Revue d'Histoire des Mathématiques

TEXTES & DOCUMENTS

A new source for medieval mathematics in the Iberian Peninsula: The commercial arithmetic in Ms 10106 (Biblioteca Nacional, Madrid)

Javier Docampo Rey

Tome 15 Fascicule 1 2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2009 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 36 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

 Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
15 (2009), p. 123–177

TEXTES & DOCUMENTS

A NEW SOURCE FOR MEDIEVAL MATHEMATICS IN THE IBERIAN PENINSULA: THE COMMERCIAL ARITHMETIC IN MS 10106 (BIBLIOTECA NACIONAL, MADRID)

Javier Docampo Rey

Abstract. — This paper contains a critical edition of a short commercial arithmetic written in Castilian (ca. 1400). The manuscript has certain characteristic features, like the presence of composite fractions, that distinguishes it from other known treatises of the Iberian peninsula. The document appears to improve considerably our knowledge of the origins and the transmission of vernacular commercial arithmetic in Europe.

Résumé. — Dans cet article, nous étudions et éditons une petite arithmétique commerciale écrite en castillan (vers 1400). Parmi les caractéristiques du manuscrit, on observe la présence de fractions composées, ce qui permet de le différencier des autres manuels péninsulaires connus. Tout porte à croire que l'on est devant un document très important qui améliore notre connaissance des origines de l'arithmétique commerciale en vernaculaire, ainsi que de sa transmission en Europe.

Texte reçu le 16 avril 2008, révisé le 29 août 2008 et le 24 octobre 2008.

J. Docampo Rey, Grup d'estudis d'Història de la Ciencia, Universitat Pompeu Fabra, C/ Ramon Trias Fargas, 25-27, 08005 Barcelona, Spain.
Courrier électronique : javdoc@hotmail.com

2000 Mathematics Subject Classification : 01A35, 01A40.

Key words and phrases : Medieval mathematics, commercial arithmetic, Iberian Peninsula.

Mots clefs. — Mathématique médiévale, arithmétique commerciale, Péninsule Ibérique.

INTRODUCTION

In 1998, Antoni Malet published a critical edition of Francesc Santcliment's *Summa de l'art d'Aritmètica* (Barcelona, 1482). This Catalan commercial arithmetic was the first mathematics book printed in the Iberian Peninsula, [1] and the second commercial arithmetic printed in Europe. Malet's monograph also included a short section on the *Compilatio de Arismética sobre la arte mercantívol* (Zaragoza, ca. 1487), which was Sancliment's Castilian adaptation of the *Summa*. This *Compilatio* is shorter than the Catalan treatise and does not deal with fractions. It does, however, include a short chapter on the calculation of square and cubic roots which is not in the *Summa*. [2]

The *Summa* and the *Compilatio* were the first Iberian printed commercial arithmetic texts in Catalan and Castilian, respectively. Even though these works were put to print at a relatively early date, the number of manuscripts of this genre in the period 1300–1500 that have been identified in the Iberian Peninsula is still very small:

To date, only five Catalan abbacus [3] manuscripts have been found and studied. [4] The earliest one (ca. 1390) basically uses the Roman system, while the latest, which can be dated to around 1520, contains the first known account of algebra in a vernacular Iberian language. [5] The others are 15th-century commercial arithmetics.

For the Castilian abbacus tradition, two treatises have been presented so far. The most important one can be dated to around 1393–1400 and is

---

1 See [Malet 1998]. For a detailed analysis of the contents of Santcliment's book and also on the early sixteenth-century arithmetics of Juan de Ortega and Joan Ventallol, see [Labarthe 2004].

2 In fact, the *Compilatio* is not a translation but quite a free adaptation of the *Summa*. The numerical values in the exercises are also not the same, and the nomenclature and units are changed to fit the Castilian context. See [Malet 1998, pp. 40–43].
In this paper, we use the terms *Castilian* and *Catalan* in a linguistic sense. Thus, if we mention a *Castilian* source, we refer to a text that is written in Castilian, but not necessarily a text composed in Castile (as well as a *Catalan* source is not necessarily a source written in Catalonia).

3 The term *abbacus* is generally used to make reference to the vernacular Italian tradition of mathematics, which was mainly connected with commercial arithmetic with the Hindu-Arabic system, but also included algebra and practical geometry (see [Van Egmond 1980]). Expressions like *abbacus teacher*, *abbacus school* or *abbacus treatise* are usually understood in this context roughly for the period 1280–1600. We will use the same terminology also in similar European traditions, even when they are not Italian, because it is less restrictive than the expression "commercial arithmetic".

4 These manuscripts are analysed in detail in [Docampo Rey 2004].

5 See [Docampo Rey 2006; 2009].

entitled *Libro de Arismética que es dicho alguarismo*. It is bound together with a treatise on alloying coinage: the *Libro que enseña ensayar qualquier moneda*. In total, they contain almost 200 solved exercises and problems. [6] The other document is a short arithmetic titled *De Aresmética* (14th c.) that is mostly devoted to operations with fractions. [7]

We expect further research on arithmetic in Iberian vernacular languages to provide relevant insights in the transmission of medieval mathematics, in particular for the following reasons: a) many Arabic scientific works (those on mathematics among them) were translated into Latin and Hebrew in the Iberian Peninsula; [8] b) many important Muslim and Jewish cultivators of mathematics were active there; c) the geographical situation of Catalonia and its commercial relations with the rest of the Mediterranean made it a privileged area for the transmission of mathematical knowledge. [9]

DESCRIPTION OF THE MANUSCRIPT

The anonymous and untitled manuscript we are presenting here is preserved in the Biblioteca Nacional (Madrid). It consists of 16 numbered sheets of paper of 280 by 200 mm and occupies the first part of the codex with signature Ms 10106. [10]

Even though, as we will see, some pages may be lacking at the beginning of the text, the preserved contents are well ordered and organized. Blank spaces are left at the beginning of some paragraphs where the first letter is lacking, surely to be filled in with decorated letters. Therefore, it is reasonable to suspect that the manuscript was part of a text to be prepared for circulation as a treatise.

6 Ms. 46 of the Real Colegiata de San Isidoro de León. This treatise has been edited in [Caunedo del Potro & Córdoba de la Llave 2000].

7 Real Academia Española, Ms. 155, ff. 144^{r}-164^{r}. See [Caunedo del Potro 2003].

8 See [Allard 1997; D'Alverny 1978; Lindberg 1978].

9 It has been recently stated that the Catalan area could be related to the beginnings of Italian vernacular algebra. See [Høyrup 2006, pp. 25, 34].

10 The remainder of the codex consists of two medieval texts on agriculture. The manuscript was formerly preserved in the library of the Cathedral of Toledo (Tol. 96–40). The arithmetic part is mentioned in [Faulhaber et al. 1984, p. 122 (num. 1653)] and has been described very briefly in [Millás Vallicrosa 1942, p. 91].

GEOGRAPHICAL CONTEXT AND DATING

The context of the commercial problems in this arithmetic is the international Mediterranean trade. The manuscript is very likely to have been written in the lands of the Crown of Aragon, or at least to have been composed to be used there; in fact: a) the only city of the Iberian Peninsula that is mentioned is Valencia; b) Barcelonese and Jaquese money appears in some problems, while there is no mention of *maravedís*, *doblas*, *blancas* or any other Castilian monetary unit; c) the mediterranean cities mentioned in the problems about trade lie on the main commercial routes of Catalano-aragonese merchants of the time;[11] d) there are obvious coincidences of a part of the manuscript with a Catalan commercial arithmetic of ca. 1440–1450, as we will see; e) in a few occasions we find word endings that either suggest that the author was translating from Catalan or that he himself was a Catalan speaker: *redresat* (arranged), *aminuat* (reduced) where the corresponding Castilian participle would have been *redresado*, *aminuado*.[12] And last, but not least, the manuscript is related to the Catalano-aragonese region because it uses the term *abba* in reference to practical arithmetic with the Hindu-Arabic numeration system.[13] This term does not appear in any known treatise composed in Castile, while it is very common in Catalan commercial arithmetic manuscripts[14] and also appears in a treatise in Castilian that was printed in 1515 in Valencia and was composed by Juan Andrés, an Aragonese priest.[15]

The type of script of our manuscript seems to indicate that it was written at the beginning of the fifteenth century[16] or in the late fourteenth

11 They are Alexandria, Acre, Marseille, Pisa, Puglia, Valencia and Venetia; also regions like Sicily and Syria.

12 The usual Castilian endings for participles are used elsewhere in the manuscript.

13 It appears on the first page, in the introduction of divisions involving fractions: "Capítulo de la postrimera regla abba, eso es partir por rotos et por entregos (...)". ["Chapter of the last *abba* rule, i.e., dividing by fractions and by integers."]

14 See [Cifuentes 2002, pp. 301–302], [Hernando i Delgado 2005, p. 974 (doc. 69), 979 (doc.87)] and [Docampo Rey 2004, pp. 144, 192]. Recall the title of Leonardo Pisano's famous *Liber abaci* and the *maestri d'abaco*, *schuole d'abaco* and *trattati d'abaco* of the vernacular tradition (see note 3). The word *abaco* appears in many forms in Italian treatises: *abbecho, ambaco, abacho, anbaco, abagho, abaco, abocho, abbacho,* etc. (see [Van Egmond 1980]). All these terms and the term *abba* have the same origin, which is, in all probability, connected to Hindu arithmetic entering the Arab world in association with a dust board (*takht*) on which operations where performed with the fingers of with a stylus on sand or dust, allowing easy erasure. See [Saidan 1978, pp. 351–352].

15 "Compendio de cuento de aba o de guarismo" [Andrés 1515, f. 3^r].

16 See [Millás Vallicrosa 1942, p. 91].

century. [17] However, as often happens in abbacus treatises, the original text could have been composed at an earlier date. The fact that the city of Acre (Syria) is the most cited place in problems concerning trade may be significant; it is known that the Catalano-aragonese commercial traffic towards Syria had dwindled by the mid 15th century and virtually disappeared in the following decades. [18] But trade between Western Europe and Syria was very important in the late 14th and the early 15th centuries, and Castilian ships were much present in commercial trips from Barcelona to the Eastern Mediterranean between 1390 and 1411. [19] This therefore seems to be the most likely period in which a manuscript in Castilian with so many problems concerning the city of Acre would fit. The various units of measure that appear in the problems are consistent with this dating.

STYLE OF THE TEXT

In some problems, the initial data, as well as the main steps of the solution are displayed in rectangles. Many such illustrative rectangles with operations can be seen in Leonardo Pisano's *Liber abaci* (1202), [20] their purpose being to sum up in a surveyable manner what is explained at length in the main text. They can also be found in Latin versions of al-Khwārizmī's arithmetic and in some Italian abbacus treatises, as well as in the *Liber mahamalet*, an anonymous Latin arithmetic that was composed in Castile in the twelfth century. [21] At some stage, when Leonardo is multiplying 12 by itself, he includes a representation in rectangles of the stages to perform for this operation, explaining that the numbers have to be written down in the *tabula dealbata*, which seems to be one type of

17 We have made a careful comparative study with several texts that were written in the 1380s and 1390s and also with those from the first years of the 15th century that are reproduced in [Millares Carlo 1983, vols. 2 and 3].

18 See [Del Treppo 1976, p. 60]. The presence of Catalan merchants in Acre dates at least from 1268. [*Ibid.*, p. 21]

19 See [Del Treppo 1976, pp. 25, 34].

20 This work is edited in [Boncompagni 1857]. See [Sigler 2002] for a translation into English.

21 See [Allard 1992, pp. 28–36, 155–174], [Høyrup 1999, pp. 38–39], [Høyrup 2007, p. 38] and [Arrighi 1971–72, p. 116 in the 2004 reprint]. In the case of the *Liber mahamalet*, we can find this kind of rectangles in Ms. latin 7377A, Bibliothèque Nationale, Paris, ff. 125^{v}, 127^{r}-v, 128^{r}; this Latin treatise is described in [Sesiano 1988].

calculation boards used in Muslim countries.[22] Thus it seems clear that those illustrative rectangles, which are never mentioned in the main text of the Castilian manuscript, are somehow related to representations of operations on a calculation board. However, this does not necessarily mean that the rectangles in Ms. 10106 represent what was actually seen at once on the board. In fact, the initial data, the main steps of the solution, and the final result of a problem, including words and even whole sentences, often appear in a single rectangle (this also happens in the *Liber abaci*). It is also likely that the custom of representing operations in rectangles continued in some manuscripts at a time when operations were already performed using paper and ink and not over dust or clay.

In Ms 10106, we find unusual ways of using certain terms and expressions. For instance, the term *colomnia*, *colomna* or *colona* (column) is preferred instead of *partidor* to refer to the dividing number in a rule of three, or to $\sum a_i$ when a partition has to be made proportionally to several amounts $a_1, \ldots, a_n$.[23] The latter situation could perhaps explain the use of the term *colona*, since in the diagrams that were used in some treatises to illustrate the proportional partition, the total invested sum was written

---

22 He writes "in tabula dealbata in qua littere leviter deleantur" [Boncompagni 1857, p. 7] (a "whitened board over which numbers can easily be erased"). This probably refers to the dust board (the *takht*) that was used in much of the Arabic world during the medieval period: a board covered with sand or fine dust over which all calculations were performed using the fingers or a stylus. See [Saidan 1978, pp. 351–352]. Indeed, the sand or dust used might have been white or at any rate light coloured. On the other hand, a wooden board with a plate of clay, in which numbers were written down with ink and could be rubbed out with wet clay, was used in the Maghreb at least from the 12th century. Since it is known that white clay was used for it (see [Abdeljaouad 2002, p. 20], [Lamrabet 1994, p. 203]), Fibonacci might have referred to a board of this kind. For more information on calculation over dust or clay, see [Ifrah 1997, pp. 1289–1290, 1298–1305].

23 This typically occurs with the simplest partnership problems, which basically involve the partition of gains among several investors. In fact, in the simplest cases, the total invested amount is precisely the dividing number when each gain is calculated, and these gains were sometimes calculated by an explicit rule of three. We have found the term *colona* with this meaning only in a fragment of a Catalan commercial arithmetic of ca. 1445 (see appendix A, third problem), appearing in a section that obviously shares a common source with Ms 10106. However, the rest of that fragment rather employs the term *partidor*, and *partidor* is also the term used in all the other medieval Catalan and Castilian treatises known to date.
On the other hand, the expression *la colona onde los rotos toman regla* is used in the manuscript to refer to the product of the denominators of a composite fraction (see below for composite fractions), a meaning that is consistent with the former one that has been explained for *colona*. This can be seen, for instance, in problems [48] and [54].

under the column formed by all the invested quantities,[24] and perhaps that term became a short way to refer to the sum of all the quantities in the column. In fact, the Western Muslim al-Qalaṣādī (1412–1486) used diagrams with columns for this kind of problems. Numbers were placed in squares inside each column, with the total invested sum occupying the top of the third column,[25] so perhaps, if further evidence is found, the use of this word can be related to Arabic sources.

The unusual expression *amenua amos a dos los nombres a tanto como puedas por una regla* appears several times, telling the reader to divide two numbers by common divisors as much as possible. Finally, we should also mention the use of the term *verga* (from the Latin *virgula*) to refer to a composite fraction, and not only to the horizontal line that separates the numerator from the denominator of a fraction. While this term (sometimes in similar forms such as *vergha* or *verghe*) with this second meaning is common in many Italian treatises,[26] we found it in its first meaning only in one Italian abbacus treatise (late 13th-c.).[27]

On the other hand, we do find expressions that are typical of the abbacus tradition, such as *Et por aquesta regla farás todas las semejantes rasons* ("and by this rule you will do all similar exercises") or *Aquesta es la regla* ("this is the rule [to solve the problem]").

In several problems, the statement and the final solution are repeated after the explanation of the solving process. This practice could be aimed at providing a quick reference for the teacher.

Problems are often not ordered according to the degree of difficulty and proofs are rarely included.

CONTENTS OF THE MANUSCRIPT

We will use paragraph numbers for reference (see our edition of the full text below). Every single paragraph but the first corresponds to a solved

---

24 An example by Juan de Ortega (1512), that is reproduced in [Docampo Rey 2004, p. 341 (note 69)] illustrates this point perfectly. Similar diagrams are frequent in medieval commercial arithmetic treatises.

25 See [Woepcke 1858–59, pp. 258–259].

26 This term is almost completely absent from the abbacus treatises in the Iberian Peninsula that we have seen, where we usually find terms like *vírgula* or *raya/ raia*. We did find a single appearance of "verga" in [Ventallol 1521, f. 72^{r}].

27 See [Arrighi 1989, pp. 69–70, and others]. Note that in this Italian treatise the term appears in problems which can be found in the *Liber abaci* (see [Høyrup 2005, p. 47]); but Fibonacci himself only uses the term *virgula* to refer to the fraction line in them.

exercise. The text starts with a short comment on the numeration system [1]. After that, the author deals with divisions involving fractions [2–11], progressions [12–14], numerical problems concerning the finding of up to three numbers verifying some given conditions [15–29], the calculation of prices using the rule of three and involving metrological conversions [30–54], money exchange [55–59], buying and selling [60–61], partnership [62–63], barter [64] and alligation [65–74].

The manuscript starts with a reference to a previous statement: "as we have already told, a figure alone means unity,…". That previous part could belong to another work or it could have been on some lost page preceding the current beginning.

In the section on divisions involving fractions we find a lot of composite fractions (see below). Some of the examples require long and tedious operations; illustrative diagrams are included for all cases but one. These facts attest to the importance that was given to operations with fractions.

The short section on progressions contains applications of properties concerning the sum of the first n terms of an arithmetic progression.

A collection of numerical problems is included in the manuscript, almost all of them involving fractions (see Appendix B). They are problems of the kind "find a number such that if its $\frac{1}{3}$ and its $\frac{1}{4}$ are taken from it, the result is 12" [17] or "divide 13 in 3 parts such that the first multiplied by the third is the same that the second multiplied by itself" (i.e., find 3 quantities in geometrical progression whose sum is 13) [24]. Most of the problems are solved by the rule of simple false position.[28]

The longest series of problems in Ms 10106 concerns the calculation of prices. This part was very useful for future merchants, not only because it contains a large amount of examples to apply the rule of three, but also because these examples involve a lot of quantities in complex form and metrological conversions must be constantly performed. A lot of information about different systems of measures can thus be gathered from these problems.

The type of problem of the two first examples [55 and 56] in the section on money exchange can be found in some Catalan treatises under the title *cambis duplicats*.[29] In general terms, they tend to follow this model: if a quantity a in money of A is the same as a quantity b in money of B and the quantity b' in money of B is the same as the quantity c in money of C, how

---

28 Very similar problems to most of those in this collection figure in chapter twelve of the *Liber abaci*.

29 See [Malet 1998, pp. 284–288], [Docampo Rey 2004, pp. 239–240]. This kind of problems also appear in the *Liber abaci*.

much money of C is a quantity a' of money of A ? Many medieval commercial arithmetics contain similar problems involving a compound proportion.[30] They were generally solved by a method that was sometimes known as the Rule of Five.[31] In our case, this could be expressed in this way:

$$x = \frac{a' \,.\, b \,.\, c}{a \,.\, b'}.$$

But this method was applied as a direct algorithmic rule. In the *Liber abaci*, these problems are generally solved with the aid of a diagram that allowed to easily visualize the steps that had to be followed. The general pattern of these diagrams could be represented in this way:[32]

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A & B & C \\ a & b & ? \\ a' & b' & c \end{array}}$$

The solution given in the Castilian manuscript, however, follows different steps which we can describe like this: multiply a by b' and put the result under A; then multiply c by b and put it under C:

$$\begin{array}{cc} A & C \\ a \,.\, b' & b \,.\, c \end{array}$$

Then, after reducing as much as possible both quantities (dividing both by common divisors until $s(a \,.\, b')$ and $s(b \,.\, c)$ are obtained) the following rule of three provides the final solution:

$$\begin{array}{cc} A & C \\ s(a \,.\, b') & s(b \,.\, c) \\ a' & ? \end{array}$$

Even when no diagram is actually included, it seems clear that the author used a representation of the problem in a table, since he uses expressions such as "put it [the result] under the *jaqueses*" (in [55]). The heading of an

---

30 They do not always involve just monetary units, but also units of weight, length, etc.

31 See, for instance, [Arrighi 1987, pp. 26–27].

32 See, for instance, [Sigler 2002, pp. 186–190] ; [Boncompagni 1857, pp. 122-125]. The places A, B and C appear in inverse order in the *Liber abaci*, supposedly because of the direct Arabic influence.

illustrative rectangle following the text of [55] suggests this as well. In [57], not five but seven quantities are involved, so solving it takes more steps.

