Astérisque
331, 2010, p. 1–12

COLEMAN'S $\mathscr{L}$-INVARIANT AND FAMILIES OF MODULAR FORMS

by

Glenn Stevens

Abstract. — We prove the conjecture of Mazur, Tate, and Teitelbaum with Coleman's $\mathscr{L}$-invariant for a newform f of arbitrary weight $k_0 \geq 2$ of split multiplicative type at a prime $p > 2$. The key step in the proof is to show that Coleman's $\mathscr{L}$-invariant is given by $\mathscr{L}(f) = -2p^{k_0/2}\alpha'(k_0)$, where $\alpha(k)$ is the eigenvalue of U_p acting on the germ of a Coleman family f_k passing through f at $k = k_0$.

***Résumé* (Représentations ℓ-adiques de groupes p-adiques).** — On démontre une conjecture de Mazur, Tate et Teitelbaum, en termes de l'invariant $\mathscr{L}$ de Coleman, pour une forme primitive f de poids arbitraire $k_0 \geq 2$ et de type multiplicatif déployé en un nombre premier $p > 2$. Le point clé de la preuve consiste à montrer que l'invariant $\mathscr{L}$ de Coleman est donné par $\mathscr{L}(f) = -2p^{k_0/2}\alpha'(k_0)$, où $\alpha(k)$ est la valeur propre de U_p agissant sur le germe d'une famille de Coleman f_k passant par f en $k = k_0$.

Statement of results

Let p be a prime > 2 and N be a positive integer with $p \nmid N$. Let f be a classical newform over $\Gamma_0(Np)$ of even weight $k_0 + 2 \geq 2$ and assume f is split multiplicative at p, thus

$$a_p(f) = p^{k_0/2}$$

where $a_p(f)$ is the eigenvalue of the U-operator at p acting on f. Under these hypotheses, Coleman **[2]** defined an $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}(f)$ which he conjectured to be equal to the higher weight Mazur-Tate-Teitelbaum $\mathscr{L}$-invariant **[16]**. In this paper we will prove Coleman's conjecture. More precisely, let $\mathscr{X} := \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ with $\mathbb{Z}$ embedded in $\mathscr{X}$ diagonally and let $L_p(f, -) : \mathscr{X} \longrightarrow \mathbb{C}_p$ be the p-adic L-function attached to f as in **[16]**. We will prove the following theorem.

Main Theorem. — $L_p'(f, 1 + k_0/2) = \mathscr{L}(f) \cdot L_\infty(f, 1 + k_0/2)$.

2010 Mathematics Subject Classification. — 11G40 ; 11F67, 14G20.
Key words and phrases. — p-adic L-functions, modular forms, periods of modular forms.

Research partially supported by NSF grants DMS 9401553, DMS 9701782, and DMS 0071065.

© Astérisque 331, SMF 2010

In the special case of weight two ($k_0 = 0$), in which case, $\mathscr{L}(f)$ takes the familiar form $\mathscr{L}(f) = \log(q_f)/\mathrm{ord}(q_f)$ when f has rational Fourier coefficients, this was conjectured by Mazur, Tate, and Teitelbaum [**16**] and proved by Ralph Greenberg and the author in [**11, 12**]. In case f is split multiplicative of weight $k_0 + 2 > 2$, Mazur, Tate, and Teitelbaum offered no precise formula for $\mathscr{L}(f)$, but they did predict that $\mathscr{L}(f)$ could be described purely in terms of local p-adic data associated to f and that, in particular, $\mathscr{L}(f)$ should not change when f is twisted by a Dirichlet character χ with $\chi(p) = 1$. Three separate and apparently independent definitions of $\mathscr{L}(f)$ were later proposed. The first was given by Jeremy Teitelbaum [**18**], but only in the case where f corresponds to a quaternionic modular form via the Jacquet-Langands correspondence. Robert Coleman gave an analogous definition in [**2**] in the general case, which we will briefly recall in section 2 of this paper. A third definition was proposed by Fontaine and Mazur [**15**] based on Fontaine's theory of semistable p-adic galois representations. These three definitions gave rise to three separate conjectures of Mazur-Tate-Teitelbaum type. All three of these conjectures have now been proved.

The $\mathscr{L}$-invariants of Coleman and Teitelbaum can be approximated p-adically on a computer, which enabled early numerical confirmation of the Coleman and Teitelbaum conjectures [**6, 7, 18**]. On the other hand, the Fontaine-Mazur $\mathscr{L}$-invariant appears to be beyond the reach of a computer. Nevertheless, it was the Fontaine-Mazur version of the conjecture that was the first to be proved – in 1996, by Kato, Kurihara, and Tsuji [**13**]. The Coleman version of the conjecture was established by the author shortly thereafter and described in [**17**], thus also proving indirectly that the Fontaine-Mazur and Coleman $\mathscr{L}$-invariants are the same. Coleman and Iovita [**5**] later gave a direct proof that *all three* $\mathscr{L}$-invariants—including Teitelbaum's invariant when it is defined—are the same. For an excellent overview of the history of the $\mathscr{L}$-invariant and the Mazur-Tate-Teitelbaum conjecture, see Colmez's survey [**9**]. The connection with Kato's Euler systems and the p-adic Birch-Swinnerton-Dyer conjecture, including the proof by Kato, Kurihara, and Tsuji given in the language of (φ, Γ)-modules, is also beautifully described in Colmez's Bourbaki seminar notes [**8**].

As in the weight two case (see [**11, 12**]), our proof of Coleman's conjecture in the higher weight case divides naturally into two steps (Theorems A and B below). To state Theorems A and B, we first recall that Coleman [**4**] constructed a p-adic analytic family f_k of overconvergent p-adic modular forms passing through our fixed newform f. This family is defined for k in an open set $B \subseteq \mathscr{X}$ containing k_0 and satisfies $f_{k_0} = f$. Coleman's family is an eigenfamily for the U-operator and we may therefore consider the eigenvalue $\alpha(k)$ of U acting on f_k. The function $\alpha(k)$ is a p-adic analytic function of $k \in B$ so we may consider the derivative of α at the special point $k_0 \in B$.

Theorem A. — $L_p'(f, 1 + k_0/2) = -2 \cdot p^{-k_0/2} \cdot \alpha'(k_0) \cdot L_\infty(f, 1 + k_0/2)$.

Just as in the weight two case, the proof of Theorem A depends on the existence of a two variable p-adic L-function with certain properties. The existence of such a p-adic L-function was proved in the higher weight case in [**17**]. With the two-variable

p-adic L-function in hand, the proof of theorem A proceeds exactly as in the weight two case (see **[11, 12]**).

The rest of this note is dedicated to proving the following theorem.

Theorem B. — $\mathscr{L}(f) = -2 \cdot p^{-k_0/2} \cdot \alpha'(k_0)$.

The Main Theorem is an immediate consequence of Theorems A and B. We remark that Colmez **[10]** has also proven Theorem B, but in terms of the Fontaine-Mazur $\mathscr{L}$-invariant.

1. The Gauss-Manin connection with Frobenius structure

We adopt Coleman's notations as in **[2]** with only one modification. Namely, we will add full level 2 structure to the moduli space. This rigidifies the setup and simplifies the calculations (see especially the proof of Proposition 3.1(2)). We let X be the modular curve $X(Np, 2)$ with level Np structure (a cyclic subgroup of order Np) plus full level 2 structure. (If $2|N$ we assume that the additional level 2 structure extends the 2-part of the level N structure.) The p-adic rigid analytic space X^{an} attached to X is the union of three disjoint parts, namely,

$$X^{an} = Z_\infty \cup W \cup Z_0$$

where Z_∞ and Z_0 are the ordinary affinoids containing the ∞ and 0-cusps respectively, and W is the union of the supersingular annuli. Following Coleman, we write $W_\infty = Z_\infty \cup W$ and $W_0 = Z_0 \cup W$.

Let $Y = Y(Np, 2)$ denote X with the cusps deleted. Let $\pi : E \longrightarrow Y$ be the universal elliptic curve with level structure over Y and let $\mathscr{H}$ be the relative de Rham cohomology sheaf over X with log singularities at the cusps. Then $\mathscr{H}$ is a coherent $\mathscr{O}$-module locally free of rank 2 over X. As Katz explains in **[14]** we have a canonical decomposition

$$\mathscr{H} = \underline{\omega}^{-1} \oplus \underline{\omega}$$

where $\underline{\omega} := \pi_* \Omega^1_{E/Y}$ For any nonnegative integer k we let

$$\mathscr{H}_k := Symm^k(\mathscr{H}) = \underline{\omega}^{-k} \oplus \underline{\omega}^{2-k} \oplus \cdots \oplus \underline{\omega}^k.$$

The Gauss-Manin connection $\nabla : \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{H} \otimes \Omega$ induces a connection

$$\nabla : \mathscr{H}_k \longrightarrow \mathscr{H}_k \otimes \Omega$$

for each integer $k \geq 0$, which we also call the Gauss-Manin connection.

The Deligne-Tate map ([**14**]) preserves Z_∞ and extends to a wide open neighborhood of Z_∞ *properly* contained in W_∞. Accordingly, the Gauss-Manin connection is endowed with a natural Frobenius structure over some sufficiently small wide open neighborhood of Z_∞. Katz spells out precisely how big this neighborhood can be, but this is a technical point that we will not need. It will be convenient to simplify the notation and write $Z_\infty^\dagger$ to denote a choice of such a wide open neighborhood of

Z_∞ with the additional property that the intersection of $Z_\infty^\dagger$ with any supersingular annulus is a concentric subannulus.

For k an integer, let $M_{k+2}^\dagger := \underline{\omega}^{k+2}(Z_\infty^\dagger)$ denote the space of overconvergent p-adic modular forms of weight $k+2$ and level $(Np,2)$ as before. For $k \geq 0$ we let

$$\kappa : M_{k+2}^\dagger \longrightarrow \mathscr{H}_k \otimes \Omega(Z_\infty^\dagger)$$

be the Kodaira Spencer map (see §4 of **[3]**). The canonical projection $\mathscr{H}_k \longrightarrow \underline{\omega}^{-k}$ induces a surjection $\mathscr{H}_k(Z_\infty^\dagger) \longrightarrow M_{-k}^\dagger$, and Coleman proves in **[3]** that there is a canonical $\mathbb{Q}_p$-linear section

$$\nu : M_{-k}^\dagger \longrightarrow \mathscr{H}_k(Z_\infty^\dagger)$$

satisfying the equation

$$\nabla(\nu(g)) = \kappa(\theta^{k+1}g)/k! \in \mathscr{H}_k \otimes \Omega(Z_\infty^\dagger)$$

for any $g \in M_{-k}$. Here $\theta^{k+1} : M_{-k}^\dagger \longrightarrow M_{k+2}^\dagger$ is the operator defined on q-expansions by

$$\theta^{k+1} : \sum_{n\geq 0} a_n q^n \longmapsto \sum_{n\geq 0} n^{k+1} a_n q^n.$$

For details, see Proposition 4.3 of **[3]**.

Following Katz **[14]**, Coleman **[2]** also defines a Frobenius structure on $Z_\infty^\dagger$ which gives rise to a "Frobenius operator" Φ acting on the cohomology of $\mathscr{H}_k$, $\underline{\omega}^k$, and Ω. Morevover, Φ commutes with $\nabla : \mathscr{H}_k \longrightarrow \mathscr{H}_k \otimes \Omega$ on $Z_\infty^\dagger$ (see §11 of **[2]**). On q-expansions of modular forms of weight k, Φ is given by $\Phi = p^k V$ where V is the operator on q-expansions given by $V(f)(q) = f(q^p)$, i.e.

$$V : \sum_{n\geq 0} a_n q^n \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n q^{np},$$

2. Coleman's $\mathscr{L}$-invariant.

In this section we recall Coleman's definition of the $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}(f)$ of a split multiplicative p-newform f of weight $k_0+2 \geq 2$. Let $\mathscr{H}_{k_0}^*$ denote the complex of sheaves associated to $\mathscr{H}_{k_0} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{H}_{k_0} \otimes \Omega$ and consider the hypercohomology $\mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k_0}^*)$ with respect to the covering $\{W_\infty, W_0\}$ of X. The Hecke operators act on this space and the systems of eigenvalues that occur in it are the same as those that occur in the space of classical modular forms of weight k_0 and corresponding level. In particular, letting K be the field generated over $\mathbb{Q}_p$ by the eigenvalues of the Hecke operators acting on f, we obtain a $\mathbb{Q}_p$-subspace $H(f) \subseteq \mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k_0}^*)$ endowed with an action of the field K with the property that $H(f)$ is a 2-dimensional K-vector space on which the Hecke operators act as scalars according to the eigenvalues of f. Using his theory of p-adic integration, Coleman endows $H(f)$ with a natural monodromy module structure in which the monodromy is *non-trivial*. In **[15]**, Mazur attaches an $\mathscr{L}$-invariant to any two dimensional monodromy module with non-trivial monodromy. Coleman's $\mathscr{L}$-invariant can be defined simply as the $\mathscr{L}$-invariant of Coleman's monodromy module.

We will use the more concrete definition that Coleman gives in **[2]**. For simplicity, we assume $k_0 > 0$ so that there are no nonzero horizontal sections of $\mathscr{H}_{k_0}$ defined on all of W_∞ nor on all of W_0, i.e. $H^0(W_\infty, \mathscr{H}_{k_0}^*) = H^0(W_0, \mathscr{H}_{k_0}^*) = 0$. On the other hand, one generally does find non-zero horizontal sections of $\mathscr{H}_{k_0}$ on the supersingular annuli $W = W_\infty \cap W_0$. Indeed, Coleman constructs two maps

$$\sigma, \rho : M_{k_0+2} \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_{k_0}^*)$$

defined on the space M_{k_0+2} of classical modular forms of weight k_0+2 and appropriate level. The map σ is defined using Coleman integration (Definition 2.1 below) while the map ρ is defined in terms of residues (Definition 2.2).

Let $k \geq 0$ and $f \in M_{k+2}$ be a classical Hecke eigenform. Let α be the eigenvalue of the U-operator acting on f. We suppose $\alpha \neq 0$. The differential form $\omega_f := \kappa(f) \in \mathscr{H}_k \otimes \Omega(W_\infty)$ represents a cohomology class $[\omega_f] \in H^1(W_\infty, \mathscr{H}_k)$ and the Frobenius operator Φ acts on ω_f and also on $[\omega_f]$. Indeed, we have $\Phi([\omega_f]) = \frac{p^{k+1}}{\alpha} \cdot [\omega_f]$. Now Coleman's integration theory gives us a well-defined flabby antiderivative $I_\infty(f)$ defined on all of W_∞ which is rigid analytic on the ordinary residue disks, is log-analytic on the supersingular annuli and satisfies the following two properties

- $I_\infty(f)$ satisfies the differential equation

$$\nabla(I_\infty(f)) = \omega_f \quad \text{on } W_\infty.$$

- the flabby analytic section

$$I_\infty(f) - \frac{\alpha}{p^{k+1}} \Phi(I_\infty(f))$$

of $\mathscr{H}_k$ is rigid analytic on $Z_\infty^\dagger$ (i.e. not only on Z_∞, but also on some wide open neighborhood of Z_∞).

Similar considerations give rise to a well-defined flabby analytic section $I_0(f)$ of $\mathscr{H}_k$ over W_0 satisfying the differential equation

$$\nabla(I_0(f)) = \omega_f \quad \text{on } W_0.$$

Both $I_0(f)$ and $I_\infty(f)$ are defined on the overlap $W = W_\infty \cap W_0$. Coleman makes the following definition.

Definition 2.1. — *If $f \in M_{k+2}$ is a classical Hecke eigenform then we define $\sigma(f) \in H^0(W, \mathscr{H}_k^*)$ to be the horizontal section of $\mathscr{H}_k$ on W given by*

$$\sigma(f) := I_\infty(f)|_W - I_0(f)|_W.$$

The residue map $\rho : M_{k+2} \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_k^*)$ is defined using the map

$$\mathrm{Res} : \mathscr{H}_k \otimes \Omega(Z_\infty^\dagger) \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_k^*)$$

which in turn is defined by $\mathrm{Res}(\omega) :=$ the unique horizontal section of $\mathscr{H}_k$ on W whose restriction to $Z_\infty^\dagger \cap W$ is the residue of ω restricted to this disjoint union of oriented annuli. Note that here as elsewhere we use the standard orientation of the annuli, i.e. the orientation in which Z_∞ is *interior* to W.

Definition 2.2. — *Given $f \in M^\dagger_{k+2}$, we let $\omega_f := \kappa(f) \in \mathscr{H}_k \times \Omega(Z^\dagger_\infty)$ and define $\rho(f) := \mathrm{Res}(\omega_f)$.*

Definition 2.3. — *Coleman's $\mathscr{L}$-invariant of a split multiplicative newform $f \in M_{k+2}$ is defined to be the unique element $\mathscr{L}(f) \in K$ for which $\sigma(f) = \mathscr{L}(f) \cdot \rho(f)$.*

The existence and uniqueness of such an $\mathscr{L}$-invariant was, of course, proved by Coleman (see **[2]**).

3. Families of modular forms

First of all we have the Eisenstein family. For each integer k there is an overconvergent p-adic modular form E_k of weight k whose q-expansion is given by

$$E_k := 1 + 2\zeta_p(1-k)^{-1} \sum_{k \geq 1} \sigma^*_{k+1}(n) q^n.$$

Here $\zeta_p(s)$ is the Kubota–Leopoldt p-adic zeta function and when $k = 0$ the above equality is understood to mean $E_0 = 1$. (Recall $\zeta_p(s)$ has a simple pole at $s = 1$). For integral $k \geq 0$ we set

$$t_k := \frac{1}{2}\zeta_p(1+k) \cdot E_{-k} \qquad \text{and} \qquad G_k := \frac{1}{2}\zeta_p(-1-k) \cdot E_{k+2}.$$

Then $t_k \in M^\dagger_{-k}$ is an overconvergent modular form of weight $-k$ and $G_k \in M_{k+2}$ is a classical modular form of weight $k+2$. The family t_k extends to a meromorphic family of Eisenstein series for $k \in \mathscr{X}$ with a simple pole at $k = 0$ and G_k defines a meromorphic family with a simple pole at $k = -2$. Moreover $G_k = t_{-2-k}$. The special point $k = 0$ will play a crucial role in the proof of Theorem B.

Proposition 3.1. — *The following assertions hold.*

1. *The family t_k, $k \in \mathscr{X}$, has a simple pole at $k = 0$ with residue given by*

$$\lim_{k \to 0} k t_k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2. *The residue of G_0 along any supersingular annulus is $1/2$:*

$$\rho(G_0) = -\frac{1}{2}.$$

Proof. — The first assertion is an immediate consequence of the well-known fact that the Kubota-Leopoldt p-adic zeta function $\zeta_p(s)$ has a simple pole at $s = 1$ and that the residue at $s = 1$ is given by

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta_p(s) = \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

To prove the second assertion, we first consider the special case $N = 1$. Then $\eta = \kappa(G_0)$ is a section of Ω over Y which extends to a meromorphic section over X with simple poles along the cusps. We want to compute $\mathrm{Res}(\eta) \in H^0(W)$. We remark first of all that since the eigenvalues of the Hecke operators acting on η are

known, they are also known on $\mathrm{Res}(\eta)$. Indeed, the eigenvalues are the same as those acting on constant functions on W. Hence $\mathrm{Res}(\eta)$ is a constant. To determine what the constant is we use the fact that the sum of the residues along the oriented annuli at the "edges" of $W_\infty \setminus \{cusps\}$ is equal to zero. For the supersingular annuli this is the orientation we used above to define $\rho(f)$. However, the annuli around the cusps are orientated so that the cusps are *exterior* to the annuli, which is opposite the one used to compute the constant terms of Eisenstein series.

Under our assumption $N = 1$, there are a total of three cusps in W_∞ corresponding to the three cusps of $X(2)$. The constant terms of G_0 are the same at all of these cusps since G_0 is modular of level p. Since the natural map $X \longrightarrow X_0(p)$ is ramified of order 2 at each of these cusps and since the constant term of G_0 at the infinity cusp is $(1-p)/24$ we conclude that the sum of the residues along the oriented annuli around the cusps is $(p-1)/4$. Hence the sum of the residues along the supersingular annuli is $(1-p)/4$. But a simple calculation shows that the number of supersingular annuli in X is $(p-1)/2$. Hence the residue along any supersingular annulus is $-1/2$. This proves (2) when $N = 1$.

The general case follows at once since for arbitrary N, the map $X(Np, 2) \longrightarrow X(p, 2)$ is unramified over the supersingular annuli. This completes the proof of the proposition. □

We can remove Euler factors at p using the operator V on overconvergent modular forms defined on q-expansions by the formula $V(f)(q) = f(q^p)$. If F is an eigenform, then we let F^0 denote the eigenform obtained by removing the Euler factor at p. Thus, we have the families

$$\begin{aligned} t_k^0 &:= t_k - V(t_k) \\ G_k^0 &:= G_k - V(G_k) \\ f_k^0 &:= f_k - \alpha(k)V(f_k) \end{aligned}$$

For $k \geq 0$ we let $\eta_k := \kappa(G_k)$ and $\eta_k^0 := \kappa(G_k^0)$ where $\kappa : \mathscr{M}_{k+2} \longrightarrow \mathscr{H}_k \otimes \Omega$ is the Kodaira-Spencer map. We also set $g_k := \nu(t_k)$ and $g_k^0 := \nu(t_k^0)$. Then since $\theta^{k+1} t_k^0 = G_k^0$ it follows that

$$\nabla(g_k^0) = G_k^0.$$

Finally, for each integer $k \geq 0$ we may let $s_k := I_\infty(f_k)$ be the Coleman integral of f_k defined in section 1. Then s_k is a flabby section of $\mathscr{H}_k$ over W_∞. This section is characterized by the property that

$$s_k^0 := s_k - \frac{\alpha(k)}{p^{k+1}} \cdot \Phi(s_k)$$

is a rigid analytic section of $\mathscr{H}_k$ over $Z_\infty^\dagger$. Hence there is an overconvergent modular form $\phi_k^0 \in M_{-k}^\dagger$ such that

$$\nu(\phi_k^0) = s_k^0.$$

Hence $\theta^{k+1}(\phi_k^0) = f_k^0$. Finally, set

$$\begin{aligned}\omega_k &:= \kappa(f_k),\\ \omega_k^0 &:= \kappa(f_k^0).\end{aligned}$$

4. Some Pairings

As in the introduction, we fix an integer $k_0 \geq 0$. For each integer $k \geq 0$ cup product on the de Rham cohomology of the fibers of E/X induces a natural pairing $[\cdot,\cdot] : \mathscr{H}_k \times \mathscr{H}_{k+k_0} \longrightarrow \mathscr{H}_{k_0}$. This pairing induces natural pairings

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot] &: \mathscr{H}_k \times \mathscr{H}_{k+k_0} \otimes \Omega \longrightarrow \mathscr{H}_{k_0} \otimes \Omega;\\ [\cdot,\cdot] &: \mathscr{H}_k \otimes \Omega \times \mathscr{H}_{k+k_0} \longrightarrow \mathscr{H}_{k_0} \otimes \Omega.\end{aligned}$$

Proposition 4.1. — *These pairings satisfy the following identity for all $x \in \mathscr{H}_k$, and $y \in \mathscr{H}_{k+k_0}$*

$$\nabla[x,y] = [x, \nabla y] + [\nabla x, y].$$

Proof. — This follows from the product formula for differentiation. □

We will use a superscript † to denote overconvergent sections of a sheaf. For example, $\mathscr{H}_k^\dagger := \mathscr{H}_k(Z_\infty^\dagger)$. We may then define pairings

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle &: \mathscr{H}_k^\dagger \times \mathscr{H}_{k+k_0}^\dagger \otimes \Omega^\dagger \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_{k_0}^*)\\ \langle\cdot,\cdot\rangle &: \mathscr{H}_k^\dagger \otimes \Omega^\dagger \times \mathscr{H}_{k+k_0}^\dagger \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_{k_0}^*)\end{aligned}$$

by defining $\langle x, y\rangle := \mathrm{Res}([x,y])$ where $\mathrm{Res} : \mathscr{H}_{k_0}^\dagger \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_{k_0}^*)$ is the residue map.

