chaque type. Le *gagnant* d'une

flèche de type top (resp. bottom) issue de π est la lettre α_t telle que $\pi_t \alpha_t = d$ (resp. la lettre α_b telle que $\pi_b \alpha_b = d$), le *perdant* est la lettre α_b (resp. α_t). À une flèche γ de type top (resp. bottom) issue d'un sommet π est associée la matrice $B_\gamma \in SL(\mathbb{Z}^{\mathcal{A}})$ définie par

$$B_\gamma = 1 + E_{\alpha_b \alpha_t}$$

(resp. $B_\gamma = 1 + E_{\alpha_t \alpha_b}$), où $E_{\alpha\beta}$ désigne la matrice élémentaire dont le seul coefficient non nul, égal à 1, se trouve en position $\alpha\beta$. À un chemin $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_l$ dans le diagramme de Rauzy est associé le produit $B_\gamma = B_{\gamma_l} \dots B_{\gamma_1}$.

2.4. Les algorithmes de Rauzy-Veech et Zorich

Soit $T = T^{(0)} = T_{\pi^{(0)}, \lambda^{(0)}}$ un échange d'intervalles sans connexion sur un intervalle $I = I^{(0)}$. Comme l'échange d'intervalles $\widehat{T} = T^{(1)}$ sur $\widehat{I} = I^{(1)}$ obtenu par le pas élémentaire décrit en 2.2. est sans connexion, on peut itérer le processus et construire une suite d'échanges d'intervalles $T^{(n)}$ opérant sur une suite décroissante d'intervalles $I^{(n)}$. On a $\bigcap_{n \geq 0} I^{(n)} = \phi$. On note $T^{(n)} = T_{\pi^{(n)}, \lambda^{(n)}}$, et $\gamma(n, n+1)$ la flèche de $\pi^{(n)}$ vers $\pi^{(n+1)}$ (de type top ou bottom suivant qu'on a appliqué R_t ou R_b). Pour $m < n$, on note $\gamma(m, n)$ le chemin composé des $\gamma(l, l+1)$, $m \leq l < n$. Les vecteurs de longueurs vérifient

$$\begin{aligned} \lambda^{(m)} &= {}^t B_{\gamma(m,n)} \lambda^{(n)}, \\ \Omega(\pi^{(n)}) \lambda^{(n)} &= B_{\gamma(m,n)} \Omega(\pi^{(m)}) \lambda^{(m)}. \end{aligned}$$

Pour chaque donnée combinatoire π , la matrice antisymétrique $\Omega(\pi)$ définit une forme symplectique sur l'image $H(\pi) := \text{Im} \Omega(\pi)$. La matrice $B_{\gamma(m,n)}$ définit alors un isomorphisme symplectique de $H(\pi^{(m)})$ sur $H(\pi^{(n)})$.

Suivant Zorich, il est souvent préférable d'accélérer l'algorithme ci-dessus, en regroupant en une seule étape les pas consécutifs qui correspondent à des flèches du même type. Lorsque $d = 2$, on retrouve ainsi l'algorithme d'Euclide, c'est-à-dire l'algorithme de fraction continue usuel.

2.5. Dynamique des algorithmes

Soit \mathcal{R} une classe de Rauzy sur un alphabet \mathcal{A} . Le pas élémentaire de l'algorithme de Rauzy-Veech :

$$(\pi, \lambda) \mapsto (\widehat{\pi}, \widehat{\lambda})$$

(cf. 2.2) induit une application de $\mathcal{R} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}})$ dans lui-même notée Q_{RV} . Cette application admet une unique mesure invariante absolument continue [53]; cette mesure est conservative et ergodique mais sa masse est infinie, ce qui ne permet pas de déployer tout l'arsenal de la théorie ergodique. C'est pourquoi il est souvent préférable de considérer l'application Q_Z (sur le même espace $\mathcal{R} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}})$), induite par la version

accélérée à la Zorich de l'algorithme. En effet, l'application Q_Z admet à nouveau une unique mesure invariante, absolument continue [59]; mais cette mesure (ergodique) est maintenant finie.

3. LES SURFACES DE TRANSLATION ET LEURS ESPACES DE MODULES

3.1. Surfaces de translation

Soit M une surface topologique orientable compacte de genre $g > 0$, $\Sigma = \{A_1, \dots, A_s\}$ une partie finie non vide de M et $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_s)$ un s -uplet de nombres entiers strictement positifs tel que $\Sigma(\kappa_i - 1) = 2g - 2$.

Une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) est un atlas maximal de cartes sur $M - \Sigma$ par des ouverts de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ qui vérifie

- (i) les changements de cartes sont localement des translations;
- (ii) pour chaque $1 \leq i \leq s$, il existe un voisinage V_i de A_i , un voisinage W_i de $0 \in \mathbb{C}$ et un revêtement ramifié d'ordre κ_i

$$p_i : (V_i, A_i) \rightarrow (W_i, 0)$$

tel que les restrictions injectives de p_i soient des cartes de l'atlas.

De façon équivalente, on se donne une structure complexe sur M , et une 1-forme holomorphe ω ne s'annulant pas sur $M - \Sigma$ et admettant en A_i un zéro d'ordre $\kappa_i - 1$; les cartes de l'atlas sont obtenues par intégration de ω . Une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) induit canoniquement

- une orientation sur M ;
- une forme d'aire, ne s'annulant pas sur $M - \Sigma$;
- un champ de vecteurs vertical $\frac{\partial}{\partial y}$ et un champ de vecteurs horizontal $\frac{\partial}{\partial x}$ sur $M - \Sigma$.

3.2. L'espace de Teichmüller

L'espace de Teichmüller $Q(M, \Sigma, \kappa)$ est l'ensemble des structures de surface de translation sur (M, Σ, κ) modulo l'action du groupe des homéomorphismes de M qui sont isotopes à l'identité rel. Σ . L'intégration de la 1-forme holomorphe (donc fermée) associée à une structure de surface de translation définit une *application de période* :

$$\Theta : Q(M, \Sigma, \kappa) \rightarrow \text{Hom}(H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{R}^2) = H^1(M, \Sigma, \mathbb{C}).$$

On peut munir $Q(M, \Sigma, \kappa)$ d'une topologie qui fait de Θ un homéomorphisme local. L'application Θ permet de transférer sur $Q(M, \Sigma, \kappa)$ une structure de variété complexe (de dimension $d := 2g + s - 1$) et une forme volume canonique.