The two problems in the section that we have named "buying and selling" [60–61] are applications of the rule of three to calculate the price at which a merchandise must be sold, given its cost for the seller and his desired benefit. As usual, several metrological conversions must be made.

The first two problems on partnership [62 and 63] present the most basic situation in which a proportional partition directly leads to the solution. Fractions appear in both cases. In the second case, three merchants have bought a ship and agree to share the benefits proportionally to three fractions which do not add up to one. [33]

The unique problem on barter (exchange of goods) [64] is very simple. Most of the problems on barter in commercial arithmetics of the time presented more complex situations in which part of the operation was made in cash, and different prices were given depending on each payment being made in cash or in goods.

The last section of the manuscript contains problems on alligation. In the first three cases [65–67] it is asked how much metal should be added or removed when its purity is modified and the total value has to be kept. Problems [68] and [69] are the most common alligation problems and are solved by the standard method, which can be expressed in this way: if $C_1 \ldots C_2$ are the quantities of the different constituents of the mixture, and $F_1 \ldots F_2$ their respective fineness, then the fineness of the mixture will be:

$$\frac{C_1.F_1 + \cdots + C_n.F_n}{C_1 + \cdots + C_n}.$$

In [70], a man has gold of three different prices. It is asked how much copper or silver (implicitly considered here of cost zero) must be added so that each mark (*marco*) of the mixture has a given price.

In [71] and [72], a man has three kinds of silver. Their prices and two of the three amounts are given, as well as the price of each mark of the mixture, and the third unknown quantity is asked for. In [73], two kinds

33 This kind of problem often appears in medieval arithmetics and appears to have a clear connection with Arabic partition of heritages; see [Labarthe 2005, pp. 273-275] and [Docampo Rey 2004, pp. 74, 169-170, 342]. Another example is also solved in the same way in the above-mentioned Castilian manuscript *De aresmética*, f. $150^{\text{r-v}}$. In the *Libro de Arismética que es dicho alguarismo*, this kind of proportional partition is considered one of the seven main operations (*espeçias*). Something similar happens in a Catalan merchants handbook of ca. 1390, where it is treated as if it was a particular kind of division. Proportional partition was considered a specific kind of division in Arabic writings from the Maghreb where it was called *al-muhāsāt*; see [Labarthe 2005, pp. 298-302, 307].

of gold (of 22 and 13 carats respectively) are mixed to obtain a mark of 16 carats.

The basic principles to solve such alligation problems can be found in chapter eleven of the *Liber abaci.* [34] But if one compares both texts, it is clear that the problems in the Castilian manuscript were not taken from that treatise. Moreover, the explanation of the solution of several of the alligation problems in Ms 10106 is also quite different from what can be found in the other known Catalan or Castilian texts [35] as well as from the explanations appearing in the Italian or French medieval arithmetics we have been able to consult.

The last problem [74] concerns a cup that is made of a mixture of silver, copper and gold in a given proportion. When a piece of it is broken, it is asked how much of each metal can be found in it. The pattern of the solving process is that of partnership problems (proportional partition).

It is interesting that problems very similar to [71, 73, and 74] are found in a fragment of a Catalan commercial arithmetic manuscript from around 1440-1450 which is preserved in Siena. [36] They are the first three problems that appear in that Catalan text, although the first one there is not complete. It is obvious that there is a common source for these problems in both texts and one must suspect that the lost part of the Catalan manuscript could have shown more coincidences with Ms. 10106. On the other hand, we find [74] also in Jacopo da Firenze's *Tractatus algorismi* (Montpellier, 1307). [37] In appendix A we have included the transcription of the first three problems of the Siena manuscript as well as Jacopo's version of the problem of the cup.

---

34 See [Williams 1995] for an analysis of some of the methods that were used by Fibonacci.

35 As a small exception to this rule, the explanation of problems [65 and 66] is quite close to that of two analogous problems in the arithmetic of Juan de Ortega, a Dominican friar from Palentia; see [de Ortega 1512, f. $153^{r\text{-}v}$].

36 See ff. 155^{r} -157^{v} of Ms. 102 (A.III 27) *Biblioteca degl'Intronati di Siena.* It was edited with a brief commentary in [Arrighi 1982], together with another Catalan abbacus manuscript of the same period. For a more detailed analysis of these manuscripts, see [Docampo Rey 2004, pp. 161-176].

37 See [Høyrup 1999, p. 49], [Høyrup 2007, p. 53]. The same problem, although with different numerical values, can already be found in a late 13th-century Italian abbacus manuscript; see [Arrighi 1989, p. 32]. An analogous problem, but involving the cup's lid instead of a broken part, and with different numerical values can be found in the *Libro de Arismética que es dicho alguarismo*; see [Caunedo del Potro & Córdoba de la Llave 2000, pp. 164 and 171].

COMPOSITE FRACTIONS: A DIRECT WEST MUSLIM INFLUENCE?

One of the most interesting features in Ms 10106 is the representation of composite fractions. The first known representation of fractions with the fraction line can be found in al-Ḥaṣṣār's *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār*. Al-Ḥaṣṣār was a Western Muslim author active in the 12th century.[38] This notation is used by all the later Maghrebian mathematicians and also by late medieval Egyptian authors. Al-Ḥaṣṣār defines several kinds of fractions, among which there are:[39]

– "simple fractions" [*kasr basīṭ*] $\frac{n}{m}$, with $n < m$;
– "joined fractions" [*kasr muttaṣil*] $\frac{n_2}{m_2}\frac{n_1}{m_1}$.

The integers in the numerator can be zero. The oral expression of the preceding fraction would correspond to:[40]

$$\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}\left(\frac{1}{m_1}\right).$$

Thus these "joined fractions" correspond to ascending continued fractions:

$$\frac{n_1 + \frac{n_2}{m_2}}{m_1}.$$

Thirdly, expressions of the following form are referred to as "different" (*muḫtalif*) fractions by al-Ḥaṣṣār:

$$\frac{n_2}{m_2} \quad \frac{n_1}{m_1}.$$

This expression represents the addition of both fractions, and would thus be read as: $\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}$.

These notations are used also for more than two components.

Leonardo of Pisa uses similar notations in his *Liber abaci*. Even though Latin is read from left to right, he writes these fractions in the order seen in Arabic treatises, and he also writes mixed numbers (numbers that are

38 For more information on al-Ḥaṣṣār and his works, see [Aballagh & Djebbar 1987], [Lamrabet 1994, pp. 56–60], and [Kunitzsch 2003]. The earliest known copy of the *Kitāb al-bayān* was made in Baghdad in 1194. Even though the Western Arabic forms of the numerals appear there in a list of correspondences with Eastern Arabic ones, the latter are used throughout the whole manuscript. The Western Arabic forms do appear in the other known copies (made in a period comprising the 14th, 15th, and 16th centuries). See [Kunitzsch 2003, pp. 189–190]. In 1271 the *al-bayān* was translated into Hebrew in Montpellier by Moïse Ibn Tibbon; see [Lévy 2003, pp. 281-282].

39 See [Djebbar 1992, pp. 232-233].

40 Arabic is always read from right to left, and this happens with fractions in general in Arabic treatises.

composed of an integer and a fraction) with the fractions on the left of the integer, as they appear in Arabic treatises.[41]

In Ms 10106 we also find these three kinds of fractions, but composite fractions are read from left to right. Thus, for instance, in the case of joined fractions we have:

$$\frac{n_1 \quad n_2}{m_1 \quad m_2} = \frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} \cdot \frac{1}{m_1} \qquad \frac{n_1 \quad n_2 \quad n_3}{m_1 \quad m_2 \quad m_3} = \frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2} \cdot \frac{1}{m_1} + \frac{n_3}{m_3} \cdot \frac{1}{m_2 \cdot m_1}.$$

These notations were therefore neither copied from the *Liber abaci*, and nor in all probability from Fibonacci's *Libro minoris guise* (which is lost today)[42]. Recall that Fibonacci studied in Bugia and was thus influenced by the mathematical practice of the Maghreb in the late 12th century. Considering that a significant part of the Maghrebian mathematical tradition may have originated in al-Andalus, one may reasonably think that the mathematics practised there had a direct influence on early abbacus texts in Castilian or Catalan.[43] Now, the only known Arabic author who noted composite fractions in the same order as the anonymous author of Ms 10106 seems to be Ibn al-Yāsamīn (d. 1204).[44] This scholar was born in the Maghreb, but his biographers suggest that he studied in Seville and taught and published his mathematical writings both in this city and in Marrakech.[45] It is difficult to determine if the use of these notations for composite fractions originated in al-Andalus or in the Maghreb.[46] Al-Ḥaṣṣār was probably educated in Seville and could have given lectures in this city, although it was in the Maghreb that his writings circulated and were taught.

41 We can also find composite fractions written in this order in a 15th-century Italian abbacus manuscript. See [Arrighi 1966, pp. 309–312 in the 2004 reprint]. On the other hand, in Italian abbacus literature, mixed numbers were usually written with the fraction on the right, as in Ms. 10106. There are even texts where we can find both orders of writing mixed numbers, depending on the chapter; see [Høyrup 2005, pp. 30-31, 44-45].

42 For the possible influence of this lost work of Leonardo Pisano's on the Italian abbacus tradition, see [Franci 2003; Høyrup 2005].

43 In fact, Jens Høyrup has given evidence that shows that "a Romance abbacus culture had already emerged when Fibonacci wrote the *Liber abbaci*", and that this culture was probably located in the Iberian Peninsula or in Provence. See [Høyrup 2005].

44 See [Djebbar 1992, p. 236 (note 54)].

45 See [Djebbar 2005, pp. 128, 132].

46 See [Djebbar 1992, p. 231]. In the introduction of the *Bayān*, al-Ḥaṣṣār mentions, in general terms, his own contribution as well as that of his predecessors as sources of the book. But in his *Kitāb al-Kāmil*, he mentions the works of az-Zahrāwī and Ibn as-Samḥ, two 11th-century Andalusian mathematicians, as the sources for some parts of his treatise; see [Aballagh & Djebbar 1987, pp. 153–154].

On the other hand, an Italian abbacus manuscript known as the "Columbia Algorism" (a 14th-century copy of a late 13th-century original), which was composed in or around Cortona, contains occasional representations of composite fractions. In some cases they are written to be read from right to left, in others from left to right. [47] These occasional examples remind us that we cannot exclude the existence of an Italian source for the writing of composite fractions in Ms 10106. Finally, the notation could also have its origin in the work of a translator from Arabic to Latin who inverted the order in which composite fractions and mixed numbers were represented in the original text, and this could also have been made by someone studying Fibonacci's works. Still, as we have seen, it is at least possible that these representations of composite fractions are related (more or less directly) to Ibn al-Yāsamīn's writings, or another, as yet unidentified Western Muslim author. [48]

As to the other two medieval abbacus manuscripts in Castilian that have been found so far, the short handbook entitled *De aresmética* (see ff. 155^{r}–159^{r}) represents composite fractions in the same order as does our Ms 10106, although the fractions are not joined by a single line, but are written down separately:

$$\frac{n_1}{m_1}\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}\cdot\frac{1}{m_1},\qquad \frac{n_1}{m_1}\quad\frac{n_2}{m_2}\quad\frac{n_3}{m_3}=\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}\cdot\frac{1}{m_1}+\frac{n_3}{m_3}\cdot\frac{1}{m_2\cdot m_1}.$$

In certain exercises of the *Libro de Arismética que es dicho alguarismo* composite fractions are used, but no notation for them appears in the preserved copy of this treatise, even though it seems clear that it did appear in the source used by the author. In fact, everything seems to suggest that, in that notation, composite fractions were represented in the same order as in the other two Castilian manuscripts, although we cannot know whether they were joined using a single line or not. [49]

---

47 See [Høyrup 2005, p. 31 (note 10)].

48 It would be interesting to compare the Ms. 10106 with works like al-Yāsamīn's *Talqīḥ al-afkār* [the spirits graft] to look for any possible significant (though in all probability indirect) connection.

49 See [Caunedo del Potro & Córdoba de la Llave 2000, pp. 182–185, 190]. Expressions like *pornas tus números de la guisa que aquí están e después que los ovieres puesto de la manera que ayuso están*, (...) (p. 184, lines 38-39) ["you will place your numbers in the way they are here, and after you have placed them in the way they are below, (...)"] strongly suggest that the representation was used in the original source that was used in this part of the treatise, although it is lacking in the copy that has been preserved. In order to follow the explanation of the solving process in the example in which these expressions appear [105] (pp. 184-185), one has to take into account that 1 *cafiz* = 12 *fanegas*, 1 *fanega* = 12 *celemines* (units of capacity). There are several mistakes in the text: the number of *fanegas* in the initial quantity of wheat (*trigo*) should be 5 (not

Composite fractions are useful to deal with quantities that are given in complex form. For instance, in problem [48] it is asked which is the price of 7 *marcos* 5 *onças* 1 *quarto* and $17\frac{1}{2}$ *quirates* of gold in Valencia, if a single mark of it costs 84 *libras* 8 *sueldos* 4 *dineros*. These two quantities are easily transformed in mixed numbers with composite fractions: [50] $7\frac{5\quad 1\quad 17\quad 1}{8\quad 4\quad 36\quad 2}$ and $84\frac{8\quad 4}{20\quad 12}$ before the problem is solved by a rule of three. In fact, al-Ḥaṣṣār is said to have declared that fractions could not exist if they were not referred to concrete units as the *dinars*, the *dirhams* and similar objects. [51]

CONCLUSION

The contents in Ms 10106 are common in most of the commercial arithmetics of its time. However, this Castilian treatise shows some important characteristic features, like the representation of composite fractions, the use of an unusual terminology, and a quite particular way of performing certain procedures (as happens in the compound proportion problems). These features suggest the possible existence of a so far unexplored line of transmission of medieval commercial arithmetic, an existence that would have to be confirmed by significant coincidences with other manuscripts (some of which are probably still to be found). [52]

What is clear now is that this treatise has connections with the Catalano-aragonese area, and at least part of it shares a common source with a 15th-century Catalan arithmetic preserved in Italy. The dating of both

---

7); in line 40 (p. 184), one should read "por los 12 que están de yuso" (not "por los 2 que están de yuso"); in lines 6 and 9 (p. 185), both 1744 and 1746 should be 1764 (the result of multiplying 147 by 12). It must also be observed that, although the initial question is how much is a *cafiz* of wheat, it is actually the price of a *fanega* which is computed. This result comes from dividing 1764 by 1075, which, taking into account the usual equivalences 1 *maravedí* = 10 *dineros* and 1 *dinero* = 6 *meajas*, should be 1 *maravedí*, 7 *dineros* and $4\frac{158}{1075}$ *meajas*, while the result that appears in the edition of the text is "un maravedí e 6 dineros, 2 medias, un 1/3 de meaja e 10 47/74 aos de meaja". Considering how the words *delante* and *adelante* are used in different parts of the *Libro de Arismética* (see, for instance, pp. 134-135, 150, and 183-185), where it generally means "after" (in the sense of "to the right"), it seems very likely that, in the source that was being used by the author, composite fractions were written in the same order as in Ms. 10106.

50 One must have into account that 1 m. = 8 oz., 1 oz.= 4 q^{o}, 1 q^{o} = 36 q., 1 *l.* = 20 s., 1 s. = 12 d.

51 See [Aballagh 1988, p. 145].

52 We have compared this arithmetic to several 15th-century treatises in French and Occitan, but have not found any significant coincidences so far.

manuscripts, and the fact that problem [72] does not appear in the Catalan manuscript, while [71, 73 and 74] do, and in the same order, suggest that the Castilian text is closer to this common source. On the other hand, the way in which composite fractions are represented in Ms 10106 suggests several possibilities, among which there is the relation of this work with certain texts composed in al-Andalus or in the Maghreb. In fact, the special interest in fractions that one finds in this treatise and also in other Castilian manuscripts is also characteristic of several Western Muslim texts.[53]

We believe that collaboration among investigators of vernacular, Latin, Arabic and Jewish medieval arithmetic traditions is growing more desirable every day as more treatises are available for study. Such joint efforts will not fail to produce a better knowledge of the origins and transmission of European commercial arithmetic.

EDITION OF THE TEXT

We have restituted the first letter of each paragraph where it is lacking, and paragraph numbers have been added in brackets in order to facilitate reference. Modern punctuation marks and accents have been added and we also have separated words, spelled out abbreviations, and normalized capital letters. Missing words and letters are inserted in brackets and *italics* will be used for uncertain readings. Since the author always uses *n* and not *m* before *b* or *p* in cases where no abbreviation is used, we have also transcribed *n* in corresponding abbreviations, even though the manuscript makes it very difficult to decide between *m* and *n*. A raised dot is used to indicate contractions that are not represented in the modern language.

As was common in medieval manuscripts, we find *u*/*v* and *i*/*j* as graphical variants of the same letter, used both as a vowel and a consonant. In the first case, we have consistently supplied the vocalic or consonantal value of the letter. In the second case, we have kept the form in the manuscript when transcribing numbers in the Roman system and we have used *i* otherwise.

The Latin conjunction *et* ("and") gradually turned into *e* in Medieval Castilian texts, but symbols that were between *et* and *e* were used in many of these texts, making it difficult to decide how to transcribe them.[54]

53 See [Djebbar 1992, pp. 231–232].

54 See [Millares Carlo 1983, vol. 2, pp. XI-XII].

Moreover, one finds *et* and *e* used alternatively in printed texts like Santcliment's Castilian version of his *Summa* (ca. 1487). In Ms. 10106 this conjunction is represented most of the time by one of those "intermediate" symbols (and similar versions), and less often by *e*. Sometimes one even finds both forms in the same sentence. We always transcribe the symbol as *et* when it is used for the copulative conjunction, and by *e* when it appears inside a word (clearly meaning *e*).

Numerical mistakes in the manuscript have been emended. If *a* is the correct value and *b* is the wrong one appearing in the manuscript, we write *a* [#*b*]. Letters, words or sentences that make no sense where they appear have been put in { }.

We have transcribed neither the dots nor the lines that sometimes appear on both sides of numbers (·1·, ·2·,... or /1/, /2/,...), as was customary in some medieval treatises.

MS 10106 BIBLIOTECA NACIONAL (MADRID), FF. 1R-16V

f. 1^r

[1] Segunt que ya avemos dicho una fegura sola sinifica unidat, así commo 1 senefica uno et dos feguras en unno así puesta 21 sinifican vey[n]te e unno. E otrosý tres figuras asý puestas sinifican 321 cccxxj. Otrosí quatro feguras asý fechas 4321 sinifican iiij̊ Vcccxxj. Otrosí cinco figuras así puestas 54321 sinifican Liiij̊ Vcccxxj. Otrosí seis [#tres] figuras atales 654321 sinifican dcLiiij̊ Vcccxxj. Otrosí siete figuras atales 7654321 sinifican vij̊ VVdcLiiij̊ Vcccxxj. Otrosý ocho figuras así puestas 87654321 synifican Lxxx vij̊ VVdcLiiij̊ Vcccxxj. Otrosí nueve figuras atales 987654321 sinifican ixLxxx vij̊ VVdcLiiij̊ V[ccc] xxj. Et la más ligera et la más presta connosçençia de leer a tales.

[2] Capítulo de la quarta de la postrimera regla abba, eso es partir por rotos et por entregos segunt que luego se sigue. Primeramente, si quisieres parte ~~ql~~ $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{3}$ multeplica 1, que es sobre 4, por 3, fasen 3. Otrosí multiplica 1, que es sobre 3, por 4, fasen 4. Agora parte 3 por 4, et valen $\frac{3}{4}$. Et si quisieres partir $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$ parte 4 por 3, valen $1\frac{1}{3}$. Et otrosí si quisieres partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ multiplica 4, que es sobre 5, por 3, et fasen 12. Et ponlo aparte. Otrosí multiplica 2, que es sobre 3, por el 5, et fasen 10. Agora parte 12 por 10, et vale $1\frac{1}{5}$. Et por aquestas dos maneras de reglas lo puedes ffaser de todos los senblantes rotos.