Recall the Hecke operators $U := U_p$ and w from §8 of **[2]**. On q-expansions of modular forms U is given by

$$U : \sum_{n\geq 0} a_n q^n \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_{np} q^n.$$

The operator w acts on $\mathscr{H}_{k_0}(W)$ and satisfies $w^2 = p^{k_0}$ on this space. Hence

$$W_p := p^{-k_0/2} w$$

acts as an involution. Moreover, from §11 of **[2]** we have $\Phi = w$ on horizontal sections of $\mathscr{H}_{k_0}$ over W, hence $\Phi = p^{k_0/2} W_p$ on $H^0(W, \mathscr{H}_{k_0}^*)$.

Proposition 4.2. — *Let k, k_0 be non-negative integers and let $g \in M_{-k}^\dagger$, $f \in M_{k+k_0}^\dagger$, and $h \in M_{k+2}^\dagger$. Then the following assertions hold.*

1. *For $x = \nu(g) \in \mathscr{H}_k^\dagger$ and $\omega = \kappa(f) \in \mathscr{H}_{k+k_0}^\dagger \otimes \Omega^\dagger$ we have $\langle x, \Phi(\omega)\rangle = p^{k+\frac{k_0}{2}+1} \cdot W_p(\langle U(x), \omega\rangle)$;*
2. *For $\eta = \kappa(h) \in \mathscr{H}_k^\dagger \otimes \Omega^\dagger$ and $y \in \mathscr{H}_{k+k_0}^\dagger$ we have $\langle \eta, \Phi(y)\rangle = p^{k+\frac{k_0}{2}} \cdot W_p(\langle U(\eta), y\rangle)$.*

Proof. — Since $p^{k_0/2}W_p = \Phi$ and $p \cdot \Phi \circ Res = Res \circ \Phi$ we have

$$\begin{aligned} p^{k+\frac{k_0}{2}+1} \cdot W_p(\langle U(x), \omega\rangle) &= p^k \cdot \langle \Phi U(x), \Phi\omega\rangle \\ &= p^k \rho(\Phi U(g) \cdot \Phi(f)) \\ &= \rho(g \cdot \Phi(f)) \\ &= \langle x, \Phi(\omega)\rangle. \end{aligned}$$

This proves (1) and (2) is proved similarly. □

5. Proof of Theorem B

The operator W_p is an involution on $H^0(W, \mathscr{H}_{k_0})$. We let superscript + denote projection to the +-component under the action of W_p. Consider the function $\psi : \mathscr{X} \longrightarrow H^0(W, \mathscr{H}_{k_0})^+$ defined by

$$\psi(k) := \rho(t_k^0 f_{k+k_0}^0)^+ \in H^0(W, \mathscr{H}_{k_0})^+.$$

Since $t_k^0 f_{k+k_0}^0$ is an analytic family of overconvergent modular forms of weight k_0 we see at once that $\psi(k)$ is an analytic function of k defined on a neighborhood of 0 in $\mathscr{X}$. For the proof of Theorem B we will calculate $\psi(0)$ in two ways. First, by direct calculation we express $\psi(0)$ in terms of $\rho(f)$. Then we apply the product rule (Proposition 2) to express $\psi(0)$ in terms of $\sigma(f)$. Comparing these two expressions, Theorem B follows.

Define $u(k) := p^{-k_0/2} \cdot \alpha(k)$, the "unit part" of $\alpha(k)$.

Lemma 5.1. — *We have*

$$\psi(0) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot u'(k_0) \cdot \rho(f).$$

Proof. — For an arbitrary integer $k \geq 0$ we have

$$\psi(k) = \rho\left(t_k^0 f_{k+k_0}^0\right)^+ = \langle g_k^0, \omega_{k+k_0}^0\rangle^+.$$

We also have

$$\begin{aligned} \langle g_k^0, \omega_{k+k_0}^0\rangle &= \langle g_k, \omega_{k+k_0}^0\rangle \\ &= \left\langle g_k,\ \omega_{k+k_0} - \tfrac{\alpha(k+k_0)}{p^{k+k_0+1}}\Phi(\omega_{k+k_0})\right\rangle \\ &= \langle g_k,\ \omega_{k+k_0}\rangle - \tfrac{\alpha(k+k_0)}{p^{k_0/2}} W_p(\langle U(g_k), \omega_{k+k_0}\rangle) \\ &= \langle g_k,\ \omega_{k+k_0}\rangle - u(k+k_0) \cdot W_p(\langle g_k, \omega_{k+k_0}\rangle). \end{aligned}$$

The first equality above follows from three facts: (1) $g_k^0 - g_k$ is in the image of Φ; (2) $\omega_{k+k_0}^0$ is in the kernel of U; and (3) the image of Φ is perpendicular to the kernel of U by Proposition 4.2. The third equality follows from Proposition 4.2(1). The last equality above follows from the fact that the Eisenstein series t_k is an eigenform for the U-operator with eigenvalue 1, hence $U(g_k) = g_k$.

Now project the above identity to the $+$-component for W_p to get

$$\begin{aligned}\psi(k) &= (1-u(k+k_0))\cdot\langle g_k,\omega_{k+k_0}\rangle^+\\ &= \frac{1-u(k+k_0)}{k}\cdot\rho(kt_kf_{k+k_0})^+.\end{aligned}$$

Letting $k\to 0$, using Propostion 3.1(1), and noting that $\rho(f)^+=\rho(f)$ we obtain

$$\psi(0)=-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdot u'(k_0)\cdot\rho(f)$$

and the lemma is proved. □

Let $C_\infty := Z_\infty^\dagger \setminus Z_\infty$. Then C_∞ is a union of concentric annuli in the supersingular annuli. Note that the pairings $\langle x,y\rangle$ are well-defined so long as x,y are rigid on C_∞. In particular we have a well-defined pairing

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \Omega^1(C_\infty)\times\mathscr{H}_{k_0}(C_\infty)\longrightarrow\mathscr{H}_{k_0}(W)^\nabla.$$

defined by $\langle\omega,h\rangle=\mathrm{Res}_W(h\omega)$, where this latter is defined to be the unique horizontal section on W extending $\mathrm{Res}_{C_\infty}(h\omega)$.

We now turn to an application of Coleman's integration theory. In what follows, we will write a subscript $flog$ to denote flabby log-analytic sections of a rigid analytic sheaf. Such sections are, by definition, rigid analytic on the residue disks in the ordinary part of X and are log-analytic on the supersingular annuli. For details, see §10 of [**2**] and also [**1**].

Lemma 5.2. — *Let $e\in\mathscr{O}_{flog}(W_\infty)$ be any Coleman integral of η_0 (well-defined up to a constant). Restrict e to the supersingular annuli W and let $h=e-W_p(e)\in\mathscr{O}_{\log}(W)$. Let $z=h\cdot\rho(f)\in\mathscr{H}_{k_0,log}(W)$, and let $z^0:=z-p^{-1-k_0/2}\Phi(z)\in\mathscr{H}_{k_0,log}(C_\infty)$. Then z,z^0 have the following properties.*

1. *z^0 is rigid on C_∞.*
2. *$s_{k_0}+z$ is rigid on W.*
3. *$\langle\eta_0,z^0\rangle=0$.*
4. *$W_p(z)+z=0$ on the supersingular annuli W.*

Proof. — (1) Since e is a Coleman integral of η_0, we have $e^0:=e-p^{-1}\Phi(e)$ is rigid on $Z_\infty^\dagger$. Since $W_p(\eta_0)=-\eta_0$ on X, we have $W_p(e)+e$ is constant on W. It follows that $h^0:=h-p^{-1}\Phi(h)$ is also rigid on C_∞. On the other hand, $\Phi(\rho(f))=p^{k_0/2}\rho(f)$. Hence $z^0=h^0\cdot\rho(f)$, which is rigid on C_∞.

(2) By definition, $\nabla(s_{k_0})=\kappa(f)$. Hence, $\mathrm{Res}_W(\nabla(s_{k_0}))=\rho(f)$. On the other hand, $\mathrm{Res}_W(\nabla(z))=\mathrm{Res}_W(dh)\cdot\rho(f)$. But $dh=2\eta_0$ and we have shown in Proposition 3.1 that $\mathrm{Res}_W(\eta_0)=-1/2$, hence $\mathrm{Res}_W(\nabla(z))=\rho(f)$. We therefore have $\mathrm{Res}_W(\nabla(s_{k_0}+z)=0$ and it follows that $s_{k_0}+z$ is rigid on W, as claimed.

(3) We have $\langle\eta_0,z^0\rangle=\langle\eta_0,h^0\rangle\cdot\rho(f)$. Moreover, $\langle\eta_0,h^0\rangle=\langle\eta_0^0,h^0\rangle$ because the image of Φ is orthogonal to the kernel of U. But, $\langle\eta_0^0,h^0\rangle=\mathrm{Res}_W(h^0\eta_0^0)=\frac{1}{2}\mathrm{Res}_W(h^0dh^0)=0$, since h^0dh^0 is an exact differential on C_∞.

(4) Since $W_p(\rho(f))=\rho(f)$, this follows immediately from the definition of z.

This completes the proof of Lemma 5.2. □

Lemma 5.3. — $\psi(0) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sigma(f)$.

Proof. — As in the first line of the proof of Lemma 5.1 we have

$$\psi(0) = \langle g_0^0, \omega_{k_0}^0 \rangle^+.$$

But $\omega_{k_0}^0$ is an exact differential, indeed $\nabla s_{k_0}^0 = \omega_{k_0}^0$. Moreover, $\nabla g_0^0 = \eta_0^0$. Hence, by Proposition 4.1 we have

$$\nabla[g_0^0, s_{k_0}^0] = [\eta_0^0, s_{k_0}^0] + [g_0^0, \omega_{k_0}^0].$$

Taking residues of both sides of this equality along the supersingular annuli we obtain

$$0 = \langle \eta_0^0, s_{k_0}^0 \rangle + \langle g_0^0, \omega_{k_0}^0 \rangle.$$

Hence $\psi(0) = -\langle \eta_0^0, s_{k_0}^0 \rangle^+$, which we calculate as follows:

$$\begin{aligned}
\langle \eta_0^0, s_{k_0}^0 \rangle &= \langle \eta_0, s_{k_0}^0 \rangle \\
&= \langle \eta_0, s_{k_0}^0 + z^0 \rangle \\
&= \langle \eta_0, (s_{k_0} + z) - \tfrac{1}{p^{k_0/2+1}} \cdot \Phi(s_{k_0} + z) \rangle \\
&= \langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle - \tfrac{1}{p} W_p(\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle) \\
&= \langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle - \tfrac{1}{p} W_p(\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle)
\end{aligned}$$

Projecting to the $+$-component for W_p we obtain

$$\psi(0) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle^+.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}
\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle^+ &= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle + W_p\left(\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle\right) \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle - \langle W_p(\eta_0), W_p(s_{k_0} + z) \rangle \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \Big(\langle \eta_0, s_{k_0} + z \rangle + \langle \eta_0, W_p(s_{k_0} + z) \rangle \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \langle \eta_0, (s_{k_0} + z) + W_p(s_{k_0} + z) \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \langle \eta_0, s_{k_0} + W_p(s_{k_0}) \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \langle \eta_0, \sigma(f) \rangle.
\end{aligned}$$

Finally, we use Proposition 3.1(2) to conclude that $\langle \eta_0, \sigma(f) \rangle = -\frac{1}{2} \cdot \sigma(f)$. Hence $\psi(0) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sigma(f)$ and Lemma 5.3 is proved □

Proof of Theorem B. — Combining Lemma 5.1 and Lemma 5.3 we obtain

$$-2 \cdot u'(k_0) \cdot \rho(f) = \sigma(f).$$

Hence $\mathscr{L}(f) = -2 \cdot u'(k_0) = -2 \cdot p^{-\frac{k_0}{2}} \cdot \alpha'(k_0)$ and Theorem B is proved. □

References

[1] R. F. Coleman – "Reciprocity laws on curves", *Compositio Math.* **72** (1989), p. 205–235.

[2] ———, "A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms", in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[3] ———, "Classical and overconvergent modular forms", *Invent. Math.* **124** (1996), p. 215–241.

[4] ———, "p-adic Banach spaces and families of modular forms", *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[5] R. F. Coleman & A. Iovita – "Hidden structures on semistable curves", preprint, 2007.

[6] R. F. Coleman, G. Stevens & J. T. Teitelbaum – "Numerical experiments on families of p-adic modular forms", in *Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995)*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., 1998, p. 143–158.

[7] R. F. Coleman & J. T. Teitelbaum – "Numerical solution of the p-adic hypergeometric equation", in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 53–62.

[8] P. Colmez – "La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique", *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.

[9] ———, "Zéros supplémentaires de fonctions L p-adiques de formes modulaires", in *Algebra and number theory*, Hindustan Book Agency, 2005, p. 193–210.

[10] ———, "Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de Frobenius", this volume.

[11] R. Greenberg & G. Stevens – "p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms", *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.

[12] ———, "On the conjecture of Mazur, Tate, and Teitelbaum", in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 183–211.

[13] K. Kato, M. Kurihara & T. Tsuji – "Lectures at the Émile Borel center", first semester 1997.

[14] N. M. Katz – "p-adic properties of modular schemes and modular forms", in *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350.

[15] B. Mazur – "On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory", in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–20.

[16] B. Mazur, J. Tate & J. T. Teitelbaum – "On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer", *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[17] G. Stevens – "Lectures at the Émile Borel center", first semester 2000.

[18] J. T. Teitelbaum – "Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel", *Invent. Math.* **101** (1990), p. 395–410.

G. Stevens, College of Arts and Sciences, Boston University, 110 Cummington Street, Boston MA 02215, USA • *E-mail :* `ghs@bu.edu`

Astérisque
331, 2010, p. 13–28

INVARIANTS $\mathscr{L}$ ET DÉRIVÉES DE VALEURS PROPRES DE FROBENIUS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous donnons une formule pour l'invariant-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur d'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en termes de dérivées de valeurs propres de Frobenius. Combinée avec des résultats de Stevens et de Kisin, cette formule fournit une nouvelle démonstration de l'égalité des invariants-$\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur et Coleman attachés aux formes modulaires.

***Abstract* ($\mathscr{L}$-invariants and Frobenius eigenvalues derivatives).** — We give a formula for Fontaine-Mazur's $\mathscr{L}$-invariant attached to a 2-dimensional semi-stable representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ in terms of derivatives of eigenvalues of Frobenius. Combined with results of Stevens and Kisin, this gives a new proof of the equality between Fontaine-Mazur's and Coleman's $\mathscr{L}$-invariants attached to modular forms.

Introduction

0.1. Invariants $\mathscr{L}$ de formes modulaires. — Si f est une forme primitive de poids k_0 pair et niveau N divisible par p, vecteur propre pour[(1)] T_p pour la valeur propre $p^{k_0/2-1}$, la fonction L p-adique de f a un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**20**] ont conjecturé[(2)] l'existence d'un invariant $\mathscr{L}(f)$ ne dépendant de f que « localement en p », tel que l'on ait[(3)]

$$L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}(f) \cdot L(f, k_0/2).$$

Si $k_0 = 2$ et si les coefficients de Fourier de f sont rationnels, il correspond à f une courbe elliptique E, définie sur $\mathbf{Q}$, ayant mauvaise réduction multiplicative déployée

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11S**, 11F**.
Mots clefs. — Représentation semi-stable, famille de représentations.

(1) Il s'agit de l'opérateur T_p de niveau N divisible par p, c'est-à-dire l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner.
(2) Le lecteur pourra consulter [**9**] pour une introduction plus détaillée.
(3) Pour que la formule ci-dessous ait un sens, il faut considérer L_p comme à valeurs dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les périodes de f.

© Astérisque 331, SMF 2010

en p. D'après le théorème d'uniformisation de Tate, il existe alors $q \in \mathbf{Q}_p^*$ de valuation non nulle, tel que E soit isomorphe, en tant que variété rigide, à $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, et on a $\mathscr{L}(f) = \frac{\log q}{v_p(q)}$. Dans le cas général, deux définitions de l'invariant $\mathscr{L}(f)$ ont été proposées : l'une par Coleman [**3**] et l'autre par Fontaine et Mazur [**19**]. L'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ de Coleman est défini via la théorie de l'intégration p-adique de Coleman et l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ de Fontaine-Mazur est défini via le (φ, N)-module filtré de la restriction à un groupe de décomposition en p de la représentation galoisienne V_f associée à f. On dispose des résultats suivants :

Théorème 0.1 **(Stevens)**. — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.2 **(Kato-Kurihara-Tsuji)**. — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.3 **(Coleman-Iovita)**. — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$.

Le théorème de Coleman-Iovita est bien évidemment une conséquence des théorèmes de Stevens et de Kato-Kurihara-Tsuji, mais leur démonstration [**5**], qui se fait en déformant une courbe modulaire sur une famille de $\mathbf{P}^1$, est bien plus directe que celle obtenue en utilisant ces deux théorèmes.

La démonstration de Kato-Kurihara-Tsuji (non rédigée, mais voir [**8, 22**]) repose sur la construction, par Kato [**17**], d'un système d'Euler pour la représentation V_f dont l'image par l'exponentielle de Perrin-Riou [**21**] redonne la fonction $L_p(f, s)$ (la démonstration de ce dernier fait repose sur la loi de réciprocité explicite de Kato [**16**] dont la démonstration est très délicate).

La démonstration de Stevens en poids quelconque est une généralisation de celle qu'il avait obtenue avec Greenberg [**15**] en poids 2 ; elle repose sur les familles de formes modulaires p-adiques et leurs fonctions L. Coleman a construit [**4**], en interpolant[(4)] des formes modulaires classiques, une famille analytique de formes modulaires p-adiques f_x, pour $x \in \mathscr{X}$, où $\mathscr{X}$ est une boule de $\mathbf{C}_p$ contenant k_0, avec $f_{k_0} = f$. Cette famille est propre pour tous les opérateurs de Hecke et les valeurs propres dépendent analytiquement de $x \in \mathscr{X}$; c'est en particulier le cas de la valeur propre a_p de T_p. Le lien entre $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ et a_p est le suivant (cf. [**26**]).

Théorème 0.4 **(Stevens)**. — $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Dans cet article, nous démontrons (cf. th. 0.5 et cor. 0.7) une formule analogue pour l'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ en utilisant la famille de représentations galoisiennes attachée à la famille des f_x.

(4) Si $k \in \mathbf{N}$ est un élément de $\mathscr{X}$ tel que $v_p(a_p(k)) < k - 1$, alors f_k est une forme modulaire classique de poids k et conducteur N.

0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2

Soit S une algèbre de Tate, i.e. un quotient d'une algèbre $\mathbf{Q}_p\{X_1,\dots,X_n\}$ de séries convergeant sur la boule unité fermée. L'espace analytique $\mathscr{X}$ associé à S est l'ensemble des morphismes continus de S dans $\mathbf{C}_p$, la topologie sur $\mathscr{X}$ étant celle de la convergence faible. Si $x\in\mathscr{X}$, on note E_x l'adhérence dans $\mathbf{C}_p$ du sous-corps engendré par l'image de S par x. Si E est un sous-corps de $\mathbf{C}_p$, on définit $\mathscr{X}(E)$ comme l'ensemble des $x\in\mathscr{X}$ vérifiant $E_x\subset E$. On voit un élément s de S comme une fonction analytique sur $\mathscr{X}$, en posant $s(x)=x(s)$.

Soit V une S-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un S-module libre de rang 2 muni d'une action S-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Choisissons une base v_1,v_2 de V sur S et notons $A_\sigma\in\mathbf{GL}_2(S)$ la matrice de $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base. Si $x\in\mathscr{X}$, on note V_x la E_x-représentation de dimension 2, pour laquelle la matrice de $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est $A_\sigma(x)$. La fonction $x\mapsto A_\sigma(x)$ étant analytique, la famille de représentations V_x, pour $x\in\mathscr{X}$, définie par V, est « analytique » et V est une *famille analytique de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension* 2.

Soit $\psi_1:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Q}_p$ le caractère (additif) non ramifié de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ normalisé par $\psi_1(\sigma)=1$ si σ induit le frobenius $x\mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\psi_2:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathbf{Q}_p$ le logarithme du caractère cyclotomique. Comme ψ_1,ψ_2 forment une base de $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\mathbf{Q}_p)$, il existe $\delta,\kappa\in S$ tels que, quel que soit $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait

$$\log(\det A_\sigma)=\delta\cdot\psi_1(\sigma)+\kappa\cdot\psi_2(\sigma).$$

Notre résultat principal est l'énoncé peu appétissant suivant :

Théorème 0.5. — *Supposons que V a un poids de Hodge-Tate[5] nul, et qu'il existe $\alpha\in S$ tel que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\widehat{\otimes}V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha}$ soit localement libre de rang 1 sur $\mathscr{X}$.*

Alors, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x_0\in\mathscr{X}(E)$ est tel que V_{x_0} soit semi-stable d'invariant de Fontaine-Mazur égal à $\mathscr{L}\in E$ et poids de Hodge-Tate 0 *et $\kappa(x_0)\leqslant -1$, la forme différentielle*

$$\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{1}{2}\mathscr{L}\cdot d\kappa+\frac{1}{2}d\delta$$

s'annule en x_0.

Remarque 0.6. — (i) Le terme $d\delta$ pouvant s'éliminer en tordant par un caractère non ramifié, le théorème ci-dessus montre que l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine-Mazur s'exprime

[5] Il s'agit des poids de Hodge-Tate κ_1,κ_2 fournis par la théorie de Sen **[24, 25]** ; ils vivent *a priori* dans une extension quadratique (car on est en dimension 2) de S et, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x\in\mathscr{X}(E)$ est tel que V_x est de Hodge-Tate (considérée comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $2\cdot[E{:}\mathbf{Q}_p]$), alors $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ sont des entiers et les poids de Hodge-Tate de V_x sont $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ avec multiplicité $[E{:}\mathbf{Q}_p]$. L'hypothèse selon laquelle l'un des poids de Hodge-Tate est nul implique que l'autre est égal à κ.

simplement en termes de la dérivée logarithmique de la valeur propre de frobenius par rapport au poids de Hodge-Tate, ce qui semble, *a priori*, assez surprenant. En fait, c'est un reflet de la géométrie de l'espace des représentations *triangulines* [**11**]. (Une E-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline s'il existe un caractère continu $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to E^*$ et $\alpha \in E^*$ tels que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha} \neq 0$.)

(ii) La démonstration repose sur un calcul de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine. Le principe consiste à bouger la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}(V_{x_0}))$ pour se ramener à $\kappa(x_0) = -1$. Dans ce cas, la représentation V_{x_0} est une extension de $\mathbf{Q}_p(-1)$ par $\mathbf{Q}_p$ dont la classe dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ est contrôlée par l'invariant $\mathscr{L}$; on peut alors faire tous les calculs explicitement en utilisant un peu de théorie locale du corps de classes. Cette technique consistant à bouger la filtration pour se ramener à des représentations plus simples a été introduite par Fontaine [**14**] et utilisée avec profit dans [**13**] pour démontrer la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

(iii) La formule « galoisienne » du théorème ci-dessus a un avatar « automorphe » (cf. [**11**]) faisant intervenir l'invariant $\mathscr{L}$ de Breuil [**2**] défini en termes de représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On passe d'une formule à l'autre via la correspondance de Langlands locale p-adique pour la série principale unitaire [**12**] pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, mais le calcul est nettement plus facile du côté automorphe. Ce calcul a joué un rôle non négligeable dans la conception de [**10**] dont [**11**] et [**12**] sont issus.