Si ζ est une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) et $g \in GL(2, \mathbb{R})$, l'atlas obtenu en composant par g les cartes de ζ est encore une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) . On en déduit une action à gauche de $GL(2, \mathbb{R})$ sur $Q(M, \Sigma, \kappa)$.

3.3. L'espace des modules et le flot de Teichmüller

Le groupe modulaire $\text{Mod}(M, \Sigma)$ des classes d'isotopie rel. Σ agit sur l'espace de Teichmüller $Q(M, \Sigma, \kappa)$. Cette action préserve le volume canonique et commute avec l'action de $GL(2, \mathbb{R})$. L'espace quotient est l'espace des modules et est noté $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$. Comme l'action de $\text{Mod}(M, \Sigma)$ est proprement discontinue mais en général pas libre, $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ est un orbifold. L'espace des modules est muni d'une action de $GL(2, \mathbb{R})$.

Une surface de translation est automatiquement munie d'une forme d'aire, dont l'intégrale sur la surface définit une fonction sur $Q(M, \Sigma, \kappa)$ et $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$. On désignera par $Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ (resp. $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$) l'hypersurface correspondant à une aire totale égale à 1. Ces hypersurfaces héritent d'une mesure canonique, et sont invariantes par l'action de $SL(2, \mathbb{R})$, action qui préserve cette mesure canonique.

Le flot de Teichmüller est la restriction au sous-groupe diagonal $\text{diag}(e^t, e^{-t})$ de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. Le résultat suivant est fondamental :

THÉORÈME 3.1 (Masur [40], Veech [53]). — *La masse totale de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ est finie. Le flot de Teichmüller est ergodique, et même mélangeant, sur chaque composante connexe de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$.*

Les composantes connexes de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$ ont été déterminées par Kontsevich et Zorich (voir §6 ci-dessous) ; il y en a entre 1 et 3 suivant les valeurs de g, κ .

Pour $g = s = 1$, on retrouve des objets très classiques : l'espace de Teichmüller s'identifie à $GL(2, \mathbb{R})$, l'espace des modules à $GL(2, \mathbb{R})/GL(2, \mathbb{Z})$, l'espace des modules normalisé à $SL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$ et le flot de Teichmüller au flot géodésique sur la surface modulaire.

3.4. Les surfaces de translation comme suspensions d'échanges d'intervalles

Soit ζ une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) . Soit S un segment horizontal. L'application de premier retour sur S du flot engendré par le champ de vecteurs vertical $\frac{\partial}{\partial y}$ est un échange d'intervalles ; cependant, si S ne rencontre pas toutes les orbites du flot, cet échange d'intervalles ne représente pas toute la dynamique du flot. Par ailleurs, comme le montre déjà l'exemple d'un flot irrationnel sur un tore, un choix arbitraire de S peut créer un échange d'intervalles inutilement compliqué. Ceci conduit à la définition suivante : un segment horizontal S est *bon* si

- (i) son extrémité gauche est $A_1 \in \Sigma$;
- (ii) l'intérieur de S rencontre toute connexion verticale (un segment vertical dont les deux extrémités, éventuellement confondues, appartiennent à Σ) ;
- (iii) son extrémité droite soit est un point de Σ , soit est reliée à un point de Σ par un segment vertical qui ne rencontre pas l'intérieur de S .

Lorsque la surface de translation ne possède pas de connexion verticale, ou ne possède pas de connexion horizontale, il existe toujours de bons segments horizontaux.

Comment reconstruire une surface de translation à partir de l'application de retour du flot vertical sur un bon segment horizontal ?

Soit $T = T_{\pi,\lambda}$ un échange d'intervalles ; on se donne aussi un *vecteur de suspension* $\tau = (\tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifiant

$$(1) \quad v_k^t := \sum_{\pi_t \alpha \leq k} \tau_\alpha > 0, \quad v_k^b := \sum_{\pi_b \alpha \leq k} \tau_\alpha < 0, \quad 1 \leq k < d.$$

Dans les cas favorables, les deux lignes polygonales joignant dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ le point 0 au point $\sum_\alpha \lambda_\alpha + i \sum_\alpha \tau_\alpha$ via les points $u_k^t + iv_k^t, 1 \leq k < d$ (resp. $u_k^b + iv_k^b, 1 \leq k < d$) délimitent un polygone et on obtient une surface de translation en identifiant les côtés parallèles de ce polygone. Une construction dite de « zippered rectangles » due à Veech permet d'aboutir au même résultat dans tous les cas.

Notons $M_{\pi,\lambda,\tau}$ la surface de translation ainsi construite ; l'intervalle I sur lequel T opère devient un bon segment horizontal sur $M_{\pi,\lambda,\tau}$ et T est l'application de retour du flot vertical sur I . Inversement, soit S un bon segment horizontal sur une surface de translation $(M, \Sigma, \kappa, \zeta)$; écrivons l'application de premier retour sur S comme un échange d'intervalles $T_{\pi,\lambda}$; il existe un unique choix de vecteur de suspension τ tel que $(M, \Sigma, \kappa, \zeta)$ soit isomorphe à $M_{\pi,\lambda,\tau}$ (l'isomorphisme étant l'identité sur S).

L'ensemble Σ pour $M_{\pi,\lambda,\tau}$ est constitué des images des sommets du polygone. Le genre g de $M_{\pi,\lambda,\tau}$, le cardinal s de Σ et le cardinal d de \mathcal{A} sont reliés par la formule $d = 2g + s - 1$. Les formes linéaires $\lambda_\alpha + i\tau_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, forment une base de $H^1(M, \Sigma, \mathbb{C})$; l'image $H(\pi)$ de $\Omega(\pi)$ s'identifie alors à l'homologie absolue de M .

3.5. Flot de Teichmüller et algorithme de Rauzy-Veech

Le flot de Teichmüller est, à un ensemble de codimension un près et à un revêtement fini près, obtenu par suspension de l'algorithme de Rauzy-Veech, ou plutôt de son extension naturelle.

Sur la surface de translation $M_{\pi,\lambda,\tau}$ du numéro précédent est en effet privilégiée une séparatrice horizontale sortante issue du point A_1 de Σ , correspondant à l'extrémité gauche de l'intervalle I sur lequel opère $T_{\pi,\lambda}$; cette extrémité est préservée au cours de l'algorithme de Rauzy-Veech. Ce marquage de $M_{\pi,\lambda,\tau}$ correspond à un revêtement $\tilde{\mathcal{M}}(M, \Sigma, \kappa)$ de degré κ_1 .