$\frac{1}{4}$por $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$por $\frac{1}{4}$	$\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$
3 por 4	4 por 3	12 por 10
valen $\frac{3}{4}$	valen $1\frac{1}{3}$	valen $1\frac{1}{5}$

[3] Otrosý, si quisieres partyr {d} $\frac{2}{3}\frac{4}{5}$ por $\frac{4}{7}\frac{5}{9}$, aquesta es la regla: multiplicar 2, que es sobre 3, por 5, fasen 10. Pues multiplica 4, que es sobre 5, por 3, fasen 12. Iunta en uno 10 et 12, son 22. Aquestos 22 se quieren multiplicar por 7 e la suma por 9. Fasen en suma 1386, tanto son las ~~do~~ 2 vergas primeras redresat. Otrosí toma 4, que es sobre 7, et mutiplícalo por 9, fasen 36. Pues toma 5, que es sobre 9, et mutiplícalo por 7, fasen 35. Ayunta en uno 36 e 35, fasen 71. Aqueste 71 se quiere multiplicar por las dos vergas //$\mathbf{1}^{\mathrm{v}}$ primeras, eso es por 5, e la suma por 3, fasen 1065. Amenua amo[s] a dos los mienbros nombres a tanto commo podrás por eguales rreglas antes que partas. Finalmente le verrná entero $1\frac{21}{71}\frac{2}{5}$. Et aún lo puedes faser por otra manera: tú deves buscar un nombre en que sean todos los rrotos. Et sy lo quisieres fallar multiplica 3 por 5, et la suma por 7, e la suma por 9; fasen 945. Aqueste es el nombre en que todos toman rregla. Agora toma los $\frac{2}{3}$ e los $\frac{4}{5}$ de 945, que es 1386. Pues toma los $\frac{4}{7}$ e los $\frac{5}{9}$ de 945, son 1065. Agora parte 1386 por 1065. Aminúa amos a dos los nombres tanto commo podrás antes que partas. Finalmente valen segund que desuso es dicho $1\frac{21}{71}\frac{2}{5}$.[55]

$\frac{2}{3}\frac{4}{5}$ por $\frac{4}{7}\frac{5}{9}$	
1386 por 1065	
valen $1\frac{21}{71}\frac{2}{5}$	

[4] Otrosí, sy quisiéredes partyr $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, aquesta es la rregla: es atal commo la sobre dicha, et por aquella mesma rregla se puede faser, eso es, a saber, rredresar las primeras 3 vergas. Et tomarás 1, que es sobre 2, e multiplícalo por 3, e la suma por 4; fasen 12. Et ponlos aparte. Pues toma 1, que es sobre 3, e multiplícalo por 4, e la suma por 2; fasen 8. E pon 8 con el 12 que avíes puesto. Pues multiplica 1 por 3, e la suma por 2, fasen 6. Agora ayunta en uno 12 et 8 e 6, fasen 26. Aqueste 26 se quiere multiplicar por las {las} otras tres vergas, eso es por 4, e la suma por 5, e la suma por 6; fasen ~~31~~ 3120, e tanto son las primeras 3 vergas rredresadas. Otrosí toma

55 The style of the following illustrative rectangle reminds us of some representations appearing in the *Liber abaci*. See, for instance, [Boncompagni 1857, p. 66].

1, que es sobre 4 de las otras vergas. Multiplícalo por 5, e la suma por 6, fasen 30. Ponlo aparte. Pues multiplica 1, que es sobre 5, por 6, e la suma por 4; //**2^{r}** fasen 24. Et ponlo çerca de 30. Pues multiplica 1, que es sobre 6, por 5, e la suma por 4; fasen 20. E ponlos con los otros que avías puestos. Agora ayunta en uno 30 et 24 et 20, fasen 74. Este 74 se quiere mutiplicar por las primeras 3 vergas, eso es por 2, e la suma por 3 e la suma por 4; fasen 1776. E aminúa amos a dos los nombres por eguales rreglas antes que partas. Finalmente fincan 65 a partir por 37, de que le viene $1\frac{28}{37}$. A tanto fase la rrasón. Otrosý lo puedes faser por otra manera que avemos mostrado en los otros capítulos sobre dichos, eso es guarda 1 nombre, el menor que puedas en que todos los rotos puedan tomar regla por entregos, el qual es 60. Agora toma el $\frac{1}{2}$, el $\frac{1}{3}$, el $\frac{1}{4}$ de 60; et es 65. Et pues toma el $\frac{1}{4}$, el $\frac{1}{5}$, el $\frac{1}{6}$ de 60, que es 37. Agora parte 65 por 37, que valen $1\frac{28}{37}$. Et por aquestas 2 rreglas lo podrás faser de atantos rrotos commo te quieras, eso es a saber de rrotos que sean rrot so una verga $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, 3120 por 1776. Aminuados fincan 65 a partir por ~~7~~ 37, valen $1\frac{28}{37}$.

[5] Otrosí, sy quisieres partir nombres sin entregos, así commo a partir 5 por $\frac{2}{3}$, aquesta es la rregla: multiplica 5 por 3, que es so la verga, fasen 15. Parte por 2, que es sobre 3, et valen $7\frac{1}{2}$. Et atanto es a partir 5 por $\frac{2}{3}$. Otrosí, sy quisieres partir el rroto por el entero, así commo $\frac{2}{3}$ a partir en*tre* 5, multiplica 5 por 3, fasen 15. Parte 2, que es sobre 3, por 15, valen $\frac{2}{15}$. Et por esta rregla podrás partir entregos por rrotos et rotos por entregos.[56]

5 por $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ por 5	7 por $\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$ por 7
15 por 2	2 por 15	63 por 4	4 por 63
valen $7\frac{1}{2}$	valen $\frac{2}{15}$	valen $15\frac{3}{4}$	valen $\frac{4}{63}$

f. 2^{v}

[6] Otrosý, si quisieres partir 5 por $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$ multiplica 5 por 3, e la suma por 8; e fasen 120. Atanto es *el* entrego redresat por las vergas. Et pues 1, que es sobre 3 et multiplica·l por 8. Pues toma çinco, que es sobre 8, multiplícalo por 3, fasen 15. Ayunta en unno 8 e 15, fasen 23. Agora parte 120 por 23, valen $5\frac{5}{23}$. Et por aquesta otra manera se puede faser: tú puedes desir que $\frac{1}{3}\frac{1}{8}$ se falla en 24. Pues mutiplica 5 con 24, fasen 120. Pues toma el ~~tere~~ $\frac{1}{3}$

56 The central vertical line in the following figure is struck out in the manuscript and the vertical sides of the rectangle are missing.

de los $\frac{5}{8}$ de 24, que es 23. Parte 120 por 23, valen $5\frac{5}{23}$. Et por aquestas dos maneras lo podrás faser de quantos rotos con entregos commo te querrás. Et sy quisieres partir los rotos por el nonbre entrego, eso es $\frac{1}{3}\frac{5}{8}$ a partir por 5, redrésalo así commo de suso se contiene e parte 23 por 120, valen $\frac{23}{120}$.

5 por $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{8}$	$\frac{1}{3}$et $\frac{5}{8}$ por 5
120 por 23	23 por 120
valen $5\frac{5}{23}$	valen $\frac{23}{120}$

[7] Otrosý, si quisiéredes partir 5 por ~~dos~~ $\frac{2\ \ \ 1\ \ \ 4}{3\ \ \ 4\ \ \ 5}$, aquesta es la regla: multiplica 5, que es entrego, por 3, et la suma por 4, et la suma por 5; fasen 300. Et otrosý multiplica 2, que son sobre 3, por 4, iunta uno de la suma, por 5, iunta 4; fasen 49. Agora parte 300 por 49. Guarda la regla de 49, valen 6 [#5] $\frac{\ \ \ \ 6}{7\ \ \ 7}$.[57] Et sy quisieres partir los rotos por los entregos, eso es $\frac{2\ \ \ 1\ \ \ 4}{3\ \ \ 4\ \ \ 5}$ por 5, redrésalo segunt que de suso es dicho. Et partirás 49 por 300. Et guarda la regla de 3, et valen $\frac{10\ \ \ 3}{300}$ [58]. Et por esta regla farás todas las semeiantes rasons de partir nonbres entregos por rotos que son so 1 verga, et los rotos por los entregos.

$\cancel{5}\frac{2\ \ \ 1\ \ \ 4}{3\ \ \ 4\ \ \ 5}$	$\frac{2\ \ \ 1\ \ \ 4}{3\ \ \ 4\ \ \ 5}$
300 por 49	49 por 300
valen 6 [#5] $\frac{\ \ \ \ 6}{7\ \ \ 7}$	valen $\frac{49}{300}$

f. 3$^{\mathrm{r}}$

[8] Otrosý, si quisieres partir 5 por $\frac{2\ \ \ 3\ \ \ 4}{3\ \ \ 4\ \ \ 5}\frac{5\ \ \ 6\ \ \ 7}{6\ \ \ 7\ \ \ 8}$, multiplica 5 por todos los rotos que son so amos a dos las vergas, eso es por 3, et la suma por 4, et la suma por 5, et la suma por 6, et la suma por ~~8~~ 7, et la suma por 8; fasen 100800. Et atanto es 5 redresat con las 2 vergas. Pues 2, que es sobre 3, [por 4; iunta 3], et la suma por 5; iunta 4, et la suma por la otra verga, eso es por 6, et la suma por 7, et la suma por 8; fasen suma 19824. Et ponlo a parte. Otrosí toma 5, que es sobre 6, multiplícalo por 7; iunta

57 This composite fraction would be the same as $\frac{0\ \ \ 6}{7\ \ \ 7}$.

58 The result is $\frac{49}{300}$. It seems that the autor is trying to write this fraction as a composite fraction. However, it is not clear what he means when he writes $\frac{10\ \ \ 3}{300}$. The result $\frac{49}{300}$ could be written, for instance, as $\frac{1\ \ \ 19}{10\ \ \ 30}$.

6 et la suma por 8; iunta 7 et la suma por la primera verga, eso es por 5, et la suma por 4, et la suma por 3; fasen en suma 20100. Agora ayunta en unno 19824 con 20100, son 39924. Guarda la su regla et aminúa eso que podrás aminuar por eguales reglas. Finalmente valen 2 $\frac{582}{1109}$. Et sy quisieres partir rotos por el entrego, eso es $\frac{2\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 6\ \ 7}{3\ \ 4\ \ 5\ 6\ \ 7\ \ 8}$ por çinco, redrésalo segund que de suso se contiene et pues partirás 39924 por 100800. Aminúa eso que podrás aminuar. Pues guarda la su regla et venir le ha $\frac{13\ \ 30\ \ 24}{33\ \ 61\ \ 310}$.

5 por $\frac{2\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 6\ \ 7}{3\ \ 4\ \ 5\ 6\ \ 7\ \ 8}$	$\frac{2\ \ 3\ \ 4\ 5\ \ 6\ \ 7}{3\ \ 4\ \ 5\ 6\ \ 7\ \ 8}$ por 5
100800 por 39924	39924 por 100800

[9] Otrosý, si quisieres partir nonbres entregos con rotos et por otros nonbres entegros con rotos 4 $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ por 3 $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$, aquesta es la regla: multiplica 4 por 3, et la suma por 4, fasen 48. Ponlo aparte. Pues mutiplica 1, que es sobre 3, por 4, fasen 4. Otrosý multiplica 1, que [es] sobre 4, por 3, fasen 3. Iunta e[n] uno, et 4 et 3 son 7. Iunta un con los 48 que aví[a]s puesto, son 55. Aqueste 55 se quiere mutip[licar] por las otras vergas, eso es por 5, et la suma por 7; e son 1925. Et atanto es 4 con las sus vergas redresad. Otrosý multiplica el otro nonbre, eso es 3 por 5, et la suma por 7; fasen 105. Ponlo aparte. Pues toma uno, que es sobre 5,//**3**$^{\mathrm{v}}$ et multiplícalo por 7, fasen 7. Pues toma 1, que es sobre 7; multiplícalo por 5, fasen 5. Ayunta 7 con 5, fasen 12. Ayunta 12 con 105 que avíes puesto aparte, fasen 117. Aqueste 117 se quiere multiplicar por primeras vergas, eso es por 4, et la suma por 3; fasen 1404 ~~fasen~~. Agora parte 1925 por 1404. Aminúa si podrás aminuar amos a dos los nonbres. Pues guarda la rregla. Finalmente fallarás que le viene 1 $\frac{521}{1404}$. Et aún lo puedes faser por otra manera, eso es, guarda 1 nonbre ~~que~~ de que todos los rotos puedan tomar regla, eso es $\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{7}$, el qual nonbre es 420; et [multiplícalo por 4], fasen 1680. Ponlo aparte. Pues toma el $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ de 420, que es 245, et ayunta al 1680; fasen 1925. Et tanto 4 con las sus vergas. Otrosí multiplica 3 por 420, fasen 1260, et ponlo aparte. Pues toma el $\frac{1}{5}$, el $\frac{1}{7}$ de 420, que es 144; ayúntalo con 1260, son 1404. Agora parte 1925 por 1404. Aminúa amos a dos los nonbres atanto commo podrás. Pues guarda la su regla. Et finalmente valen atanto commo es dicho de suso, eso es 1 $\frac{521}{1404}$.

4 $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ por 3 $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$	
1925 por 1404	
valen entrego 1 $\frac{521}{1404}$	

[10] Otrosí, sy quisieres partir nonbres entregos con 2 vergas de rrotos por otro nonbre de su senblante así commo sya $4\,\frac{1\ \ 3\ \ 2}{2\ \ 4\ \ 5}\frac{2\ \ 4\ \ 5}{3\ \ 7\ \ 6}$ a partir por $3\,\frac{5\ \ 1\ \ 2}{8\ \ 2\ \ 3}\frac{1\ \ 2\ \ 3}{9\ \ 5\ \ 4}$. Aquesta es la rregla: multiplica 4, que es entrego, por 2; iunta 1, e la suma por 4; iunta 3, e la suma por 5; iunta 2, et ł pues la suma [por la] segunda verga, eso es por 3, e la suma por 7, e la suma por 6; fasen 24822. Et ponlo aparte. Pues toma 2, que es sobre 3 de la segunda verga, et multyplícalo por 7; iunta 4, e la suma por 6; iunta 5, e la suma por la primera verga, eso es por 5; e la suma por 4, e la suma por 2; fasen 4520 [#2300]. Ayúntalo con 24822; fasen 29342 [#27122]. Aqueste se quiere multiplicar por las otras vergas, eso es por 8, e la suma por 2, e la suma por 3, e la suma por la quinta verga, eso es por 9, e la suma por 5 e la suma por 4; fasen //**4ʳ** en suma 253514880 [#233534080]; et atanto fase el 4 redrasat con las sus vergas. Et multiplica 3, que es entrego, por 8; iunta 5, e la suma por 2; iunta 1, e la suma por 3; iunta 2 [...].[59]

$4\,\frac{1\ \ 3\ \ 2}{2\ \ 4\ \ 5}\frac{2\ \ 4\ \ 5}{3\ \ 7\ \ 6}$ por $3\,\frac{5\ \ 1\ \ 2}{8\ \ 2\ \ 3}\frac{1\ \ 2\ \ 3}{9\ \ 5\ \ 4}$

253514880 por 169888320

valen $1\frac{9679}{19663}$

[11] Otrosý, si quisieres partir nonbres entregos con 3 vergas de rrotos con otros no[n]bres de su senblante, así commo sería $4\,\frac{1\ \ 2\ \ 5}{5\ \ 3\ \ 6}\frac{1\ \ 1\ \ 3}{4\ \ 2\ \ 7}\frac{1\ \ 3\ \ 4}{6\ \ 8\ \ 9}$ a partir por $3\,\frac{2\ \ 5\ \ 3}{7\ \ 9\ \ 4}\frac{1\ \ 2\ \ 5}{8\ \ 5\ \ 6}\ \frac{1\ \ 1\ \ 2}{2\ \ 4\ \ 3}$. Aquesta es {a} la rregla: multiplica 4, que es entrego, por 5; iunta 1, e la suma por 3; iunta 2, e la suma por 6; iunta 5. Pues la suma por la segunda verga, eso es por 4, e la suma por 2, e la suma por 7, e la suma por la terçera verga, eso es por 6; e la suma por 8, e la suma por 9; fasen 9555840 [#9555940]. Et ponlo aparte. Et pues finalmente le viene $\cancel{1\frac{25}{28}}$ $1\frac{11714}{64731}$ [# $\frac{2378}{21577}$].[60]

59 We have corrected several mistakes appearing in the next rectangle: in the manuscript we see $\frac{1\ \ 2\ \ 1}{9\ \ 5\ \ 9}$ instead of $\frac{1\ \ 2\ \ 3}{9\ \ 5\ \ 4}$, 2343344080 instead of 253514880 and $\frac{2238}{21577}$ instead of $\frac{9679}{19663}$.

60 We have corrected several mistakes appearing in the next rectangle that is included in the manuscript, where we read $\frac{1\ \ 1\ \ 3}{4\ \ 2\ \ 0}\frac{2\ \ 5\ \ 3}{6\ \ 8\ \ 9}$ instead of $\frac{1\ \ 1\ \ 3}{4\ \ 2\ \ 7}\frac{1\ \ 3\ \ 4}{6\ \ 8\ \ 9}$, and $\frac{2238}{21577}$ instead of $\frac{11714}{64371}$.

$4\,\frac{1}{5}\frac{2}{3}\frac{5}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{1}{6}\frac{3}{8}\frac{4}{9}$ por $3\,\frac{2}{7}\frac{5}{9}\frac{3}{4}\frac{1}{8}\frac{2}{5}\frac{5}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{2}{3}$

15978448281600 por 13530001121280

valen $1\frac{11714}{64731}$

[12] Otrosí, sy quisieres asumar todos los nonbres pares de 1 fasta en 20, asý commo 2 iunto con 4 et 6 et co[n] 8, así por esta vía fasta en 20, que non metas y ningún dispar. Aquesta es la rregla: toma la meytad de 20, que es 10, et //**4^{v}** mutyplícala por 1 más de 10, eso es por 11. Agora mutiplica 10 por 11, fasen 110. Tantos son los nonbres pares de 1 fasta en 20. Et si el nonbre mayor era de 1 fasta 23, et quisieres asumar todas las partes que son de 1 fasta en 23, toma la mayor[61] meytad entrega, que es 11; mutiplícala por 1 más, eso es por 12, onde multiplica 11 con 12; fasen 132. Tantos son los pares que son de 1 fasta 23. Et por aquesta rregla farás de quantas te querrás.

[13] Otrosí, si quisieres asumar todos los no[n]bres dispares que son de 1 fasta en 20, así commo 1 iunto con 3, e con 5, e con 7, et con 9, que non y metas ningún nonbre par. Aquesta es la rregla: toma la meytad de 20, que es 10, et multiplícala en sý mesma, onde dy: 10 con 10 fasen 100, e atantos son los dispares de 1 fasta en 20. Et sy el nonbr[e] mayor era dispar, así commo 23, et quisieres asumar todos los dispares, toma la mayor parte, eso es, la mayor parte entrega que y es, que es 12. Et multiplícalo en sý mesmo: 12 con 12 fasen 144. Et atantos son ayuntados todos los dispares que son de 1 fasta en 23. Et por esta rregla lo puedes faser de atantas commo te querrás.

[14] Dos omnes parten de un lugar en una ora e en un punto. El primero omne va cada día 20 millas. El segundo omne va el primero día una milla, e el segundo día 2 millas, e el terçero día va 3 millas, e así cada un día va creçiendo una milla. Dime en quántos dias avrá aqueste omne segundo conseguido al primer omne que cada un día va 20 millas e non más. Aquesta es la rregla: guarda el primero omne que va cada un día 20 millas e dobla 20, son 40. Abate 1 de 40, fincan 39. En tantos días lo avrá conseguido, eso es en 39 días. Et sy lo quisieres provar mutiplica 20 con 39, fasen 780. Atantas millas avrá andado aquel que va 20 millas en 39 días. Et por la otra cuenta que a de 1 fasta en 39, toma la mayor meytad entrega de 39, que es 20, e mutiplica 20 con 39; fasen eso mesmo, 780. E

61 It should be "menor" (lesser) according to the correct rule that is applied.

así viene la rregla verdadera. E por ~~q~~ aquesta rregla farás las otras rrasones semeiantes a aquesta.

f. 5r

[15] Falla 1 tal nonbre[62] que las $\frac{2}{7}$ del 1 nonbre sea $\frac{3}{8}$ del otro nonbre. Aquesta es la rregla: mutyplica 2, que es sobre 7, por 8; fasen 16. Tanto es el 1 nonbre. Pues mutiplica 3, que es sobre 8, por 7; fasen 21. Tanto es el otro nonbre. Si quisieres provar la, $\frac{2}{7}$ de 21 fallarás que son 6. Otrosý las $\frac{3}{8}$ de 16 son 6. Et por esta rregla farás las semeiantes rrasones.