Revenons à la famille analytique de formes modulaires construite par Coleman. On peut interpoler (cf. [**6**]) les représentations galoisiennes p-adiques associées aux formes classiques f_k, pour $k \in \mathbf{Z} \cap \mathscr{X}$ vérifiant $v_p(a_p(k)) < k - 1$, pour construire une S-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, où S est l'algèbre de Tate des fonctions analytiques sur $\mathscr{X}$. En particulier, on a $V_{k_0} = V_f$.

Les poids de Hodge-Tate de V_x sont 0 et $1 - x$ et la représentation $\det V_x$ se factorise à travers une extension finie de $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Par ailleurs, Saito [**23**] a montré que, si f_x est une forme classique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_x)^{\varphi=a_p(x)} \neq 0$, et Kisin [**18**] a montré que la représentation V vérifiait les conditions du théorème avec $\alpha = a_p$. On peut donc appliquer le théorème, avec $x_0 = k_0$, $\alpha = a_p$, $\kappa(x) = 1 - x$, $\delta(x) = 0$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}(V_{k_0}) = \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ pour en déduire le résultat suivant :

Corollaire 0.7. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Finalement, en comparant le corollaire ci-dessus avec le résultat de Stevens, on obtient une nouvelle démonstration du théorème de Coleman-Iovita.

Corollaire 0.8. — $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$.

1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

Dans tout le reste de l'article, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et on s'intéresse aux E-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire aux E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action E-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

1.1. Anneaux de Fontaine. — Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine et soient

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} = E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

On étend l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. De même, on étend l'action de φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et l'action de N sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. Finalement, on définit la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ en tensorisant par E la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}^{N=0} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ induit la *suite exacte fondamentale*

$$0 \to E \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \to 0.$$

Soit t le $2i\pi$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique, et on a $\varphi(t) = pt$, $Nt = 0$ et $t^j\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}^{i+j}_{\mathrm{dR},E}$ si $i, j \in \mathbf{Z}$.

1.2. Cohomologie galoisienne. — Si M est un $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module et si $i \in \mathbf{N}$, on note $H^i(M)$ le i-ième groupe de cohomologie continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans M. Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $M(j)$ le module M tordu par la puissance j-ième du caractère cyclotomique.

Proposition 1.1. — (i) *On a* $H^0(\mathbf{C}_p) = H^1(\mathbf{C}_p) = \mathbf{Q}_p$ *et* $H^i(\mathbf{C}_p(j)) = 0$ *si* $j \neq 0$ *ou si* $i \geqslant 2$.

(ii) *Si* $a \leqslant b \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *alors* $H^0(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E}) = 0$ *si* $a > 0$ *ou si* $b \leqslant 0$ (avec la convention $\mathbf{B}^{-\infty}_{\mathrm{dR},E} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ et $\mathbf{B}^{+\infty}_{\mathrm{dR},E} = 0$).

Démonstration. — Le (i) est dû à Tate [**27**] et le (ii) s'en déduit par dévissage et passage à la limite en utilisant l'isomorphisme $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{i+1}_{\mathrm{dR},E} \cong E \otimes \mathbf{C}_p(i) \cong \mathbf{C}_p(i)^{[E:\mathbf{Q}_p]}$.

1.3. Le module U_1 et son H^1. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $U_i = \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}^{N^{i+1}=0,\varphi=p^{i-1}}$. Alors N induit, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=p^i} \to U_{i+1} \xrightarrow{N} U_i \to 0.$$

Proposition 1.2. — *L'application naturelle*

$$H^1(E) \to \ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La suite exacte $0 \to E(-1) \to U_0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ permettent de montrer que l'application naturelle de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(U_0)$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs les extensions non triviales de E par $E(-1)$ ne sont pas semi-stables [**1**], cela implique que l'application naturelle de $H^1(U_0)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ est injective. D'où l'égalité

$$\ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\big) = \ker\big(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)\big).$$

Maintenant, comme N induit la suite exacte $0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to U_1 \to U_0 \to 0$ et comme $H^0(U_0) = U_0 \cap E = 0$, on obtient $\ker(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)) = H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$. Finalement, la suite exacte $0 \to E \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ montrent que l'application naturelle de $H^1(E)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$ est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

2. E-(φ, N)-modules filtrés

2.1. Définitions et rappels

1. E-(φ, N)-modules. — Un *E-(φ, N)-module* D est un E-espace vectoriel muni d'actions E-linéaires de φ et N avec la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si D est E-(φ, N)-module de dimension finie sur E, on définit l'invariant $t_N(D)$ par la formule $t_N(D) = v_p(\det \varphi)$, et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1, N=0}.$$

Si D_1 et D_2 sont deux E-(φ, N)-modules, on fait de $D_1 \otimes_E D_2$ un E-(φ, N)-module en faisant agir φ et N sur $D_1 \otimes_E D_2$ par $\varphi \otimes \varphi$ et $N \otimes 1 + 1 \otimes N$ respectivement.

2. Filtrations. — Une *filtration* $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j \in \mathbf{Z}}$ sur un E-espace vectoriel D est une collection de sous-E-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^j D$, pour $j \in \mathbf{Z}$, avec $\mathrm{Fil}^{j+1} D \subset \mathrm{Fil}^j D$ quel que soit $j \in \mathbf{Z}$, $\cap_{j \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = 0$ et $\cup_{j \in \mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = D$. Les entiers j pour lesquels $\mathrm{Fil}^j D / \mathrm{Fil}^{j+1} D \neq 0$ s'appellent les *degrés de la filtration*.

Si D_1 et D_2 sont deux E-espaces vectoriels munis de filtrations Fil_1 et Fil_2, et si D_1 ou D_2 est de dimension finie, alors $\mathrm{Fil}^j(D_1 \otimes_E D_2) = \sum_{j_1+j_2=j} \mathrm{Fil}_1^{j_1} D_1 \otimes_E \mathrm{Fil}_2^{j_2}$ est une filtration sur $D_1 \otimes_E D_2$.

Si $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j \in \mathbf{Z}}$ est une filtration sur un E-espace vectoriel D de dimension finie, on définit l'invariant $t_H(D, \mathrm{Fil})$ par la formule

$$t_H(D, \mathrm{Fil}) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} j \, \dim_E(\mathrm{Fil}^j D / \mathrm{Fil}^{j+1} D)$$

et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil})$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{+}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/\mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D).$$

3. E-(φ,N)-modules filtrés. — Un *E-(φ,N)-module filtré* (D,Fil) est un E-(φ,N)-module D muni d'une filtration. Un tel module est dit *admissible*, s'il est de dimension finie, si φ est inversible, si $t_H(D,\mathrm{Fil}) = t_N(D)$ et si $t_H(D',\mathrm{Fil}) \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-E-(φ,N)-module D' de D muni de la filtration induite. Si (D,Fil) est un E-(φ,N)-module filtré admissible, on note $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ le noyau de la flèche naturelle de $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ dans $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil})$ induite par l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ est naturellement muni d'une structure de E-(φ,N)-module filtré, la filtration étant induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, le E-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ hérite de la structure de E-(φ,N)-module filtré de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. On a de plus $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \leqslant \dim_E V$ et on dit que V est *semi-stable* si $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \dim_E V$.

On dispose du résultat suivant [**7, 13**] :

Théorème 2.1. — (i) *Si V est une E-représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un E-(φ,N)-module filtré admissible et l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E V$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, et on a $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)) = V$.*

(ii) *Si (D,Fil) est un E-(φ,N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ est une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la suite*

$$0 \to \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil}) \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil}) \to 0$$

est exacte, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E D$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, les poids de Hodge-Tate de $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ sont les opposés des degrés de Fil*, et on a $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})) = (D,\mathrm{Fil})$.*

(iii) *De plus, les équivalences de catégories $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ définies ci-dessus commutent aux produits tensoriels.*

3. La représentation $W_{\mathscr{L},i}$

3.1. E-(φ,N)-modules filtrés admissibles de dimension 2. — Soit $\alpha \in E$ vérifiant $2v_p(\alpha) \in \mathbf{N}$, et soit $i = 2v_p(\alpha)+1$. Soit D_α le E-(φ,N)-module défini par

$$D_\alpha = E\cdot e_1 \oplus E\cdot e_2, \quad \varphi(e_1) = p\alpha e_1,\ \varphi(e_2) = \alpha e_2, \quad Ne_1 = e_2,\ Ne_2 = 0.$$

Si $\mathscr{L} \in E$, on note $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ la filtration sur D_α définie par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L}} D_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ E\cdot(e_1 + \mathscr{L} e_2) & \text{si } 0 < j \leqslant i, \\ D_\alpha & \text{si } j \leqslant 0. \end{cases}$$

Le E-(φ,N) module filtré $(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est admissible et la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est une E-représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$. Réciproquement, toute E-représentation V semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, est isomorphe à $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ pour un unique couple $(\alpha,\mathscr{L})$ avec $2v_p(\alpha)+1=i$; l'invariant $\mathscr{L}$ est *l'invariant de Fontaine-Mazur* de V.

3.2. Le E-(φ,N)-module filtré $(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$. — Soit $D=E\cdot f_1\oplus E\cdot f_2\oplus E\cdot f_3$ le (φ,N)-module défini par :

$$\varphi(f_1)=pf_1,\ \varphi(f_2)=f_2,\ \varphi(f_3)=p^{-1}f_3,\quad Nf_1=2f_2,\ Nf_2=f_3,\ Nf_3=0.$$

Si $\mathscr{L}\in E$, soient

$$g_{\mathscr{L},1}=f_1+2\mathscr{L}f_2+\mathscr{L}^2f_3,\quad g_{\mathscr{L},2}=f_2+\mathscr{L}f_3,\quad g_{\mathscr{L},3}=f_3,$$

et, si $i\in\mathbf{N}-\{0\}$, soit $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}$ la filtration sur D donnée par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L},i}D=\begin{cases}0 & \text{si } j>i,\\ E\cdot g_{\mathscr{L},1} & \text{si } 0<j\leqslant i,\\ E\cdot g_{\mathscr{L},1}\oplus E\cdot g_{\mathscr{L},2} & \text{si } -i<j\leqslant 0,\\ D & \text{si } j\leqslant -i.\end{cases}$$

Le (φ,N)-module filtré $(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est admissible et on note $W_{\mathscr{L},i}$ la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$.

Un petit calcul montre que, si $2v_p(\alpha)+1=i$, alors $(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est le carré symétrique de $(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ tordu par $\det(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})^{-1}$, et donc est le (φ,N)-module filtré des endomorphismes de trace nulle de $(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$. On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Si V est une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i>0$, alors $\mathrm{End}^0(V)\cong W_{\mathscr{L},i}$.*

Remarque 3.2. — Le E-(φ,N)-module filtré $(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est autodual, et il est facile de voir que tout E-(φ,N)-module filtré autodual, de dimension 3, avec $N\neq 0$, est isomorphe à $(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ pour un unique couple $(i,\mathscr{L})$ de $(\mathbf{N}-\{0\})\times E$.

3.3. Le module $\mathrm{Hom}(W_{\mathscr{L},i},U_1)$

Proposition 3.3. — *On a $\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E}\otimes W_{\mathscr{L},i}=\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ quel que soit $i\in\mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est un résultat général sur les E-(φ,N)-modules filtrés admissible : si (D,Fil) est un tel module, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes D$ est un isomorphisme commutant à φ et N (th. 2.1 (ii)) et donc

$$\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E}\otimes\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})=(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil}))^{\varphi=1,N=0}=(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes D)^{\varphi=1,N=0}=\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D).$$

Si $j = 1, 2, 3$, on note $\pi_j : \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ l'application définie par

$$x = \pi_1(x)f_1 + \pi_2(x)f_2 + \pi_3(x)f_3.$$

Lemme 3.4. — *Si $x \in \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$, alors*

$$\pi_3(x) \in U_2, \quad \pi_2(x) = -N\pi_3(x) \in U_1 \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \frac{1}{2}N^2\pi_3(x) \in U_0.$$

Démonstration. — C'est une simple traduction des conditions $\varphi(x) = x$ et $Nx = 0$.

Proposition 3.5. — *Si $i \in \mathbf{N}$, et si $j = 1, 2, 3$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j})$ est de dimension 1 sur E, et la restriction de π_j à $W_{\mathscr{L},i}$ en est une base.*

Démonstration. — $\oplus_{j=1}^{3}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(W^*_{\mathscr{L},i})$ est injective, et donc $\sum_{j=1}^{3}\dim_E \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \leqslant \dim_E W^*_{\mathscr{L},i} = 3$. Pour conclure, il suffit donc de prouver qu'aucun des π_i n'est identiquement nul sur $W_{\mathscr{L},i}$, ce qui suit du fait que l'application naturelle $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E D$ est un isomorphisme d'après le (ii) du th. 2.1.

4. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne

4.1. Éléments de théorie du corps de classes locale. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, on note (α) la classe de α dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ fournie par la théorie de Kummer.

Si t est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, soit $v \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p}$ tel que $\frac{v}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$ ait pour image $\frac{1}{t}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0}$. Alors v est bien déterminé à addition près d'un élément de la forme at, avec $a \in E$. Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$ est de valuation nulle (i.e. si $\alpha \in \mathbf{Z}_p^*$), alors $(\alpha) \in H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est la classe du cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1)(\log \alpha \cdot v)$.

Soit u le $\log p$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ vérifiant
(i) $u \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{1}$,
(ii) $\varphi(u) = pu$ et $Nu = -1$,
(iii) $\sigma(u) - u \in \mathbf{Q}_p t$ et la classe de $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est égale à (p).

Le E-espace vectoriel $H^1(E(1)) = E \otimes H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ admet comme base les images des cocycles $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ et $\sigma \mapsto \sigma(v) - v$; on utilise cette base pour mettre $H^1(E(1))$ en bijection avec E^2 en envoyant le cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (b_1 u + b_2 v)$ sur (b_1, b_2).

Le E-espace vectoriel $H^1(E)$ est aussi de dimension 2 ; il admet comme base les caractères ψ_1, ψ_2 de l'introduction. L'accouplement $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to \mathbf{Q}_p$, défini via le cup-produit $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to H^2(\mathbf{Q}_p(1))$, en utilisant l'isomorphisme $H^2(\mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ de la théorie du corps de classes locale, induit par E-linéarité un accouplement $\langle\ ,\ \rangle : H^1(E) \times E^2 \to E$. Comme $\psi_1 \cup (\alpha) = -v_p(\alpha)$ et $\psi_2 \cup (\alpha) = \log_p \alpha$, si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ est donné par la formule

$$\langle a_1\psi_1 + a_2\psi_2, (b_1, b_2)\rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

4.2. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$

Lemme 4.1. — *$W_{\mathscr{L},1}$ est le E-espace vectoriel engendré par v_1, v_2 et v_3, avec*

$$v_1 = tf_3, \quad v_2 = (u-\mathscr{L}v)f_3 - f_2 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{(u-\mathscr{L}v)^2}{2t}f_3 - \frac{u-\mathscr{L}v}{t}f_2 + \frac{1}{2t}f_1.$$

Démonstration. — L'inclusion $E\cdot v_1 \oplus E\cdot v_2 \oplus E\cdot v_3 \subset W_{\mathscr{L},1}$ se démontre en utilisant le fait que $\frac{u}{t} \in \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}}$ et $\frac{v-1}{t} \in \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR}}$; on en déduit l'égalité pour des raisons de dimension.

Corollaire 4.2. — (i) *$W_{\mathscr{L},1}$ admet une filtration croissante par des sous-représentations $0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 = W_{\mathscr{L},1}$, avec $W_i = \oplus_{j\leqslant i} E\cdot v_j$.*

(ii) *$W_1 \cong E(1)$.*

(iii) *la représentation W_2 est une extension de E par $E(1)$ dont la classe dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1,\mathscr{L})$.*

(iv) *Le quotient W' de $W_{\mathscr{L},1}$ par W_1 est isomorphe à $W_2(-1)$.*

Proposition 4.3. — *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$ dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N\circ\pi_2$ est nulle. Alors il existe $c \in W_{\mathscr{L},1}$ et $\gamma_1,\gamma_2 \in E$, uniques, tels que $\pi_2(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + (\sigma-1)\cdot\pi_2(c)$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'application $\pi_2 : W_{\mathscr{L},1} \to U_1$ envoie v_1 sur 0, v_2 sur -1 et v_3 sur $\frac{u-\mathscr{L}v}{t}$; elle se factorise donc à travers W' et l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(U_1)$ est donc incluse dans celle de $H^1(W')$. Maintenant, l'application $N : U_1 \to U_0$, composée avec π_2, induit la suite exacte $0 \to E \to W' \to E(-1) \to 0$ et, en passant à la cohomologie galoisienne, la suite exacte $0 \to H^1(E) \to H^1(W') \to H^1(E(-1)) \to 0$. Comme les extensions de E par $E(-1)$ ne sont pas de de Rham et donc, a fortiori, pas cristallines, l'application de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E})$ induite par l'appartenance de t^{-1} à $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, est injective. On en déduit que l'inclusion de E dans W' induit un isomorphisme de $H^1(E)$ sur $\ker(H^1(W') \xrightarrow{N} H^1(U_0))$. Ceci nous permet de montrer l'existence de c, γ_1 et γ_2 ainsi que l'unicité de γ_1 et γ_2.

Par ailleurs, la suite exacte $0 \to E(1) \to W_{\mathscr{L},1} \to W' \to 0$ induit, en passant à la cohomologie galoisienne, des applications de connexion $H^i(W') \to H^{i+1}(E(1))$. La restriction de ces applications de connexion au sous-groupe $H^i(E)$ de $H^i(W')$ est donnée par le cup-produit avec la classe δ de l'extension de E par $E(1)$ induite par $W_2 \subset W_{\mathscr{L},1}$. Comme l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(W')$ est le noyau de l'application de connexion $H^1(W') \to H^2(E(1))$, on voit que $a\psi_1 + b\psi_2 \in H^1(E) \subset H^1(W')$ est dans l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ si et seulement si $(a\psi_1 + b\psi_2)\cup\delta = 0$. Finalement, en utilisant le fait que l'image de δ dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1,\mathscr{L})$, et la formule ci-dessus pour le cup-produit, on en déduit le résultat.

5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathscr{L},i}$

Proposition 5.1. — *L'image de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ ne dépend pas de i.*

Démonstration. — On utilise la suite exacte (th. 2.1 (ii))

$$0 \to W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0$$

pour se ramener à montrer que le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ ne dépend pas de i. Pour comparer ce noyau pour i quelconque et $i = 1$, introduisons le $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR},E}$-module $M = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/(\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i} \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1})$. Comme

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}},$$

on a

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}};$$

on en déduit les suites exactes

$$0 \to (\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{3,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}) \to 0,$$
$$0 \to (\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{1,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0.$$

Par ailleurs, comme

$$H^0(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^0(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = 0,$$

les applications naturelles de $H^1(M)$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ sont des isomorphismes et donc les noyaux des applications de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ coïncident tous les deux avec le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(M)$. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.2. — *Soit $w \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$. Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$, dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N \circ w$ est nulle. Alors il existe $c \in U_1$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$, uniques, tels que $w(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(c) - c$, pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'existence de c, γ_1, γ_2 et l'unicité de γ_1, γ_2 sont des conséquences de la prop. 1.2. De plus, comme $\mathrm{Hom}_G(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$ est un-E-espace vectoriel de dimension 1 engendré par π_2 d'après la prop. 3.5, on peut supposer que $w = \pi_2$, ce que nous ferons. La prop. 5.1 montre que l'image par π_2 de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(U_1)$ ne dépend pas de i, ce qui permet d'utiliser la proposition 4.3 pour montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, et conclure.

6. Démonstration du résultat principal

Passons à la démonstration du théorème 0.5. Comme il s'agit d'un énoncé portant sur les dérivées à l'ordre 1, il suffit de traiter le cas $S = E[z]/z^2$. On se retrouve dans la situation suivante :

(i) V est une $(E[z]/z^2)$-représentation de dimension 2 ;

(ii) la E-représentation $V_0 = V/zV$ est semi-stable, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i > 0$, et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0) \cong D_{\alpha_0,\mathscr{L}}$, avec $2v_p(\alpha_0) + 1 = i$;

(iii) il existe $a \in E$ tel que le $(E[z]/z^2)$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E} \otimes_E V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p},\varphi=\alpha_0(1+az)}$ soit libre de rang 1.

Choisissons une base v_1, v_2 de V sur $E[z]/z^2$ et écrivons la matrice B_σ de $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base sous la forme $B_\sigma = (I + z(\delta_\sigma I + U_\sigma))A_\sigma$, avec $A_\sigma \in \mathbf{GL}_2(E)$, $\delta_\sigma \in E$ et $U_\sigma \in \mathbf{M}_2(E)$ de trace nulle. Si $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ désignent les images de v_1 et v_2 modulo z, alors A_σ est la matrice de σ dans la base $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ de V_0. Par ailleurs, on a

$$\log(\det B_\sigma) = \log(\det A_\sigma) + 2z\delta_\sigma$$

et donc $\sigma \mapsto \log(\det A_\sigma)$ et $\sigma \mapsto \delta_\sigma$ sont des caractères additifs de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et il existe[(6)] d_1, d_2 et $\delta_1, \delta_2 \in E$ tels que $\log(\det A_\sigma) = d_1\psi_1(\sigma) + d_2\psi_2(\sigma)$ et $\delta_\sigma = \delta_1\psi_1(\sigma) + \delta_2\psi_2(\sigma)$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Dans les notations du théorème 0.5, on a $\delta = d_1 + 2\delta_1 z$, $\kappa = d_2 + 2\delta_2 z$ et $\alpha = \alpha_0(1 + az)$, et on est ramené à démontrer la formule suivante :

Proposition 6.1. — $a = \mathscr{L}\delta_2 - \delta_1$.

Soit $\overline{e}_1 = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2$ engendrant $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=p\alpha_0}$, et soit $\overline{e}_2 = N\overline{e}_1 = y_1\overline{v}_1 + y_2\overline{v}_2$. Ceci fait de $\overline{e}_2$ un générateur de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=\alpha_0}$, et $\overline{e}_1 + \mathscr{L}\overline{e}_2 \in \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \otimes_E V_0$ par définition de l'invariant $\mathscr{L}$. Comme $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ forment une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)$, la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ et vérifie $M^{-1}A_\sigma\sigma(M) = I$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Soient $e_1 = x_1v_1 + x_2v_2$ et $e_2 = Ne_1 = y_1v_1 + y_2v_2$. Comme M est inversible, e_1, e_2 forment une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E V$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S$. La matrice de σ dans cette base est alors

$$M^{-1}B_\sigma\sigma(M) = I + z(\delta_\sigma I + M^{-1}U_\sigma M).$$

Par ailleurs, un calcul brutal montre que, si l'on pose

$$U_\sigma = \left(\begin{smallmatrix} u_{1,\sigma} & u_{3,\sigma} \\ u_{2,\sigma} & -u_{1,\sigma} \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad c_\sigma = \frac{2u_{1,\sigma}x_1x_2 - u_{2,\sigma}x_1^2 + u_{3,\sigma}x_2^2}{2(x_1y_2 - x_2y_1)},$$

(6) On a d'ailleurs $d_2 = -i$.

alors

$$M^{-1}U_\sigma M = \begin{pmatrix} Nc_\sigma & N^2c_\sigma \\ -2c_\sigma & -Nc_\sigma \end{pmatrix}.$$

Comme $z^2 = 0$, le fait que $\sigma \mapsto M^{-1}B_\sigma\sigma(M)$ soit un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S)$ implique que $\sigma \mapsto M^{-1}U_\sigma M$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$, et que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$; la formule ci-dessus montre que ce 1-cocycle est en fait à valeurs dans U_2 et donc que le 1-cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma - \delta_\sigma$ est à valeurs dans U_1.

Lemme 6.2. — *L'application naturelle* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ *est surjective et* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ *est égal à* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$.