Soit \mathcal{R} une classe de Rauzy, \mathcal{D} le diagramme associé. Pour chaque élément π de \mathcal{R} , notons $W(\pi)$ l'ensemble des triplets (π, λ, τ) qui vérifient (1), $\lambda_\alpha > 0$ pour $\alpha \in A$ et

$$1 \leq \sum_a \lambda_\alpha \leq 1 + \min(\lambda_{\alpha_t}, \lambda_{\alpha_b})$$

avec $\pi_t \alpha_t = \pi_b \alpha_b = d$. Pour chaque flèche $\gamma : \pi \rightarrow \pi'$ de \mathcal{D} , on recolle une partie des bords de $W(\pi)$ et $W(\pi')$ en identifiant (π, λ, τ) à $(\pi', {}^t B_\gamma^{-1} \lambda, {}^t B_\gamma^{-1} \tau)$ (car ces deux données produisent des surfaces de translations isomorphes). Le flot de Teichmüller dans $W(\pi)$ se traduit par

$$(\pi, \lambda, \tau) \rightarrow (\pi, e^t \lambda, e^{-t} \tau)$$

donc peut être effectivement vu comme suspension de l'extension naturelle \widehat{Q}_{RV} de Q_{RV} , version projective de l'identification ci-dessus. À chaque classe de Rauzy est associée ainsi une composante connexe d'un espace de modules $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}(M, \Sigma, k)$.

4. MÉLANGE FAIBLE POUR LES ÉCHANGES D'INTERVALLES

4.1. Ergodicité, unique ergodicité, mélange faible

Un échange d'intervalles sans connexion est minimal. Lorsque $d = 2$, une rotation minimale du cercle est automatiquement ergodique et même uniquement ergodique.

Ce n'est plus le cas pour des échanges d'intervalle pour lesquels la surface obtenue par suspension est de genre ≥ 2 . Il existe des échanges de 4 intervalles qui sont sans connexion mais pas ergodiques (pour la mesure de Lebesgue) [34], [33].

Cependant, Masur [40] et Veech [53] ont montré que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique ; plus précisément, pour toute donnée combinatoire π , et pour Lebesgue presque tout $\lambda, T_{\pi, \lambda}$ est uniquement ergodique.

À l'inverse, Katok a montré [30] qu'un échange d'intervalles n'est jamais mélangeant. Rappelons qu'une transformation T préservant une mesure m est mélangeante si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m(T^{-n}(A) \cap B) = m(A)m(B)$$

pour toutes parties boréliennes A, B . L'ergodicité équivaut à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n (m(T^{-k}(A) \cap B) - m(A)m(B)) = 0.$$

Une notion intermédiaire et importante entre ergodicité et mélange est le mélange faible, qui requiert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n |m(T^{-k}(A) \cap B) - m(A)m(B)| = 0.$$

Une définition équivalente est que $T \times T$ est ergodique pour $m \times m$. Une autre définition équivalente est que l'opérateur induit par T sur $L^2(m)$ n'a pas de fonction propre non constante.

4.2. Résultats

Bien sûr, une rotation n'est jamais faiblement mélangeante, les fonctions exponentielles $\exp 2\pi i n x$ étant fonctions propres.

On dira qu'une donnée combinatoire π est rotationnelle si $\pi_t(\alpha) - \pi_b(\alpha) \pmod d$ est indépendant de α .

Du point de vue du mélange faible, les rotations sont exceptionnelles, comme le montrent les résultats qui suivent (chacun améliorant le précédent) :

THÉORÈME 4.1 (Katok-Stepin [31]). — *Si le genre de la surface obtenue par suspension est 1, mais π n'est pas rotationnelle, presque tout $T_{\pi,\lambda}$ est faiblement mélangeant.*

THÉORÈME 4.2 (Veech [54]). — *Si $(1, \dots, 1) \notin H(\pi)$, presque tout $T_{\pi,\lambda}$ est faiblement mélangeant.*

THÉORÈME 4.3 (Avila-Forni [2]). — *Si π n'est pas rotationnelle, presque tout $T_{\pi,\lambda}$ est faiblement mélangeant.*

Avila et Forni ont aussi obtenu la version en temps continu.

THÉORÈME 4.4 (Avila-Forni [2]). — *Pour toutes données (M, Σ, κ) avec $g \geq 2$, le flot vertical de presque toute structure de surface de translation dans $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ est faiblement mélangeant.*

4.3. Quelques mots sur les démonstrations

Nous nous restreignons au cas des échanges d'intervalles. Soit \mathcal{R} une classe de Rauzy. Veech montre [54] qu'il existe un ouvert non vide $U \subset \mathcal{R} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^d)$ possédant la propriété suivante. Supposons qu'un échange d'intervalles $T_{\pi,\lambda}$ agissant sur un intervalle I , un d -uplet $h \in \mathbb{T}^d$ et une fonction non constante $\varphi : I \rightarrow \mathbb{T}$ vérifient

$$\varphi(Tx) = \varphi(x) + h_\alpha, x \in I_\alpha^t.$$

Alors, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_{\gamma(n)} h\|_{\mathbb{T}^d} = 0.$$

$$Q_{RV}^n(\pi, \lambda) \in U$$

Ici, $\gamma(n)$ désigne le chemin dans le diagramme de Rauzy associé à \mathcal{R} qui correspond aux n premières étapes de l'algorithme de Rauzy-Veech pour $T_{\pi,\lambda}$; comme la matrice $B_{\gamma(n)}$ est à coefficients entiers, elle opère sur \mathbb{T}^d et $\|x\|_{\mathbb{T}^d}$ désigne la distance à l'origine sur ce tore.

Ce critère de Veech, appliqué à la diagonale de $\mathbb{T}^{\mathcal{Q}}$, permet d'obtenir facilement le théorème de Katok-Stepin et celui de Veech. Il est aussi à la base de la démonstration d'Avila-Forni, mais la preuve dans ce cas est considérablement plus difficile.