[16] Otrosí falla 3 tales no[n]bres que los $\frac{2}{5}$ del primero nonbre e $\frac{3}{7}$ del segundo nonbre que sean $\frac{4}{9}$ del terçero nonbre. Aquesta es la rregla: tú porrnás los rrotos así $\frac{2}{5}\frac{3}{7}\frac{4}{9}$. Mutiplica 5, que es debaxo de 2, por 3, que es sobre 7, e la suma por 4, que es sobre 9; fasen 60. Tanto es el primer nonbre. Otrosí mutiplica 7 por 4, que es sobre 9, e la suma por 2, que es sobre 5; fasen 56. Atanto es el segundo nonbre. Otrosí mutiplica 9 por 3, que es sobre 7, e la suma por 2, que es sobre 5; fasen 54. Tanto es el terçero nonbre. ~~s~~ Et si lo quisieres provar, tú lo fallarás que los $\frac{2}{5}$ de 60 es bien tanto commo los $\frac{3}{7}$ de 56 et commo los $\frac{4}{9}$ de 54. Et por aquesta rregla farás todas las otras rrasones semeiantes [a] aquesta.

[17] Otrosí, falla 1 tal nonbre que abatiendo $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, el rremaniente sea 12. Aquesta es la rregla: tú dirás que $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ se falla en 12. Toma $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de 12; es 7. Abate 7 de 12, fincan 5. Aqueste 5 sya colomnia, eso es el partidor, et dirás: 5 me es venido de 12, ¿ónde verrnán 12? Mutiplica 12 con 12, fasen 144; parte por 5, viene a la parte $28\frac{4}{5}$ [#$48\frac{4}{5}$]. Aqueste $28\frac{4}{5}$ [#$48\frac{4}{5}$] es el nonbre que abatiendo $\frac{1}{3}$ e el $\frac{1}{4}$, el rremaniente sea 12. Et por aquesta regla farás las semeiantes.

[18] Otrosí falla 1 tal nonbre que el su $\frac{1}{3}$ el $\frac{1}{4}$ iunto sobre sí mesmo faga en suma 21. Aquesta es la rregla: tú dirás que $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ se falla en 12. Toma $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ de 12, que es 7. Iunta 7 sobre 12, fasen 19. Aqueste 19 será colomnia, e dirás: si 19 e[s] venido de 12, ¿dónde verná 21? Mutiplica 12 con 21, fasen 252; pártelo por 19, vale $13\frac{5}{19}$. Aqueste $13\frac{5}{19}$ es el nonbre que·l su $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ iunto sobre sí mesmo fagan bien 21. E por aquesta rregla podrás faser las semeiantes rrasones.

62 Actually, the problem asks for 2 numbers, so it ought to start with "Falla 2 tales nombres (...)".

f. 5^v^

[19] Otrosí falla 1 tal nonbre que abatiendo el $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$, pues el rremaniente de aquel nonbre iunto sobre sí mesmo, eso es sobre el nonbre que avrás primero fallado, faga 21[#12]. Aquesta es la rregla: e dirá que $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ se falla en ~~dose~~ 12. Pues abate $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ de 12, finca 5. Pues iunta 5 sobre 12, fasen 17. Aqueste 17 fa colonia de aquesta cuenta. Pues dirás: si 17 es venido de 12, ¿ónde verná 21? Mutiplica 12 con 21, fasen 252; parte por 17, valen $14\frac{14}{17}$. Aqueste $14\frac{14}{17}$ es el nonbre que abatiendo el $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$, el rremaniente iunto sobre $14\frac{14}{17}$ fasen bien 21. Et por aquesta regla podrás faser las semeiantes rasones.

[20] Otrosí falla 1 tal nonbre que·l $\frac{1}{3}$ el $\frac{1}{4}$ de aquel nonbre sean 21. Aquesta es [la] rregla: dirás, si $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ se falla en 12, toma el $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ de 12, que es 7. Aqueste 7 será colomnia. Et dirás: si 7 es venido de 12, ¿ónde verná 21? Mutiplica 12 con 21; fasen 252; pártelo por 7, valen 36. Aqueste 36 es aquel nonbre que el su $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ fasen 21. E por aquesta rregla farás las semeiantes rasones.

[21] Otrosí falla 2 tales nonbres que·l $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ del 1 faga tanto commo el $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$ del otro nonbre, et que·l $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ del 1 nonbre faga mutiplicado por el $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$ del otro fagan otro atanto commo faríen iuntos en uno el $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$ del 1 con el $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ del otro nonbre. Aquesta es la rregla: et nota que no se falla ningún nonbre entrego que faga tanto iunto con sí mesmo commo mutiplicado en sí mesmo [salvo 2].[63] Et por eso buscarás 1 nonbre que·l $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ sea 2. Et fallarás por la regla del otro capítulo sobre dicho el qual nonbre es $3\frac{3}{7}$, et el otro $5\frac{5}{6}$. Et aquestos son aquellos 2 nonbres que·l $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ del 1 fasen bien tanto commo el $\frac{1}{5}\frac{1}{7}$ del otro, e fasen bien tanto commo faríen iuntos en uno. E por aquesta rregla farás de los semeiantes nonbres.

[22] Otrosí falla 2 tales no[n]bres ~~nob~~ que·l $\frac{1}{3}$ del 1 faga tanto commo el $\frac{1}{4}$ del otro no[n]bre, e que multiplicados aquellos 2 no[n]bres en uno fagan, eso es el 1 por el otro, fagan tanto commo amos a dos los nonbres farán en uno. Aquesta es la rregla: tú dirás que $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ se falla en 12. Toma el $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ de 12, que es 7; pues toma el $\frac{1}{3}$ de 12, que es 4. Parte 7 por 4, vale $1\frac{3}{4}$. Otrosí toma el $\frac{1}{4}$ de 12, que es 3. Parte 7 por 3, valen $2\frac{1}{3}$. Así es el primer nonbre $1\frac{3}{4}$ e el otro nonbre $2\frac{1}{3}$. E aquestos 2 no[n]bres son aquellos que·l $\frac{1}{3}$ de $1\frac{3}{4}$ es atanto el $\frac{1}{4}$ de $2\frac{1}{3}$. Et multiplicado $1\frac{3}{4}$ por $2\frac{1}{3}$ fasen bien atanto

63 The author states that there does not exist any number a such that $a.a = a+a$. Of course $a = 2$ does verify this condition and this fact is actually used in the subsequent solution of the problem.

commo amos a dos iuntos en uno. E por aquesta rrasón puedes faser las otras semeiantes.

f. 6^{r}

[23] Otrosí falla 1 nonbre tal que iunto sobre sí mesmo el su $\frac{1}{3}$ e el $\frac{1}{4}$ e 5 más fará 6 con atanto commo aquel no[m]bre que avrás fallado primero. [64] Aquesta es la rregla: tú dirás que $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ se falla[n] en 12. Pues toma el $\frac{1}{3}$ e el $\frac{1}{4}$ de 12, que es 7. Iunta 7 sobre 12, fasen 19. Estos 19 será colomnia. Pues toma el $\frac{1}{3}$ de 12, que es 4. Otrosí ~~multiplica~~ toma el $\frac{1}{4}$ de 12, que es 3. Multiplica 4 del $\frac{1}{3}$ por 3 del $\frac{1}{4}$, fasen 12. Parte 12 por 19, e valen $\frac{12}{19}$. Et aqueste es el nonbre que iunto sobre sí el su $\frac{1}{3}$ e el su $\frac{1}{4}$ e 5 más fará 6. Et por esta rregla farás las semeiantes rrasones.

[24] Otrosí si quisieres partir 13 en 3 tales partes que la primera parte multiplicada po·la terçera faga tanto commo la segunda multiplicada en sí mesma. Aquesta es la rregla: tú puedes desir que la primera sea tanto commo te querrás, onde puedes desir que sea 1 la primera parte. Dobla 1, serán 2 {et} por segunda parte {doblada}. Agora dobla la terçera, [65] 2 e 2 fasen 4. Ayunta en uno 1 e 2 e 4, fasen 7. Aqueste 7 será colomnia. Pues dirás: sy siete es venido de 1, ¿ónde verrnán 13? Multiplica 2 con 13 e parte la suma por 7, valen $3\frac{5}{7}$. 1 vegada 13 son 13; parte por 7, valen $1\frac{6}{7}$. Aquesta es la primera parte. Otrosí dirás: si 7 es venido de 2, ¿dónde verrná 13? Multiplica 2 con 13 e parte la suma por 7, e valen $3\frac{5}{7}$. E aquesta es la segu[n]da parte. Otrosí dirás: sy 7 es venido de 4, ¿dónde verrná 13? Multiplica 4 con 13, fasen 52; parte por 7, valen $7\frac{3}{7}$. E aquesta es la terçera parte. Et si lo quieres provar multiplica la primera parte por la terçera. Fallarás que fase bien tanto commo la segunda multiplicada en sí mesma. [66]

64 The sentence "con atanto commo aquel no[m]bre que avrás fallado primero" is not very clear. According to what is done to solve the problem, if we call x the number sought, the condition that has to be verified is $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 5 = 6$.

65 It should be "Agora dobla 2 para tener la terçera" ("Now double 2 to have the third one").

66 This is an indeterminate problem. The author uses a false position method in order to obtain those three quantities such that their sum is 13 and the product of the first by the third is equal to the product of the second by itself (i.e., three quantities must be found in geometric proportion such that their sum is equal to 13). The technique that is followed consists of taking three quantities a, b, and c that are in geometric proportion (whose sum we will call s), and applying a rule of three thrice: "if s comes from a (b, c), from which quantity would come 13?", the result being the first

[25] Otrosí si quisieres partir 13 en 3 tales partes que la primera parte sea meytad de la segunda parte e que la segunda sea meytad de la terçera, faser lo as todo asý commo as fecho en el capítolo sobre dicho e por aquella rregla mesma, et fallaras que fecho et que otro tanto le viene commo es dicho en el sobre dicho capítolo e non más. E otrosí, sy quieres multiplicar tantas vegadas $3\frac{1}{3}$ //**6ᵛ** que fagan 12. Parte 12 por $3\frac{1}{3}$, e faslo por la rregla de partir por rrotos. Et valen $3\frac{3}{5}$. E aqueste es aquel nonbre que multiplicando $3\frac{3}{5}$ con $3\frac{1}{3}$ valen 12. E por aquesta rregla lo podrás faser de quantos nonbres sean.

[26] Otrosí falla 1 tal nonbre que iunto el $\frac{1}{3}$ e 7 más fagan ~~12~~ 21. Tú deves abatir 7 de 21, fincan 14. Agora busca 1 nonbre que iunto el su $\frac{1}{3}$ faga 14. E dirás: $\frac{1}{3}$ se falla en 3, el $\frac{1}{3}$ de 3 es 1; iúntalo con 3, fasen 4. Aqueste 4 será colomnia. Et dirás: sy 4 es venido de 3, ¿ónde verrnán 14? Multiplica 3 con 14, fasen 42; pá[r]telo por la colomnia, eso es por 4, valen $10\frac{1}{2}$. Aqueste $10\frac{1}{2}$ es aquel nonbre que iunto el su $\frac{1}{3}$ e 7 más fará 21.

[27] Otrosí falla 1 tal nonbre que abatiendo el su $\frac{1}{3}$ e 7 más fagan 21. Tú deves ayuntar 7 sobre 21, fasen 28. E faser lo as por la rregla que ya avemos mostrado e buscarás 1 nonbre que abatiendo el $\frac{1}{3}$ fincan 28. E faser lo as por la regla del capítulo sobre dicho. Et fallarás que es 42. E aqueste 42 es aquel nonbre que abatiendo e 7 más, el rremaniente sean 21. Et asý puedes faser de todos los semeiantes.

[28] Otrosí falla 1 tal nonbre que iunto el su $\frac{1}{3}$ sobre sý mesmo e 5 e de pues levado el $\frac{1}{4}$ d·eso que y sya quando y avrás iunto el $\frac{1}{3}$ e 5, de pues el rremaniente sea 9. Fasel·lo as por la rregla del capítulo sobre dicho, el qual nonbre es 12. Agora deves buscar 1 otro nonbre que iunto $\frac{1}{3}$ e 5, pues fagan 12. Et fallarás por la rregla que ya avemos dicho en el otro capítulo, el qual nonbre es $5\frac{1}{4}$. Et aqueste $5\frac{1}{4}$ es el nonbre que iunto $\frac{1}{3}$ e 5 de pues abatiendo de la suma el $\frac{1}{4}$, el rremaniente es 9. Et asý puedes faser de los semeiantes nonbres.

[29] Otrosí si quisyeres partyr 40 en 2 talas partes que·l $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de la 1 parte sea tanto commo toda la otra parte farás asý: $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ se falla[n] en 12; el $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de 12 es ~~d~~ 7. Ayunta 7 con 12, son 19. Aqueste 19 será colomnia, et dirás: sy 19 es venido e 12, ¿ónde verrnán 40? Multiplica 12 con 40, fasen 480; parte por 19, valen //**7ʳ** $25\frac{5}{19}$. Et aquesta es la primera parte. Et la otra parte es

(second, third) quantity. The author takes 1, 2, and 4 as our *a, b,* and *c.* Note that solving this problem would be much easier if he took 1, 3, and 9, which already sum up to 13.

eso que fállaçe de $25\frac{5}{19}$ fasta 40, que es $14\frac{14}{19}$. Et así es bien *vedut* que·l $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de $25\frac{5}{19}$ fasen bien $14\frac{14}{19}$. E así puedes faser de los semeiantes nonbres.

[30] El quintal e el çentenar de alguna cosa de mercaduría fue vendida por 7 libras e 8 sueldos 9 dineros. ¿Quánto valdrán 61 libras[67] o 61 rótal? Aquesta es ł la rregla: mutiplica 7 libras con 61, et fasen 427; et por los faser sueldos dirás que 61 fasen 3 libras 1 sueldo. Multiplica 8 con 3 libras [e 1 sueldo], fasen 24 libras 8 sueldos. E ponlo con los 427 libras. Otrosí por los dineros dirás: 61 dineros son 5 sueldos 1 dinero. Mutiplica 5 sueldos 1 dinero con 9, fasen 45 sueldos 9 dineros. Ponlo aparte con las otras sumas, et ayúntalas en uno, et fallarás 453 libras 13 sueldos 9 dineros; pártelos por 100, et dirás: de 400 lieva 4 libras et de las 50 lieva 10 sueldos. Fincan a partir 3 libras e 13 sueldos 9 dineros; faslos sueldos, son 73 sueldos 9 dineros. Así que no le viene 1 sueldo, farás los todos dineros, que son 885, que le viene 8 dineros entregos $\frac{17}{20}$ de 1 dinero, et atanto valen las 61 libras. E sy quisyeres partir por la rregla de las en postas, de 400 lieva 4 libras e de las 50 lieva 10 sueldos, quedan a partir 3 libras 13 sueldos 9 dineros; faslos sueldos e dirás: de 66 sueldos 8 dineros lievan 8 dineros. Fincan a partir 7 sueldos 1 dinero, que son 85 dineros, de que le viene $\frac{17}{20}$. Et por aquesta rregla podrás faser e partir las semeiantes rrasones.

100 rótalos valen 7 libras 8 sueldos 9 dineros. ¿Quánto valen 61 rótalos? Mutiplica 61 vegades 7 libras, 8 sueldos 9 dineros, que fasen 453 libras 13 sueldos 9 dineros. Parte por 100, valen 4 libras 10 sueldos 8 dineros $\frac{17}{20}$ de 1 dinero.

[31] Otrosí en la Suria[68] se venden las mercadurías, algunos a quintal de 100 rótalos. E el rótal es de 12 onças, et {y} besantes de oro serrasinados. Et el besante //**7**$^{\mathbf{v}}$ *a* 24 quirates. Et el quirate pesa 4 granos de trigo o de fi. El quintal es vendido por 64 besantes, 19 quirates. ¿Quánto valdrían 79 rrótalos? Aquesta es la rregla, et es semeiante a las otras que avemos dicho: multiplica los besantes por 79, eso es 64 con 79, fasen 5056 besantes. E ponlo aparte. Otrosí por los quirates dirás que 79 quirates fasen 3 besantes e 7 quirates. E multyplica 19 con 3 besantes, et 19 con 7 quirates, e fas los quirates besantes. Et ayúntalo todo con eso que avíes puesto e avrás en suma 5118 besantes et 23 quirates. Parte por 100, viénenle 51 besantes. E fincan por partir 18 besantes e 13 quirates. Faslos todos quirates, que son 445 quirates, de que le vienen 4 quirates $\frac{45}{100}$. Sy los quisieres faser granos

67 Here *libra* refers to a measure of weight and not to a monetary unit.

68 Syria.

serán 180 granos, de que le viene 1 grano $\frac{4}{5}$ de 1 grano. Et así podedes desir que le viene 51 besantes e 4 quirates e 1 grano $\frac{4}{5}$ de 1 grano. Et atanto valen los 79 rótalos.

[32] Otrosí, en Acre se acostunbra que omne abate de cotó 4 rótalos por quintal por rasón del sach, onde ¿quánto se querrá abatir por 85 rótalos? Onde mutiplica 4 con 85, farán 340 rótalos. Parte la suma por 100, viénenle 3 rrótolos 4 onças $\frac{4}{5}$. 12 onças fasen 1 rótal. Et tanto se deven abatir por los 85 rótalos.

[33] Otrosí el 1 sueldo de tornás, eso es 12 dineros, vale de pisantes $31\frac{1}{2}$. ¿Quánto valdrán 8 libras et 9 sueldos 10 dineros? Faser lo *deves* por la semeiante regla, eso es, multiplica 31 con las libras e con los sueldos e con los dineros. De pues toma la meytad de 8 libras e de 9 sueldos e 10 dineros. Et la suma de todo pártelo por 12, valen 22 libras 5 sueldos 9 dineros $\frac{3}{4}$. Et a tanto valdrá.

[34] Otrosí la libra de la plata es en Pisa 12 onças. Et aquesta libra val 16 libras 14 sueldos 9 dineros. ¿Quánto valdrá las 7 onças et $\frac{1}{2}$? Multiplica 7 con las libras e 14 sueldos 9 dineros, et ayúntalo todo. Toma la meytad de 16 libras et 14 sueldos et 9 dineros. Ayúntalo todo en uno, et la suma pártela por 12, et fallarás vien 10 libras 9 sueldos 2 dineros $\frac{5}{8}$ [# $\frac{7}{12}$] de 1 dinero. Et atanto valdrán las 7 onças $\frac{1}{2}$. 12 onças valen 16 libras 14 sueldos 9 dineros. ¿Quánto valdrá 7 onças $\frac{1}{2}$?

f. 8$^{\mathrm{r}}$

[35] Otrosí el marco de la plata, que es 8 onças en Venecia. E la onça es 4 *quarteres*, et el *quartel* es 36 quirates. Et es vendido [el marco] por 9 libras 15 sueldos 6 dineros. ¿Quánto valdrá 5 onças et 1 *quartel*? La rregla es aquesta: multiplica 5 con 9 libras 15 sueldos 6 dineros et toma un quarto [#la mytad] de 9 libras 15 sueldos 6 dineros. Ayúntalo todo en uno, et la suma parte por 8; et valen 6 libras 14 [#8] sueldos 4 [#8] dineros $\frac{7}{8}$ [# $\frac{5}{6}$] de 1 dinero. Sabes que 12 dineros fasen 1 sueldo et 20 sueldos fasen una libra.

[36] Otrosí el quinter[69] del olio es en Acre 20 *buxas*. Et la *buxa* es 20 quarterones, et quatro quarterones pesan 1 rótalo, et 100 rrótalos pesan 1 quintal, et aqueste quintal es vendido por 35 libras serrasinadas et 19 quirates. ¿Quánto valdrán las 13 *buxas* $\frac{1}{2}$? Multiplica $13\frac{1}{2}$ con 35 libras 19 quirates et ayúntalo en uno. Parte por 20 *buxas*, por eso que 20 {que 20} *buxas* es 1 quintal, et valen 24 libras 3 quirates 3 granos $\frac{3}{10}$ de 1 grano. 20 *buxas* valen

69 Read *quintal*.

35 libras 19 quirates. ¿Quánto valdrán 13 *buxas* $\frac{1}{2}$? Multiplica 13 *buxas* $\frac{1}{2}$ con 35 libras 19 quirates; parte por 20, valen 24 libras 3 quirates 3 granos $\frac{3}{10}$ de 1 grano. Guarda que 24 [#12] quirates es 1 libra.