Démonstration. — La multiplication par z induit la suite exacte suivante de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules

$$0 \to V_0 \to V \to V_0 \to 0.$$

En tensorisant par $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et en prenant les invariants sous $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0).$$

Or $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ est de dimension 1 sur E, alors que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ contient $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$ qui est, par hypothèse, de dimension 2 sur E ; cela permet de conclure.

Lemme 6.3. — *Les cocycles* $\sigma \mapsto N^2c_\sigma$ *et* $\sigma \mapsto -\delta_\sigma + Nc_\sigma$ *se trivialisent dans* $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$.

Démonstration. — D'après le lemme 6.2, il existe g dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ayant pour image $\overline{e}_2$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$, et il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ tels que

$$g = e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2).$$

Comme

$$\sigma(e_1) = e_1 + z\big((\delta_\sigma + Nc_\sigma)\cdot e_1 - 2c_\sigma \cdot e_2\big) \quad \text{et} \quad \sigma(e_2) = e_2 + z\big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2\big),$$

et comme $z^2 = 0$, on obtient, quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

$$\begin{aligned} 0 = \sigma(g) - g =& \sigma(e_2) - e_2 + z\big(\sigma(\lambda_1)\sigma(e_1) - \lambda_1 e_1 + \sigma(\lambda_2)\sigma(e_2) - \lambda_2 e_2\big) \\ =& z\Big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2 + (\sigma(\lambda_1) - \lambda_1)\cdot e_1 + (\sigma(\lambda_2) - \lambda_2)\cdot e_2\Big), \end{aligned}$$

et donc $N^2c_\sigma = \sigma(-\lambda_1) - (-\lambda_1)$ et $Nc_\sigma - \delta_\sigma = \sigma(\lambda_2) - \lambda_2$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 6.4. — *Il existe* $\lambda \in U_1$ *et* $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ *tels que, pour tout* $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, *on ait*

$$Nc_\sigma = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Démonstration. — Cela suit de la proposition 1.2.

La proposition 6.1 est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante, ce qui permet de terminer la démonstration du théorème 0.5.

Proposition 6.5. — *On a les relations suivantes :*
(i) $\gamma_2 = \delta_2$;
(ii) $a = \gamma_1 - \delta_1$;
(iii) $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.

Démonstration. — (i) On a

$$\sigma(\lambda_2) - \lambda_2 = Nc_\sigma - \delta_\sigma = (\gamma_1 - \delta_1)\psi_1(\sigma) + (\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Soit $\omega \in W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ vérifiant $\varphi(\omega) - \omega = 1$. Comme φ engendre topologiquement le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et comme ψ_1 est normalisé par $\psi(\varphi) = 1$, on a $\sigma(\omega) - \omega = \psi_1(\sigma)$ et

$$(\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) = (\sigma - 1) \cdot (\lambda_2 - \lambda - (\gamma_1 - \delta_1)\omega),$$

quel que soit $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme l'extension de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p$ définie par ψ_2 n'est pas de Hodge-Tate, et donc pas semi-stable, on a $\gamma_2 - \delta_2 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda + (\gamma_1 - \delta_1)\omega + \mu$, avec $\mu \in E$.

(ii) Comme $g \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et comme $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$, on a

$$0 = Ng = z(N\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_1 \cdot e_2 + N\lambda_2 \cdot e_2).$$

Ceci implique en particulier $\lambda_1 = -N\lambda_2 = -N\lambda \in U_0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1) = p^{-1}\lambda_1, \quad \varphi(\lambda_2) = \lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1), \\ \varphi(g) = &\varphi(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)) = \alpha_0\big(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + (\lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1))e_2\big) \\ = &\alpha_0(1 + (\gamma_1 - \delta_1)z)g, \end{aligned}$$

et donc $a = \gamma_1 - \delta_1$, d'après le lemme 6.2.

(iii) Si $\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*$ est la base de V_0^* duale de $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, l'application E-linéaire de V_0^* dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$, qui envoie $\overline{v}_1^*$ sur x_1 et $\overline{v}_2^*$ sur x_2 commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La formule explicite (cf. ci-avant) pour c_σ montre donc que le cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma$ est l'image dans U_1 d'un cocycle à valeurs dans $(\mathrm{Sym}^2 V_0^*) \otimes (\det V_0^*)^{-1} \cong W_{\mathscr{L},i}$. Par ailleurs, le cocycle $\sigma \mapsto N^2 c_\sigma$ se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ d'après le lemme 6.3, la proposition 5.2 permet de montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] S. Bloch & K. Kato – *L*-functions and Tamagawa numbers of motives, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser, 1990, p. 333–400.
[2] C. Breuil – Série spéciale *p*-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[3] R. F. Coleman – A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[4] ———, p-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[5] R. F. Coleman & A. Iovita – Hidden structures on semi-stable curves, ce volume.

[6] R. F. Coleman & B. Mazur – The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[7] P. Colmez – Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), p. 331–439.

[8] ———, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.

[9] ———, Zéros supplémentaires de fonctions L p-adiques de formes modulaires, in *Algebra and number theory*, Hindustan Book Agency, 2005, p. 193–210.

[10] ———, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`, 2007.

[11] ———, Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[12] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[13] P. Colmez & J.-M. Fontaine – Construction des représentations p-adiques semi-stables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[14] J.-M. Fontaine – Exposé à Orsay, 1998.

[15] R. Greenberg & G. Stevens – p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.

[16] K. Kato – Generalized explicit reciprocity laws, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan)* **1** (1999), p. 57–126.

[17] ———, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* **295** (2004), p. 117–290.

[18] M. Kisin – Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 373–454.

[19] B. Mazur – On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–20.

[20] B. Mazur, J. T. Tate & J. Teitelbaum – On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[21] B. Perrin-Riou – Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994), p. 81–161.

[22] ———, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, in *Number theory for the millennium, III (Urbana, IL, 2000)*, A K Peters, 2002, p. 119–147.

[23] T. Saito – Modular forms and p-adic Hodge theory, *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.

[24] S. Sen – Continuous cohomology and p-adic Galois representations, *Invent. Math.* **62** (1980/81), p. 89–116.

[25] ———, An infinite-dimensional Hodge-Tate theory, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), p. 13–34.

[26] G. Stevens – Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, ce volume.

[27] J. T. Tate – p-divisible groups, in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, 1967, p. 158–183.

P. Colmez, CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr

Astérisque
331, 2010, p. 29–64

FAMILIES OF AUTOMORPHIC FORMS ON DEFINITE QUATERNION ALGEBRAS AND TEITELBAUM'S CONJECTURE

by

Massimo Bertolini, Henri Darmon & Adrian Iovita

Abstract. — The main goal of this note is to describe a new proof of the "exceptional zero conjecture" of Mazur, Tate and Teitelbaum. This proof relies on Teitelbaum's approach to the $\mathscr{L}$-invariant based on the Cerednik-Drinfeld theory of p-adic uniformisation of Shimura curves.

Résumé **(Familles de formes automorphes sur les algèbres quaternioniques et conjecture de Teitelbaum)**

Cet article fournit une nouvelle démonstration de la conjecture de Mazur, Tate et Teitelbaum sur les « zéros exceptionnels » des fonctions L p-adiques. Cette démonstration repose sur une définition de l'invariant $\mathscr{L}$ proposée par Teitelbaum, qui repose sur la théorie de l'uniformisation p-adique des courbes de Shimura.

Introduction

Let $f = \sum a_n q^n$ be a newform of even weight $k_0+2 \geq 2$ on $\Gamma_0(Np)$, where $N \geq 4$ is a positive integer and p is a prime which does not divide N. We denote by $L(f,s)$ the complex L-function attached to f, and by $L(f,\chi,s)$ its twist by a Dirichlet character χ. A theorem of Shimura asserts the existence of a complex period Ω_f such that the special values

$$L(f,\chi,j)/\Omega_f \quad \text{with } 1 \leq j \leq k_0+1$$

belong to the subfield K_f of $\mathbb{C}$ generated by the Fourier coefficients of f, and even to its ring of integers. These special values (when χ ranges over the Dirichlet characters of p-power conductor) can be interpolated p-adically, yielding the Mazur-Swinnerton-Dyer p-adic L-function $L_p(f,s)$, a p-adic analytic function whose definition depends on the choice of Ω_f. Denote by

$$L^*(f,\chi,1+k_0/2) := L(f,\chi,1+k_0/2)/\Omega_f,$$

the *algebraic part* of $L(f,\chi,s)$ at the central critical point $s = 1+k_0/2$.

2010 Mathematics Subject Classification. — 11F67 ; 11G05, 11G40.
Key words and phrases. — p-adic L-functions, modular forms, Shimura curves, Hida families, p-adic uniformisation.

© Astérisque 331, SMF 2010

The modular form f is said to be *split multiplicative* if

$$f|U_p = p^{k_0/2} f.$$

In that case, $L_p(f,s)$ has a so-called *exceptional zero* at $s = 1+k_0/2$ arising from the p-adic interpolation process. In fact, like its classical counterpart, the p-adic L-function $L_p(f,s)$ has a functional equation of the form

$$L_p(f, k_0+2-s) = \epsilon_p(f)\langle N\rangle^{s-1-k_0/2} L_p(f,s), \tag{1}$$

and the sign $\epsilon_p(f) = \pm 1$ that appears in this equation is related to the the sign $\epsilon_\infty(f)$ in the classical functional equation for $L(f,s)$ by the rule

$$\epsilon_p(f) = \begin{cases} -\epsilon_\infty(f) & \text{if } f \text{ is split multiplicative;} \\ \epsilon_\infty(f) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In the case where f is a split multiplicative newform, Mazur, Tate and Teitelbaum made the following conjecture in **[18]**:

Conjecture 1. — *There exists a constant $\mathscr{L}(f) \in \mathbb{C}_p$, which depends only on the restriction of the Galois representation attached to f to a decomposition group at p, and such that*

$$L_p'(f, \chi, 1+k_0/2) = \mathscr{L}(f) L^*(f, \chi, 1+k_0/2), \tag{2}$$

for all χ with $\chi(-1) = \chi(p) = 1$.

The constant $\mathscr{L}(f)$, which Mazur, Tate and Teitelbaum called the *L-invariant*, was only defined in **[18]** in the weight two case $k_0 = 0$. In the higher weight case $k_0 > 0$, several a priori inequivalent definitions of $\mathscr{L}(f)$ were subsequently proposed.

1. In **[23]**, Teitelbaum offered the first definition for $\mathscr{L}(f)$. This invariant, denoted $\mathscr{L}_T(f)$, is based on the Cerednik-Drinfeld theory of p-adic uniformisation of Shimura curves and is only defined for modular forms which are the Jacquet-Langlands lift of a modular form on a Shimura curve uniformized by Drinfeld's p-adic upper half plane. This occurs, for example, when the conductor of f can be written as a product of three pairwise relatively prime integers of the form

   $$pN = pN^+N^-,$$

   where N^- is the square-free product of an *odd* number of prime factors. A modular form which satisfies this condition will be said to be *p-adically uniformisable*.
2. Coleman **[5]** then proposed an analogous but more general invariant $\mathscr{L}_C(f)$ by working directly with p-adic integration on the modular curve attached to the group $\Gamma_0(p) \cap \Gamma_1(N)$.
3. Fontaine and Mazur **[17]** gave a definition for the so-called *Fontaine-Mazur $\mathscr{L}$-invariant* $\mathscr{L}_{FM}(f)$ in terms of the filtered, Frobenius monodromy module of the p-adic Galois representation attached to f.

4. In [**19**], Orton has introduced yet a further $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}_O(f)$, based on the group cohomology of arithmetic subgroups of $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$, extending to forms of higher weight the approach taken in [**12**] for $k_0 = 0$.
5. Finally Breuil defined in [**2**] the $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}_{Br}(f)$ in terms of the p-adic representation of $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ attached by him to f.

We now know that all the above $\mathscr{L}$-invariants are equal (when they are defined) as result of work of many people, which we briefly list below (see [**9**] for a more detailed account of these various articles and preprints).

The equality of the $\mathscr{L}$-invariants $\mathscr{L}_C(f)$ and $\mathscr{L}_{FM}(f)$ was proved in [**7**] by making explicit the comparison isomorphism between the p-adic étale cohomology and log-crystalline cohomology of the modular curve $X_0(Np)$ with respective coefficients. The equality of $\mathscr{L}_T(f)$ and $\mathscr{L}_C(f)$ (when they are both defined) was proved in [**16**] by interpreting $\mathscr{L}_T(f)$ as the $\mathscr{L}$-invariant of a filtered, Frobenius monodromy module. Breuil proved in [**2**] the equality $\mathscr{L}_{Br}(f) = \mathscr{L}_O(f)$, which is a manifestation of the local-global compatibility for the p-adic Langlands correspondence.

It was first observed by Greenberg and Stevens for weight two (in [**15**]) and by Stevens in general (in [**22**]) that p-adic deformations of f, i.e. p-adic families of modular eigenforms are relevant for conjecture (1). To describe these objects precisely, let

$$\mathscr{W} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Q}_p^\times)$$

denote the weight space, viewed as the $\mathbb{Q}_p$-points of a rigid analytic space. There is a natural inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathscr{W}$ by sending k to the function $x \mapsto x^k$. Write $A(U)$ for the ring of rigid analytic functions on U, for any affinoid disk $U \subset \mathscr{W}$.

A *p-adic family of eigenforms* interpolating f is the data of a disk U with $k_0 \in U$, and of a formal q-expansion

$$f_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \tag{3}$$

with coefficients in $A(U)$ satisfying:

1. For every $k \in U \cap \mathbb{Z}^{\geq 0}$,
$$f_k := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) q^n$$
is the q-expansion of a normalized eigenform of weight $k+2$ on the congruence group $\Gamma_1(p) \cap \Gamma_0(N)$;
2. $f_{k_0} = f$.

The existence and essential uniqueness of the family f_∞ interpolating f is proved in [**6**].

Greenberg and Stevens for weight two and Stevens in general first proved that $\mathscr{L}_C(f) = -2(\mathrm{dlog} a_p)_{\kappa=k_0}$. Colmez generalized the Galois cohomology calculations in [**15**] by working inside Fontaine's rings and proved the equality $\mathscr{L}_{FM}(f) = -2(\mathrm{dlog} a_p)_{\kappa=k_0}$ in [**11**]. He also proved the equality $\mathscr{L}_{Br}(f) = -2(\mathrm{dlog} a_p)_{\kappa=k_0}$ in

[**10**] by using the p-adic local Langlands correspondence for trianguline representations. Let us remark that in fact the quantity $\mathscr{L}(f)_{NoName} := -2(\mathrm{dlog} a_p)_{\kappa=k_0}$ behaves like an $\mathscr{L}$-invariant: it satisfies the equation (2) of conjecture 1 (see [**22**]) and it is a local invariant of f in the sense that it is invariant to twists of f by Dirichlet characters trivial at p (in fact it is invariant to all twists by Dirichlet characters.)

Conjecture (1) was first proved in [**15**] for weight two, and several different proofs have been announced in the higher weight case:

1. By Kato-Kurihara-Tsuji, working with the invariant $\mathscr{L}_{FM}(f)$;
2. By Glenn Stevens, working with $\mathscr{L}_C(f)$;
3. By Orton, working with $\mathscr{L}_O(f)$ in [**19**];
4. By Emerton working with $\mathscr{L}_{Br}(f)$ in [**14**].

The first two proofs are still unpublished but an account of the approach of Kato-Kurihara-Tsuji can be found in [**8**] while Stevens gave a series of lectures on his theory during the *Automorphic Forms* semester in Paris, 1998. Notes to these lectures, to which we will refer as [**22**], although not yet published circulated widely in the mathematical community and greatly influenced articles like [**3**], [**4**] and the present note. As these notes have not been published we will sketch proofs of all the results quoted from them.

The main goal of this note is to describe a new proof of Conjecture 1 which applies to forms which are p-adically uniformisable.

Theorem 2. — *Assume that f is p-adically uniformisable. Then*

$$L_p'(f,\chi,1+k_0/2) = \mathscr{L}_T(f)L^*(f,\chi,1+k_0/2), \tag{4}$$

for all Dirichlet characters χ satisfying $\chi(-1)=\chi(p)=1$.

Our proof of Theorem 2 is based on Teitelbaum's definition of the L-invariant: this is why it needs to be assumed that f is p-adically uniformisable. Thus the Cerednik-Drinfeld theory of p-adic uniformisation of Shimura curves and the Jacquet-Langlands correspondence, which play no role in the earlier proofs of Stevens and Kato-Kurihara-Tsuji, are key ingredients in our approach. Section 1 supplies the necessary definitions concerning automorphic forms on definite quaternion algebras, and Section 2 recalls a few basic facts concerning p-adic integration on Shimura curves, including Teitelbaum's theory of the "p-adic Poisson kernel" and his definition of the invariant $\mathscr{L}_T(f)$.

Guided by the Jacquet-Langlands correspondence between classical modular forms and automorphic forms on quaternion algebras, Section 3 describes a theory of p-adic families of automorphic forms on definite quaternion algebras, based on ideas of Stevens, Buzzard and Chenevier. The resulting structures are used to prove the following theorem in Section 4, which relates Teitelbaum's L-invariant to the derivative of the Fourier coefficient $a_p(k)$ with respect to k.

Theorem 3. — *Suppose that f is p-adically uniformisable. Then*

$$\mathscr{L}_T(f) = -2\mathrm{dlog}(a_p)_{\kappa=k_0}. \tag{5}$$

The ideas of Orton in [**19**], which are recalled in Section 5, make it apparent that the definition of the invariants $\mathscr{L}_T(f)$ and $\mathscr{L}_O(f)$ are very similar in flavour. The calculations of Sections 1 to 4, when transposed to the context of a modular form on $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$, with the "integration on $\mathscr{H}_p \times \mathscr{H}$" defined in terms of modular symbols playing the role of the p-adic line integrals on Drinfeld's upper half-plane, leads to the proof of the following analogue of Theorem 3, which is described in Section 6:

Theorem 4. — *Let f be a modular form of weight k on $\Gamma_0(N)$ which is split multiplicative at p. Then*

$$\mathscr{L}_O(f) = -2\mathrm{dlog}(a_p)_{\kappa=k_0}. \tag{6}$$

Theorem 2 now follows directly from Theorems 3 and 4, in light of Orton's proof of Conjecture (1).

The remainder of the text will focus on explaining the proofs of Theorems 3 and 4, which are independent (both in their statement, and their formulation) of the existence and basic properties of either the p-adic L-function or the p-adic Galois representation attached to f and the Coleman family interpolating it.

We emphasize that the proof of Theorem 2 owes much to the ideas that are already present in the earlier (although still unpublished) approaches of Stevens and Kato-Kurihara-Tsuji. The main virtues (and drawbacks) of our method are inherently the same as those in Teitelbaum's approach to defining the $\mathscr{L}$-invariant: a gain in simplicity (because the method involves p-adic integration on a Mumford curve rather than a modular curve, and requires no information about Galois representations) offset by a certain loss of generality (since the method only applies to automorphic forms that can be obtained as the Jacquet-Langlands lift of a modular form on a p-adically uniformized Shimura curve). A second, less immediately apparent advantage of our approach lies in the insights arising from the connection that is drawn between the two-variable p-adic L-function $L_p(k,s)$ attached to f_∞ and the p-adic uniformisation of Shimura curves. In particular, the new ideas introduced in this article form the basis for the proof of the main result of [**1**], which, in the case where f corresponds to a modular elliptic curve E over $\mathbb{Q}$ and $\epsilon_\infty(f) = -\epsilon_p(f) = -1$, relates the leading term of $L_p(k,s)$ at the central critical point $(k,s) = (2,1)$ to the formal group logarithm of a global point on $E(\mathbb{Q})$.

1. Automorphic forms on quaternion algebras

Suppose from now on that f is p-adically uniformisable, so that its level pN can be factored as

$$pN = pN^+N^-, \text{ where } \gcd(N^+, N^-) = 1, \tag{7}$$

and where N^- is square-free and has an *odd* number of prime factors. Let B denote the quaternion algebra over $\mathbb{Q}$ ramified exactly at $N^-\infty$, and let $\mathscr{R}$ denote a maximal

order in B. For each ℓ not dividing N^- we fix an isomorphism

$$\iota_\ell : B \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong M_2(\mathbb{Q}_\ell), \text{ with } \iota_\ell(\mathscr{R} \otimes \mathbb{Z}_\ell) = M_2(\mathbb{Z}_\ell).$$

Let $\widehat{\mathbb{Z}}$ denote the profinite completion of $\mathbb{Z}$ and let $\hat{B} := B \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$.

Let $\Sigma = \prod_\ell \Sigma_\ell$ be any compact open subgroup of $\hat{B}^\times$, and let V be any $\mathbb{Q}_p$-vector space equipped with a right action by Σ_p. The following definition is taken from Section 4 of [**3**].

Definition 1.1. — A V-valued automorphic form on B of level Σ is a function

$$\varphi : \hat{B}^\times \longrightarrow V \quad \text{satisfying} \quad \varphi(bs\sigma) = \varphi(s)\sigma_p, \tag{8}$$

for all $b \in B^\times$, $s \in \hat{B}^\times$, and $\sigma \in \Sigma$, where σ_p denotes the component of σ at p.

The space of all V-valued automorphic forms on B of level Σ will be denoted $S(\Sigma, V)$. It is equipped with the action of Hecke operators T_ℓ with $\ell \nmid N$ as well as the operator U_p, defined as in [**3**], section 4.

Let

$$\tilde{\Gamma} = \iota_p \left(\mathscr{R}[1/p]^\times \cap \prod_{\ell \neq p} \Sigma_\ell \right),$$

and let Γ denote the subgroup of $\tilde{\Gamma}$ of elements of determinant 1. The strong approximation theorem for B asserts that

$$\hat{B}^\times = B^\times \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\Sigma,$$

so that we may write

$$S(\Sigma, V) = \{\varphi : \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow V \quad | \quad \varphi(\gamma g u) = \varphi(g)u\} \tag{9}$$

for all $\gamma \in \tilde{\Gamma}$, $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, and $u \in \Sigma_p$.

We will be mostly interested in a specific choice of level structure Σ. Let $\Sigma(N, p) := \prod_\ell \Sigma_\ell \subset \hat{B}^\times$ be the compact open subgroup defined by

- $\Sigma_p = \iota_p^{-1}(\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p))$;
- $\Sigma_\ell = (\mathscr{R} \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times$, if ℓ divides N^-;
- $\Sigma_\ell = \iota_\ell^{-1}(\Gamma_1(N\mathbb{Z}_\ell))$ if ℓ divides N^+;
- $\Sigma_\ell = (\mathscr{R} \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times$, otherwise.

The group $\Sigma(N, 1)$ is defined in a similar way, with $\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p)$ replaced by $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ in the definition of Σ_p.

Weights. If k is a positive integer, let $\mathscr{P}_k := \mathbb{Q}_p[z]^{deg \leq k}$ be the space of polynomials of degree $\leq k$, equipped with the right action of $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ given by

$$(P\beta)(z) = (cz + d)^k P\left(\frac{az + b}{cz + d}\right), \text{ for } \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

Let $V_k = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathscr{P}_k, \mathbb{Q}_p)$ denote its $\mathbb{Q}_p$-dual, equipped with the left action given by

$$(\beta h)(P) = h(P\beta) \text{ for } P \in \mathscr{P}_k \text{ and } h \in V_k.$$

We may also make V_k into a right $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-module by the rule

$$h\beta = \beta^{-1}h, \text{ for } h \in V_k \text{ and } \beta \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

The module V_k is isomorphic to $\mathscr{P}_k$ as a $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-module, and hence the following definition of the space of (classical) automorphic forms on B of weight $k+2$ and level $\Sigma(N,p)$ is equivalent to the one given in Section 4 of [**3**]:

$$S_{k+2}(N,p) := S(\Sigma(N,p), V_k).$$

Of crucial importance for our arguments is the Hecke operator U_p acting on the space $S_{k+2}(N,p)$, whose precise definition we now describe. Let α_1 be the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ and decompose the double coset space $\Sigma_p\alpha_1\Sigma_p$ as a disjoint union of left cosets:

$$\Sigma_p\alpha_1\Sigma_p = \cup_{j=1}^{p}\alpha_j\Sigma_p.$$

Then

$$(U_p\varphi)(g) = \det(\alpha_1)^{k/2}\sum_j \varphi(g\alpha_j)\alpha_j^{-1}.$$

It is useful to have a geometric interpretation of automorphic forms in terms of certain functions on the edges of the Bruhat-Tits tree $\mathscr{T}$ of $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Recall that $\mathscr{T}$ denotes the tree whose vertices are in bijection with the homothety classes of $\mathbb{Z}_p$-lattices in $\mathbb{Q}_p^2$, two vertices being joined by an (unordered) edge if they admit representatives which are contained one in the other with index p. Let $\mathscr{T}_0$ and $\mathscr{T}_1$ denote the set of vertices and edges of $\mathscr{T}$ respectively, and let $\mathscr{E}(\mathscr{T})$ denote the set of *ordered edges* of $\mathscr{T}$, i.e., the set of ordered pairs of adjacent vertices. If $e = (v_s, v_t)$ is such an ordered edge, we will call the vertex $s(e) := v_s$ the *source* of e, and $t(e) := v_t$ its *target*. The edge $\bar{e} := (v_t, v_s)$ obtained from e by interchanging its source and target is called the edge *opposite* to e.