5. EXPOSANTS DE LYAPUNOV DU COCYCLE DE ZORICH

5.1. Les cocycles de Zorich et Kontsevich-Zorich

Soient M, Σ, κ comme dans la section 3.1. Sur le produit $Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa) \times H^1(M, \mathbb{R})$ de l'espace de Teichmüller (pour les structures de surfaces de translation d'aire 1) par le premier groupe de cohomologie, considérons le flot

$$(t, \zeta, \eta) \mapsto \left(\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \zeta, \eta \right)$$

avec $t \in \mathbb{R}, \zeta \in Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa), \eta \in H^1(M, \mathbb{R})$.

Le groupe modulaire $\text{Mod}(M, \Sigma)$ agit naturellement sur $Q^{(1)}(M, \Sigma, \kappa) \times H^1(M, \mathbb{R})$ et cette action commute au flot considéré. En passant au quotient, on obtient un flot linéaire sur un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$, qui se projette sur le flot de Teichmüller sur $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. Le cocycle déterminant ce flot est appelé cocycle de Kontsevich-Zorich [35].

La version discrète de ce cocycle, qui est plus concrète, avait auparavant été introduite par Zorich [59], [60]. Soit \mathcal{R} une classe de Rauzy sur un alphabet \mathcal{U} . Sur le fibré vectoriel

$$\bigcup_{\pi \in \mathcal{R}} \{\pi\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{U}}) \times H(\pi)$$

au-dessus du domaine $\mathcal{U} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{U}})$ de Q_{RV} , considérons le cocycle

$$(\pi, \lambda, v) \mapsto (Q_{RV}(\pi, \lambda), B_{\gamma}v),$$

où γ est la flèche du diagramme de Rauzy associé à \mathcal{R} qui correspond au pas élémentaire de l'algorithme à partir de (π, λ) . On a vu que la mesure naturelle invariante par Q_{RV} est de masse infinie. Il est donc préférable d'accélérer le temps de l'algorithme et de considérer plutôt

$$(\pi, \lambda, v) \mapsto (Q_Z(\pi, \lambda), B_{\widehat{\gamma}}v),$$

où le chemin $\widehat{\gamma}$ est la concaténation des flèches associées aux pas de l'algorithme de Rauzy-Veech constituant un seul pas de l'algorithme de Zorich. Ce produit fibré au-dessus de Q_Z est appelé cocycle de Zorich.

On a rappelé que le flot de Teichmüller s'obtient, à revêtement fini près et à un ensemble de codimension un près, comme suspension de l'extension naturelle de l'algorithme de Rauzy-Veech ; les cocycles de Kontsevich-Zorich et de Zorich se correspondent par suspension. Leurs propriétés dynamiques sont donc étroitement reliées, puisque seul un reparamétrage du temps les différencie.

5.2. Exposants de Lyapunov

Considérons une composante connexe \mathcal{C} d'un espace de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. La restriction du flot de Teichmüller à \mathcal{C} est ergodique (et même mélangeante) pour la mesure canonique, qui est de masse totale finie. Le théorème d'Oseledets garantit donc l'existence d'exposants de Lyapunov

$$\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_{2g}$$

pour le cocycle de Kontsevich-Zorich.

Le caractère symplectique de ce cocycle implique qu'on a $\theta_i + \theta_{2g+1-i} = 0$ pour $1 \leq i \leq 2g$.

Le résultat suivant a fait l'objet d'un séminaire Bourbaki [37] :

THÉORÈME 5.1 (Forni [15]). — *Le cocycle de Kontsevich-Zorich est hyperbolique : on a $\theta_g > 0$.*

Un résultat plus précis, conjecturé par Zorich, a ensuite été obtenu par Avila et Viana :

THÉORÈME 5.2 (Avila-Viana [4]). — *Les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich sont simples : on a*

$$\theta_1 > \dots > \theta_g > \theta_{g+1} = -\theta_g > \dots > \theta_{2g} = -\theta_1.$$

Il est facile de voir que $\theta_1 = 1$. L'inégalité stricte $\theta_1 > \theta_2$ (qui équivaut à l'hyperbolicité du flot de Teichmüller) est plus simple et avait été obtenue auparavant par Veech [56].

Kontsevich [35] a par ailleurs établi une formule pour la somme $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_g$ des exposants de Lyapunov positifs, qui correspond au taux de dilatation maximal des sous-espaces lagrangiens dans $H^1(M, \mathbb{R})$.

Les exposants de Lyapunov pour le cocycle de Zorich sont proportionnels à ceux du cocycle de Kontsevich-Zorich, donc vérifient les mêmes conclusions (à part $\theta_1 = 1!$).

5.3. Conséquences

Les résultats qui suivent ont été découverts numériquement par Zorich [60], [61], qui a aussi montré comment les déduire des théorèmes (à l'époque encore conjecturaux) de Forni et Avila-Viana.

Soit ζ une structure de surface de translation sur (M, Σ, κ) , générique pour la mesure canonique sur $\mathcal{U}(M, \Sigma, \kappa)$. Il existe alors des sous-espaces

$$\{0\} = E_0 \subset E_1(\zeta) \subset \dots \subset E_g(\zeta) \subset H_1(M, \mathbb{R})$$

avec $\dim E_i(\zeta) = i$ qui ont la propriété suivante. Pour $T > 0$, soit $\gamma(T)$ un lacet obtenu en complétant un segment horizontal (pour la métrique plate définie par ζ) de longueur T par un chemin de longueur bornée (indépendante de T) ; on a

$$\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{dist}([\gamma(T)], E_i(\zeta))}{\log T} = \theta_{i+1}, \quad 0 \leq i < g,$$

et

$$\sup_T \text{dist}([\gamma(T)], E_g(\zeta)) < +\infty,$$

où $[\gamma(T)]$ est la classe de $\gamma(T)$ dans $H_1(M, \mathbb{R})$.

La version discrète de ce phénomène est la suivante. Soit $T = T_{\pi, \lambda}$ un échange d'intervalles, le vecteur de longueurs λ étant générique pour la mesure de Lebesgue. Considérons la fonction φ à valeurs dans \mathbb{Z}^g qui vaut e_α sur I_α^t , $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ désignant la base canonique de \mathbb{Z}^g . Les sommes de Birkhoff

$$S_n \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ T^i$$

vérifient alors la propriété suivante. Pour tout x , on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{dist}(S_n \varphi(x), E_i(\pi, \lambda))}{\log n} = \theta_{i+1}, \quad 0 \leq i < g$$

et

$$\sup_n \text{dist}(S_n \varphi(x), E_g(\pi, \lambda)) < +\infty,$$

où $E_0 = \{0\} \subset E_1(\pi, \lambda) \subset \dots \subset E_g(\pi, \lambda) \subset \mathbb{R}^g$ sont des sous-espaces avec $\dim E_i(\pi, \lambda) = i$.