[37] Otrosí, [el] millar del olio en Pulla, [70] que es 40 estantes, vale 13 onças et 10 tarines. ¿Quánto valdrán los 29 estantes $\frac{1}{2}$? Multiplica 29$\frac{1}{2}$ con 3 onças 10 tarines. Et fas los tarines onças, et la suma parte por 40; et fallarás que avías a partir 98 onças 10 tarines. Parte por 40, de que le viene 2 onças 13 tarines 15 granos. 30 tarines fasen 1 onça.

[38] Otrosí, el tosell de los paños en Marsella es 60 cañas, et la caña es 8 palmos. Et aqueste tosell val 54 libras 16 sueldos 4 dineros. ¿Quánto valdrán las 36 cañas et $\frac{1}{2}$? Multiplícalo en la manera que avemos dicho en lo[s] quintares, eso es 36$\frac{1}{2}$ con 54 [#34] libras 16 sueldos 4 dineros; et ayúntalo todo en uno, et la suma parte lo por 60, et fallarás en suma 2000 libras 16 sueldos 2 dineros. Partir por 60, valen 33 libras 6 sueldos 11 dineros $\frac{7}{30}$.

[39] Otrosí la caña del paño en Pisa es 4 braças, et la caña val 12 libras 8 sueldos 6 dineros. ¿Quánto valdrá 1 braça$\frac{1}{2}$? Multiplica 1 vegada 12 libras 8 sueldos 6 dineros. Pues toma la meytad de 12 libras e 8 sueldos 6 dineros et ayúntalo todo en uno; et la suma parte por 4, et fallarás que le vienen 4 libras 13 sueldos 2 dineros $\frac{1}{4}$.

f. 8^{v}

[40] Otrosí la caña del paño, que es 8 palmos en Acre, vale de besantes serrasinados 5 libras et 16 quirates. ¿Quánto valdrán 3 palmos $\frac{1}{2}$? Multiplica 3 con 5 libras et 16 quirates, et fas las libras quirates. Pues toma la meytad de 5 libras 16 quirates. Ayúntalo todo en uno, et fasen 19 libras 20 quirates. Parte por 8, valen 2 libras 11 quirates.

[41] Otrosí, la balla de los *fustanes* de 40 pieças vale 53 libras 9 sueldos. ¿Quánto valdrá la 1 pieça? Parte 53 libras e 9 sueldos por 40, viénele 1 libra 6 sueldos 8 dineros $\frac{7}{10}$. [71]

[42] Aquesta rrasón et las semeiantes llama omne la rrefersida, [72] por eso commo y a quintal de quintals con rrótolos et con onças o *quantidat* de medidas o de algunas cosas a que sea puesto preçio con alguna parte de aquella cosa que no sea entrega, así commo sy omne quiere dineros. El quintal

70 Puglia (a region in South-East Italy).

71 After this problem, about one fourth of the page is left blank.

72 It seems that the term *rrefersida* is used to refer to those exercises where quantities in complex form must be manipulated.

de 100 rrótolos vale 7 libras 8 sueldos 9 dineros. ¿Quánto valdrán 9 quintales 54 rrótolos $\frac{1}{2}$? Aquesta es la ~~rregla~~ rregla: primeramente multiplica 9 con 7 libras 8 sueldos 9 dineros; et fas los dineros sueldos et los sueldos libras, fasen 66 libras, 18 sueldos 9 dineros. Ponlo aparte, que atanto valen los 9 quintales. Otrosí, por saber quánto valen los rrótalos, multiplica 54 con 7 libras 8 sueldos 9 dineros. Pues toma la meytad de 7 libras 8 sueldos 9 dineros, et ayúntalo todo en uno. Et fasen en suma 405 libras 6 sueldos 10 dineros $\frac{1}{2}$. Parte por 100, viénenle 4 libras 1 sueldo $\frac{165}{200}$ de 1 dinero. Et tanto montan. 100 rótalos vale 7 libras 8 sueldos 9 dineros. ¿Quánto valdrán 9 quintales 54 rótalos $\frac{1}{2}$? 9 quintales valen 66 libras 18 sueldos 9 dineros; 54 rótalos $\frac{1}{2}$ valen 4 libras 1 sueldo 10 dineros $\frac{3}{4}\frac{3}{10}$. Suma por todo 70 [#17] libras 19 sueldos 9 dineros $\frac{3}{4}\frac{3}{10}$.

f. 9^{r}

[43] Otrosí, el millar de alguna cosa, eso es 1000 libras en peso valen en Venecia 84 libras 12 sueldos 8 dineros. ¿Quánto valdrán 9 millares 460 libras? Multiplica 9 con 84 libras 12 sueldos 8 dineros, et fasen 761 libras 14 sueldos, et tanto valen los 9 millares. Et ponlo aparte. E pues por saber quánto valen las libras multiplica 460 con 84 libras 12 sueldos 8 dineros. Et faslos dineros sueldos et de los sueldos fas libras, et la suma parte por 1000. Et guarda la su regla e fallarás que le viene 38 libras et 18 sueldos et 7 dineros $\frac{2}{5}\frac{3}{5}$. Et tanto valen las libras. Agora ayunta la suma de los millares a la suma de las libras; son en suma 800 libras 7 dineros $\frac{2}{5}\frac{3}{5}$, et tanto montan. 1000 libras valen 84 libras e 12 sueldos 8 dineros. ¿Quánto valdrán 9 millares 46[0] libras? 9 millares valen 761 libras 14 sueldos. 46[0] libras valen 38 libras 18 sueldos 7 dineros. Suma, que vale todo 800 libras 12 sueldos 7 dineros $\frac{2}{5}\frac{3}{5}$.

[44] Otrosí el millar, eso es 1000 libras del olio en Venecia 40 *mieris*,[73] et la *meuri* es 25 libras de olio. Et aqueste millar [vale] 52 libras 12 sueldos. ¿Quánto montarán 7 [#8] millares et 7 *mieres et* {*et*} $\frac{1}{2}$? Aquesta es la regla: et por saber quánto montarán la[s] 7 *mieris* entregas multiplica 7 con 52 libras 12 sueldos, fasen 368 libras 4 sueldos. Tanto valdrán las 7 *mieris*. Et pues, por saber quánto valen las 7 *mieris* $\frac{1}{2}$, multiplica y $7\frac{1}{2}$ con 52 libras 12 sueldos; fasen 394 libras e 10 sueldos. Parte los por 40 *mieros*, valen 9 libras 17 sueldos 3 dineros, et tanto valen. E agora ayunta en uno 368 libras 4

73 The term that seems to appear in the manuscript as “mieri” or “meuri” refers without doubt to a unit that was used in Venice to weigh oil and which is called *mirro* in Luca Pacioli’s *Summa*; see for instance [Pacioli 1494, f. 213^{v}].

sueldos con 9 libras 17 sueldos 3 dineros, et tanto valen las 7 *mieris* [$\frac{1}{2}$]. Et por aquesta regla farás las semeiantes rasones. 1000 libras de olio vale 54 libras 12 sueldos. ¿Quánto valdrán [7 millares e] 7 *mieris* $\frac{1}{2}$? 7 millares valen 368 libras 4 sueldos. 7 *mieris* $\frac{1}{2}$ valen 9 libras 17 sueldos 3 dineros, que vale todo 378 libras 1 sueldo 3 dineros.

[45] Otrosí, una pieça de paño que *sia* 7 braças $\frac{1}{2}$ vale 10 libras. ¿Quánto valdrá una braça? Aquesta es la regla, por tal que partas et multipliques por entregos $7\frac{1}{2}$ [e] 10. Multiplica 7 con 2, iunta 1; son 15. Ponlo aparte. E otrosí multiplica 10 con 2, son 20. E así fallarás que 15 braças valen 20 libras. E agora aminúa 15 et 20 por eguales tanto commo podrás; et pues lo menúas por $\frac{1}{5}$, et dirás: el ~~v~~ $\frac{1}{5}$ de 15 es 3, et el $\frac{1}{5}$ de 20 es 4. Agora 3 braças valen 4 libras, ¿quánto valdrá una braça? Multiplica una vegada 4 libras *e* 4 libras, et pártelas por 3; valen 1 libra 6 sueldos 8 dineros, et tanto vale 1 braça. Et por aquesta regla farás las semeiantes rasones. 7 braças et media valen 10 libras. ¿Quánto valdrá 1 braça? Redresa et amenúa las 3 braças, valen 4 libras. Et parte ~~por~~ 4 libras por 3, viene le 1 libra 6 sueldos 8 dineros.

f. 9^{v}

[46] Otrosí una pieça de paño que es 15 cañas $\frac{1}{2}$vale 7 libras 4 sueldos. ¿Quánto valdrán las 2 cañas $\frac{1}{4}$? Aquesta es la regla: tú deves guardar ~~que~~ 4 sueldos quánta parte es de 1 1ibra, et es el $\frac{1}{5}$ [#$\frac{1}{4}$]; onde sería 7 libras et $\frac{1}{5}$. Agora redresa 15 cañas $\frac{1}{2}$con 7 libras $\frac{1}{5}$. Multiplica 15 por 2; iunta 1, que es sobre 2, et la suma por 5 del otro nonbre; ~~que es sobre 5~~ farán 155 cañas. E otrosý multiplica las libras, eso es 7 libras por 5; iunta 1, que es sobre 5, et la suma por 2 del primero nonbre; fasen 72 libras. Et así *desir* 155 cañas valen 72 libras. Aquestos 2 no[n]bres non se pueden amenuar por 1 regla amos a doss porque dirás: sy 155 cañas valen 72 libras, ¿quánto valdrán 2 canas$\frac{1}{4}$? Multiplica 2 con 72; [74] ayúntalo en uno, et fasen 162 libras. Parte lo por 155 e guarda la su regla; e viene le 1 libra et 10 dineros $\frac{26}{31}$. Et tanto valen las doss canas e $\frac{1}{4}$.

[47] ~~suma 10 cañas e~~ $\frac{1}{2}$ Otrosí, en el marco del oro vale el quirate de oro 4 libras 8 sueldos 4 dineros. ¿Quánto valdrá 1 marco de oro que *sia* de 18 quirates et 1 grano e $\frac{1}{2}$? E 4 granos son 1 quirate. Aquesta es la regla: tú deves guardar 1 grano e $\frac{1}{2}$, qué parte es del quirate. Redrésalo e fallarás

74 Here the operation $\frac{1}{4}\cdot 72 = 18$ is missing. Then we have $72.2 = 144$; $144+18 = 162$.

que es $\frac{3}{8}$ de 1 quirate. Et pues dirás: si 1 quirate vale 4 libras et 8 sueldos 4 dineros, ¿quánto valdrá 18 quirates $\frac{3}{8}$? Multiplica por la regla de los quirates, eso es 18 con 4 libras 8 sueldos 4 dineros. Et pues toma los $\frac{3}{8}$ di[75] 4 [libras] 8 [sueldos] {fasen} 4 dineros. Ayúntalo todo en uno, e fasen en suma 81 [#801] libras 3 sueldos 1 dinero $\frac{1}{2}$. Parte lo por 1, viene le todo, eso es 81 [#801] libras e 3 sueldos 1 dinero $\frac{1}{2}$. E tanto vale el marco de 18 quirates et 1 grano $\frac{1}{2}$. Un quirate vale 4 libras 8 sueldos 4 dineros. ¿Quánto valdrán 18 quirates $\frac{3}{8}$? Multiplica $18\frac{3}{8}$ vegadas 4 libras 8 sueldos 4 dineros, suma 81 libras 3 sueldos 1 dinero $\frac{1}{2}$. E parte por 1; viene le todo.

[48] El marco del oro vale en Valencia 84 libras 8 sueldos 4 dineros. ¿Quánto valdrá en suma 7 marcos 5 ~~uncies~~ onças[76] 1 quarter 17 quirates [$\frac{1}{2}$]? Et segund que ya avemos dicho, el marco es 8 unças e la unça es 4 quartos, e el quarto es 36 quirates. Aquesta es la regla: tú porrnás las libras e los sueldos e los dineros así 84 libras $\frac{8}{20}\frac{4}{12}$, et iuntarás los marcos con los sus rotos asý 7 marcos $\frac{5}{8}\frac{1}{4}\frac{17}{36}\frac{1}{2}$; e dirás pues: un marco vale 84 libras $\frac{8}{20}\frac{4}{12}$, ¿quánto valdrá ~~v~~ 7 marcos $\frac{5}{8}\frac{1}{4}\frac{17}{36}\frac{1}{2}$? Agora redresa 1 marco con los ~~otros~~ rotos del su *hu*, eso es multiplica un marco por 20, et la suma por 12; fasen 24[0] marcos. Pues redresa las libras por su verga, e multiplica 84 con 20, et iunta 8, et la suma por 12; iunta 4, fasen 20260 libras. Et así as que 240 marcos valen 20260. Agora amenúa amos a doss los nonbres atanto commo puedas por una regla, et puédeslo amenuar por $\frac{1}{20}$. Con la $\frac{1}{20}$ di 240 es 12. Et la $1\frac{1}{20}$ [77] [de] 20260 es 1013 [#131013]. Así has que 12 marcos valen 1013 [#1033] libras. Et ponlo aparte. Et pues toma 5, que es sobre 8, et multiplícalo por 4; iunta 1, e la suma por 36; iunta 17, e la suma por 2; //**10^{r}** iunta 1, et pues la suma por el *hu* de los 12 marcos, eso es por 1013; e fasen por todos 1567111 libras. Et por la colona donde toman regla $\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{9}$, et viene les 680 libras et 3 sueldos 4 dineros. Ayúntalos con los 7091 libras que avías puestas[78] e parte por 12, viene le 647 libras et 11 sueldos 11 dineros $\frac{1}{3}$. E tanto valen los 7 marcos et 5 honças et 1 quarter e 17 quirates $\frac{1}{2}$.[79]

75 The use of *di* instead of *de* ("of") can also be found once in [48], together with the appearance of a deleted *"uncies"* that is substituted by *onças*. These details suggest an Italian influence.

76 In the manuscript, "onças" appears above the deleted "uncies."

77 Read "et $\frac{1}{20}$".

78 They come from $7 \,.\, 1013 = 7091$, an operation that was not made explicit.

79 In the manuscript the last part appears wrongly as "et 1 quirate e 17 granos $\frac{1}{2}$".

Si un marco vale 84 libras $\frac{8}{20}\frac{4}{12}$, ¿quánto valdrán 7 marcos $\frac{5}{8}\frac{1}{4}\frac{17}{36}\frac{1}{2}$? Redresa, los 12 marcos vale 1013 libras onde, ¿quánto valdrán 7 marcos $\frac{5}{8}\frac{1}{4}\frac{17}{36}\frac{1}{2}$ [# $\frac{5}{8}\frac{1}{3}\frac{17}{36}\frac{1}{2}$]? Multiplica 7 con 1013, fasen 680 libras 3 sueldos 4 dineros; a partir *en* 12 viénele 647 libras 11 sueldos 11 dineros $\frac{1}{3}$. E es fecha la rasón.

[49] Otrosí, 1 marco de oro vale 96 libras $\frac{1}{2}$. ¿Quántos marcos de oro avrás por 1232 libras $\frac{1}{2}$? Multiplica 96 por 2; iunta 1, fasen 193. Pues multiplica 1 marco por 2, fasen 2 marcos; [multiplica] por $1232\frac{1}{2}$, et fasen 2465 marcos. Parte los por 193, viénele 12 marcos 6 honças e 25 quirates et $\frac{71}{193}$ de 1 quirate. E tantos marcos avrás por 1232 libras $\frac{1}{2}$.

Si noventa e seys libras $\frac{1}{2}$ valen un marco, las 193 libras valdrán 2 marcos, onde multiplica 2 marcos por $1232\frac{1}{2}$, e fasen 2465 marcos. Parte los por 193, viene le 12 marcos 6 honças 25 quirates $\frac{71}{193}$ [# $\frac{72}{193}$]

---

[50] Sy un marco de oro que sea de ley de 17 quirates e 2 granos $\frac{1}{2}$ valen 72 libras 10 sueldos, ¿quánto valdrá 1 marco de oro que sea de ley de 21 quirates 1 grano $\frac{1}{2}$? Aquesta es la regla: tú pon los quirates con los sus rotos así: quirates $17\frac{2}{4}\frac{1}{2}$ [#$17\frac{1}{2}$] 72 [#22] libras $\frac{1}{2}$ e quirates $21\frac{1}{4}\frac{1}{2}$; et multiplica 17 por 4 e iunta 2, e la suma por 2; iunta 1. Pues la suma por los rotos de las libras, eso es por 2, e fasen 282 quirates. E ponlo aparte. E otrosý multiplica las libras por los sus rotos, eso es 72 por 2; iunta ~~2~~ 1. Et pues la suma por la verga de los quirates, eso es por 2, e la suma por 4 ; e fasen ~~100~~ 1160 libras. E así dirás que 282 quirates valen 160 libras. Amenua amos a dos los nonbres a tanto commo podrás por eguales reglas. Et puédese amenuar por $\frac{1}{2}$; e la $\frac{1}{2}$ de 282 es 141, la $\frac{1}{2}$ de ~~10~~ 1160 es 580. E así finca que 141 quirates valen 580 libras, onde ¿quánto valdrán 21 quirates e $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$? Multiplica 21 por 580, fasen 12180 libras. E ponlo aparte. E pues toma 1, que es sobre 4, et multiplícalo por 2; iunta 1, //**10v** et fasen 3. Aqueste 3 multiplica por 580 libras, fasen 1740 libras. E parte por los 2 rotos que son so la verga, eso es por 4 et por 2, que es tanto commo por 8, e valen 217 libras e 10 sueldos. E ayúntalas con las 12180 libras, e fasen en suma 12397 libras 10 sueldos. E parte los por 141 et guarda su regla, que es $\frac{1}{3}\frac{1}{47}$, e viene le 87 libras 18 sueldos [6 dineros] $\frac{6}{47}$ [# $\frac{12}{47}$] de 1 dinero. E tanto valdrá el marco de 21 quirates $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$. E por aquesta regla farás las semeiantes rasones.

---

[51] Si 17 quirates $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ valen 72 libras $\frac{1}{2}$, rredrasa e aminúa los 141 quirates; valen 580 libras, onde ¿quánto valdrán los 12 quirates $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$?

Multiplica 12 vegadas 580, fasen 6960 libras. Otrosý multiplica $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ con 580, fasen $151\frac{38}{42}$. Montan todos $7111\frac{19}{21}$ ~~que son 50 libras~~. Parte por 141, viénele 50 libras {e $\frac{1}{2}$} 8 [#18] sueldos 7[#4] dineros $\frac{39}{47}$ [# $\frac{12}{47}$].

---

[52] En Acre se vende la seda a rrótol sotil, que es 12 onças. E la onça es 60 adaremes. Et un rrótol sotil vale 21 [#12] beseantes $\frac{1}{2}$. ¿Quánto valdrán 32 rrótolos 5 onças 21 adarahemes $\frac{1}{2}$? La rregla es senblante [a] aquella que avemos dicha en los capítolos de los marcos. Tú porrnás: 1 rrótol val 21 besantes $\frac{1}{2}$. ¿Quánto valdrán 32 rrótalos $\frac{5}{12}\frac{21}{60}\frac{1}{2}$ [# $\frac{5}{12}\frac{12}{60}\frac{1}{2}$]? Moltiplica 1 rótol por 2 del segundo nonbre, fasen 2 rótalos. Pues multiplica 21 besantes por 2; iunta 1, fasen 43 besantes. Asý es que 2 rrótalos valen 43 besantes, onde ¿quánto valdrán 32 rótalos et $\frac{5}{12}\frac{21}{60}\frac{1}{2}$? Multiplica 43 [#42] besantes por 32, fasen 1376 [#1344] besantes. Et pues toma 5, que es sobre 12, e multiplícalo por 60; iunta 21, e la suma por 2; iunta 1, fasen 643. Et aquestos 643 se quieren multiplicar por 43 besantes. Et sy puedes aminuar los dos nonbres, faslo; sy non, multiplica el 1 nonbre por el otro, fasen 27649 besantes. E déveslos partir por los rrotos [80] que son so la verga, eso es por 12, e por 60, et por 2 e por la colomna onde toma rregla, que es $\frac{1}{10}\frac{1}{9}\frac{1}{8}\frac{1}{2}$. Et viénele 19 besantes 4 quirates 3 granos. Parte los por 2, viénele 681 ~~quirates 1~~ besantes 14 quirates 1 grano $\frac{1}{2}$.