Let v_* be the vertex associated to the homothety class of the standard lattice $\mathbb{Z}_p^2$. The index p sublattices of $\mathbb{Z}_p^2$ are naturally in bijection with $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ by setting

$$L_j := \{(x,y) \in \mathbb{Z}_p^2 \text{ such that } [x:y] \equiv j \pmod p\}, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \infty.$$

Let v_j be the vertex associated to the homothety class of L_j, and let

$$e_j = (v_*, v_j) \in \mathscr{E}(\mathscr{T}).$$

A vertex in $\mathscr{T}_0$ is said to be *even* or *odd* if its distance from v_* is even or odd. Likewise, an ordered edge in $\mathscr{E}(\mathscr{T})$ is even (resp. odd) if its source is even (resp. odd).

The groups $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ act naturally on $\mathscr{T}$ via their left action on $\mathbb{Q}_p^2$, viewed as column vectors. The resulting actions of these groups on $\mathscr{T}_0$, $\mathscr{T}_1$, and $\mathscr{E}(\mathscr{T})$ are transitive, while the subgroup $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$ preserves the even and odd elements in $\mathscr{T}_0$ and $\mathscr{E}(\mathscr{T})$. The stabilizer of v_* in $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ is the group $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$, while the stabilizer of the ordered edge e_∞ is the projective image of the group $\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p)$. Hence the assignment $g \mapsto ge_\infty$ identifies the quotient $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)/\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p)$ with $\mathscr{E}(\mathscr{T})$.

If $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ we denote by $|g| := p^{\mathrm{ord}_p(\det(g))}$. To each $\eta \in S_{k+2}(N,p)$, viewed as a function on $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ via the description (9), is attached a V_k-valued, Γ-invariant function c_η on $\mathscr{E}(\mathscr{T})$ by setting, for all $e = ge_\infty$ with $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, and for all $P \in \mathscr{P}_k$,

$$c_\eta(e)(P) := |g|^{-k/2}(g\eta(g))(P). \tag{10}$$

It is easy to see that the expression on the right of equation (10) depends only on the class of g in $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)/\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p)$, so that the value of c_η is well-defined. Moreover, if γ is any element of Γ, and $e = ge_\infty$ is any edge in $\mathscr{E}(\mathscr{T})$, we have

$$\begin{aligned} c_\eta(\gamma e)(P) &= |\gamma g|^{-k/2}(\gamma g\eta(\gamma g))(P) = \gamma(|g|^{-k/2} g\eta(g))(P) \\ &= (\gamma c_\eta(e))(P) = c_\eta(e)(P\gamma). \end{aligned}$$

Since η can be recovered from the datum of c_η, the assignment $\eta \mapsto c_\eta$ identifies $\eta \in S_{k+2}(N,p)$ with an element c_η in the space $\mathscr{C}(\mathscr{E}, V_k)^\Gamma$ of Γ-invariant V_k-valued functions on $\mathscr{E}(\mathscr{T})$. Let us spell out the action of the Hecke operator U_p which is deduced from this identification.

Lemma 1.2. — *For all $\eta \in S_{k+2}(N,p)$, we have*

$$(c_{U_p\eta})(e) = p^{k/2} \sum_{\substack{s(e')=t(e) \\ e' \neq \bar{e}}} c_\eta(e').$$

Proof. — This follows from a direct calculation. □

2. Teitelbaum's L-invariant

Let f be the normalized eigenform of weight k_0+2 on $\Gamma_0(N)$ that was discussed in the introduction. The definition of Teitelbaum's invariant $\mathscr{L}_T(f)$ rests crucially on the Jacquet-Langlands correspondence which associates to f an automorphic form on a definite quaternion algebra in the sense of the previous section.

Theorem 2.1. — *There exists an automorphic form $\phi \in S_{k_0+2}(N,p)$ which is an eigenform for the Hecke operators and satisfies*

$$\phi|T_\ell = a_\ell(k_0)\phi, \quad \text{for all } \ell \not| Np, \qquad \phi|U_p = p^{k_0/2}\phi.$$

This ϕ is unique up to multiplication by a non-zero scalar in $\mathbb{C}_p^\times$.

Let $\phi \in S_{k_0+2}(N,p)$ be the modular form obtained from f via Theorem 2.1, and recall the Γ-equivariant V_k-valued function c_ϕ on $\mathscr{E}(\mathscr{T})$ that was associated to it in the previous section. A function c on $\mathscr{E}$ is called a *harmonic cocycle* if

$$c(\bar{e}) = -c(e), \quad \sum_{s(e)=v} c(e) = 0, \quad \text{for all } v \in \mathscr{T}_0.$$

Lemma 2.2. — *The function c_ϕ attached to ϕ is a V_{k_0}-valued harmonic cocycle on $\mathscr{T}$.*

Proof. — The fact that $c_\phi(\bar{e}) = -c_\phi(e)$ follows directly from the fact that the Atkin-Lehner involution W_p acts as multiplication by -1 on c_ϕ. Let v be any vertex of $\mathscr{E}$ and let e be an ordered edge of $\mathscr{T}$ satisfying $t(e) = v$. Since $c_\phi | U_p = p^{k_0/2} c_\phi$, it follows from the description of U_p given in Lemma 1.2 that

$$p^{k_0/2} c_\phi(e) = (c_\phi | U_p)(e) = p^{k_0/2} \sum_{\substack{s(e')=v \\ e' \neq \bar{e}}} c_\phi(e'),$$

so that

$$\sum_{s(e')=v} c_\phi(e') = 0$$

for all $e \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$ and $v = t(e)$. □

We now explain how the cocycle c_ϕ gives rise to a *locally analytic distribution* on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, denoted μ_ϕ. To do this, let $W := \mathbb{Q}_p^2 - \{0\}$, equipped with its natural p-adic topology. There is a natural continuous projection

$$\pi : W \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \qquad \pi((x,y)) = x/y.$$

If L is any $\mathbb{Z}_p$-lattice in $\mathbb{Q}_p^2$, let $L' := L - pL$ be the compact open subset of W consisting of the primitive vectors in L. If $e = (s,t) \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$ is an ordered edge of $\mathscr{T}$, let L_s and L_t denote $\mathbb{Z}_p$-lattices whose homothety classes correspond to the source and the target of e respectively, chosen in such a way that L_s contains L_t with index p. To the edge e are associated the subset $W_e \subset W$ and the compact open subset $U_e \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ by the rules

$$W_e = L_s' \cap L_t', \quad U_e = \pi(W_e).$$

Note that the set W_e depends on the choice of L_s and L_t, so that W_e is only well-defined (as a function of e) up to multiplication by elements of $\mathbb{Q}_p^\times$. The subset U_e, on the other hand, depends only on e and not on the choices of representative lattices L_s and L_t that were made to define it.

Let us now briefly recall some of the theory of locally analytic distributions. Let X be a compact open subset of $W \subset \mathbb{Q}_p^2$. For each integer $n \geq 0$, denote by $B[X, p^{-n}]$ the affinoid subdomain of $\mathbb{C}_p^2$ given by

$$B[X, p^{-n}] := \{z \in \mathbb{C}_p^2 \quad | \text{ there exists } x \in X \text{ with } |z - x| \leq p^{-n}\}.$$

The region $B[X, p^{-n}]$ is a finite disjoint union of closed polydisks of radius p^{-n} defined over $\mathbb{Q}_p$. Therefore $B[X, p^{-n}]$ is also defined over $\mathbb{Q}_p$. Let $A_n(X)$ denote the $\mathbb{Q}_p$-affinoid algebra of $B[X, p^{-n}]$. It is a Banach algebra over $\mathbb{Q}_p$ under the spectral norm,

$$\|h\|_{A_n(X)} := \sup_{z \in B[X, p^{-n}]} |h(z)|.$$

If $m \geq n \geq 0$, restriction defines a continuous map

$$A_n(X) \longrightarrow A_m(X).$$

The direct limit

$$\mathscr{A}(X, \mathbb{Q}_p) := \varinjlim_{,n} A_n(X)$$

is called the space of *locally analytic functions on* X. It is endowed with the inductive limit of the Banach topologies on each of the $A_n(X)$'s. Let

$$D_n(X) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A_n(X), \mathbb{Q}_p)$$

denote the $\mathbb{Q}_p$-Banach-dual to $A_n(X)$ and let

$$\mathscr{D}(X, \mathbb{Q}_p) := \varprojlim_{\leftarrow,n} D_n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathscr{A}(X, \mathbb{Q}_p), \mathbb{Q}_p).$$

This space, endowed with the projective limit of the Banach topologies of the $D_n(X)$'s, is called the space of *locally analytic distributions on* X. It is a Fréchet space over $\mathbb{Q}_p$.

These definitions can be extended without difficulty to the case where X is a compact open subset of the projective space $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. (see **[22]**.)

Following the approach described in **[23]**, the harmonic cocycle c_ϕ can be used to define a locally analytic distribution μ_ϕ on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, determined by the property:

$$\int_{U_e} P(t)\mu_\phi(t) = c_\phi(e)(P), \tag{11}$$

for all $e \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$ and $P \in \mathscr{P}_{k_0}$.

Let $\mathscr{H}_p := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ denote the p-adic upper half-plane. In **[23]**, the distribution μ_ϕ is used to define a rigid analytic function

$$\psi = \psi_f : \mathscr{H}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

by the rule

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \left(\frac{1}{t-z}\right) d\mu_\phi(t). \tag{12}$$

By Theorem 3 of **[23]**, the function ψ is a rigid analytic modular form on $\Gamma\backslash\mathscr{H}_p$ of weight $k_0 + 2$, i.e., it satisfies the relation

$$\psi(\gamma z) = (cz + d)^{k_0+2}\psi(z), \quad \text{for all } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

The p-adic Coleman line integral attached to ψ, a polynomial $P \in V_{k_0}$, and two endpoints τ_1 and $\tau_2 \in \mathscr{H}_p$ is defined in terms of the distribution μ_ϕ by the rule

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \psi(z)P(z)dz := \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \log\left(\frac{t-\tau_2}{t-\tau_1}\right) P(t)\mu_\phi(t). \tag{13}$$

This formula can be used as a definition for the Coleman line integral in this setting, in light of Teitelbaum's theory of the "p-adic Poisson kernel". (See **[23]** for a more complete discussion.) In particular, it satisfies the additivity properties suggested by the line integral notation.

Let us now fix base points $v_0 \in \mathscr{T}_0$ and $z_0 \in \mathscr{H}_p$. (For example, one could take $v_0 = v_*$, but this is not necessary.) The harmonic cocycle c_ϕ gives rise (after extending scalars

from V_{k_0} to $V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p$) to a $V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p$-valued one-cocycle on Γ (where V_{k_0} is viewed as a left Γ-module) defined by the rule:

$$\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}(\gamma)(P) = \sum_{e: v_0 \to \gamma v_0} c_\phi(e)(P), \tag{14}$$

where the sum is taken over the ordered edges in the path joining v_0 to γv_0. Likewise, the associated rigid analytic modular form ψ gives rise to the $V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p$-valued one-cocycle on Γ defined by

$$\kappa_\phi^{\log}(\gamma)(P) = \int_{z_0}^{\gamma z_0} \psi(z) P(z) dz. \tag{15}$$

The images $[\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}]$ and $[\kappa_\phi^{\log}]$ of $\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}$ and $\kappa_\phi^{\log}$ in $H^1(\Gamma, V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p)$ are independent of the choices of v_0 and z_0 that were made to define them. These classes lie in the one-dimensional f-isotypic component of $H^1(\Gamma, V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p)$ for the action of the Hecke operators. Furthermore, Theorem 1 of **[23]** shows that the class of $\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}$ is non-zero. We are now in a position to recall the definition of $\mathscr{L}_T(f)$ given in **[23]**.

Definition 2.3. — The Teitelbaum L-invariant attached to f is the unique scalar $\mathscr{L}_T(f) \in \mathbb{C}_p$ such that

$$[\kappa_\phi^{\log}] = \mathscr{L}_T(f)[\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}].$$

Note that multiplying ϕ, and the resulting cocycle and locally analytic distribution, by a non-zero scalar multiplies both κ_{ord} and $\kappa_{\log}$ by that same scalar and hence does not affect the value of $\mathscr{L}_T(f)$, which is therefore a genuine invariant of f (once the factorisation (7) has been fixed) in light of the uniqueness of ϕ described in Theorem 2.1.

3. Families of automorphic forms on B

The group $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ acts naturally on $W := \mathbb{Q}_p^2 - \{0\}$ on the left, by viewing elements of W as non-zero column vectors. Of considerable importance is the resulting action of the scalar matrices in $\mathbb{Z}_p^\times$, which commutes with the $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ action, and preserves L' for any $\mathbb{Z}_p$-lattice $L \subset \mathbb{Q}_p^2$. This latter action is denoted by

$$\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

Recall the standard lattice $L_* = \mathbb{Z}_p^2$, and let $\mathscr{A}(L'_*, \mathbb{Q}_p)$ denote as above the space of locally analytic $\mathbb{Q}_p$-valued functions on L'_*. It is equipped with a right action by $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ given by:

$$(f|u)(x, y) = f(ax + by, cx + dy) \quad \text{for } u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p).$$

Let

$$\mathbb{D} := \mathscr{D}(L'_*, \mathbb{Q}_p)$$

be the space of locally analytic distributions on L'_*. The natural, continuous left action of $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ can be turned into a right action by the rule:

$$\mu \cdot u := u^{-1}\mu, \quad \text{for } u \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p), \quad \mu \in \mathbb{D}.$$

Let $R := \mathscr{D}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Q}_p)$ be the $\mathbb{Q}_p$-algebra of locally analytic distributions on $\mathbb{Z}_p^\times$.

The $\mathbb{Z}_p^\times$-action on L'_* equips $\mathbb{D}$ with a natural R-module structure

$$R \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \text{ sending } (\alpha, \mu) \text{ to } \alpha \cdot \mu,$$

where $\alpha \cdot \mu$ is defined by the rule:

$$\int_{L'_*} F(x,y)(\alpha \cdot \mu)(x,y) := \int_{\mathbb{Z}_p^\times \times L'_*} F(tx, ty)\alpha(t)\mu(x,y),$$

where $F(x,y)$ belongs to $\mathscr{A}(L'_*, \mathbb{Q}_p)$ and the variables of integration t and (x,y) range over $\mathbb{Z}_p^\times$ and L'_* respectively.

Let us now fix an integer $k_0 \geq 0$ and let U be an affinoid disk defined over the finite extension K of $\mathbb{Q}_p$ such that $k_0 \in U \subset \mathscr{W}$. Let $A(U)$ denote the K-affinoid algebra of U. Then we have a natural $\mathbb{Q}_p$-algebra homomorphism $R \longrightarrow A(U)$ defined by rule

$$\alpha \to (\kappa \to \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \kappa(t)\alpha(t)), \quad \text{for all } \alpha \in R, \kappa \in U. \tag{16}$$

Remark 3.1. — Let $\kappa \in U(K)$, then κ can be uniquely written $\kappa = \epsilon(t)\chi(t)\langle t\rangle^c$ for $\epsilon : \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow K^\times$ a character of order dividing $p-1$, $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \longrightarrow K^\times$ a character of order a power of p and $c \in \mathscr{O}_K$. So we may think of κ as determined by the pair $(\epsilon\chi, c)$. Let us remark that if K is fixed and the radius r of U is small enough the associated pair $(\epsilon\chi, c)$ is characterized by: $\epsilon(t) = (\frac{t}{\langle t\rangle})^{k_0}$, $\chi(t) = 1$ and $|c - k_0| \leq r$. In other words κ is entirely determined by c.

Denote by $\mathbb{D}_U := A(U)\hat{\otimes}_R\mathbb{D}$ and let $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ act on the right on $\mathbb{D}_U$ via its action on $\mathbb{D}$.

A natural R-module structure on $\mathbb{S}(N,p)$ is obtained by setting

$$(\alpha \cdot \Phi)(g) := \alpha \cdot \Phi(g), \text{ for } \alpha \in R, \ \Phi \in \mathbb{S}(N,p), \text{ and } g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

Definition 3.2. — Fix k_0 and U as above. The space

$$\mathbb{S}_U(N,p) := S(\Sigma(N,1), \mathbb{D}_U)$$

is called the space of *p-adic families of automorphic forms on B* of level $\Sigma(N,p)$ parametrized by weights in U.

Remark 3.3. — Note that the space $\mathbb{S}_U(N,p)$ is defined using a level structure $\Sigma(N,1)$ in which the prime p has been removed. In other words, these functions satisfy an equivariance property, on the right, by the full group $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ and not just $\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p)$.

The terminology introduced in Definition 3.2 is justified by the fact that $\mathbb{S}_U(N,p)$ is equipped with natural Hecke-equivariant *specialization maps* ρ_k to $S_{k+2}(N,p)$ for every even integer $k \geq 0$ in U. In order to define ρ_k, it is convenient to introduce

$$W_\infty := L'_* \cap L'_\infty = \mathbb{Z}_p^\times \oplus p\mathbb{Z}_p \subset W,$$

where $L_\infty = \mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$, as before. If $P \in \mathscr{P}_k$ is a polynomial (of degree $\leq k$), let

$$\tilde{P}(x,y) = y^k P(x/y)$$

denote the corresponding homogeneous polynomial in x and y of degree k. More generally let $\kappa \in U$ and let $k \geq 0$ be an integer and define for $X = L'_*$ or W:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{(\kappa)}(X) := \quad \{f : L'_* \longrightarrow K \quad &\text{locally analytic} \quad | \quad f(tx,ty) = \kappa(t)f(x,y) \\ &\text{for all } t \in \mathbb{Z}_p^\times, (x,y) \in X\}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_k^{(\kappa)}(W) := \quad \{f : W \longrightarrow K \text{ locally analytic} \mid \quad &f(tx,ty) = \kappa(t)f(x,y) \\ &\text{and } f(px,py) = p^k f(x,y) \text{ for all } t \in \mathbb{Z}_p^\times, (x,y) \in W\}\end{aligned}$$

Let us fix $\kappa \in U(K)$ and define

$$B_\kappa : A(U) \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{cont,\mathbb{Q}_p}(\mathscr{A}^\kappa(L'_*), K)$$

by

$$B_\kappa(\alpha,\mu)(f) := \alpha(\kappa) \int_{L'_*} f(x,y)\mu(x,y),$$

where $f \in \mathscr{A}^{(\kappa)}(L'_*)$, $\alpha \in A(U)$, and $\mu \in \mathbb{D}$. Moreover we have

$$\begin{aligned}|B_\kappa(\alpha,\mu)(f)|_K &= |\alpha(\kappa)|_K \cdot |\int_{L'_*} f\mu|_{\mathbb{Q}_p} \leq ||\kappa|| \cdot ||\alpha||_{A(U)} \cdot ||f|| \cdot ||\mu||_{\mathbb{D}} \\ &= ||\kappa|| \cdot ||f|| \cdot ||(\alpha,\mu)||.\end{aligned}$$

Therefore, for every $(\alpha,\mu) \in A(U) \times \mathbb{D}$, $B_\kappa(\alpha,\mu)$ is continuous and $\mathbb{Q}_p$-linear, therefore an element of $\mathrm{Hom}_{cont,\mathbb{Q}_p}(\mathscr{A}^{(\kappa)}(L'_*), K)$, and B_κ is a continuous, $\mathbb{Q}_p$-bilinear map. Moreover if $r \in R$, $\alpha \in A(U)$, $\mu \in \mathbb{D}$ we have

$$\begin{aligned}B_\kappa(\alpha, r\mu)(f) &= \alpha(\kappa \int_{L'_*} f(r\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times \times L'_*} f(tx,ty)r(t)\mu(x,y) \\ &= \alpha(\kappa)r(\kappa) \int_{L'_*} f(x,y)\mu(x,y) = B_\kappa(r\alpha,\mu)(f).\end{aligned}$$

By the universal property of completed tensor product, there is a unique continuous, $\mathbb{Q}_p$-linear map $L_\kappa : A(U)\hat{\otimes}_R\mathbb{D} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{cont,\mathbb{Q}_p}(\mathscr{A}^\kappa(L'_*), K)$ such that the following

diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} A(U)\times\mathbb{D} & \xrightarrow{B_\kappa} & \mathrm{Hom}_{cont,\mathbb{Q}_p}(\mathscr{A}^{(\kappa)}(L'_*),K) \\ \downarrow & & || \\ A(U)\hat{\otimes}_R\mathbb{D} & \xrightarrow{L_\kappa} & \mathrm{Hom}_{cont,\mathbb{Q}_p}(\mathscr{A}^{(\kappa)}(L'_*),K) \end{array}$$

Finally, if $\mu\in\mathbb{D}_U=A(U)\hat{\otimes}_R\mathbb{D}$ and $f\in\mathscr{A}^{(\kappa)}(L'_*)$ we denote

$$L_\kappa(\mu)(f)=\int_{L'_*} f\mu.$$

Let now $k\geq 0$ be an integer such that $k\in U$ and $P\in\mathscr{P}_k$. Let us remark that as the $\mathbb{Z}_p^\times$-action on L'_* preserves W_∞, the function $\tilde{P}\chi_{W_\infty}\in\mathscr{A}^{(k)}(L'_*)$ where χ_{W_∞} is the characteristic function of W_∞ in L'_*. Let $\Phi\in\mathbb{S}_U(N,p)$.

Definition 3.4. — The *specialization map in weight* $k+2$ is the map

$$\rho_k:\mathbb{S}_U(N,p)\longrightarrow S_{k+2}(N,p)$$

defined by

$$\rho_k(\Phi)(g)(P)=\int_{W_\infty}\tilde{P}(x,y)\Phi(g)(x,y),$$

for $g\in\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and $P\in\mathscr{P}_k$.

Remark 3.5. — Note that the stabilizer of the ordered edge $e_\infty:=([L_*],[L_\infty])$ in $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$, and therefore of W_∞, is the image of $\Gamma_0(p\mathbb{Z}_p)$. This is why the prime p arises in the level of the specialization $\rho_k(\Phi)$, even though Φ was taken to be equivariant under the larger group $\Sigma(N,1)$.

The group $\hat{B}^\times$ can be written as a finite disjoint union of double cosets

$$\hat{B}^\times=\cup_{i=1}^q B^\times d_i\Sigma(N,p),$$

for elements d_i, $i=1,...,q$ in $\hat{B}^\times$. The condition $N\geq 4$ insures that the groups $d_i^{-1}B^\times d_i\cap\Sigma(N,p)$ are trivial, so that there is a natural identification

$$\mathbb{S}(N,p)\longrightarrow\mathbb{D}^q,\ \text{given by}\ \varphi\longrightarrow(\varphi(d_i))_{1\leq i\leq q}.$$

The spaces R and $\mathbb{D}$ with their natural topologies are Fréchet spaces. Thus $\mathbb{S}(N,p)$ inherits from $\mathbb{D}$ a topology under which it becomes a Fréchet space (just like R and $\mathbb{D}$). Moreover $\mathbb{S}_U(N,p)=S(\Sigma(N,1),\mathbb{D}_U)\cong\mathbb{S}(N,p)\hat{\otimes}_R A(U)$. See Section 4 of **[3]** for more details.