5.4. Éléments de la preuve du théorème d'Avila-Viana

La simplicité des exposants de Lyapunov a déjà une assez longue histoire. Dans le cadre probabiliste d'un produit de matrices aléatoires, on citera le travail pionnier de Furstenberg [16] et les résultats de Guivarc'h-Raugi [18] et Goldscheid-Margulis [17] et, dans un cadre déterministe, ceux de Ledrappier [38], Bonatti-Gomez-Mont-Viana [6], Bonatti-Viana [7].

La simplicité des exposants de Lyapunov est obtenue à partir de deux ingrédients :

- le caractère chaotique du flot de Teichmüller ou, de façon équivalente (cf. § 3.5), des applications Q_Z ou Q_{RV} ; cette propriété a été établie par Veech.
- deux propriétés du cocycle de Zorich appelées « torsion » et « pincement » que nous présentons ci-dessous.

La propriété de *torsion* du cocycle de Zorich est la suivante. Soit \mathcal{R} une classe de Rauzy, π un élément de R, F un sous-espace vectoriel de $H(\pi)$ de dimension k, F_1, \dots, F_l des sous-espaces vectoriels de $H(\pi)$ de codimension k . Il existe alors un lacet γ basé en π dans le diagramme de Rauzy associé à \mathcal{R} tel que le sous-espace $B_\gamma F$ soit transverse à chacun des F_i .

Pour définir la propriété de *pincement*, introduisons sur $H(\pi)$ un produit scalaire auxiliaire ; pour un lacet γ basé en π , notons $\sigma_1^2(\gamma) \geq \sigma_2^2(\gamma) \geq \dots$ les valeurs propres, comptées avec multiplicité de l'opérateur $B(\gamma)^* B(\gamma)$. On demande que, pour toute constante $C > 1$ et tout $\pi \in R$, il existe un lacet γ basé en π tel qu'on ait $\sigma_i(\gamma) > C\sigma_{i+1}(\gamma)$ pour $0 < i < \dim H(\pi)$.

Avila et Viana établissent ces propriétés du cocycle de Zorich par récurrence sur le nombre d'intervalles échangés. Pour $d = 2$, ces propriétés résultent de propriétés élémentaires de l'algorithme classique de fraction continue. Dans l'étape de récurrence, on cherche à établir les propriétés de torsion et de pincement pour un diagramme de Rauzy \mathcal{D} à partir des mêmes propriétés pour les diagrammes plus simples.

La relation entre un diagramme de Rauzy \mathcal{D} et des diagrammes plus simples s'exprime par l'opération de *réduction*. Supposons que l'un des intervalles I_α^t soit de longueur négligeable ; la lettre α ne peut alors être gagnante. On efface donc dans \mathcal{D} toutes les flèches dont le gagnant est α . Les composantes connexes du graphe restant sont, à quelques décorations près, des diagrammes de Rauzy \mathcal{D}' dont l'alphabet est contenu dans $\mathcal{E} - \{\alpha\}$. Au niveau de $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$, cela correspond à des compactifications partielles de l'espace des modules par des espaces de modules plus simples. Le genre g' du diagramme de Rauzy \mathcal{D}' est toujours au plus égal au genre g de \mathcal{D} . L'opération de réduction est facile à contrôler lorsque $g' = g$, plus délicate lorsque $g' < g$.

6. COMPOSANTES CONNEXES DE L'ESPACE DES MODULES

Les composantes connexes des espaces de modules $\mathcal{M}(M, \Sigma, \kappa)$ ont été classifiées par M. Kontsevich et A. Zorich [36]. Nous décrivons dans cette section leur résultat. Comme les surfaces considérées sont toujours connexes, il suffit de traiter le cas où tous les κ_i sont > 1 , ce que nous supposons dans cette section.

6.1. Composantes hyperelliptiques

Soient d un entier ≥ 4 et $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré $d + 1$ dont les racines sont simples. En compactifiant la surface $\{w^2 = P(z)\}$ par un ou deux points à l'infini suivant que d est pair ou impair, on obtient une surface de Riemann de genre $g = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. De plus, la 1-forme holomorphe $\omega = \frac{dz}{w}$ ne s'annule pas à distance finie ; lorsque d est pair, ω a un zéro d'ordre $d - 2 = 2g - 2$ au point à l'infini ; lorsque d est impair, ω a un zéro d'ordre $\frac{d-3}{2} = g - 1$ en chacun des deux points à l'infini. Les surfaces de translation ainsi définies correspondent donc aux cas

- $d = 2g, s = \#\Sigma = 1, \kappa_1 = 2g - 1$;
- $d = 2g + 1, s = \#\Sigma = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = g$.

Pour $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ les polynômes $P(z)$ et $a^{-2}P(az + b)$ produisent des surfaces de translation isomorphes. On dispose donc de d paramètres complexes indépendants ; c'est aussi la dimension (complexe) des espaces de modules pertinents. Pour chaque entier $d \geq 4$, les surfaces de translation ainsi construites décrivent une composante connexe de l'espace des modules approprié, qu'on appellera hyperelliptique.

Les cas $d = 4$ et $d = 5$ correspondent aux deux choix pour κ en genre 2 : un zéro double ou deux zéros simples pour la 1-forme ω . Dans ces deux cas, l'espace des modules est connexe et donc égal à sa composante hyperelliptique. Cela peut se voir par exemple en considérant les classes de Rauzy avec $d = \#\mathcal{A} \in \{4, 5\}$. En fait, de façon générale, les classes de Rauzy correspondant aux composantes hyperelliptiques sont celles qui contiennent la donnée combinatoire $\pi^* = (\pi_t, \pi_b)$ telle que $\pi_t(\alpha) + \pi_b(\alpha) = d + 1$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

6.2. Parité du spin

On suppose ici que tous les κ_i sont impairs ≥ 3 . Une structure de surface de translation sur (M, Σ, k) définit une structure complexe sur M et un diviseur canonique $\Sigma(\kappa_i - 1)A_i$ pour cette structure. Comme les κ_i sont supposés impairs, on peut former le diviseur $D = \frac{1}{2}\Sigma(\kappa_i - 1)A_i$ et définir ainsi une structure spin ; la parité de cette structure est celle de la dimension de l'espace des fonctions méromorphes f telles que $(f) + D \geq 0$.