[53] Otrosí, el rótol grueso de Acre pesa en Acre 6 libras et 30 asages, et [1] libra pesa 79 asages. Et el asag pesa 24 quirates, et el quirate pesa 4 granos, onde 54 rrótolos $\frac{1}{2}$, ¿quántos asages e quántos quirates //**11$^{\mathbf{r}}$** et quántos granos? Aquesta es la regla: tú porrnás: 1 rótol es 6 libras e $\frac{30}{79}$, ¿qué farán 54 rótolos $\frac{1}{2}$? Multiplica 1 rrótol con 79 rótolos, fasen 79. Pues multiplica 6 libras con 79; iunta 30, fasen 504; ~~iunta en uno~~. Asý avrás que 79 rótalos fasen 504 libras. Pues multiplica 504 libras con $54\frac{1}{2}$, fasen 27468. Pártelo por 79, vienen 347 libras et 55 asages. Et tanto fasen los 54 rrótolos $\frac{1}{2}$.

[54] Otrosí en Acre se vende el girofle [81] en las cubebes et en las espeçierías sotilis de {de de} menes. Et aquestas menes se pesan a rótolos sotiles, que es 12 onças. Et la onça es 60 adarhames. E 1 rótol et 1 honça pesan 3 menas. [82] Es a saber, 57 [#59] rrótolos 5 onças 21 adarhames $\frac{1}{2}$, ¿quántas menas so[n] e quirates [e] honças et quántas adarhames? Aquesta es la regla: tú porrnás

---

80 Here, the term *rotos* refers to the denominators.

81 A bush whose flower was the clove (a spice); see [Gual Camarena 1981, p. 238].

82 The *mena* was an Eastern unit of weight. In a Catalan merchants handbook compiled in the late 14th century, a *mena* of Alexandria is said to be equal to 26 ounces

1 rótol $\frac{1}{12}$, que es 3 menas, que fan 57 rótolos $\frac{5}{12}\frac{21}{60}\frac{1}{2}$ [# $\frac{5}{12}\frac{12}{60}\frac{1}{2}$]. Mutiplica 1 por 12; iunta [1], fan 13 rótolos. Pues mutyplica 3 menes por 12, fasen 36 menas. Et así as que {que} 13 rótolos fasen 36 menas. Pues mutiplica 57 ~~1~~ por 36 menas, fasen 2052 menas. E ponlo aparte. Otrosí ~~m~~ toma 5, que es sobre 12 e mutiplícalo por 60; iunta 21, et la suma por 2; iunta 1, fasen 643. Aquestos 643 se quieren mutiplicar por 36 menas, fasen 23148 menas. Et déveslas partir por los que son so las vergas de los 57 rótolos, eso es por 12, e por 60, e por 2 o por la colomnia que los rotos toman rregla. Et aminúa los nonbres tanto commo podrás antes que partas, et fallarás que fincan a partir 643 menas por $\frac{1}{4}\frac{1}{10}$ [# $\frac{1}{4}\frac{1}{10}$] [83]. Et viénele 16 menes 1 onça 9 adarhames $\frac{1}{2}$. Ayúntalo con los 2052 menas que avíes puesto aparte, et fasen 2068 menes 1 honça 9 adarhames $\frac{1}{2}$. Et atanto fasen los 57 rótolos e 5 onças e 21 adarhames.

Suma: 1 rótol $\frac{1}{12}$ de rótol es 3 menas. Redresar los 13 rótolos, son 36 menas, onde ¿quánto serían 57 rótolos $\frac{5}{12}\frac{21}{60}\frac{1}{2}$? Mutiplicar 57 con 36 menas, fasen 2052 menas. Otrosí $\frac{5}{12}\frac{21}{60}\frac{1}{2}$ con 36 menas fasen 16 menas 1 onça 9 adarhames $\frac{1}{2}$. *Sumar* 2068 menas 1 onça 9 adarhames $\frac{1}{2}$; partir por 13, viénenle 159 menas 2 ~~adarhames~~ onças 1 adarham $\frac{1}{2}$.

f. 11^{v}

[55] Sy 12 iaqueses valen 21 barçiloneses et si 12 barçiloneses valen 17 malguiresos [84], di quánto valdrán 19 iaqueses con malguiresos. Aquesta es la regla: mutiplica 12 iaqueses por 12 barçiloneses, e fasen 144 iaqueses. Et ponlo de so los iaqueses. Et multiplica 17 malguireses por 21 barçiloneses, que fasen 357 malguireses. Et ponlo de so los malguireses. Et asý as 144 iaqueses valen 357 malguireses. Et aminúa amos a dos los nonbres por eguales reglas a tanto commo podrás. Et pueden se aminuar amos a dos por $\frac{1}{3}$, et fincan que 48 iaqueses valen 119 malguireses, onde ¿quánto valdrán 19 iaqueses? Multiplica 119 malguireses por 19 iaqueses, et fasen 2261

(and $27\frac{1}{2}$ Barcelonese ounces); see [Gual Camarena 1981, p. 274]. The text may involve another kind of *mena* (the problem is related to the city of Acre). However, different equivalences of the *mena* in ounces are used at different stages of the solving process, making the procedure very confusing and the final solution unclear.

83 Here the author means "take $\frac{1}{4}$ and then $\frac{1}{10}$ of 643" and not "divide 643 by $\frac{1}{4}$ and by $\frac{1}{10}$". On the other hand, everything seems to suggest that he uses the notation for composite fractions by mistake.

84 In this exercise and in the others, we have included the *e* in *malguire̱sos* or *malguire̱ses* in those cases where the corresponding abbreviation does not appear.

malguireses. E pártelos por 48, et vienen $47\frac{5}{48}$. Et tantos malguiresos valdrán los 19 iaqueses. Asý, omne *díxese*: ¿quánto valdrán los 19 malguireses a la rasón sobre dicha con iaqueses? Podrás desir pues que 119 malguireses valen 48 iaqueses, ¿quánto valdrán los 19 malguiresos? Multiplicaréys 48 con 19, fasen 912. Parte por 119, viénenle $7\frac{79}{119}$. Et tanto valdrán los 19 malguireses con iaqueses. Et por aquesta regla farás de las semeiantes rasones.

iaqueses barçiloneses malguireses

Redrasat e aminuat, los 48 iaqueses valen 119 malguireses, onde ¿quánto valdrán 19 ~~0~~ malguireses? Mutiplica 19 con 119, fasen 2261. Parte por 48, viénele $47\frac{5}{48}$.

[56] Otrosí, si 12 iaqueses valen de barçiloneses $21\frac{1}{3}$, et sy 15 e $\frac{1}{6}$ de barçiloneses valen de malguireses $17\frac{1}{4}$, demando quántos malguireses avré por 19 iaqueses $\frac{1}{2}$. Aquesta es la regla semeiante a la otra sobre dicha: multiplica 12 iaqueses por 15 $\frac{1}{6}$ de barçiloneses, e fasen 182 iaqueses. Ponlos so los iaqueses et por la colona. Otrosý, multiplica $17\frac{1}{4}$ de ~~malgal~~ malguireses por $21\frac{1}{3}$ de barçiloneses, et fasen 368 malguireses. As agora que 182 iaqueses et 36[8] malguireses, onde ¿quánto valdrán los $19\frac{1}{2}$ iaqueses que quieres saber? Multiplica 368 con $19\frac{1}{2}$, et fasen 7176. Et [parte] por 182, et aminúa amos a dos los nonbres por eguales rreglas eso que podrás, et pues parte et guarda la regla del partidor. Et finalmente viénele $39\frac{5}{13}\frac{4}{7}$, e tantos malguireses valdrán los iaqueses, eso es $19\frac{1}{2}$ iaqueses. Et por aquesta rregla farás las otras.

f. 12^{r}

[57] Otrosí, 12 malguireses valen $13\frac{1}{2}$ de torneses, et 10 torrneses valen 12 $\frac{1}{2}$ de genovines, et $7\frac{1}{4}$ de genovines valen 18 pisanines. Demando quántos pisanines avré por 5 libras 7 sueldos 5 dineros de malguireses. Aquesta es la regla semeiante a la sobre dicha: Ordena así commo se mueve en la casa que es so aqueste capítolo, eso es malguiresos *en po[r] sí* torrneses e genovines e so genovines pisantes por sí. E mutiplica 12 por 10, e la suma por ~~syete e~~ $7\frac{1}{4}$; fasen 870 malguireses; e aquesta será colomnia. Pues multiplica 18 pisantes por $12\frac{1}{3}$, e la suma por $13\frac{1}{2}$; serán 2997 pisantes. Agora as que 870 malguireses valen 2997 pisanines. Amenúa amos a dos los nonbres por eguales ~~nonbres~~ rreglas et fincará que los 290 malguireses valdrán 999

pisantes, onde ¿quánto valdrán las ~~y~~ 5 libras e 7 sueldos 5 dineros? [Multiplica 5 libras 7 sueldos 5 dineros por 999], et farás de los dineros sueldos et de los sueldos libras. Et farán en suma 5365 libras 9 sueldos 3 dineros. Parte por 290 malguireses, viénele 18 libras 10 sueldos 0 dineros $\frac{111}{290}$ de 1 dinero. Et tantos pisanines valdrán las 5 libras 7 sueldos 5 dineros de malguireses.

[58] Otrosí, 19 sueldos 7 dineros barçiloneses valen 20 sueldos 7 dineros de torrneses ¿quánto [serán] 100 dineros barçiloneses? Aquesta es la rregla: tú porrnás $\frac{19}{20}\,\frac{7}{12}$ de {de} barçiloneses valen de torneses 1 libra $\frac{0}{20}\,\frac{7}{12}$. Rredrasarás el 1 e el otro. Et mutiplica por los 19 barçiloneses, que es sobre 20, por 12; iunta 7, fasen 235. Otrosí, por los torrneses multiplica 1 libra por 20, et la suma por 12; iunta 7, fasen 247 torrneses. Et así as que 235 barçiloneses valen 247 [#244] torneses, onde ¿quánto valdrán 100 libras de barçiloneses? Multiplica 247 por 100, fasen 24700 libras, a partir por 235. Et antes que partas aminúa amos a dos los nonbres eso que podrás, e finalmente fincarán a partir 494[0] libras por 47; viénenle 105 libras 2 sueldos 1 dinero $\frac{25}{47}$ de dinero. E tantos torrnés valdrán las 100 libras de barçiloneses.

[59] Otrosí, si 3 barçiloneses $\frac{1}{2}$ valen 5 torrneses $\frac{1}{4}$, ¿[quánto valdrán] 52 libras [1]4 sueldos 6 dineros de barçiloneses? Aquesta es la rregla: tú rredrasarás 3 barçiloneses $\frac{1}{2}$ con 5 torrneses e quarto. E multiplica 3 por 2; iunta 1, e la suma por 4 del segundo nonbre, fasen 28 barçiloneses. Otrosí mutiplica 5 torrneses por //**12**$^{\mathbf{v}}$ 4, iunta 1; e la suma por 2 del primer nonbre, fasen 42 torneses. Et así as que ~~2~~ 28 barçiloneses valen 42 torrneses. Agora aminúa amos a dos los nonbres tanto commo podrás por 1 rregla, e finalmente fallarás que 2 barçiloneses valen 3 torrneses. Et ponlo en libras ~~on~~ o en sueldos o en dineros. Así, aquesta rasón digas: si 2 libras de barçiloneses valen 3 de torrneses, ¿quánto valdrán 52 libras 14 sueldos 6 dineros? Et ponlas así por rrasón del mutiplicar 52 libras $\frac{14}{20}\,\frac{6}{12}$. E multiplica 3 por 52, fasen 156. Et ponlos aparte. Et toma 14, que es sobre 20, mutiplícalo por 12; iunta 6, fasen 174. Aqueste 174 por 3 libras fasen 522 libras. E deves las partir por los rrotos que son so las vergas, eso es por 20 e por 12 o por la colona onde los rrotos toman rregla. E antes que partas aminúa los nonbres eso que podrás. Finalmente fallarás que fincarán a partir 87 libras por 40, que le vienen 2 libras 3 sueldos 6 dineros. Ayúntalos con las 156 libras que avíes puesto aparte, e fasen 158 libras 3 sueldos 6 dineros. Pártelos por 2, viénenle 79 libras 1 sueldo 9 dineros de barçiloneses. Et es fecha la cuenta.

[60] Sy un omne a conprado en Acre 1 carga[85] de pimienta por 121 libras $\frac{1}{2}$, et la lieva en Venneçia por vende[r], ¿[a] quánto querrá vender la carga de Venneçia que·l fa 1 libra 35 sueldos? E el quintal de Acre es en Venneçia 750 libras et la carga es de 400 libras. Aquesta es la rregla: tú puedes desir que {que} las 750 libras que son de 1 quintal de Acre $121\frac{1}{2}$ libras, onde ¿quánto costará las 400 que son la carga? Multiplica 400 con 121 libras $\frac{1}{2}$, fasen 48600 libras. Et parte las por 750. E antes que partas aminúa amos a dos los nonbres tanto commo podrás, et finalmente fallarás que te quedan a partir 324 por 5, e valen 64 libras $\frac{4}{5}$ de libra de besante. Atanto cuesta la carga. Et pues por faser 35 sueldos, eso es 1 libra 15 sueldos de besante, mutiplica 64 con 1 libra, et son 64 libras. Pues por los 10 sueldos tomarás la meytad de 64, que es 32. Pues por los 5 sueldos tomarás el $\frac{1}{4}$ de 64, que·s 16 sueldos. Pues por los $\frac{4}{5}$ del besante tomarás los $\frac{4}{5}$ de 35 sueldos, que son 1 libra 8 sueldos. Agora ayunta en uno 64 libras e 32 libras e 16 libras, et 1 libra e 8 sueldos; et fasen en suma 113 libras e 8 sueldos. A tanto querrá vender la carga en Venneçia.

f. 13^r^

[61] Otrosí, si un omne a conprado trigo en Seçilia[86] a rrasón de 13 tarines la salma, et lo lieva en Venneçia que·l faga de la onça de Siçilia 10 libras 9 sueldos 5 dineros. E la salma de Siçilia en Venneçia es 4 estares $\frac{1}{4}$ {$\frac{1}{2}$}. Aquesta es la rregla: tú lo pueder faser por la regla que as dicho en el otro capítulo suso escripto del quintal de la pimienta, eso es que tú puedas desir que 4 estares $\frac{1}{4}$, que son 1 salma que cuesta 13 tarines, ¿quánto valdrá el 1 estar? Mutiplica 1 con 13, parte por $4\frac{1}{4}$; et viénenle 3 tarines $\frac{1}{17}$ de tarín. Et pues dirás: si 30 ~~3~~ tarines que es 1 onça deven valer 10 libras 9 sueldos 5 dineros, ¿quánto valdrán 3 tarines $\frac{1}{17}$? Mutiplica $3\frac{1}{17}$ con 10 libras 9 sueldos 5 dineros, e la suma pártela por 30; et viénenle 1 libra 1 sueldo 4 dineros $\frac{58}{255}$ [# $\frac{323}{1735}$] de dinero. Et [a] tanto querrá vender el estar. Et aún lo puedes faser por otra rregla, que tú puedes desir: sy 30 tarines que es 1 onça deven valer 10 libras 9 sueldos 5 dineros, ¿qué valdrán los 13 tarines, eso es el preçio de 1 salma? Mutiplica 10 libras 9 sueldos 5 dineros [con 13], et fasen 136 libras 2 sueldos 5 dineros. Pártelo por 30, et viénenle 4 libras 10 sueldos 8 dineros $\frac{29}{30}$. Estos 4 libras 10 sueldos 8 dineros $\frac{29}{30}$ déveslos partir por $4\frac{1}{4}$. Et faslo por la rregla de partir nonbres entregos con rrotos,

85 Considering what is done afterwards, it should be *quintal* instead of *carga* (another unit of weight).

86 Sicily.

et fallarás que le viene 1 libra 1 sueldo 4 dineros $\frac{58}{255}$ [# $\frac{323}{1735}$]. Et por aquesta rregla puedes faser todas las semeiantes rrasones de qualquier mercaduría que sea.

[62] Otrosí, son 3 omnes que an fecho conpañía, en la qual a de cabdal el primero 10 libras $\frac{1}{2}$, et el segundo 17 libras $\frac{1}{4}$, el terçero 23 libras $\frac{1}{3}$. Et aquestos con aqueste cabdal an ganado en suma 25 libras 10 sueldos. ¿Quánto deve aver cada uno por la su parte? Aquesta es la rregla: tú deves asumar el cabdal en esta manera: tú deves fallar 1 nonbre, el menor que podrás, en que sea $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$, [87] el qual es 12. ~~mutil~~ Multiplica $10\frac{1}{2}$ con 12, fasen 126. Otrosí multiplica $17\frac{1}{4}$ con 12, fasen 207. Otrosí multiplica $23\frac{1}{3}$ con 12, fasen 280. Agora ayunta en uno 126 et 207 et 280, fasen 613. Aquestos 613 será colomna. Agora multiplica $25\frac{1}{2}$ con 126 libras, e la suma parte la por 613; viénenle 5 libras 4 sueldos 9 dineros $\frac{579}{613}$ [# $\frac{570}{613}$] de 1 dinero; atanto gana el primero. Otrosý, por el segundo dirás $25\frac{1}{2}$ con 207 libras, e parte la suma por 613; viénenle 8 libras 12 sueldos 2 dineros $\frac{382}{613}$ [# $\frac{580}{613}$] de 1 dinero; et tanto gana el segundo. Otrosí, por el terçero multiplica $25\frac{1}{2}$ con 280, e la suma parte la por la colona; et viénenle 11 libras 12 sueldos 11 dineros $\frac{265}{613}$ [# $\frac{256}{613}$] de 1 dinero; et tanto gana el terçero. Por aquesta regla farás las semeiantes.

f. 13^{v}

[63] Otrosí, son 3 omnes que an una nao, et acuérdanse entre ellos que de todo eso que ganaran, que aya el 1 $\frac{1}{3}$, et el otro $\frac{1}{4}$ et el otro $\frac{1}{5}$. E con aquesta nao an ganado 242 libras. Dy quánto deve aver cada 1 por su derecho. Aquesta es la rregla: falla 1 nonbre en que ayan $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$, el menor que tú podrás, el qual es 60. Pues toma $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ de 60 et ayúntalos en uno, fasen 47. Aquestos 47 será colomna. Et pues toma el $\frac{1}{3}$ de 60, que es 20, et dirás: 20 con 242 libras fasen 4840 libras. Pártelas por la colomna, eso es por 47, e viénenle 102 libras 19 sueldos 6 dineros de 1 dinero; et tanto deve aver aquel que ha de aver el $\frac{1}{3}$. Pues tomarás el $\frac{1}{4}$ de 60, que es 15, e multiplícalo otrosí por la ganançia, eso es por 242 libras; fasen 3630 libras. Pártelas por la colomna, eso es por 47, et viénenle 77 libras 4 sueldos 8 dineros de 1 dinero; tanto deve aver el que ha de aver el . Otrosý dirás: el de 60 es 12. Multiplícalo por 242 libras, fasen 2904. Pártelo por la colona,

87 In the manuscript, we see $\frac{1}{2}\text{—}\frac{1}{4}\text{—}\frac{1}{3}$, but it is clear that the author is not referring to a composite fraction here.

et viénenle 61 libras 15 sueldos 8 dineros $\frac{44}{47}$ de 1 dinero; tanto avrá aquel que devía aver el $\frac{1}{5}$. Et por aquesta regla puedes faser las semeiantes.