Definition 3.6. — Let M be a Fréchet space which is an R-module. We'll say that M is an orthonormalizable R-module if, for each $n\geq 0$ there are orthonormalizable $R_n=D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$-Banach modules M_n such that $M\cong\varprojlim_{\leftarrow,n}M_n$ as R-modules.

Theorem 3.7. — *The Fréchet spaces* $\mathbb{D}$ *and* $\mathbb{S}(N,p)$ *are orthonormalizable* R*-modules.*

Proof. — We have a natural projection $\pi : W_\infty \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ given by $(x,y) \longrightarrow y/x$, whose fibers are isomorphic to $\mathbb{Z}_p^\times$. Moreover π is equipped with a natural continuous section s defined as follows. For each $i = 0, 1, ..., p-1, \infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ let $C_i \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ denote the residue class of i. The we can write L'_* as the disjoint union $(\mathbb{Z}_p^\times \oplus p\mathbb{Z}_p) \cup (\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p^\times)$ such that $\pi(\mathbb{Z}_p^\times \oplus p\mathbb{Z}_p) = C_\infty$ and $\pi(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p^\times) = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) - C_\infty = \cup_{i=0}^{p-1} C_i$. Define $s : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow L'_*$ by $s(z) = (1, 1/z)$ if $z \in C_\infty$ and $s(z) = (z, 1)$ else. Then both π, s are locally analytic functions and they induce locally analytic isomorphisms:

$$u : L'_* \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times \oplus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \text{ and } v : \mathbb{Z}_p^\times \oplus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow L'_*$$

by: $(u(x,y) = (x, \pi(x,y))$ and $v(a,z) = as(z)$.

Moreover we have actions of L'_* and $\mathbb{Z}_p^\times \oplus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ as follows: if $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times, (x,y) \in L'_*, (a,z) \in \mathbb{Z}_p^\times \oplus \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ then $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$ and $\alpha(a,z) = (\alpha a, z)$. Then both u, v are equivariant with respect to these actions and they induce, for each $n \geq 1$ natural isomorphisms as Banach spaces

$$A_n(L'_*) \cong A_n(\mathbb{Z}_p^\times) \hat{\otimes} A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)).$$

By duality they induce $D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$-linear isomorphisms

$$\begin{aligned} D_n(L'_*) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont},\mathbb{Q}_p}(A_n(L'_*), \mathbb{Q}_p) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A_n(\mathbb{Z}_p^\times) \hat{\otimes} A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)), \mathbb{Q}_p) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)), D_n(\mathbb{Z}_p^\times)). \end{aligned}$$

The last term in the sequence naturally contains $D_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) \hat{\otimes} D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$ as the subspace of *completely continuous* (or compact) $\mathbb{Q}_p$-linear maps from $A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ to $D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$. (See **[20]** section 4.) Since $D_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ is a Banach space over $\mathbb{Q}_p$, it is orthonormalizable and therefore $D_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) \hat{\otimes} D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$ is an orthonormalizable Banach module over $D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$. Now we claim that the natural inclusions above induce isomorphisms

$$\lim_{\leftarrow,n} D_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) \hat{\otimes} D_n(\mathbb{Z}_p^\times) \longrightarrow \lim_{\leftarrow,n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont},\mathbb{Q}_p}(A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)), D_n(\mathbb{Z}_p^\times)).$$

The map above is clearly injective. Let us show that it is surjective. Let

$$(f_n)_n \in \lim_{\leftarrow,n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)), D_n(\mathbb{Z}_p^\times)).$$

We have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} A_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) & \xrightarrow{f_n} & D_n(\mathbb{Z}_p^\times) \\ \downarrow r_n & & \uparrow s_n \\ A_{n+1}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) & \xrightarrow{f_{n+1}} & D_{n+1}(\mathbb{Z}_p^\times), \end{array}$$

where r_n is the restriction and s_n is dual to restriction. Therefore,

$$f_n = s_n f_{n+1} r_n,$$

and because r_n is the restriction induced by the inclusion

$$B[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), p^{-n-1}] \subset B[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), p^{-n}],$$

it is completely continuous. (See **[20]**, Section 8.) Therefore f_n is completely continuous for all $n \geq 0$. So we have an isomorphism as R-modules $\mathbb{D} \cong \varinjlim_{\rightarrow,n} D_n(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\hat{\otimes}D_n(\mathbb{Z}_p^\times)$ which implies that $\mathbb{D}$ is an orthonormalizable R-module. As $\mathbb{S}(N,p) \cong \mathbb{D}^q$ it is an orthonormalizable R-module as well. □

Corollary 3.8. — *Let U be an affinoid disk contained in the weight space $\mathscr{W}$. Then $\mathbb{D}_U$ and $\mathbb{S}_U(N,p)$ are orthonormalizable $A(U)$-modules.*

Theorem 3.7 can be used to define actions of Hecke operators T_ℓ for ℓ not dividing Np and U_p, as in Sections 6 and 8 of **[3]**. The following theorem now follows from a standard argument.

Theorem 3.9. — *Let U be an affinoid disk contained in the weight space $\mathscr{W}$. The operator $U_p : \mathbb{S}_U(N,p) \longrightarrow \mathbb{S}_U(N,p)$ is a compact $A(U)$-linear operator.*

Proof. — See **[22]** and **[3]**. □

Recall the Coleman family f_∞ of eigenforms on $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ interpolating f that is given in equation (3) of the introduction. The Fourier coefficients $a_n(k)$ of f_∞ correspond to elements of $A(U)$ for some rigid analytic disk U containing k_0 and contained in the weight space $\mathscr{W}$. We will be making crucial use of the following "Jacquet-Langlands correspondence" applied to the family f_∞.

Theorem 3.10 **(G.Chenevier, [4])**. — *To the expense of possibly shrinking U, there exists an eigenfamily $\Phi \in \mathbb{S}_U(N,p)$ such that*

$$\Phi|T_\ell = a_\ell \Phi \quad \text{for } (\ell, Np) = 1 \qquad \text{and} \qquad \Phi|U_p = a_p \Phi.$$

4. A geometric interpretation of p-adic families of automorphic forms

In this section, we attach to any family $\Phi \in \mathbb{S}_U(N,p)$ a collection of locally analytic distributions $(\mu_L)_{L\subset\mathbb{Q}_p^2}$ on W, indexed by the $\mathbb{Z}_p$-lattices in $\mathbb{Q}_p^2$.

Definition 4.1. — Let us first fix a weight $\kappa \in U$. Let $L = gL_*$ be a $\mathbb{Z}_p$-lattice in $\mathbb{Q}_p^2$, for some $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. The distribution μ_L on $\mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$ is defined by

$$\int_W F(z)\mu_L(z) = \int_{L'} F(z)\mu_L(z) := \int_{L'_*} (F|g)(z)\Phi(g) = \int_{L'_*} F(gz)\Phi(g),$$

where $F : W \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ is any function in $\mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$.

Note that if $F \in \mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$ then $(F|g) \in \mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$ for any $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and that μ_L is supported, by definition, on the compact subset L' of W.

Here are some elementary properties of the collection $\{\mu_L\}$.

1. The distribution μ_L is well defined, i.e. it does not depend on the choice of g. Indeed, let $g_1, g_2 \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ be such that $g_1 L_* = g_2 L_* = L$. Then $g_1 = g_2 u$ with $u \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ and we have

$$\begin{aligned}\int_{L'_*} (F|g_1)(z)\Phi(g_1) &= \int_{L'_*} (F|g_2u)(z)\Phi(g_2u) = \int_{L'_*} (F|g_2u)(z)(u^{-1}\Phi(g_2)) \\ &= \int_{L'_*} (F|g_2uu^{-1})(z)\Phi(g_2) = \int_{L'_*} (F|g_2)(z)\Phi(g_2),\end{aligned}$$

for all functions $F \in \mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$.

2. Let γ be any element of $\tilde{\Gamma}$. Then

$$\int_{(\gamma L)'} F(z)\mu_{\gamma L}(z) = \int_{L'} (F|\gamma)(z)\mu_L(z)$$

for all locally analytic functions F in the space $\mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$. In particular for $\gamma = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \in \tilde{\Gamma}$ we have

$$\int_{(pL)'} F(z)\mu_{pL}(z) = \int_{L'} F(pz)\mu_L(z).$$

3. For any $\alpha \in A(U)$ and any lattice $L \subset \mathbb{Q}_p^2$, there is a natural multiplication $\alpha \cdot \mu_L$, such that $\alpha \cdot \mu_L$ is a locally analytic distribution on L', and the family $(\alpha \cdot \mu_L)_{L \subset \mathbb{Q}_p^2}$ is associated to $\alpha\Phi \in \mathbb{S}(N,p)$ by the procedure described above.

The specialization map

$$\rho_k : \mathbb{S}_U(N,p) \longrightarrow S_{k+2}(N,p)$$

can be reinterpreted geometrically as a map assigning a V_k-valued cocycle on $\mathscr{T}$ to a family of distributions $(\mu_L)_L$ indexed by lattices in $\mathbb{Q}_p^2$ and satisfying properties 1 to 3 above. More precisely, for all $P \in \mathscr{P}_k$, let

$$\tilde{P}(x,y) := y^k P(x/y)$$

denote the homogeneous polynomial in x and y, satisfying $\tilde{P}(z,1) = P(z)$. Let us also denote $|L| := p^{\mathrm{ord}_p(\det(B))}$, for B any $\mathbb{Z}_p$-basis of L.

Lemma 4.2. — *For each even integer $k \geq 0$, the Γ-invariant cocycle on $\mathscr{T}$ attached to the specialisation $\rho_k(\Phi)$,*

$$c_{\Phi,k} : \mathscr{E}(\mathscr{T}) \longrightarrow V_k$$

is expressed in terms of the system of distributions $(\mu_L)_L$ associated to Φ by the rule:

$$c_{\Phi,k}(e)(P) = |L|^{-k/2} \int_{W_e} \tilde{P}(x,y)\mu_L(x,y).$$

where the lattice L above is any representative of the origin of e.

Proof. — The proof is a direct consequence of the definitions. □

Let $k \geq 0$ be an even integer and let $\kappa \in U$. Let us recall that we have defined the space $\mathscr{A}_k^{(\kappa)}(W)$ of locally analytic functions on W, homogeneous of degree κ for the action of $\mathbb{Z}_p^\times$ and homogeneous of degree k for the action of p on W. Let us remark that if P is a locally meromorphic function on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ with at worst a pole of order k at ∞ then $\tilde{P}(x,y) := y^k P(x/y) \in \mathscr{A}_k^{(k)}(W)$. In particular if $P \in \mathscr{P}_k$ then $\tilde{P} \in \mathscr{A}_k^{(k)}(W)$.

Suppose now that $\Phi \in \mathbb{S}_U(N,p)$ is an eigenvector for the operator U_p, so that

$$\Phi | U_p = a_p \Phi, \text{ with } a_p \in A(U).$$

Lemma 4.3. — *Suppose that $L_2 \subset L_1$ are $\mathbb{Z}_p$-lattices in $\mathbb{Q}_p^2$ with $[L_1 : L_2] = p$. Let $\epsilon = ([L_1], [L_2]) \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$ be the corresponding edge. Then*

$$\int_{W_\epsilon} F(x,y)\mu_{L_2}(x,y) = \int_{W_\epsilon} F(x,y)(a_p \mu_{L_1})(x,y),$$

for every locally analytic function F in $\mathscr{A}_k^{(\kappa)}(W)$, where $k \geq 0$ is an even integer and $\kappa \in U$.

Proof. — Let $D_k^{(\kappa)}(W)$ be the continuous dual of $\mathscr{A}_k^{(\kappa)}(W)$. We will extend the definition in 4.2 and will attach to Φ a $D_k^{(\kappa)}(W)$-valued cocycle on $\mathscr{T}$ as follows: let $C_{\Phi,\kappa,k} : \mathscr{E}(T) \longrightarrow D_k^{(\kappa)}(W)$ be defined by

$$C_{\Phi,\kappa,k}(e)(F) := |L|^{-k/2} \int_{W_e} F(x,y)\mu_L(x,y),$$

where $e = [L, L']$ with L, L' lattices in $\mathbb{Q}_p^2$ such that $L' \subset L$ has index p and $F \in \mathscr{A}_k^{(\kappa)}(W)$. Let us remark that due to the homogeneity of F with respect to the action of p, the definition is independent of the choice of L, L'. Then $C_{\Phi,\kappa,k}$ enjoys the same formal properties as $c_{\Phi,k}$, in particular we have

$$C_{U_p\Phi,\kappa,k}(e) = p^k \sum_{s(e')=t(e), e' \neq \overline{e}} C_{\Phi,\kappa,k}(e'),$$

for all $e \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$.

Let us now prove the lemma. We have

$$\begin{aligned} |L_1|^{-k/2} \int_{W_\epsilon} F(x,y)(a_p\mu_L)(x,y) &= C_{U_p\Phi,\kappa,k}(\epsilon)(F) \\ &= p^k \sum_{s(\epsilon')=t(\epsilon), \epsilon' \neq \overline{\epsilon}} C_{\Phi,\kappa,k}(\epsilon')(F). \end{aligned}$$

For every ϵ' in the above sum let us choose lattices $\epsilon' = ([L_2], [L_{\epsilon'}])$, then we have

$$|L_1|^{-k/2} \int_{W_\epsilon} F(x,y)(a_p\mu_{L_1})(x,y) = |L_1|^{-k/2} p^k \sum_{\epsilon'} \int_{W_{\epsilon'}} F(x,y)\mu_{L_2}(x,y) = \tag{17}$$

$$= |L_1|^{-k/2} \int_{W_\epsilon} F(x,y)\mu_{L_2}(x,y). \qquad \square$$

For every $\mathbb{Z}_p$-lattice $L \subset \mathbb{Q}_p^2$ we define a distribution $\pi_*(\mu_L)$ on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ by the formula

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} P(t)\pi_*(\mu_L)(t) := |L|^{-k_0/2} \int_W \tilde{P}(x,y)\mu_L(x,y),$$

where P is any locally meromorphic function on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, with at worst a pole of order k_0 at ∞.

Assume now that $\rho_{k_0}(\Phi) = \phi$, where $\phi \in S_{k_0+2}(N,p)$ is the automorphic form on B attached to f via Theorem 2.1. In particular, Φ is an eigenvector for U_p whose associated eigenvalue $a_p(k)$ satisfies

$$a_p(k_0) = p^{k_0/2}.$$

Recall the distribution μ_ϕ attached to ϕ that was defined in Section 2.

Proposition 4.4. — *For all $\mathbb{Z}_p$-lattices L in $\mathbb{Q}_p^2$,*

$$\pi_*(\mu_L) = \mu_\phi.$$

Proof. — First note that the function $(x,y) \longrightarrow \tilde{P}(x,y)$ is a locally analytic homogeneous function of degree k_0 with respect to the action of $\mathbb{Q}_p^\times$ on W, in particular $\tilde{P} \in \mathscr{A}_{k_0}^{(k_0)}(W)$. The relationship between μ_{pL} and μ_L described after Definition 4.1 implies that $\pi_*(\mu_L)$ only depends on the homothety class of L. Moreover, let L_1 and L_2 be any two $\mathbb{Z}_p$-lattices in $\mathbb{Q}_p^2$. Suppose without loss of generality that L_2 is contained in L_1 with index p, and that $|L_1| = 1$, and $|L_2| = p$. Let $e = ([L_1],[L_2])$ be the corresponding edge. Using Lemma 4.3 we have

$$\begin{aligned}
\int_{U_e} P(t)\pi_*(\mu_{L_2})(t) &= |L_2|^{-k_0/2} \int_{W_e} \tilde{P}(x,y)\mu_{L_2}(x,y) \\
&= p^{-k_0/2} \int_{W_e} \tilde{P}(x,y)(a_p\mu_{L_1})(x,y) \\
&= p^{-k_0/2} a_p(k_0) \int_{W_e} \tilde{P}(x,y)\mu_{L_1}(x,y) \\
&= \int_{U_e} P(t)\pi_*(\mu_{L_1})(t).
\end{aligned}$$

Arguing in the same way for $\overline{e} = ([(1/p)L_2],[L_1])$, one finds that

$$\int_{U_{\overline{e}}} P(t)\pi_*(\mu_{L_2})(t) = \int_{U_{\overline{e}}} P(t)\pi_*(\mu_{L_1})(t),$$

for all locally meromorphic functions P on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ with at worst a pole of order k_0 at ∞. Because $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) = U_e \cup U_{\overline{e}}$, we conclude that the distribution $\pi_*(\mu_L)$ is independent of the lattice L.

On the other hand, for all P as above we have

$$\begin{aligned}\int_{U_e} P(t)\mu_\phi(t) &= C_{\Phi,k_0,k_0}(e)(\tilde{P}) = |L_1|^{-k_0/2}\int_{W_e}\tilde{P}(x,y)\mu_{L_1}(x,y)\\ &= \int_{U_e} P(t)\pi_*(\mu_{L_1})(t).\end{aligned}$$

Similarly, it follows that

$$\int_{U_{\bar{e}}} P(t)\mu_\phi(t) = \int_{U_{\bar{e}}} P(t)\pi_*(\mu_{L_2})(t),$$

which allows us to conclude. □

Given $\tau \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, let $\bar{\tau}$ denote the natural image of τ in $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)$ obtained by reducing τ modulo the maximal ideal of the ring of integers of $\mathbb{C}_p$. Let $\mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$ denote the *unramified p-adic upper half-plane*, consisting of elements in $\mathbb{Q}_p^{ur} - \mathbb{Q}_p$. Finally, let

$$r : \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur}) \longrightarrow \mathscr{T}_0$$

denote the so-called *reduction map* which is determined by the rules

1. $r(\tau) = v_*$ if and only if $\bar{\tau} \notin \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$;
2. $r(\gamma\tau) = \gamma r(\tau)$ for all $\gamma \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

(See Chapter 5 of [**13**], for example, for more details.)

We will now extend the definition to a more general class of functions. Let us fix $\tau \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$, $k_0 \geq 0$ an integer and let U be an affinoid disk containing k_0 and contained in the weight space $\mathscr{W}$. Let $P \in \mathscr{A}^{(k_0)}(L'_*)$ and $\mu \in \mathbb{D}_U$. We'd like to define

$$\int_{L'_*} \log(x - \tau y)P(x,y)\mu,$$

where the branch of log in the above formula and to the end of this article is such that $\log(p) = 0$.
Let $F : U(K) \times L'_* \longrightarrow \mathbb{C}_p$ be defined by:

$$F(\kappa,(x,y)) = P(x,y)(x-\tau y)^{\kappa-k_0}.$$

By the above expression we mean the following. Suppose first that the radius r of U is small enough and let κ be determined by the pair (ϵ, c) as in remark 3.1. Here ϵ is the character $t \longrightarrow (\dfrac{t}{\langle t\rangle})^{k_0}$ and $c \in \mathscr{O}_K$ such that $|c - k_0| \leq r$. Then by $(x-\tau y)^{\kappa-k_0}$ we mean $(x-\tau y)^{c-k_0} = \exp((c-k_0)\log(x-\tau y))$.

Let us remark that if $t \in \mathbb{Z}_p^\times$, we have $F(\kappa,(tx,ty)) = \kappa(t)F(\kappa,(x,y))$, i.e. $F(\kappa,-) \in \mathscr{A}^{(\kappa)}(L'_*)$.

Lemma 4.5. — *Let $\mu \in \mathbb{D}_U$. The function $U(K) \longrightarrow \mathbb{C}_p$ defined by*

$$\kappa \longrightarrow \int_{L'_*} F(\kappa,(x,y))\mu(x,y),$$

is analytic near k_0.

Proof. — Let us remark that we have the following expansion

$$F(\kappa,(x,y)) = P(x,y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\kappa-k_0)^n}{n!}\log^n(x-\tau y),$$

which converges for all $(x,y) \in L'_*$ as $\log(x-\tau y) \in p\mathscr{O}_{\mathbb{Q}_p^{ur}}$. Moreover, for all $n \geq 0$ the function $(x,y) \to P(x,y)\log^n(x-\tau y)$ is locally analytic, more precisely $P(x,y)\log^n(x-\tau y) \in A_m(L'_*)$ with m depending only on τ and P. Let us fix an orthonormal basis $\{\mu_i\}_{i=0}^{\infty}$ of $D_m(L'_*)$, so that the m-th component of μ in $A(U)\hat{\otimes}_{R_m}D_m(L'_*)$, $\mu^{(m)}$ can be uniquely written

$$\mu^{(m)} = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\otimes\mu_i, \text{ where } \alpha_i \in A(U) \text{ with } ||\alpha_i|| \longrightarrow 0.$$

We have, according to our definition

$$\begin{aligned}\int_{L'_*}F(\kappa,(x,y))\mu &= \int_{L'_*}F(\kappa,(x,y))\mu^{(m)} = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(\kappa)\int_{L'_*}F(\kappa,(x,y))\mu_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(\kappa)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\kappa-k_0)^n}{n!}\int_{L'_*}P(x,y)\log^n(x-\tau y)\mu_i(x,y).\end{aligned}$$

The lemma now follows from the fact that $\alpha_i(\kappa)$ is analytic around k_0 for all $i \geq 0$. □

Let notations be as above, i.e. let $\mu \in \mathbb{D}_U$ and $P \in \mathscr{A}^{(k_0)}(L'_*)$.

Definition 4.6. — We define $\displaystyle\int_{L'_*}P(x,y)\log(x-\tau y)\mu(x,y)$ to be

$$\left(\frac{d}{d\kappa}\int_{L'_*}F(\kappa,(x,y))\mu\right)_{\kappa=k_0}.$$

Remark 4.7. — Let us give an explicit formula for $\displaystyle\int_{L'_*}P(x,y)\log(x-\tau y)\mu(x,y)$. Let us suppose that $P(x,y)\log^n(x-\tau y) \in A_m(L'_*)$ for some m independent of n and let us fix an orthonormal basis $\{\mu_i\}_{i=0}^{\infty}$ as in the proof of lemma 4.5. We write $\mu = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\otimes\mu_i$, with $\alpha_i \in A(U)$ such that $||\alpha_i|| \longrightarrow 0$. Then we have

$$\begin{aligned}\int_{L'_*}P(x,y)\log(x-\tau y)\mu(x,y) &= \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{d}{d\kappa}\alpha_i)_{\kappa=k_0}\int_{L'_*}P(x,y)\mu_i(x,y) + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i(k_0)\int_{L'_*}P(x,y)\log(x-\tau y)\mu_i(x,y).\end{aligned}$$

Let now $\Phi \in \mathbb{S}_U(N,p)$ and let $\{\mu_L\}_{L\subset\mathbb{Q}_p^2}$ be the family of distributions attached to it. Let as above $\tau \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$, $P \in \mathscr{A}^{(k_0)}(W)$ and define $f(x,y) := P(x,y)\log(x-\tau y)$. Let $L \subset \mathbb{Q}_p^2$ be a lattice and let $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ be such that $L = gL_*$. For $z=(x,y) \in W$, $(f|g)(z)$ can be written

$$(f|g)(z) = f(gz) = C(g,\tau)(P|g)(x,y) + (P|g)(x,y)\log(x-\tau' y),$$

where $C(g,\tau)$ is independent of (x,y) and $\tau' \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$. Therefore it makes sense to define

$$\begin{aligned}\int_W P(x,y)\log(x-\tau y)\mu_L \quad &:= \quad C(g,\tau)\int_{L'_*}(P|g)(x,y)\mu_{L_*}(x,y) + \\ &+ \quad \int_{L'_*}(P|g)(x,y)\log(x-\tau' y)\mu_{L_*}(x,y).\end{aligned}$$

We are now ready to define the main object of this section. Given $\tau \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$, let $v_\tau = r(\tau) \in \mathscr{T}_0$ and let L_τ be any $\mathbb{Z}_p$-lattice in the homothety class of v_τ. Recall the rigid analytic modular form ψ defined in equation (12) of Section 2.