On renvoie à [Mi], [At], [Mu] pour plus d'informations. La parité de la structure spin est invariante par déformation et est donc un invariant de chaque composante connexe de l'espace des modules (lorsque tous les κ_i sont impairs !). On peut d'ailleurs la calculer comme suit : on choisit une base symplectique $a_i, b_i, 1 \leq i \leq g$ pour $H_1(M, \mathbb{Z})$. Pour chaque lacet γ sur $M - \Sigma$, $((M, \Sigma, \kappa)$ étant muni d'une structure de surface de translation), on définit l'indice $\text{ind}(\gamma)$ comme le degré mod 2 de l'application de S^1 dans S^1 qui associe à t l'angle entre $\dot{\gamma}(t)$ et la direction horizontale en $\gamma(t)$. Il ne

dépend que de la classe de γ dans $H_1(M, \mathbb{Z})$ car les κ_i sont impairs. La parité de la structure spin est alors donnée par

$$\sum_{i=1}^g (\text{ind}(a_i) + 1)(\text{ind}(b_i) + 1) \pmod{2}.$$

6.3. Classification

Le résultat de Kontsevich et Zorich est que hyperellipticité et parité du spin classifient les composantes. Plus précisément :

1. Lorsque l'un des κ_i est pair, l'espace des modules $\mathcal{M}(M, \Sigma, k)$ est connexe sauf si $s = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = g$ pair ≥ 4 ; il y a alors une composante hyperelliptique et une composante non hyperelliptique.
2. Si tous les κ_i sont impairs, avec $s \geq 3$ ou $s = 2, \kappa_1 \neq \kappa_2$, il y a deux composantes, distinguées par la parité du spin.
3. Lorsque $s = 1, g \geq 4$ ou $s = 2, \kappa_1 = \kappa_2, g$ impair ≥ 5 , il y a 3 composantes, l'une hyperelliptique et les deux autres non hyperelliptiques, distinguées par la parité du spin.
4. Lorsque $g = 2, s = 1$, l'espace des modules est connexe. Lorsque $g = 3$ et $s = 1$ ou $s = 2, \kappa_1 = \kappa_2 = 3$, il y a deux composantes, l'une hyperelliptique, l'autre pas (celle-ci est de spin impair).

6.4. Méthode de démonstration

La confluence des zéros de la 1-forme organise, pour chaque genre g , les différents espaces de modules comme les strates d'une stratification. La strate minimale est alors celle pour laquelle $s = 1$: la 1-forme a un seul zéro de multiplicité $2g - 2$.

Kontsevich et Zorich ramènent l'analyse des strates supérieures à celle de la strate minimale en prouvant le résultat suivant : pour toute strate S' , et toute composante connexe C de la strate minimale, il existe une et une seule composante de S' dont l'adhérence contient C .

Reste à classifier, pour chaque genre g , les composantes de la strate minimale. Cela se fait par récurrence sur g . Étant donnée une surface de translation avec un seul zéro A_1 de multiplicité $2g - 2$, une procédure locale d'abord décrite dans [11] permet d'attacher une anse : on dédouble A_1 en deux zéros A'_1, A''_1 (de multiplicités k'_1, k''_1), on fend la surface suivant le segment joignant ces deux zéros et on recolle les deux côtés de la fente aux deux extrémités d'un cylindre. On obtient ainsi une surface de genre $g + 1$ avec un seul point marqué (le recollement du cylindre ayant identifié A'_1 et A''_1) de multiplicité maximale $2g$. La parité du spin de la surface obtenue dépend de la parité de k'_1 .

Cette construction permet de montrer qu'il y a au moins autant de composantes connexes qu'annoncées dans la section 6.3. Pour voir qu'il n'y en a pas plus, on procède à nouveau par récurrence sur g et il faut cette fois « arracher » une anse, ce qui se fait en présentant la surface comme suspension d'un échange d'intervalles dont la donnée combinatoire a des propriétés appropriées.

7. MÉLANGE EXPONENTIEL DU FLOT DE TEICHMÜLLER

7.1. Soit \mathcal{C} une composante connexe d'un espace de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, \kappa)$. Rappelons que \mathcal{C} est muni d'une mesure canonique, de masse totale finie, préservée par l'action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$. Notons $L_0^2(\mathcal{C})$ l'espace des fonctions de carré intégrable et de moyenne nulle sur \mathcal{C} . On dispose donc d'une représentation unitaire $\rho = \rho_{\mathcal{C}}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ dans $L_0^2(\mathcal{C})$.

L'ergodicité du flot de Teichmüller, démontrée par Masur et Veech (cf. 3.3), implique l'ergodicité de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur \mathcal{C} , et celle-ci signifie que ρ ne contient pas la représentation triviale. L'examen des représentations unitaires irréductibles de $SL(2, \mathbb{R})$ permet alors de conclure que le flot de Teichmüller est mélangeant, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \varphi \circ g^t \cdot \psi = 0$$

pour tous $\varphi, \psi \in L_0^2(\mathcal{C})$, (g^t) désignant le flot de Teichmüller.

L'ergodicité de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$, c'est l'absence d'un vecteur invariant dans $L_0^2(\mathcal{C})$. On dit que ρ a un *trou spectral* si la propriété plus forte suivante est vérifiée : il existe des éléments $g_1 \dots g_N$ de $SL(2, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout vecteur unitaire v de $L_0^2(\mathcal{C})$, on ait

$$\sup \|g_i v - v\| \geq \varepsilon.$$

La propriété de trou spectral est équivalente à une propriété de la décomposition de ρ en représentations unitaires irréductibles. Rappelons qu'outre la représentation triviale, celles-ci se répartissent suivant Bargmann en série discrète, principale et complémentaire. C'est cette dernière qui nous intéresse ; elle est paramétrée par un réel $s \in (0, 1)$, l'espace de Hilbert étant donnée par

$$H_s = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|^2 := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)\bar{f}(y)}{|x-y|^{1-s}} dx dy < +\infty \right\}$$

et l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(x) = (cx + d)^{-1-s} f\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right).$$

La propriété de trou spectral pour ρ est équivalente à la propriété suivante : il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'aucune représentation de la série complémentaire avec $1 - \varepsilon < s < 1$ n'intervienne dans la décomposition de ρ .