[64] Dos omnes an fecho barata de rropas, eso es de cotón et de lana. Et el señor del cotón ha más cotón en la barata a rasón de 8 libras en el quintal, e el otro la su lana a 3 libras el quintal. Et pesa el ~~quintal~~ cotón 7 quintales. Di quánta lana le querrá dar que monten otros tantos dineros commo el cotón. Aquesta es la rregla: tú deves guardar quánto montan los quintales del cotón, et montarán 56 libras. Aquestas 56 libras parte por el preçio de la ~~cotón~~ lana, eso es por 3, et viénenle 18; et tantos quintales de lana le querrá dar, eso es 18 quintares $\frac{2}{3}$ de quintar. Por aquesta rregla puedes faser todas las semeiantes rasones de baratas.

[65] Un omne a oro de 17 quirates, et quierelo meter a *çoinitre,* eso es al fuego, et quiérelo afinar fasta que sea de 24 quirates. Et es a saber quánto se querrá minuar el marco, que es 8 onças. Aquesta es la rregla: tú deves guardar a los quirates postrimos, eso es a saber, aquellos que querrás tornar el oro el qual es 24; et dirás: si 24 quirates valen 8 onças, eso es 1 marco, ¿quánto valdrán 17 quirates? Multiplica 8 onças con 17, parte por 24, et viénenle $5\frac{2}{3}$ de 1 onça. {A} torrnará el marco a 5 onças de 1 onça, Et será aminuado 2 honças $\frac{1}{3}$ de honça.

f. 14$^{\mathrm{r}}$

[66] Otrosí, sy quisieres desir qué oro que sea de 24 quirates, quánto querrás meter que torrne a 17 quirates, tú dirás: sy 17 valen 8 onças, ¿quánto valdrán 24? Multiplica 8 con 24, son 192. Parte por 17, et viénenle $11\frac{5}{17}$ de onça. Et así sería creçido el marco 3 onças $\frac{5}{17}$ de honça. Et tanto querrás y ayuntar al marco. E es fecha la rrasón.

[67] Otrosí, 1 ome a 10 marcos 5 honças $\frac{1}{2}$ de oro que es de liga de 17 quirates 1 grano $\frac{1}{2}$. Et quiérelo meter en *çoinitre* para afinar atanto que sea de liga de 22 quirates 1 grano $\frac{1}{2}$. Di quánto le aminuará todo el sobre dicho. Aquesta es la rregla: tú porrnás 10 marcos $\frac{5\quad 1}{8\quad 2}$. Otrosý porrnás 17 quirates $\frac{3}{8}$. Otrosý porrnás $22\frac{3}{8}$. Et pues guarda a los quirates a que quieres torrnar el oro, eso es 22 quirates $\frac{3}{8}$. Et dirás: si $22\frac{3}{8}$ valen 10 marcos $\frac{5\quad 1}{8\quad 2}$, ¿qué valdrán $17\frac{3}{8}$? Et por tal que partas por entregos rredresa $22\frac{3}{8}$ con $10\frac{5\quad 1}{8\quad 2}$ et multiplica 22 quirates por 8; iunta 3, et la suma por la segunda verga, et eso es por 8, et la su[ma] por 2, fasen 2864 quirates. Otrosí multiplica 10 marcos por 8; iunta 5, e la suma por 2; iunta 1, e la suma por la primera verga, eso es por 8. Et fasen 1368 marcos. Et así as

que 2684 quirates valen 1368 marcos. Aminúa eso que podrás amos a dos los nonbres, et fallarás finalmente que 358 quirates valdrán 171 marcos, onde ¿qué valdrán los 17 quirates $\frac{3}{8}$? [Multiplica 17 quirates] con los 171 marcos, et fasen 2907 marcos. Ponlos aparte. Pues los $\frac{3}{8}$ de 171 marcos, que son 64 et 1 onça, iúntalo con 2907 et serán 2971 marcos et 1 onça. Pártelos por los 358, et viénenle 8 marcos 2 onças $\frac{140}{358}$ de honça. E tanto torrnarán los 10 marcos e 5 onças $\frac{1}{2}$. Et así será aminuado todo 2 marcos 3 onças $\frac{39}{358}$ [# $\frac{320}{358}$] de onça.

[68] Otrosí un omne a oro de 5 maneras: primeramente ha 7 marcos de 22 quirates. Otrosí 6 marcos de 20 quirates. Otrosí 9 marcos de 18 quirates. Otrosý 7 marcos de 15 quirates. Otrosý 5 marcos de 13 quirates. Et quiere todo este oro meter en un tróçol et fundir en uno. Di, quando todo este oro fuere mesclado, de quántos quirates saldrá. Aquesta es la rregla, por la qual //**14^v** regla lo podrás faser de quantas maneras de oro commo te querrás: tú deves multiplicar todos los marcos por los sus quirates cada uno e ayuntar la suma de todos en uno, e partirlos as por la suma de los marcos, que es 34 marcos. Et verná la rrasón fecha, onde tú deves multiplicar 7 con 22 quirates, que fasen 154, {que fasen 154}. Otrosí multiplica 6 con 20 quirates, e fasen 120. Otrosý multiplica 9 por 18 quirates, que fasen 162. Otrosý mutiplica 7 por 15, et fasen 105 quirates. Otrosí multiplica 5 marcos con 13, e fasen 65 quirates. Agora ayunta en uno todas las sumas de los quirates, eso es 154 et 120 e 162 e 105 et 65; et fasen 606 quirates. Agora toma la suma de los marcos, eso es 7 e 6 e 9 e 7 [e] 5 marcos, que son 34, et parte la suma de los quirates por los marcos. Et viénenle 17 quirates et 3 granos et $\frac{5}{17}$ de 1 grano. Et de tantos quirates saldrá todo el *dicho* oro mesclado. Por aquesta rregla farás todas las semeiantes rrasones de quantas maneras de leyes de oro fuesen.

7 marcos de 22 quirarates[sic]	suman 154 quirates	
6 marcos de 20 quirates	suman 120 quirates	
9 marcos de 18 quirates	suman 162 quirates	
7 marcos de 15 quirates	suman 105 quirates	
5 marcos de 13 quirates	suman 65 quirates	
Suma mayor	606 quirates	
Parte 606 quirates por 34		
Et viénenle 17 quirates 3 granos $\frac{5}{17}$ de grano		

[69] Otrosí, un omne ha 3 maneras de oro. Primeramente a 3 marcos 3 onças $\frac{1}{2}$ de oro de 21 quirates 1 grano $\frac{1}{2}$. Otrosí [5] marcos 1 onça de oro de 17 quirates 2 granos. Otrosí 7 marcos 5 onças de ley de 17

quirates $\frac{1}{2}$. Et quiere todo aqueste oro fondir et mesclar en uno. Dy de quántos quirates saldrá aqueste oro quando sea mesclado en uno. Aquesta es la rregla, semeiante a la sobre dicha: {tú porrnás 7 marcos $\frac{5}{8}$ de 17 quirates $\frac{1}{2}$, et} mutiplica los marcos con sus quirates, eso es a saber 3 $\frac{3\quad 1}{8\quad 2}$ con 21 quirates $\frac{1\quad 1}{4\quad 2}$, et fasen 73 quirates $\cancel{\frac{75}{128}}\frac{61}{128}$ de quirate. //**15ʳ** Et ponlo a parte. Otrosí mutiplica $5\frac{1}{8}$con 17 [#19] quirates $\frac{1}{2}$, e fasen 89 quirates $\frac{11}{16}$. Ponlos con la otra suma de los quirates. Otrosí mutiplica 7 {quirates} [marcos] $\frac{5}{8}$ con 17 quirates$\frac{1}{2}$, e fasen 133 quirates $\frac{7}{16}$. Et ponlo con las otras sumas de los quirates. Agora ayunta en uno las 3 sumas de los quirates, fasen $296\cancel{\frac{115}{128}}$[$\frac{77}{128}$]. Pues ayunta todos los marcos en uno, eso es $3\frac{7}{16}$ e 5 marcos $\frac{1}{8}$ et 7 marcos $\frac{5}{8}$, et fasen $16\frac{3}{16}$. Agora parte los 296[$\frac{77}{128}$] quirates por la suma de los marcos, eso es por $16\frac{3}{16}$. Et faslo por la rregla de partir sanos por sanos e rotos,[88] et venirle a 18 [#17] quirates $\frac{669}{2072}$ [# $\frac{45}{67}$] de quirate. O si quisieres puedes desir que le viene 18 [#17] quirates et 1 [#2] granos et $\frac{151}{518}$ [# $\frac{46}{67}$] de 1 grano. De tantos quirates fa el oro todo quando fuese mesclado.[89]

3 marcos $\frac{7}{16}$ de 21 quirates $\frac{3}{8}$	suman $73\frac{61}{128}$ quirates
5 marcos $\frac{1}{8}$ de 17 quirates $\frac{1}{2}$	suman 89 $\frac{11}{16}$ quirates
7 marcos $\frac{5}{8}$ de 17 quirates $\frac{1}{2}$	suman $133\frac{7}{16}$ quirates
	Suma mayor 296 [$\frac{77}{128}$]
Parte 296 [$\frac{77}{128}$] por $16\frac{3}{16}$, viénenle 18 [#17] quirates 1 [#2] granos $\frac{151}{518}$ [# $\frac{46}{67}$] de grano	

[70] Otrosí, un omne ha oro de 3 preçios. A 5 marcos que le cuestan a rrasón de 50 libras el marco. Otrosí a 7 marcos que le cuestan a rrasón

88 The author mentions the rule to divide whole integers by mixed numbers since he erroneously takes 296 as the dividend, rather than $296\frac{77}{128}$.

89 The standard solving process for alligaton problems is followed. First of all, each quantity of metal is multiplied by its fineness. Quantities are first expressed as mixed numbers with simple as well as composite fractions. Since 1 mark = 8 ounces, 3 marks 3 ounces $\frac{1}{2}$ can be expressed as $3\frac{3\quad 1}{8\quad 2}$ marks, and since 1 carat = 4 grains, 21 carats 1 grain $\frac{1}{2}$ equal $21\frac{1\quad 1}{4\quad 2}$ carats; multiplying $3\frac{3\quad 1}{8\quad 2}$ by $21\frac{1\quad 1}{4\quad 2}$ gives $73\frac{61}{128}$ carats. Similarly, for the second kind of gold, $5\frac{1}{8}$ is multiplied by $17\frac{1}{2}$ carats to obtain $89\frac{11}{16}$, and $7\frac{5}{8}$ marks is multiplied by $17\frac{1}{2}$ carats to get $133\frac{7}{16}$ carats. After this, the three results are added up and their addition is divided by the sum of the three quantities of gold in order to obtain the final solution, which is expressed in complex form at the end. In the illustrative rectangle at the end of the problem, the composite fractions that are related to the first kind of gold are expressed as simple fractions (we know that $\frac{3\quad 1}{8\quad 2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$ and $\frac{1\quad 1}{4\quad 2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$).

de 47 libras el marco. Otrosý ha 9 marcos que le cuestan a rasón de 43 libras el marco. Et aqueste omne quiere fondir todo aqueste oro en uno, e quiérele faser tanta mescla, o sea de cobre o de plata, que·l marco no le venga a costar synón {a costar} a rrasón de 35 libras el marco. Dime quánta ~~costa~~ mescla se querrá faser en todo aqueste oro. [90] Aquesta es la rregla: tú deves asumar todos los marcos, eso es 5 e 7 e 9, et son 21 marcos. Et guarda quanto costaron todos los marcos de la primera *conpra*, et multiplica cada uno por el su preçio, eso es, 5 por 50, fasen 250. E ponlo aparte. Otrosí mutiplica 7 con 47; fasen 329, ponlo [con] la otra suma. Otrosí multiplica 9 por 43, et fasen 387. Et ponlo con las otras sumas. Agora ayunta en uno 250 et 329 e 387, et fasen todos 966 libras. Así as que 21 marcos costaron 966 //**15$^{\mathbf{v}}$** libras. Agora guarda 21 marcos, a rrasón de 35 libras el marco, [quánto] montarán. Et multiplica ~~25~~ 21 con 35 libras, fasen 735, onde el señor del oro quiere que eso que le costava 966 libras, que le torrne a 735 libras. Por que guarda la deferençia que es de 735 fasta en 966 libras, et ay 231 libras. Por que tomarás otros tantos marcos commo es la deferençia d·ellos, eso es 231 marcos. Et parte por el preçio a que quieres torrnar el 1 marco, eso es por 35, e viénenle 6 marcos 4 [#5] onças $\frac{4}{5}$ [#$\frac{5}{7}$] de onça. Et tanto querrá iuntar o mesclar en todos los 21 marcos. Et por aquesta regla lo podrás faser de tantos preçios et de atantos marcos commo te querrás.

[71] Otrosí, un omne a oro o plata de 3 maneras. A 10 marcos $\frac{1}{2}$, que vale el marco 10 libras. Otrosí a 6 marcos, que vale el marco 8 libras. Otrosí de otro que non digo quánto es, de que vale el marco 3 libras. E de aquesta que non vale sinón 3 libras el marco, quiere mesclar con todo el oro en los 2 preçios sobre dichos, que quando sea mesclado non venga a costar el marco si non 7 libras uno con otro. Agora demando quánto querrá de aquel de 3 libras el marco en guisa, que todo lo otro de los otros preçios non cueste con aqueste en uno sinó 7 libras el marco. Aquesta es la rregla: tú deves ~~gd~~ guardar la deferençia que es de 7 fasta en 10, et es la deferençia 3. Et aqueste 3 mutiplícalo con 10 marcos $\frac{1}{2}$, fasen 31 marcos $\frac{1}{2}$. Otrosí toma la deferençia que es de 7 fasta en 8, que es 1 libra. Et multiplica 1 por 6, et fasen 6 marcos. Ayunta en uno los marcos, eso es 31$\frac{1}{2}$ [e] 6 marcos, et serán 37 marcos $\frac{1}{2}$. Aquestos 37 marcos $\frac{1}{2}$ se quieren partir por la deferençia que es de 7 fasta en 3, el qual es 4. Agora parte 37 [#31] marcos $\frac{1}{2}$ por 4, et viénenle 9 marcos et $\frac{3}{8}$ de 1 marco, que son 9 marcos e 3 onças. Et tantos marcos et tantas honças de aquel oro de 3 libras el marco querrá

90 The question is not very clear in the text: it is asked how much copper or silver (considered as having no cost here) must be added to the three mentioned quantities of gold in order for the mixture to be worth 50 *libras* for each *marco*.

mesclar con todo el otro de los 2 preçios *que* verná mesclado. Et costará 7 libras el marco a punto. Et por aquesta rregla puedes faser las semeiantes rasones de quantos preçios commo te querrás.

f. 16r

[72] Otrosí, es un omne que a plata de 3 preçios. A 5 marcos que cuestan a rrasón de 12 libras el marco. Otrosí a 8 marcos que le cuestan a rasón de 3 libras el marco. Otrosí a de otra plata, e non digo quántos marcos, que le cuesta a rrasón de 2 libras el marco. Agora demando quánta plata de aquesta de 2 libras querrás mesclar con todo lo otro sobre dicho de los 2 preçios en guisa, que·l marco no le venga a costar sinón 5 libras. Aquesta es la rregla: toma la deferençia que es de 5 libras a que lo quieres torrnar fasta en 12, e es 7. Mutiplícalos por los marcos del preçio de 12 libras, eso es por 5; fasen 35 marcos. Otrosý toma la deferençia que es de 5 a 3, que es 2, e multiplica 2 con 8; fasen 16 marcos. Et por eso commo 5 libras a que·l quieres torrnar en mayor preçio que 3 libras, que es preçio del primero, tú deves abatir aquestes 16 marcos de 35 {de 35} marcos que avíes puesto, et fincarán 19 marcos. Aquestos 19 marcos se deven partir por la deferençia que es de 5 a 2, que es 3; onde parte 19 marcos por 3, et viénenle 6 marcos et $\frac{1}{3}$. Et tantos marcos del preçio de 2 ~~marcos~~ libras querrás mesclar con todo lo otro. Et por esta rregla podrás faser las semeiantes rasones de tantos preçios commo te querrás.

5 marcos a rrasón de 12 libras	ℭdeferençia de 5 a 12 es 7
8 marcos a rrasón de 3 libras	ℭmultiplica 7 por 5, fasen 35
otra plata a rrasón de 2 libras	ℭdeferençia de 5 a 3 es 2
	ℭmultiplica 2 con 8, fasen 16
Et quiérese torrnar a rrasón de 5 libras	ℭabate 16 de 35, fincan 19
	ℭe quiérense partir por
	deferençia de 5 a 2, que es 3
	ℭet viénenle 6 marcos $\frac{1}{3}$ de 1 marco

[73] Otrosí un omne a 2 maneras de oro, eso es de 22 quirates et de 13 quirates. Et quiere tomar de aquestas 2 maneras de oro 1 marco que sea de 16 quirates quando sea mesclado. Dy quánto querrás tomar del 1 oro e quánto del otro. Aquesta es la regla: tú deves guardar la deferençia que es de 16 a 22, et es 6. Et pues //**16v** toma la deferençia que es de 13 a 16, que es 3. Pues ayunta en uno las {de} deferençias, eso es 6 e 3, son 9. Aqueste 9 será colomnia. Pues toma la deferençia de los 22 quirates, que es 6, et dirás:

si 9 es venido de 6, ¿ónde verná 1 marco? Multiplica 6 con 1 marco, fasen 6 marcos. Et parte por 9, viénenle 5 honças $\frac{1}{3}$ de 1 onça. Et tanto y quiere del oro de 13 quirates. Et pues tomarás la otra deferençia que es de 3 e dyrás: sy 9 es venido de 3, ¿ónde verná 1 marco? Multiplica 3 por 1 marcos, e fasen 3 marcos; et parte los por 9, et viénenle 2 honças $\frac{2}{3}$ de 1 onça. Et tanto y querrás del oro de 22 quirates. Et así quiere del oro de 13 quirates 5 onças $\frac{1}{3}$, et del oro de 22 quirates 2 onças $\frac{2}{3}$. Et sy quisieres provarlo di: si 8 honças, eso es 1 marco, tienen 22 quirates, ¿[quántos tendrán] {a} 2 onças $\frac{2}{3}$? Multiplica $2\frac{2}{3}$ con 22 quirates, e la suma parte la por 8; viénenle $7\frac{1}{3}$. Et tantos quirates ꝗ las 2 onças $\frac{2}{3}$. Otrosý, 8 honças tienen 13 quirates. ¿Quánto tienen las 5 onças $\frac{1}{3}$? Multiplica $5\frac{1}{3}$ con 13 quirates, e la suma parte por 8; viénenle $8\frac{2}{3}$. Et tantos quirates tienen las 5 onças $\frac{1}{3}$. Et asý las honças son bien 8, et los quirates son 16. Et asý podrás faser las semeiantes rasones. [91]

[74] Es una copa que es de 3 metales. Et pesa toda 14 onças, de que son de plata 4 honças et 3 onças de cobre et 7 onças de oro fino. Et de aquesta copa se quebró 1 pieza que pesó 6 honças. Dy quánta plata e quánto cobre e quánto oro avía en la pieça quebrada. Aquesta es la rregla: tú deves tomar las suma d·eso que pesa toda la copa, que son 14 onças. Et aquestas 14 será colonia. Et pues guarda quánta era toda la plata que era en la copa, que era 4 onças, et multiplícalo con el pedaço quebrado, eso es por 6, et fasen 24; parte por 14, viénenle $1\frac{5}{7}$. Et tanta plata avía en la pieça quebrada. Otrosí toma el peso del cobre, que son 3 honças; mutiplica·l por 6, fasen 18; parte por 14, e viénenle $1\frac{2}{7}$. Et tanto cobre avía. Otrosí toma el peso del oro, que son 7 onças, e mutiplica·l por 6, fasen 42; parte por 14, et viénenle 3 onças.

91 The method used in this problem, as happens in other cases, can already be found in the *Liber abaci* (see [Boncompagni 1857, pp. 151–152], [Sigler 2002, pp. 238–239]). In our case, a man has 2 kinds of gold, one of them of 22 carats and the other of 13 carats. He wants to make a mixture to obtain a mark of 16 carats and it is asked how much gold of each kind has to be used. After calculating the differences between the initial finenesses and the fineness of the alloy ($22 - 16 = 6$, $16 - 13 = 3$), a proportional partition of the mark (8 ounces) is made to obtain the final solution: $\frac{6}{9}$ and $\frac{3}{9}$ of the 8 ounces. In the corresponding example of the *Liber abaci*, Fibonacci does not explain the second part of the solving process by a rule of three. In several commercial arithmetics, this proportional partition is made quoting the partnership rule explicitly. See, for instance, [Høyrup 1999, p. 109], [Lafont & Tournerie 1967, pp. 171–172], [de Ortega 1512, ff. 155ᵛ-156ʳ].