Definition 4.8. — For all $P \in \mathscr{P}_{k_0}$, the *indefinite integral* attached to τ and ψ is defined by the formula

$$\int^{\tau} \psi(z)P(z)dz := |L_\tau|^{-k_0/2}\int_W \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_\tau}(x,y), \tag{18}$$

where the branch of the p-adic log used above is the one satisfying $\log(p)=0$.

Note that because

$$\log(px-p\tau y)\tilde{P}(px,py) = p^{k_0}\log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y),$$

formula (18) only depends on the homothety class of L_τ, so that the indefinite integral is well-defined.

The main properties of the indefinite integral of Definition 4.8 are summarized in the following two propositions.

Proposition 4.9. — *For all $\gamma \in \Gamma$ and $P \in \mathscr{P}_{k_0}$,*

$$\int^{\gamma\tau}\psi(z)P(z)dz = \int^{\tau}\psi(z)(P\gamma)(z)dz.$$

Proof. — Let

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Then

$$\int^{\gamma\tau}\psi(z)P(z)dz = |\gamma L_\tau|^{-k_0/2}\int_W \log(x-(\gamma\tau)y)\tilde{P}(x,y)\mu_{\gamma L_\tau}(x,y).$$

Performing the change of variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx - by \\ -cx + ay \end{pmatrix},$$

we obtain

$$\begin{aligned} \int^{\gamma\tau} \psi(z)P(z)dz &= |L_\tau|^{-k_0/2} \int_W \log\left(\frac{u-\tau v}{c\tau+d}\right) (\widetilde{P\gamma})(u,v)\mu_{L_\tau}(u,v) \\ &= \int^{\tau} \psi(z)(P\gamma)(z)dz \\ &\quad - \log(c\tau+d)|L_\tau|^{-k_0/2} \int_W (\widetilde{P\gamma})(u,v)\mu_{L_\tau}(u,v). \end{aligned}$$

On the other hand by proposition 4.4 we have

$$|L_\tau|^{-k_0/2} \int_W (\widetilde{P\gamma})(u,v)\mu_{L_\tau}(u,v) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} (P\gamma)(t)\mu_\phi(t) = 0.$$

Proposition 4.9 follows. □

The next proposition relates the indefinite integral to the p-adic line integral of equation (13).

Proposition 4.10. — *Let $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$ and let $v_i = r(\tau_i) = [L_i] \in \mathscr{T}_0$ be the corresponding vertices. For all $P \in \mathscr{P}_{k_0}$,*

$$\begin{aligned} &\int^{\tau_2} \psi(z)P(z)dz - \int^{\tau_1} \psi(z)P(z)dz \\ &\quad = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \psi(z)P(z)dz + 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0) \sum_{e:v_1\to v_2} c_\phi(e)(P). \end{aligned}$$

Proof. — Suppose without loss of generality that $L_2 \subset L_1$ and $[L_1 : L_2] = p$. Let $e = ([L_1], [L_2]) \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$. Then

$$\int^{\tau_2} \psi(z)P(z)dz - \int^{\tau_1} \psi(z)P(z)dz \tag{19}$$

$$= |L_2|^{-k_0/2} \int_W \log(x - \tau_2 y)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_2}(x,y) \tag{20}$$

$$- |L_1|^{-k_0/2} \int_W \log(x - \tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_1}(x,y) \tag{21}$$

$$= |L_2|^{-k_0/2} \int_W \log\left(\frac{x-\tau_2 y}{x-\tau_1 y}\right) \tilde{P}(x,y)\mu_{L_2}(x,y) \tag{22}$$

$$+ \int_W \log(x - \tau_1 y)\tilde{P}(x,y) \left(|L_2|^{-k_0/2}\mu_{L_2} - |L_1|^{-k_0/2}\mu_{L_1}\right). \tag{23}$$

By proposition 4.4, the first integral (22) appearing in the last expression is equal to

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \log\left(\frac{t-\tau_2}{t-\tau_1}\right) P(t)\mu_\phi(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \psi(z)P(z)dz.$$

In order to calculate the second integral (23), we will need the following describing the distribution $\alpha \cdot \mu_L$ for $\alpha \in A(U)$.

Lemma 4.11. — *Let α be an element of $A(U)$. For all $e \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$, $\tau \in \mathscr{H}_p$, and $P \in \mathscr{P}_{k_0}$,*

$$\int_{W_e} \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)(\alpha\mu_L)(x,y) = \alpha'(k_0)|L|^{k_0/2}c_\phi(e)(P) + \alpha(k_0)\int_{W_e} \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)\mu_L(x,y).$$

Proof of Lemma 4.11: This proof is a consequence of the following calculation:

$$\begin{aligned}
\int_{W_e} & \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)(\alpha\mu_L)(x,y) \\
&= \frac{d}{d\kappa}\left((\alpha(\kappa)(\int_{W_e} \tilde{P}(x,y)(x-\tau y)^{\kappa-k_0}\mu_L(x,y)\right)_{\kappa=k_0} \\
&= \alpha'(k_0)\int_{W_e} \tilde{P}(x,y)\mu_L(x,y) \\
&\quad +\alpha(k_0)\int_{W_e} \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)\mu_L(x,y) \\
&= \alpha'(k_0)|L|^{k_0/2}\int_{U_e} P(z)\mu_\phi(z) + \alpha(k_0)\int_{W_e} \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)\mu_L(x,y).
\end{aligned}$$

This proves the lemma.

End of proof of Proposition 4.10: We return to the evaluation of the integral

$$J := \int_W \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left(|L_2|^{-k_0/2}\mu_{L_2} - |L_1|^{-k_0/2}\mu_{L_1}\right)$$

appearing in (23). It is useful to express J as a sum of two contributions J_e and $J_{\bar{e}}$ obtained by integrating over the disjoint subsets W_e and $W_{\bar{e}}$ of W associated to the ordered edge $e = ([L_1],[L_2])$ of $\mathscr{T}$. By Lemma 4.3,

$$\begin{aligned}
J_e &= \int_{W_e} \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left(|L_2|^{-k_0/2}a_p - |L_1|^{-k_0/2}\right)\mu_{L_1}(x,y) \\
&= |L_1|^{-k_0/2}\int_{W_e} \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left((p^{-k_0/2}a_p - 1)\mu_{L_1}\right)(x,y).
\end{aligned}$$

Now applying Lemma 4.11 with $\alpha = p^{-k_0/2}a_p - 1$, and noting that $\alpha(k_0) = 0$, we find

$$J_e = p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_\phi(e)(P). \tag{24}$$

On the other hand, $\overline{e} = ([(1/p)L_2], [L_1])$ and $[(1/p)L_2 : L_1] = p$ so we have $\mu_{L_1}|_{W_{\overline{e}}} = a_p \mu_{(1/p)L_2}|_{W_{\overline{e}}}$ and the same computation gives:

$$\begin{aligned} J_{\overline{e}} &:= \int_{W_{\overline{e}}} \log(x - \tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left(|L_2|^{-k_0/2}\mu_{L_2} - |L_1|^{-k_0/2}\mu_{L_1}\right) \\ &= -p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_\phi(\overline{e})(P) = p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_\phi(e)(P). \end{aligned}$$

Therefore

$$J = J_e + J_{\overline{e}} = 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_\phi(e)(P).$$

This concludes the proof of Proposition 4.10. □

We are now able to prove Theorem 3 of the introduction:

Theorem 4.12. — *Let $\mathscr{L}_T(f)$ denote Teitelbaum's L-invariant attached to f. Then*

$$-2p^{-k_0/2}a_p'(k_0) = \mathscr{L}_T(f).$$

Proof. — Let Φ be the family of automorphic forms associated to f_∞ by Theorem 3.10. Fix $\tau \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$ and let $v_\tau = [L_\tau] \in \mathscr{T}_0$ be the corresponding vertex. Let $h_\tau \in V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p$ be the map sending $P \in \mathscr{P}_{k_0}$ to

$$h_\tau(P) := \int^\tau \psi(z)P(z)dz.$$

For all $\gamma \in \Gamma$ and $P \in \mathscr{P}_{k_0}$, Proposition 4.10 gives

$$h_{\gamma\tau}(P) - h_\tau(P) = \int_\tau^{\gamma\tau} \psi(z)P(z)dz + 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0) \sum_{e : v_\tau \to \gamma(v_\tau)} c_\phi(e)(P).$$

In the notations of Section 2 this formula can be rewritten as

$$h_{\gamma\tau} - h_\tau = \kappa_\phi^{\log}(\gamma) + 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0)\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}(\gamma).$$

On the other hand, Proposition 4.9 implies that

$$h_{\gamma\tau} - h_\tau = \gamma h_\tau - h_\tau$$

is a $V_{k_0} \otimes \mathbb{C}_p$-valued coboundary for Γ. It follows that

$$[\kappa_\phi^{\log}] = -2p^{-k_0/2}a_p'(k_0)[\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}].$$

Theorem 4.12 now follows from Definition 2.3 of $\mathscr{L}_T(f)$. □

5. Orton's $\mathscr{L}$-invariant

This section recalls the definition of Orton's $\mathscr{L}$-invariant, which involves the theory of modular symbols. The reader is referred to **[19]** for more details.

Write Δ for the group $\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ of degree zero divisors supported on the rational cusps of the Poincaré upper half plane. For any unitary commutative ring A of $\mathbb{C}$, let $\mathscr{P}_k(A)$ denote the A-algebra of polynomials of degree $\leq k$ with coefficients in A, and

let $V_k(A)$ be the A-dual of $\mathscr{P}_k(A)$. When A is a subfield of $\mathbb{C}$, the group $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ acts on the right on $\mathscr{P}_k(A)$ by the rule

$$(P\gamma)(z) = (cz+d)^k P(\gamma z), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

This induces a *right* action of $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$ on $V_k(A)$ by setting

$$(\phi\gamma)(P) = \phi(P\gamma^{-1}).$$

A modular symbol with values in a $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$-module $\mathscr{V}$ is a homomorphism from Δ to $\mathscr{V}$. The space of all such modular symbols is denoted

$$MS(\mathscr{V}) := \hom(\Delta, \mathscr{V}).$$

It is equipped with a right $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$-action by the rule

$$(m\gamma)(\delta) = m(\gamma\delta)\gamma,$$

for $m \in MS(\mathscr{V})$, $\delta \in \Delta$, and $\gamma \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$. If the divisor δ is of the form $(s) - (r)$, write $m\{r \to s\}$ for $m(\delta)$.

A modular eigenform g of weight $k+2$ on $\Gamma_0(Np)$ gives rise to a $\Gamma_0(Np)$-invariant $V_k(\mathbb{C})$-valued modular symbol

$$\Psi_g : \Delta \longrightarrow V_k(\mathbb{C})$$

by the rule

$$\Psi_g(\delta)(P) = 2\pi i \int_\delta g(z)P(z)dz,$$

with $\delta \in \Delta$ and $P \in \mathscr{P}_k(\mathbb{C})$. Write $\Psi_g^\pm$ for the projection of Ψ_g to the $\pm$-eigenspace of $\mathrm{Hom}(\Delta, V_k(\mathbb{C}))$ for the action of the involution

$$c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Let K_g be the extension of $\mathbb{Q}$ generated by the Hecke eigenvalues of g. By a result of Shimura, there exist complex periods $\Omega_g^\pm$ such that

$$\Phi_g^\pm = \Psi_g^\pm / \Omega_g^\pm$$

takes values in $V_k(K_g)$. Note that the modular symbols Ψ_g and $\Phi_g^\pm$ are all $\Gamma_0(Np)$-invariant.

Let f be the newform on $\Gamma_0(Np)$ considered in the introduction. Fix a choice of sign $w_\infty \in \{-1, 1\}$ and let

$$\Phi_f = \begin{cases} \Phi_f^+ & \text{if } w_\infty = 1; \\ \Phi_f^- & \text{if } w_\infty = -1. \end{cases}$$

be the modular symbol in $MS(V_{k_0}(K_f))$ attached to f. Define

$$\tilde{\Gamma} = \Big\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}[1/p]) : N \mid c \text{ and } \det(\gamma) = p^{2h}, \text{ for } h \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Write Γ for the group of elements in $\tilde{\Gamma}$ having determinant one. For $(s)-(r)\in\Delta$, define a harmonic cocycle

$$c_f\{r\to s\}:\mathscr{E}(\mathscr{T})\longrightarrow V_{k_0}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$$

by the rule

$$c_f\{r\to s\}(e)(P)=\Phi_f((\gamma s)-(\gamma r))(P\gamma^{-1}),$$

where $\gamma\in\Gamma$ is such that $\gamma e=e_\infty$. This definition is independent of the choice of γ such that $\gamma e=e_\infty$: for if γ' is another such element, the element $\gamma'\gamma^{-1}$ belongs to $\Gamma_0(Np)$, the stabiliser of e_∞. The claim then follows from the $\Gamma_0(Np)$-invariance of Φ_f.

The cocycle $c_f\{r\to s\}$ gives rise to a locally analytic distribution on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, denoted $\mu_f\{r\to s\}$, and determined by setting

$$\int_{U_e}P(t)\mu_f\{r\to s\}(t)=c_f\{r\to s\}(e)(P)$$

for all $e\in\mathscr{E}(\mathscr{T})$ and $P\in\mathscr{P}_{k_0}(\bar{\mathbb{Q}}_p)$, and extending to functions on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ which are locally analytic on $\mathbb{Q}_p$ and have a pole of order at most k_0 at infinity. Note the analogy between this definition and the definition of the locally analytic distribution μ_ϕ in equation (11) of Section 2.

The following definition is modelled on the description of the Coleman line integral given in equation (13) of Section 2.

Definition 5.1. — For $\tau_1,\tau_2\in\mathscr{H}_p$ and $r,s\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, the *definite double integral* is defined by

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_r^s\omega_f P=\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}\log\Big(\frac{t-\tau_2}{t-\tau_1}\Big)P(t)\mu_f\{r\to s\}(t).$$

The notation ω_f in Definition 5.1 is meant to suggest that the definite double integral should be thought of as the integration of a form of parallel weight (k_0+2,k_0+2) on $\mathscr{H}_p\times\mathscr{H}$ associated to f. This point of view is explained in detail in [**13**], Chapter 9 and [**19**], Chapter 2.

Set $\mathscr{P}_k=\mathscr{P}_k(\bar{\mathbb{Q}}_p)$, $V_k=V_k(\bar{\mathbb{Q}}_p)$ and write

$$\mathscr{M}_k:=MS(V_k)=\mathrm{Hom}(\Delta,V_k).$$

The following definitions are motivated by the definition of the 1-cocycles $\kappa_\phi^{\mathrm{ord}}$ and $\kappa_\phi^{\log}$ given in equations (14) and (15) respectively.

Definition 5.2. —

1. The 1-cocycle $\kappa_f^{\mathrm{ord}}\in Z^1(\Gamma,\mathscr{M}_{k_0})$ is defined by choosing $v\in\mathscr{T}_0$ and setting

$$\kappa_f^{\mathrm{ord}}(\gamma)\{r\to s\}(P)=\sum_{e:v\to\gamma v}c_f\{r\to s\}(P)(e).$$

2. The 1-cocycle $\kappa_f^{\log} \in Z^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$ is defined by choosing $\tau \in \mathscr{H}_p$ and setting

$$\kappa_f^{\log}(\gamma)\{r \to s\}(P) = \int_\tau^{\gamma\tau}\int_r^s \omega_f P.$$

Lemma 5.3. —

1. *The image* $[\kappa_f^{\mathrm{ord}}]$ *of* κ_f^{ord} *in* $H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$ *is independent of the choice of base vertex* v.
2. *The image* $[\kappa_f^{\log}]$ *of* $\kappa_f^{\log}$ *in* $H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$ *is independent of the choice of base point* $\tau \in \mathscr{H}_p$.

Proof. — See **[19]**, Lemma 5.1 and 5.2. Note that the one-cocycles κ_f^{ord} and $\kappa_f^{\log}$ are denoted $\widetilde{oc}_{f,v}$ and $\widetilde{lc}_{f,\tau}$ respectively in **[19]**. □

Proposition 5.4. — *The class* $[\kappa_f^{\mathrm{ord}}]$ *is non-zero.*

Proof. — Proposition 13 of Section II.2.8 of **[21]**, applied to the case $M = \mathscr{M}_{k_0}$ and $G = \Gamma$ acting on $\mathscr{T}$, yields a linear transformation

$$\theta : H^0(\Gamma_0(Np), \mathscr{M}_{k_0}) \xrightarrow{\theta} H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$$

whose kernel is identified with the p-old subspace of the space of modular symbols on $\Gamma_0(Np)$. The map θ is described explicitly in Section 3.1 of **[12]**, where it is shown that $\theta(\Phi_f) = [\kappa_f^{\mathrm{ord}}]$. (Although **[12]** assumes $k_0 = 0$, the treatment of the general case is no different.) Proposition 5.4 follows from the fact that the form f is new at p. □

Let

$$H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})^f, \quad H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})^{f, w_\infty} \subset H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$$

denote, respectively, the f-isotypic subspace and its w_∞-eigenspace for the action of the involution c defined at the beginning of this section. The classes $[\kappa_f^{\mathrm{ord}}]$ and $[\kappa_f^{\log}]$ both belong to $H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})^{f, w_\infty}$. In **[19]**, Proposition 7.1, it is shown that this space is one-dimensional over $\mathbb{C}_p$. This makes it possible to define Orton's $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}_O(f)$ in a way which parallels closely Definition 2.3 of Teitelbaum's $\mathscr{L}$-invariant.

Definition 5.5. — The Orton L-invariant attached to f is the unique scalar $\mathscr{L}_O(f) \in \mathbb{C}_p$ such that

$$[\kappa_f^{\log}] = \mathscr{L}_O(f)[\kappa_f^{\mathrm{ord}}].$$

Remark 5.6. — Note that $\mathscr{L}_O(f)$ depends a priori on the choice of sign w_∞ which determines whether Φ_f is taken to be the even or odd modular symbol attached to f. Hence there are two a priori distinct Orton $\mathscr{L}$-invariants attached to f, which could be denoted $\mathscr{L}_O^+(f)$ and $\mathscr{L}_O^-(f)$. A by-product of our study of $\mathscr{L}_O(f)$ is a direct proof that these two invariants are in fact equal. (Cf. Theorem 6.8.)

Recall the Shimura period Ω_f (depending on the choice of sign w_∞) that was used to define the modular symbol attached to f. Let $L_p(f,\chi,s)$ denote the Mazur-Tate-Teitelbaum p-adic L-function attached to f and χ, which is constructed in terms of the modular symbol of f and hence depends on the choice of Ω_f. Set $w=1$ if f is split multiplicative at p, and $w=-1$ if f is non-split multiplicative at p. The following theorem of Orton is crucial for the proof of Theorem 2 of the Introduction.

***Theorem 5.7* (Orton).** — *For all Dirichlet characters χ satisfying $\chi(p)=w$ and $\chi(-1)=w_\infty$,*

$$L_p'(f,\chi,1+k_0/2)=\mathscr{L}_O(f)L^*(f,\chi,1+k_0/2).$$

It is worth noting that it is at this stage, and this stage only, that a connection is made between the cohomologically-defined $\mathscr{L}$-invariants and special values of L-series.

Let us briefly recall some of the ideas that go in Orton's proof of Theorem 5.7. Fix a positive integer c prime to Np. For any positive integer ν prime to c, define an embedding $\Psi_\nu:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to M_2(\mathbb{Q})$ by setting

$$\Psi_\nu(a,a)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\quad \Psi_\nu(c,0)=\begin{pmatrix} c & \nu\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

When ν varies in a full set of representatives for $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$, Ψ_ν describes the set of all Γ-conjugacy classes of oriented optimal embeddings of conductor c: see [**12**], Section 2. Set

$$r_{\Psi_\nu}=\infty,\quad s_{\Psi_\nu}=-\nu/c,\quad \gamma_{\Psi_\nu}=\Psi_\nu(p^u,p^{-u})=\begin{pmatrix} p^u & (p^u-p^{-u})\nu/c\\ 0 & p^{-u}\end{pmatrix},$$

where u denotes the order of p^2 in $(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$. The element γ_{Ψ_ν} is a generator for the image of $\Psi(\mathbb{Q}^\times\times\mathbb{Q}^\times)\cap\Gamma$ in $\mathbf{PGL}_2(\mathbb{Q})$. Moreover, r_{Ψ_ν}, resp., s_{Ψ_ν} is the repulsive, resp., attractive fixed point for the action of $\Psi(\gamma_{\Psi_\nu})$ on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Define the polynomial

$$P_{\Psi_\nu}(z)=(cz+\nu)^{k_0/2}\in\mathscr{P}_{k_0}.$$

Note that P_{Ψ_ν} is invariant under the weight k_0+2 action of γ_{Ψ_ν}.

The one-cocycles κ_f^{ord} and $\kappa_f^{\log}$ can be used to associate to the embedding Ψ_ν the following numerical invariants:

$$J_{\Psi_\nu}^{\mathrm{ord}}=\kappa_f^{\mathrm{ord}}(\gamma_{\Psi_\nu})\{r_{\Psi_\nu}\to s_{\Psi_\nu}\}(P_{\Psi_\nu})=\sum_{e:v\to\gamma_{\Psi_\nu}v}c_f\{r_{\Psi_\nu}\to s_{\Psi_\nu}\}(P_{\Psi_\nu})(e);\tag{25}$$

$$J_{\Psi_\nu}^{\log}=\kappa_f^{\log}(\gamma_{\Psi_\nu})\{r_{\Psi_\nu}\to s_{\Psi_\nu}\}(P_{\Psi_\nu})=\int_{\tau_{\Psi_\nu}}^{\gamma\tau_{\Psi_\nu}}\int_{r_{\Psi_\nu}}^{s_{\Psi_\nu}}\omega_f P_{\Psi_\nu}.\tag{26}$$

***Remark 5.8*.** — Note that

$$b(\gamma_{\Psi_\nu})\{r_{\Psi_\nu}\to s_{\Psi_\nu}\}(P_{\Psi_\nu})=0$$

for any coboundary $b \in B^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$. This implies that the quantities $J^{\mathrm{ord}}_{\Psi_\nu}$ and $J^{\log}_{\Psi_\nu}$ do not depend on the choice of cocycles representing the cohomology classes $[\kappa^{\mathrm{ord}}_f]$ and $[\kappa^{\log}_f]$ respectively, and hence, by the definitiono f $\mathscr{L}_O(f)$, that

$$J^{\log}_{\Psi_\nu} = \mathscr{L}_O(f) J^{\mathrm{ord}}_{\Psi_\nu}. \tag{27}$$

Let χ be a Dirichlet character of conductor c, such that $\chi(p) = w$ and $\chi(-1) = w_\infty$. The following formula of Orton relates the numerical invariants $J^{\mathrm{ord}}_{\Psi_\nu}$ and $J^{\log}_{\Psi_\nu}$ defined in (25) and (26) to special values of L-series, and derivatives of the corresponding p-adic L-functions, respectively:

$$\sum_{\nu \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} \chi(\nu) J^{\mathrm{ord}}_{\Psi_\nu} = (2u) L^*(f, \chi, 1 + k_0/2); \tag{28}$$

$$\sum_{\nu \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} \chi(\nu) J^{\log}_{\Psi_\nu} = (2u) L'_p(f, \chi, 1 + k_0/2). \tag{29}$$

The first formula is Corollary 6.1 of [**19**], while the second formula is Corollary 6.2 of [**19**].

Theorem 5.7 now follows directly from these formulae and equation (27).