Il se trouve que la propriété de trou spectral est équivalente à une propriété dynamique, le mélange exponentiel pour le flot de Teichmüller. Cette dernière propriété signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait

$$(2) \quad \int \varphi \circ g^t \cdot \psi \leq C(\varphi, \psi) e^{-\delta t}$$

pour $t \geq 0$ et φ, ψ de classe C^∞ à support compact et de moyenne nulle sur \mathcal{C} .

THÉORÈME 7.1 ([3]). — *Le flot de Teichmüller est exponentiellement mélangeant pour toute composante \mathcal{C} de tout espace de modules $\mathcal{M}^{(1)}(M, \Sigma, k)$.*

L'inégalité (2) est en fait valable pour une classe bien plus large que C^∞ à support compact : la régularité Hölder suffit, avec une condition de croissance à l'infini.

7.2. Le mélange exponentiel est caractéristique des systèmes dynamiques les plus chaotiques. C'est par exemple une propriété classique des difféomorphismes d'Anosov du tore \mathbb{T}^n préservant la mesure de Lebesgue. On sait depuis Veech [56] que le flot de Teichmüller est hyperbolique (cela équivaut à l'inégalité $\theta_1 > \theta_2$ de 5.2). Pour obtenir le mélange exponentiel du flot de Teichmüller, il y a par rapport au cas des difféomorphismes d'Anosov deux difficultés :

- on a affaire à un flot plutôt qu'à un difféomorphisme ;
- défaut d'uniformité et de compacité.

Que la première difficulté soit sérieuse apparaît dès qu'on observe qu'une suspension en temps constant d'un difféomorphisme d'Anosov ne peut être mélangeante. C'est Dolgopyat [Do] qui a le premier développé des outils permettant de montrer le mélange exponentiel pour certains flots d'Anosov. Baladi et Vallée [5] ont développé ces techniques dans un cadre assez proche de celui du flot de Teichmüller, et ces techniques sont adaptées dans l'article [3].

7.3. La maîtrise des problèmes d'uniformité et de compacité repose sur une estimation « diophantienne » que nous présentons ci-dessous. Fixons un diagramme de Rauzy \mathcal{D} et un sommet π de \mathcal{D} . Munissons l'ensemble $\{T_{\pi, \lambda}, \sum \lambda_\alpha = 1\}$ de la mesure de Lebesgue normalisée en probabilité. À chaque $T \in \Delta_\pi$ sans connexion, on associe (cf. 2.4) un chemin γ^T dans \mathcal{D} issu de π et une suite $(T^{(n)})$ d'échanges d'intervalles qui sont les applications de premier retour de T sur une suite décroissante d'intervalles $(I^{(n)})$. Notons $Q^{(n)}$ le plus grand temps de retour de T dans $I^{(n)}$. Pour chaque entier

n , notons n^+ le plus petit entier (dépendant de T) tel que tous les coefficients de la matrice $B_{\gamma(n,n^+)}$ soient strictement positifs.

THÉORÈME 7.2 ([3]). — *Il existe des constantes $c > 0, \Theta > 0$, ne dépendant que de \mathcal{D} , telles que l'inégalité suivante soit vérifiée : pour tout chemin fini γ_0 dans \mathcal{D} issu de π (de longueur n) et toute constante $A \geq 2$, on a*

$$\mathbb{P}(Q^{(n^+)} \geq A Q^{(n)} | \gamma^T(0, n) = \gamma_0) \leq C(\log A)^\Theta A^{-1}.$$

La démonstration utilise comme dans [4] (cf. § 5.4) une récurrence sur le nombre d'intervalles via des opérations de réduction.

On notera que de telles conditions diophantiennes apparaissent dans [39], où les résultats fondamentaux de Forni [14] sur l'équation cohomologique sont précisés ; mais l'estimation de mesure de [39] est bien plus faible que l'estimation ci-dessus.

RÉFÉRENCES

- [1] M. F. ATIYAH – Riemann surfaces and spin structures, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **4** (1971), p. 47–62.
- [2] A. AVILA & G. FORNI – Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows, *Ann. of Math.* **165** (2007), p. 637–664.
- [3] A. AVILA, S. GOUËZEL & J.-C. YOCOZ – Exponential mixing for the Teichmüller flow, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **104** (2006), p. 143–211.
- [4] A. AVILA & M. VIANA – Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture, *Acta Math.* **198** (2007), p. 1–56.
- [5] V. BALADI & B. VALLÉE – Exponential decay of correlations for surface semi-flows without finite Markov partitions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), p. 865–874.
- [6] C. BONATTI, X. GÓMEZ-MONT & M. VIANA – Généricité d'exposants de Lyapunov non-nuls pour des produits déterministes de matrices, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **20** (2003), p. 579–624.
- [7] C. BONATTI & M. VIANA – Lyapunov exponents with multiplicity 1 for deterministic products of matrices, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), p. 1295–1330.
- [8] K. CALTA – Veech surfaces and complete periodicity in genus two, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), p. 871–908.
- [9] D. DOLGOPYAT – On decay of correlations in Anosov flows, *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 357–390.