Et tanto oro avía. Et así avía de plata 1 onça $\frac{5}{7}$, et de cobre $1\frac{2}{7}$, et de oro 3 onças. [92]

Acknowledgements

I am very grateful to the staff of the Biblioteca Nacional in Madrid for their kind assistance, and also to Julio Samsó and Raffaella Franci for their help to obtain some secondary sources.

Many thanks are also due to Antoni Malet for his comments and suggestions, to Jens Høyrup for calling my attention to composite fractions appearing in the *Libro de Arismética que es dicho alguarismo* and to the anonymous referees for their comments, suggestions, and corrections.

APPENDIX A

Ms. 102 (A.III 27) *Biblioteca degl'Intronati di Siena*, f. 155$^{r\text{-}v}$

De altro no dich quant he ha que val lo march 3 lliures. E de aquest que no vall sinó 3 lliures lo march vul pendre tant e mesclar ab l'altro dells preus demunt dits, que com sia mesclat venguen a costar lo march sinó 7 lliures un ab altro. Ara deman-te quant valrà de aquell de 3 lliures lo march en guissa, que tot l'altro dells altres preus no cost ab aquest ensemps sinó 7 lliures lo march. Aquesta és la regla: tu deus guardar la diferència que és de 7 lliures en 10 lliures, e és 3 lliures. E aquest 3 montiplique per lo 10 march $\frac{1}{2}$, e fan 31 marchs $\frac{1}{2}$. Item prin la diferència qui és de 7 lliures en 8 lliures, qui és una. Moltiplique una vegada 6 marchs, e fan 6 marchs. Ajuste ensemps los marchs, ço és $31\frac{1}{2}$ e 6, e són 37 marchs $\frac{1}{2}$. E aquests 37 marchs $\frac{1}{2}$ se deuen pertir {*l*} per la diferència qui és de 7 en 3 lliures, la quall és 4. Dons partex 37 marchs $\frac{1}{2}$ per 4, e vénen-li'n $9\frac{3}{8}$ de march, qui són 9 marchs 3 onces. E aytants marchs, ço és 9 marchs 3 onces de aquell de 3 lliures lo march se voll mesclar ab l'altre tot dells dos preus. E vendrà lo march costat 7 lliures apunt. E per aquesta regla poràs fer les semblants raons de aytants preus com te volràs.

Un home ha de dues maneres d'aur, ço és de 22 quirats e de 13. E vol pendre de aquestes dues maneres d'aur 1 march que sia de 16 quirats quant sia mesclat. Digues quant volrà pendre dell hun aur e dell altro. Aquesta és la regla: tu deus guardar la diferència que és 16 a 22, e és 6. E

92 At the end of the last page, the beginning of the text on the first page is copied again upside down: "Segunt que ya avemos dicho una fegura sola sinifica unidat, así commo a figuras, et así puestas synifica 321. Et otrosí veynte et unno. Et otrosý [...]"

puys pren la diferència que és de 13 a 16, e és 3. Ara aiusta ensemps les dues diferències, ço és 6 e 3, fan 9. Aquest 9 serà lo partidor. E puys prin la diferència que és de 22 quirats, que és 6, e diràs: si 9 és vengut de 6, d'on vendrà 1 march? E montiplique 6 vegades 1 march, e fan 6 marchs; pertex per 9, e vénen-li'n 5 onces $\frac{1}{3}$. E //**155^v^** aytant hi voll dell aur de 22 quirats. Puys prin l'altra diferència, qui és 3, e diràs: si 9 és vengut de 3, d'on vendrà 1 march? E montiplique 3 vegades 1 march, e fan 3 marchs; e partex-los per 9, e vénen-li'n 2 onces $\frac{2}{3}$ de onza. E aytant hi volrà dell aur de ~~*lo*~~ 22 quirats. E axí voll del aur de 13 quirats 5 onces $\frac{1}{3}$, e dell aur de 22, 2 onces $\frac{2}{3}$. E si ho volls provar digues: si 8 onces, ço és 1 march, ten 22 quirats, quant ne tindrà 2 onces $\frac{2}{3}$? Moltiplique $2\frac{2}{3}$ vegades 22, e la suma partex per 8; e vénen-li'n $7\frac{1}{3}$. E aytants quirats tenen les 2 onces $\frac{2}{3}$. Item, si 8 onces tenen 13 quirats, quant tenen les 5 onces $\frac{1}{3}$? E montiplique $5\frac{1}{3}$ vegades 13 quirats, e la suma partex per 8; e vénen-li'n $8\frac{2}{3}$ [#$8\frac{1}{3}$]. E axí les onces {les onces} que són de 8 e los quirats són 16. E axí ho pots fer dells semblants.

És una copa qui és de matall. E pesa tota 14 onces, de que són 4 onces de argent, e 3 onces de coura e 7 onces de aur fi. De aquesta copa se'n trenca una peça qui pesa 6 onces. Digues quant argent e quant coura e quant aur hi havia en la peça trencade. Aquesta és la sua regla: tu deus pendre la summe de açò que pesa tota la copa, qui són 14 onces. E aquestes 14 onces serà colona. E puys guarde quant era tot l'argent qui era en la copa, que era 4 onces, e moltiplique-lo per lo pes de·lla peça trencade, ço és 6, e fan 24; e pertex-lo per [1]4, e vénen-li'n [1] $\frac{5}{7}$. E aytant argent haurà en la peça trencade. Item, prin lo pes del coure, qui són 3, e montiplique per 6; e són 18; partex per 14, e vénen-li'n $1\frac{2}{7}$ [#$3\frac{2}{7}$]. E aytant coura hi havia. Item, prin lo pes del aur, qui són 7 onces, e moltiplique-lo per 6; e fan 42 onces; e partex per 14, e vénen-li·n 3 onces. E aytant aur hi havia. E axí havia d'argent 1 onça $\frac{5}{7}$, e de coura una [$\frac{2}{7}$], de aur 3 onces.

Tractatus algorismi by Jacopo da Firenze (1307), f. 23^r-v^ [93]

Una coppa pesa 14 oncie per questo modo, che el nappo è d'oro et pesa oncie 7. E'l gambo è d'argento et pesa oncie 4. El pede è de ramo et pesa oncie 3. Ora vene ch'io fo fondare questa coppa inseme, ogni cosa mescolato. Et quando è chosì fonduta, jo ne spiccho uno pezzo, el quale pesa once 6. Vo' sapere quanto va de ciascheuno de questi metalli, cioè

93 We quote this transcription from [Høyrup 1999, p. 58].

quanto oro, quanto argento et quanto ramo. Fo così, agiongi inseme primamente l'oro, l'argento e'l rame de questa coppa, ch'è in tucto once 14, tucto mescolato inseme. Et el pezzo che tu ài spicchato si è oncie 6. Et però multiplica 6 via 7 oncie d'oro, fa oncie 42 d'oro. Et partilo in 14, che ne vene oncie 3 d'oro. Et tanto oro ch'è in questo pezzo dele oncie 6. Et multiplica 6 via 4 oncie de argento, fa oncie 24 d'argento, et partilo in 14, che ne vene oncia I et $\frac{5}{7}$. Et però dirai che ne abia oncia I et $\frac{5}{7}$ de argento in questo pezzo. Et poi multiplica 6 via 3 oncie de rame, che fa once 18 de rame, et parti in 14, che ne vene oncia I et $\frac{2}{7}$ de rame. Et cotanto n'ebbe in quello pezzo dele once 6 //**23ᵛ** Et se la voi provare, agiongi inseme oncie 3 d'oro et oncia I et $\frac{5}{7}$ de argento et oncia I et $\frac{2}{7}$ de rame. Et fa in tucto oncie 6, como tu di' che pesa el pezzo che tu spicchasti. Et sta bene. Et così se [fanno] tucte le simili ragioni.

Appendix B

Modern formulae for those numerical problems in Ms 10106 where one, two or three numbers satisfying given conditions must be found:

[15] $x, [y] / \frac{2}{7}x = \frac{3}{8}y$

[16] $x, y, z / \frac{2}{5}x = \frac{3}{7}y = \frac{4}{9}z$

[17] $x / x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 12$

[18] $x / x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 21$

[19] $x / x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x + x = 21$

[20] $x / \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 21$

[21] $x, y / \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) x = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) y, \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) x . \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) y = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) x + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) y$

[22] $x, y / \frac{1}{3}x = \frac{1}{4}y, \quad x.y = x + y$

[23] $x / x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 5 = 6$

[24] $x, y, z / 13 = x + y + z, \quad x.z = y^2$

[25] a) $x, y, z / 13 = x + y + z, \quad x = \frac{y}{2}, y = \frac{z}{2}$ b) $n / n.3\frac{1}{3} = 12$

[26] $x / x + \frac{1}{3}x + 7 = 21$

[27] $x / x - \frac{1}{3}x - 7 = 21$

[28] $x / x + \frac{1}{3}x + 5 - \frac{1}{4}x = 9$

[29] $x, y/40 = x + y, \quad \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) x = y$

REFERENCES

Manuscript sources

Anonymous, Ms. 10106 (f. 1^r-16^v) Biblioteca Nacional (Madrid), ca. 1400.

Anonymous, *De Aresmética,* Ms. 155 Real Academia Española (Madrid) ff. 144^r-164^r, (14th c.)

Anonymous, Ms. 102 (A.III 27) Biblioteca degl'Intronati di Siena, ca. 1445.

Printed sources

Aballagh (Mohamed)
[1988] Les fondements des mathematiques a travers le *Raf al-hijāb* d'Ibn al-Bannā, in *Histoire des Mathematiques arabes, Actes du Premier Colloque International sur l'Histoire des Mathematiques arabes, Alger 1986*, 1988, pp. 135–156.

Aballagh (Mohamed) & Djebbar (Ahmed)
[1987] Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (xii^e s.): Le livre du Kāmil, *Historia Mathematica*, 14 (1987), pp. 147–158.

Abdeljaouad (Mahdi)
[2002] Le manuscrit mathématique de Jerba: une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, in *Septième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30-31 mai et 1^er juin 2002)*, 2002; http://math.unipa.it/~grim/MahdiAbdjQuad11.pdf.

Allard (André), ed. & trans.
[1992] *Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le calcul indien (Algorismus). Versions latines du xii^e siècle*, Paris: Albert Blanchard, 1992.

Allard (André)
[1997] L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval, in Rashed (R.), ed., *Histoire des sciences arabes, tome 2: Mathématiques et physique*, Paris: Seuil, 1997, pp. 199–229.

Andrés (Juan)
[1515] *Sumario breve de la prática de la Aritmética de todo el curso del arte mercantívol bien declarado el qual se llama maestro de cuento*, Valencia: Juan Jofre, 1515; Facsimile edition, Valencia:Vicent García Editores, 1999.

ARRIGHI (Gino)

[1966] Spigolature di aritmetica medievale. "Fighure degl'Indi", "Conputo per segni delle dita", "Infilçare e' rotti", "Partire per ripiego" e "Radici prossimane", *Physis*, 3 (1966), pp. 307–316; Reprinted in Barbieri, F. Franci, R. Toti Rigatelli, L. (eds.) *Gino Arrighi. La Matematica dell'età di mezzo. Scriti scelti*, Edizioni ETS, Pisa, 2004, pp. 309-320.

[1982] Due scritti matematici catalani (sec. XV). Dal Ms. 102 (A.3.27) della Biblioteca degli'Intronati di Siena, *La Fardelliana*, I(2-3) (1982), pp. 13–27.

ARRIGHI (Gino), ed.

[1987] *Paolo Gherardi, Opera mathematica: Libro di ragioni — Liber habaci (Codici Magliabechiani Classe XI, nn. 87 e 88 (sec. XIV) della Biblioteca Nazionale di Firenze)*, Lucca: Pacini-Fazzi, 1987.

[1989] Maestro Umbro (sec. XIII), *Livero de l'abbecho.* (Cod. 2404 della Biblioteca Riccardiana di Firenze), *Bollettino della Deputazione di Storia Patria per l'Umbria*, 86 (1989), pp. 5–140.

ARRIGHI (Gino)

[1971–72] La matematica in Pisa nel Quattrocento. Il Cod. L. VI. 46 della Biblioteca degl'Intronati di Siena, *Bolletino storico pisano*, 40–41 (1971–72), pp. 127–140; Reprinted in Barbieri, F. Franci, R. Toti Rigatelli, L. (eds.) *Gino Arrighi. La Matematica dell'età di mezzo. Scriti scelti*, Edizioni ETS, Pisa, 2004, pp. 113–123.

BONCOMPAGNI (Baldassarre), ed.

[1857] *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. I. Il liber abbaci di Leonardo Pisano*, Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857.

CAUNEDO DEL POTRO (Betsabé) & CÓRDOBA DE LA LLAVE (Ricardo), eds.

[2000] *El arte del alguarismo: Un libro castellano de aritmetica comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV*, Valladolid: Junta de Castilla y León, Consejería de Educación y Cultura, 2000.

CAUNEDO DEL POTRO (Betsabé)

[2003] De Arismética: Un manual de aritmética para mercaderes, *Cuadernos de Historia de España*, 78(1) (2003), pp. 35–46; http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0325-11952003000100002&lng=en&nrm=iso.

CIFUENTES (Lluís)

[2002] *La ciència en català a l'Edat Mitjana i el Renaixement*, Barcelona / Palma de Mallorca: Universitat de Barcelona-Universitat de les Illes Balears, 2002.

D'Alverny (Marie-Thérèse)

[1978] Translations and Translators, in Benson (R. L.), Constable (G.) & Lanham (C. D.), eds., *Renaissance and renewal in the twelfth century*, Chicago and London: Chicago University Press, 1978, pp. 421–462.

Del Treppo (Mario)

[1976] *Els mercaders catalans i l'expansió de la Corona catalano aragonesa al segle XV*, Barcelona: Curial, 1976.

de Ortega (Juan)

[1512] *Síguese una composición dela Arte de la Arismetica y juntamente de Geometría...*, Lyon: Joan Trinxer, 1512.

Djebbar (Ahmed)

[1992] The treatment of fractions in the Arab mathematical tradition of the Maghreb, in Benoit (P.), Chemla (K.) & Ritter (J.), eds., *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 1992, pp. 223–245.

[2005] *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*, Paris: Vuibert, 2005.

Docampo Rey (Javier)

[2004] *La formación matemática del mercader catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas*, Ph.D. Thesis, Universidade de Santiago de Compostela, 2004.

[2006] Reading Luca Pacioli's Summa in Catalonia: An early 16th-century Catalan manuscript on algebra and arithmetic, *Historia Mathematica*, 33 (2006), pp. 43–62.

[2009] Algebraic diagrams in an early sixteenth-century Catalan manuscript and their possible sources, *Historia Mathematica*, 36 (2009), pp. 113–136.

Faulhaber (Charles B.) et al.

[1984] *Bibliography of Old Spanish Texts*, Madison: Hispanic Seminary of Medieval Studies, 1984.

Franci (Raffaella)

[2003] Leonardo Pisano e la trattatistica dell'abbaco in Italia nei secoli XIV e XV, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 23(2) (2003), pp. 33–54.

Gual Camarena (Miguel), ed.

[1981] *El primer manual hispánico de mercadería, siglo XIV*, Barcelona: CSIC, 1981.

Hernando i Delgado (Josep)
[2005] "Instruere in litteris, servire et docere officium": Contractes de treball, contractes d'aprenentatge i instrucció de lletra, gramàtica i arts, en la Barcelona del s. XV, *Acta historica et archaeologica medievalia*, 26 (2005), pp. 945–984.

Høyrup (Jens), ed.
[1999] *VAT. LAT. 4826: Jacopo da Firenze, Tractatus algorismi (1307). Preliminary transcription of the manuscript, with occasional commentaries*, Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter, vol. 3, Række: Preprints og Reprints, 1999.

Høyrup (Jens)
[2005] Leonardo Fibonacci and abbaco culture. A proposal to invert the roles, *Revue d'histoire des mathématiques*, 11 (2005), pp. 23–56.

[2006] Jacopo da Firenze and the beginning of Italian vernacular algebra, *Historia Mathematica*, 33 (2006), pp. 4–42.

Høyrup (Jens), ed.
[2007] *Jacopo da Firenze, Tractatus algorismi: An edition of the manuscript Milan, Trivulziana MS 90, collated with Florence, Riccardiana MS 2236*, Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter, vol. 3, Preprints og Reprints, 2007.

Ifrah (Georges)
[1997] *Historia universal de las cifras*, Madrid: Espasa Fórum, 1997.

Kunitzsch (Paul)
[2003] A New Manuscript of Abū Bakr al-Ḥaṣṣār's *Kitāb al-bayān*, *Suhayl*, 3 (2003), pp. 187–192.

Labarthe (Marie-Hélène)
[2004] *Premières arithmétiques imprimées des Espagnes: une hiérarchie des problèmes au service des procédés de résolution*, Ph.D. Thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 2004.

[2005] Les règles de compagnie, dans les premières arithmétiques imprimées des Espagnes: de la règle marchande à l'outil mathématique, *Revue d'histoire des mathématiques*, 11 (2005), pp. 257–313.

Lafont (Robert) & Tournerie (Guy)
[1967] Francés Pellos. Compendion de l'abaco. *Transcription and philological comment by Robert Lafont and mathematical comment by Guy Tournerie*, Montpellier: Éditions de la Revue des Langues romanes, 1967.

LAMRABET (Driss)

[1994] *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines*, Rabat: Imprimerie El Maârif al-Jadida, 1994.

LÉVY (Tony)

[2003] L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (I), Un ouvrage inédit d'Isaac ben Salomon al-Ahdab (XIVe siècle), *Arabic Sciences and Philosophy*, 13 (2003), pp. 269–301.

LINDBERG (David C.)

[1978] The Transmission of Greek and Arabic Learning to the West, in D.C. (Lindberg.), ed., *Science in the Middle Ages*, Chicago and London: Chicago University Press, 1978, pp. 52–90.

MALET (Antoni), ed.

[1998] Summa de l'art d'aritmètica. Francesc Santcliment. *Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet*, Vic: Eumo editorial, 1998.

MILLARES CARLO (Agustín)

[1983] *Tratado de paleografía española*, Madrid: Espasa Calpe, 1983; Con la colaboración de J. M. Ruiz Asencio.

MILLÁS VALLICROSA (José María)

[1942] *Las traducciones orientales en los manuscritos de la Biblioteca Catedral de Toledo*, Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1942.

PACIOLI (Luca)

[1494] *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Propotionalità*, Venezia: Paganino de Paganini, 1494.

SAIDAN (A. S.), ed.

[1978] *The Arithmetic of al-Uqlīdisī*, Dordrecht: Reidel, 1978.

SANTCLIMENT (Francesc)

[1482] *Summa de l'art d'Aritmètica*, Barcelona: Pere Posa, 1482; Modern edition in [Malet 1998].

[ca. 1487] *Compilatio de Arismética sobre la arte mercantívol*, Zaragoza: Paul (or Hand) Hurus, ca. 1487.

SESIANO (Jacques)

[1988] Le Liber Mahamaleth, un traité mathématique latin composé au XIIe siècle en Espagne, in *Histoire des Mathématiques Arabes. Premier colloque international sur l'histoire des mathématiques arabes, Alger, 1–3 décembre 1986. Actes*, Alger: La maison des livres, 1988, pp. 69–98.

SIGLER (Laurence), trans.
[2002] *Fibonacci's Liber abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation*, New York: Springer, 2002.

VAN EGMOND (Warren)
[1980] *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*, Florencia: Instituto e Museo di Storia della Scienza, 1980.

VENTALLOL (Joan)
[1521] *Pràtica mercantívol*, Lyon: Joan de la Place, 1521; Facsimile edition, Palma de Mallorca: talleres de la Antigua Imprenta Soler, 1985.

WILLIAMS (J.)
[1995] Mathematics and the Alloying of Coinage 1202-1700: Part I, *Annals of Science*, 52 (1995), pp. 213–234.

WOEPCKE (Franz)
[1858–59] Traduction du traité d'arithmétique d'Abdūl Haçan Ali Ben Mohammed Alkalçādī, *Atti dell'accademia Pontificia de'Nuovi Lincei*, 12 (1858–59), pp. 230–275; Reprinted in *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*, Nachdruck von Schriften aus den Jahren 1842-1874. 2 vols, Frankfurt: Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1986, vol. II, pp. 1–46.