- [10] A. ESKIN & H. MASUR – Asymptotic formulas on flat surfaces, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), p. 443–478.
- [11] A. ESKIN, H. MASUR & A. ZORICH – Moduli spaces of abelian differentials : the principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **97** (2003), p. 61–179.
- [12] A. ESKIN & A. OKOUNKOV – Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials, *Invent. Math.* **145** (2001), p. 59–103.
- [13] A. ESKIN, A. OKOUNKOV & R. PANDHARIPANDE – The theta characteristic of a branched covering, prépublication arXiv:math.AG/0312186.
- [14] G. FORNI – Solutions of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus, *Ann. of Math.* **146** (1997), p. 295–344.
- [15] ———, Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus, *Ann. of Math.* **155** (2002), p. 1–103.
- [16] H. FURSTENBERG – Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), p. 377–428.
- [17] I. Y. GOL'DSHEĪD & G. A. MARGULIS – Lyapunov exponents of a product of random matrices, *Uspekhi Mat. Nauk* **44** (1989), p. 13–60.
- [18] Y. GUIVARC'H & A. RAUGI – Products of random matrices : convergence theorems, in *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, Contemp. Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., 1986, p. 31–54.
- [19] P. HUBERT & E. LANNEAU – Veech groups without parabolic elements, *Duke Math. J.* **133** (2006), p. 335–346.
- [20] P. HUBERT, E. LANNEAU & M. MOLLER – The Arnoux-Yoccoz Teichmüller disc, prépublication arXiv:math/0611655.
- [21] ———, Completely periodic directions and orbit closures of many pseudo-Anosov Teichmüller discs in $q(1, 1, 1, 1)$, prépublication arXiv:0707.0738.
- [22] P. HUBERT & S. LELIÈVRE – Noncongruence subgroups in $\mathcal{H}(2)$, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), p. 47–64.
- [23] ———, Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$, *Israel J. Math.* **151** (2006), p. 281–321.
- [24] P. HUBERT, H. MASUR, T. A. SCHMIDT & A. ZORICH – Problems on billiards, flat surfaces and translation surfaces, in *Problems on mapping class groups and related topics*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 74, Amer. Math. Soc., 2006, p. 233–243.
- [25] P. HUBERT & T. A. SCHMIDT – Veech groups and polygonal coverings, *J. Geom. Phys.* **35** (2000), p. 75–91.

- [26] ———, Invariants of translation surfaces, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **51** (2001), p. 461–495.
- [27] ———, Infinitely generated Veech groups, *Duke Math. J.* **123** (2004), p. 49–69.
- [28] ———, Geometry of infinitely generated Veech groups, *Conform. Geom. Dyn.* **10** (2006), p. 1–20.
- [29] ———, An introduction to Veech surfaces, in *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, p. 501–526.
- [30] A. KATOK – Interval exchange transformations and some special flows are not mixing, *Israel J. Math.* **35** (1980), p. 301–310.
- [31] A. KATOK & A. M. STEPIN – Approximations in ergodic theory, *Uspehi Mat. Nauk* **22** (1967), p. 81–106.
- [32] M. KEANE – Interval exchange transformations, *Math. Z.* **141** (1975), p. 25–31.
- [33] ———, Non-ergodic interval exchange transformations, *Israel J. Math.* **26** (1977), p. 188–196.
- [34] H. B. KEYNES & D. NEWTON – A “minimal”, non-uniquely ergodic interval exchange transformation, *Math. Z.* **148** (1976), p. 101–105.
- [35] M. KONTSEVICH – Lyapunov exponents and Hodge theory, in *The mathematical beauty of physics (Saclay, 1996)*, Adv. Ser. Math. Phys., vol. 24, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997, p. 318–332.
- [36] M. KONTSEVICH & A. ZORICH – Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 631–678.
- [37] R. KRIKORIAN – Déviations de moyennes ergodiques, flots de Teichmüller et cocycle de Kontsevich-Zorich (d’après Forni, Kontsevich, Zorich...), Séminaire Bourbaki, vol. 2003/04, exposé n° 927, *Astérisque* **299** (2005), p. 59–93.
- [38] F. LEDRAPPIER – Positivity of the exponent for stationary sequences of matrices, in *Lyapunov exponents (Bremen, 1984)*, Lecture Notes in Math., vol. 1186, Springer, 1986, p. 56–73.
- [39] S. MARMI, P. MOUSSA & J.-C. YOCCOZ – The cohomological equation for Roth-type interval exchange maps, *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), p. 823–872.
- [40] H. MASUR – Interval exchange transformations and measured foliations, *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 169–200.
- [41] C. T. McMULLEN – Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), p. 857–885.
- [42] ———, Teichmüller geodesics of infinite complexity, *Acta Math.* **191** (2003), p. 191–223.
- [43] ———, Teichmüller curves in genus two : discriminant and spin, *Math. Ann.* **333** (2005), p. 87–130.

- [44] ———, Teichmüller curves in genus two : the decagon and beyond, *J. reine angew. Math.* **582** (2005), p. 173–199.
- [45] ———, Prym varieties and Teichmüller curves, *Duke Math. J.* **133** (2006), p. 569–590.
- [46] ———, Teichmüller curves in genus two : torsion divisors and ratios of sines, *Invent. Math.* **165** (2006), p. 651–672.
- [47] ———, Dynamics of $SL_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two, *Ann. of Math.* **165** (2007), p. 397–456.
- [48] J. MILNOR – Remarks concerning spin manifolds, in *Differential and Combinatorial Topology (in Honor of Marston Morse)*, Princeton, 1995.
- [49] A. NOGUEIRA & D. RUDOLPH – Topological weak-mixing of interval exchange maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 1183–1209.
- [50] V. I. OSELEDETS – A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), p. 197–231.
- [51] G. RAUZY – Échanges d’intervalles et transformations induites, *Acta Arith.* **34** (1979), p. 315–328.
- [52] W. A. VEECH – Interval exchange transformations, *J. Analyse Math.* **33** (1978), p. 222–272.
- [53] ———, Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps, *Ann. of Math.* **115** (1982), p. 201–242.
- [54] ———, The metric theory of interval exchange transformations. I. Generic spectral properties, *Amer. J. Math.* **106** (1984), p. 1331–1359.
- [55] ———, The metric theory of interval exchange transformations. II. Approximation by primitive interval exchanges, *Amer. J. Math.* **106** (1984), p. 1361–1387.
- [56] ———, The Teichmüller geodesic flow, *Ann. of Math.* **124** (1986), p. 441–530.
- [57] J.-C. YOCCOZ – Continued fraction algorithms for interval exchange maps : an introduction, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, Springer, 2006, p. 401–435.
- [58] ———, Échanges d’intervalles, cours au Collège de France, http://www.college-de-france.fr/default/EN/all/equ_dif.
- [59] A. ZORICH – Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyapunov exponents, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **46** (1996), p. 325–370.
- [60] ———, Deviation for interval exchange transformations, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** (1997), p. 1477–1499.
- [61] ———, How do the leaves of a closed 1-form wind around a surface?, in *Pseudoperiodic topology*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 197, Amer. Math. Soc., 1999, p. 135–178.

- [62] ———, Flat surfaces, in *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, Springer, 2006, p. 437–583.

Jean-Christophe YOCCOZ

Collège de France

3, rue d'Ulm

F-75231 Paris Cedex 05

E-mail : jean-c.yoccoz@college-de-france.fr