6. Distribution-valued modular symbols

Recall from the introduction the p-adic family of eigenforms

$$f_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n, \qquad \text{with } a_n \in A(U)$$

interpolating the given newform $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ of weight $k_0 + 2$ on $\Gamma_0(Np)$. This means that

$$f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a(k) q^n$$

is a normalised eigenform of weight $k + 2$ on $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$, for all $k \in U \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and that $f_{k_0} = f$. Let Φ_{f_k} be the modular symbol in $MS(V_k)$ defined in section 5, associated to the choice of sign w_∞. Note that Φ_{f_k} also depends on a choice of complex period Ω_{f_k}, and thus is only really well-defined up to multiplication by a non-zero scalar. Two modular symbols m_1 and m_2 in $MS(V_k)$ are said to be equivalent if there exists a non-zero scalar $\lambda \in \mathbb{C}_p^\times$ such that $m_1 = \lambda m_2$; one then writes $m_1 \sim m_2$.

Assume throughout this section that $f = f_{k_0}$ is *split* multiplicative at p, so that

$$w = +1, \qquad a_p(k_0) = p^{k_0/2}.$$

As in section 3, let $\mathbb{D}$ be the space of locally analytic distributions on L'_*, with $L_* = \mathbb{Z}_p^2$. Recall that the $\mathbb{Q}_p$-algebra R of locally analytic distributions on $\mathbb{Z}_p^\times$ acts on $\mathbb{D}$. The space $MS_{\Gamma_0(N)}(\mathbb{D})$ of $\Gamma_0(N)$-invariant $\mathbb{D}$-valued modular symbols is equipped with a natural action of the Hecke operators T_n with $p \nmid n$, as well as an action of R arising from the R-module structure on $\mathbb{D}$. Let us fix as in the previous sections an

affinoid disk U, defined over K, containing k_0 and contained in the weight space $\mathscr{W}$ and let $\mathbb{D}_U := \mathbb{D}\hat{\otimes}_R A(U)$.

Proposition 6.1. — *There exists a distribution-valued modular symbol $\Phi_{f_\infty} \in MS(\mathbb{D}_U)$ satisfying the following properties:*

1. *($\Gamma_1(N)$-invariance) Φ_{f_∞} is $\Gamma_0(N)$-invariant, that is,*
$$\Phi_{f_\infty}(\gamma\delta)\cdot\gamma = \Phi_{f_\infty}(\delta)$$
for all $\gamma \in \Gamma_1(N)$.
2. *(Weight specialisation) Following the notations of Definition 3.4, for $k \in U(K)\cap \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $P \in \mathscr{P}_k$, define a V_k-valued modular symbol*
$$\rho_k(\Phi_{f_\infty}) : \Delta \longrightarrow V_k$$
by the rule
$$\rho_k(\Phi_{f_\infty})(\delta)(P) = \int_{W_\infty} \tilde{P}(x,y)\Phi_{f_\infty}(\delta)(x,y).$$
Then,
$$\rho_k(\Phi_{f_\infty}) \sim \Phi_{f_k}, \quad \text{and } \rho_{k_0}(\Phi_{f_\infty}) = \Phi_f.$$

Proof. — When f has weight 2 (i.e., $k_0 = 0$), the existence of a modular symbol with values in the module of bounded distributions on L_* is proved in [**15**]. In general, it follows from results of Stevens in [**22**]. □

For a divisor $\delta = (s) - (r)$ in Δ, write $\mu_{L_*}\{r \to s\}$ for the locally analytic distribution $\Phi_{f_\infty}(\delta)$. It will be viewed as a distribution on W, supported on L'_*.

Definition 6.2. — For any lattice L in $\mathbb{Q}_p^2$, the locally analytic distribution $\mu_L\{r \to s\}$ on W is defined by the rule
$$\int_W F(x,y)\mu_L\{r\to s\}(x,y) = \int_{L'_*} F(g^{-1}(x,y))\mu_{L_*}\{gr \to gs\}(x,y),$$
where $F : W \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ is any locally analytic function, and $g \in \tilde{\Gamma}$ is any element such that $gL = L_*$.

Note that the above definition does not depend on the choice of $g \in \tilde{\Gamma}$ such that $gL = L_*$: if g' is another element of $\tilde{\Gamma}$ such that $g'L = L_*$, it follows that $g'g^{-1}$ belongs to the stabiliser of L_* in $\tilde{\Gamma}$, which is the group $\Gamma_0(N)$. The claim then follows from the $\Gamma_0(N)$-invariance of Φ_{f_∞}, stated in part 1 of Proposition 6.1.

The system of distributions $\mu_L\{r \to s\}$ satisfies similar properties to those of the system μ_L introduced in section 4. Since the proofs of these new properties are analogous to those presented in section 4, details are usually omitted.

Lemma 6.3. — *Let $\kappa \in U(K)$, $L_2 \subset L_1$ be $\mathbb{Z}_p$-lattices in $\mathbb{Q}_p^2$ with $[L_1 : L_2] = p$, and let $e = ([L_1], [L_2]) \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$ be the corresponding edge. Then*
$$\mu_{L_2}\{r \to s\}|_{W_e} = a_p\mu_{L_1}\{r \to s\}|_{W_e},$$

so that

$$\int_{W_e} F(x,y)\mu_{L_2}\{r\to s\}(x,y) = \int_{W_e} F(x,y)(a_p\mu_{L_1}\{r\to s\})(x,y),$$

for every locally analytic function $F \in \mathscr{A}^{(\kappa)}(W)$.

Proof. — The proof is identical to that of lemma 4.3. □

Let π be as before the projection of W onto $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. For every $\mathbb{Z}_p$-lattice $L \subset \mathbb{Q}_p^2$, define a locally analytic distribution $\pi_*(\mu_L\{r\to s\})$ on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ by the formula

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} P(t)\pi_*(\mu_L\{r\to s\})(t) = |L|^{-k_0/2}\int_W \eta^{k_0}P(x/y)\mu_L\{r\to s\}(x,y),$$

where P is any locally meromorphic function on $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ with a pole of order at most k_0 at ∞.

Proposition 6.4. — *For all* $\mathbb{Z}_p$*-lattices* L *in* $\mathbb{Q}_p^2$,

$$\pi_*(\mu_L\{r\to s\}) = \mu_f\{r\to s\},$$

where μ_f *is the locally analytic distribution on* $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ *defined in section 5.*

Proof. — The proof is similar to that of Proposition 4.4. It uses lemma 6.3 instead of lemma 4.3, and part 3 of Proposition 6.1, which guarantees that the specialisation at k_0 of Φ_{f_∞} is the modular symbol attached to f. □

Let $\tau \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$ and let $v_\tau = [L_\tau] \in \mathscr{T}_0$ be the vertex corresponding to τ under the reduction map. The following definition is modelled on that of the indefinite integral of Definition 4.8:

Definition 6.5. — For all $P \in \mathscr{P}_{k_0}$, the *indefinite integral* attached to $\tau \in \mathscr{H}_p$, to $r,s \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, and to f is defined by the formula

$$\int_r^s \omega_f P \ = |L_\tau|^{-k_0/2}\int_W \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_\tau}\{r\to s\}(x,y). \tag{30}$$

Since

$$\log(px-p\tau y)\tilde{P}(px,py) = p^{k_0}\log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y),$$

formula (30) depends only on the homothety class of L_τ, and hence only on τ. The main properties of the indefinite double integral of Definition 6.5 are summarized in the following two propositions.

Proposition 6.6. — *For all* $\gamma \in \Gamma$ *and* $P \in \mathscr{P}_{k_0}$,

$$\int_{\gamma r}^{\gamma s}\omega_f P = \int_r^s \omega_f P\ \gamma.$$

Proof. — It is identical to the proof of Proposition 4.9. □

Proposition 6.7. — *Let $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$, and let $v_1 = [L_1], v_2 = [L_2] \in \mathscr{T}_0$ be the corresponding vertices under the reduction map. For all $P \in \mathscr{P}_{k_0}$,*

$$\begin{aligned}&\int_r^{\tau_2}\int_r^s \omega_f P - \int_r^{\tau_1}\int_r^s \omega_f P \\ &\quad = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_r^s \omega_f P + 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0) \sum_{e:v_1\to v_2} c_f\{r\to s\}(e)(P).\end{aligned}$$

Proof. — Assume without loss of generality that $L_2 \subset L_1$ and $[L_1 : L_2] = p$. Set $e = ([L_1], [L_2]) \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$. Then

$$\begin{aligned}&\int_r^{\tau_2}\int_r^s \omega_f P - \int_r^{\tau_1}\int_r^s \omega_f P \\ &\qquad = |L_2|^{-k_0/2}\int_W \log(x-\tau_2 y)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_2}\{r\to s\}(x,y) \\ &\qquad\quad - |L_1|^{-k_0/2}\int_W \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_1}\{r\to s\}(x,y) \\ &\qquad = I_{\log} + I_{\mathrm{ord}},\end{aligned}$$

where

$$I_{\log} = |L_2|^{-k_0/2}\int_W \log\left(\frac{x-\tau_2 y}{x-\tau_1 y}\right)\tilde{P}(x,y)\mu_{L_2}\{r\to s\}(x,y),$$

and

$$I_{\mathrm{ord}} = \int_W \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left(|L_2|^{-k_0/2}\mu_{L_2}\{r\to s\} - |L_1|^{-k_0/2}\mu_{L_1}\{r\to s\}\right).$$

Using Proposition 6.4, and the fact that the function involved in the integral defining $I_{\log}$ is constant along the fibers of π, one finds that

$$I_{\log} = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \log\left(\frac{t-\tau_2}{t-\tau_1}\right)P(t)\mu_f\{r\to s\}(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_r^s \omega_f P.$$

Now, write the integral defining I_{ord} as the sum of two contributions J_e and $J_{\bar{e}}$, obtained by integrating over the disjoint subsets W_e and $W_{\bar{e}}$. By Lemma 6.3,

$$\begin{aligned}J_e &= \int_{W_e} \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left(|L_2|^{-k_0/2}\mu_{L_2} - |L_1|^{-k_0/2}\mu_{L_1}\right)\{r\to s\}(x,y) \\ &= \int_{W_e} \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left(|L_2|^{-k_0/2}a_p - |L_1|^{-k_0/2}\right)\mu_{L_1}\{r\to s\}(x,y) \\ &= |L_1|^{-k_0/2}\int_{W_e} \log(x-\tau_1 y)\tilde{P}(x,y)\left((p^{-k_0/2}a_p - 1)\mu_{L_1}\{r\to s\}\right)(x,y).\end{aligned}$$

The formula

$$\int_{W_e} \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)(\alpha\mu_L\{r\to s\})(x,y) = \tag{31}$$

$$\alpha'(k_0)|L|^{k_0/2}c_f\{r\to s\}(e)(P) + \alpha(k_0)\int_{W_e} \log(x-\tau y)\tilde{P}(x,y)\mu_L\{r\to s\}(x,y)$$

($e \in \mathscr{E}(\mathscr{T})$, $\alpha \in A(U)$, $\tau \in \mathscr{H}_p$, and $P \in \mathscr{P}_{k_0}$) is obtained by adapting the approach that is followed in the proof of lemma 4.11. By applying (31) with $\alpha = p^{-k_0/2}a_p - 1$, the above expression for J_e becomes

$$J_e = p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_f\{r \to s\}(e)(P).$$

Moreover, a similar argument proves that

$$J_{\bar{e}} = -p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_f\{r \to s\}(\bar{e})(P) = p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_f\{r \to s\}(e)(P).$$

Hence,

$$J_{\mathrm{ord}} = J_e + J_{\bar{e}} = 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0)c_f\{r \to s\}(e)(P),$$

as was to be shown. □

We are now ready to prove the main result of this section.

Theorem 6.8. — *The equality*

$$-2p^{-k_0/2}a_p'(k_0) = \mathscr{L}_O(f)$$

holds. In particular, Orton's $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}_O(f)$ is independent of the choice of sign w_∞ that was made in defining it.

Proof. — Let τ be a point in $\mathscr{H}_p(\mathbb{Q}_p^{ur})$, and let $v_\tau = [L_\tau] \in \mathscr{T}_0$ be the corresponding vertex. Fix a divisor $(s)-(r)$ in Δ. Given $\tau \in \mathscr{H}_p$, one defines an $\mathscr{P}_{k_0}^\vee$-valued modular symbol h_τ by the rule

$$h_\tau\{r \to s\}(P) = \int_r^s \int^\tau \omega_f P.$$

Proposition 6.7 gives

$$h_\tau\{\gamma^{-1}r \to \gamma^{-1}s\}(\gamma^{-1}P) - h_\tau\{r \to s\}(P) = h_{\gamma\tau}\{r \to s\}(P) - h_\tau\{r \to s\}(P)$$

$$= \int_\tau^{\gamma\tau}\int_r^s \omega_f P + 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0) \sum_{e : v_\tau \to \gamma(v_\tau)} c_f\{r \to s\}(e)(P), \tag{32}$$

for all $\gamma \in \Gamma$. In the notations of Definition 5.2 of Section 5, this relation can be rewritten as

$$h_\tau\{\gamma^{-1}r \to \gamma^{-1}s\}(\gamma^{-1}P) - h_\tau\{r \to s\}(P)$$

$$= \kappa_f^{\log}(\gamma)\{r \to s\} + 2p^{-k_0/2}a_p'(k_0)\kappa_f^{\mathrm{ord}}(\gamma)\{r \to s\}. \tag{33}$$

Since the expression on the left of (33) is a $\mathscr{M}_{k_0}$-valued one-coboundary, it follows upon projecting this equation to $H^1(\Gamma, \mathscr{M}_{k_0})$ that

$$[\kappa_f^{\log}] = -2p^{-k_0/2}a_p'(k_0)[\kappa_f^{\mathrm{ord}}].$$

Theorem 6.8 is now a direct consequence of Definition 5.5 of $\mathscr{L}_O(f)$. □

Corollary 6.9. —

1. *The equality $\mathscr{L}_T(f) = \mathscr{L}_0(f)$ holds.*

2. *For all Dirichlet characters χ satisfying $\chi(p) = 1$,*

$$L_p'(f, \chi, 1 + k_0/2) = \mathscr{L}_T(f) L^*(f, \chi, 1 + k_0/2).$$

Proof. — Part 1 follows by combining theorem 6.8 with theorem 4.12. Part 2 follows by combining part 1 of this corollary with theorem 5.7. □

References

[1] M. Bertolini & H. Darmon – "Hida families and rational points on elliptic curves", *Invent. Math.* **168** (2007), p. 371–431.

[2] C. Breuil – "Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée", this volume.

[3] K. Buzzard – "On p-adic families of automorphic forms", in *Modular curves and abelian varieties*, Progr. Math., vol. 224, Birkhäuser, 2004, p. 23–44.

[4] G. Chenevier – "Une correspondance de Jacquet-Langlands p-adique", *Duke Math. J.* **126** (2005), p. 161–194.

[5] R. F. Coleman – "A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms", in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[6] ———, "p-adic Banach spaces and families of modular forms", *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[7] R. F. Coleman & A. Iovita – "Revealing hidden structures", preprint, 2003.

[8] P. Colmez – "La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique", *Astérisque* **294** (2004), p. 251–319.

[9] ———, "Zéros supplémentaires de fonctions L p-adiques de formes modulaires", in *Algebra and number theory*, Hindustan Book Agency, 2005, p. 193–210.

[10] ———, "Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2", preprint `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`.

[11] ———, "Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius", this volume.

[12] H. Darmon – "Integration on $\mathscr{H}_p \times \mathscr{H}$ and arithmetic applications", *Ann. of Math.* **154** (2001), p. 589–639.

[13] ———, *Rational points on modular elliptic curves*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 101, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2004.

[14] M. Emerton – "p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups", *Duke Math. J.* **130** (2005), p. 353–392.

[15] R. Greenberg & G. Stevens – "p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms", *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.

[16] A. Iovita & M. Spiess – "Derivatives of p-adic L-functions, Heegner cycles and monodromy modules attached to modular forms", *Invent. Math.* **154** (2003), p. 333–384.

[17] B. Mazur – "On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory", in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 1–20.

[18] B. Mazur, J. Tate & J. T. Teitelbaum – "On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer", *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[19] L. Orton – "An elementary proof of a weak exceptional zero conjecture", *Canad. J. Math.* **56** (2004), p. 373–405.

[20] J-P. Serre – "Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques", *Publ. Math. I.H.É.S.* **12** (1962), p. 69–85.

[21] ———, *Trees*, Springer Monographs in Math., Springer, 2003.
[22] G. Stevens – "Notes for a course on the Mazur-Tate-Teitelbaum conjecture", 1998.
[23] J. T. Teitelbaum – "Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel", *Invent. Math.* **101** (1990), p. 395–410.

M. Bertolini, Dipartimento di Matematica Università di Milano, Via Cesare Saldini 50, 20133 Milano, Italy
H. Darmon, Burnside Hall, Room 1111, University McGill, 845 Sherbrooke St. W. H3A 2T5 Montréal, Canada
A. Iovita, Concordia University Dept. Mathematics & Statistics, 1455 Maisonneuve West, H3G1M8 Montréal, Canada

Astérisque
331, 2010, p. 65–115

SÉRIE SPÉCIALE p-ADIQUE ET COHOMOLOGIE ÉTALE COMPLÉTÉE

par

Christophe Breuil

Résumé. — Soit f une forme modulaire parabolique nouvelle de poids $k \geq 2$ sur $\Gamma_0(Np)$ avec $(N,p) = 1$ vecteur propre des opérateurs de Hecke. Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}$ contenant les valeurs propres. Si $k > 2$, on montre que l'adhérence de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ dans le complété p-adique $\varprojlim_n \varinjlim_r H^1(Y(Np^r),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes E$ détermine l'invariant $\mathscr{L}$ de f, c'est-à-dire la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de la représentation galoisienne p-adique associée à f. En utilisant des résultats de Colmez, on donne une description explicite de ce qu'est cette adhérence. Le cas $k = 2$ se comporte différemment, mais on montre comment on peut encore retrouver l'invariant $\mathscr{L}$, du point de vue $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$, dans le complété p-adique précédent.

***Abstract* (Special p-adic series and completed étale cohomology).** — Let f be a new modular parabolic form of weight $k \geq 2$ on $\Gamma_0(Np)$ with the eigenvector of Hecke operators $(N,p) = 1$. Let E be a finite extension of $\mathbf{Q}$ containing the eigenvalues. If $k > 2$, we show that the closure of the representation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f)$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ in the p-adic completion $\varprojlim_n \varinjlim_r H^1(Y(Np^r),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes E$ gives the invariant $\mathscr{L}$ of f, that is the restriction of the p-adice Galois representation of f to $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. By using Colmez's results we give an explicit description of this closure. The case $k = 2$ behaves differently, but we show how one can still find the invariant $\mathscr{L}$ from the $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ view point, in the previous p-adic completion.

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier, f une forme modulaire parabolique de poids 2 sur $\Gamma_1(M)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et $\sigma(f)$ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée. La composante automorphe locale $\pi_p(f)$ se réalise dans la représentation lisse $\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r),\mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour E extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ (il s'agit ici de la cohomologie de Betti à support compact). On sait que $\pi_p(f)$, en général, ne détermine pas $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F.
Mots clefs. — Série spéciale p-adique, correspondance de Langlands p-adique; cohomologie étale complétée.

© Astérisque 331, SMF 2010

mais seulement la représentation de Weil-Deligne associée. Il est donc naturel de se demander où est l'information qui manque, côté théorie des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, pour reconstruire cette représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

Considérons le $\mathbb{Z}_p$-module ([**17**]) :

$$\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \left(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \right)$$

qui s'identifie au complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y(Mp^r), \mathbb{Z}_p)$. L'espace $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ est un Banach p-adique muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Notons $\widehat{\pi}_p(f)$ l'*adhérence* de $\pi_p(f)$ dans ce Banach, c'est-à-dire le complété p-adique de $\pi_p(f)$ par rapport au $\mathscr{O}_E$-réseau $\pi_p(f) \cap (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes \mathscr{O}_E)$. C'est aussi un Banach p-adique avec action unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Faisons l'hypothèse que la représentation galoisienne p-adique $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est absolument irréductible. L'espoir de l'auteur est alors que, dans ce cas, $\widehat{\pi}_p(f)$ *détermine* la représentation $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ et *ne* dépend *que* d'elle. Autrement dit, l'auteur espère que la complétion $\widehat{\pi}_p(f)$ de $\pi_p(f)$ contient exactement l'information qui manque à $\pi_p(f)$ pour reconstruire $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ lorsque cette dernière est irréductible.

Plus généralement, lorsque f est de poids $k \geq 2$, on peut encore plonger la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ et considérer de même son adhérence $\widehat{\pi}_p(f)$. Comme précédemment, l'auteur espère que $\widehat{\pi}_p(f)$ détermine la représentation $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ lorsque cette dernière est irréductible et ne dépend que d'elle (voir [**16**]). Si cet espoir correspond à une réalité, il doit alors être possible de construire les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ de manière *purement locale* comme spéculé dans [**4**], §1.3[(1)].

Lorsque $\sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ n'est pas irréductible, $\widehat{\pi}_p(f)$ en général ne suffit pas à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$, mais $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes E$ contient alors un Banach plus gros que $\widehat{\pi}_p(f)$ et qui, lui, détermine $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (voir [**6**] et le cas $k = 2$ du présent article).

Considérons d'abord le cas où $\pi_p(f)$ est une série principale. Il se trouve que dans ce cas $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ *suffit* déjà à déterminer $\sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (lorsque celle-ci est irréductible). On peut alors montrer (au moins si la représentation de Weil-Deligne associée à $\sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est bien F-semi-simple comme il est conjecturé) que le Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ est alors simplement le complété p-adique de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par rapport à un quelconque $\mathscr{O}_E$-réseau de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ de *type fini* sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (de tels réseaux existent bien par les résultats de [**34**] et [**20**], cf. [**4**]). En fait, le réseau induit sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}} \otimes \mathscr{O}_E$ est nécessairement commensurable à un réseau de type fini sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ([**5**], Cor.5.3.4). Ceci n'est pas vrai lorsque $\pi_p(f)$ n'est pas une série principale.

Dans cet article, on s'intéresse au cas immédiatement après, c'est-à-dire celui où $\pi_p(f)$ est, à torsion non ramifiée près, la représentation de Steinberg. Lorsque $k > 2$,

(1) Voir sur ces questions [**18**].

$\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ est alors toujours absolument irréductible. Ce cas représente un bon test pour l'« espoir » ci-dessus car $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ ne suffit plus à déterminer $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$: il manque l'invariant $\mathscr{L}(f)$ de la forme f qui est le paramètre de la filtration de Hodge sur le module de Dieudonné-Fontaine filtré associé à f (voir **[9]**, **[21]** et **[13]** pour une comparaison des différentes définitions de $\mathscr{L}(f)$). L'objectif de cet article est de montrer que $\widehat{\pi}_p(f)$ détermine exactement l'invariant $\mathscr{L}(f)$. Lorsque $k = 2$, $\sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ (qui est dans ce cas réductible) n'est plus déterminé par $\widehat{\pi}_p(f)$ mais on montre que $\widehat{H}^1_c \otimes E$ contient un Banach topologiquement réductible de longueur 2 avec $\widehat{\pi}_p(f)$ en unique sous-objet et qui, lui, détermine $\mathscr{L}(f)$ et ne dépend que de $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$.

On donne plus en détails maintenant les résultats principaux de l'article.

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et notons $B(k)$ le Banach obtenu en complétant $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E$ Steinberg par rapport à un quelconque $\mathscr{O}_E$-réseau de type fini sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (où $|\cdot|$ est la norme p-adique). Il est muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-2$ (via la réciprocité locale pour $\mathbb{Q}_p$ convenablement normalisée). Ce Banach admet la description concrète suivante, déduite via **[4]**, §4.6 de résultats de Teitelbaum (cf. §3.2) : c'est le Banach des fonctions $h : \mathbb{Q}_p \to E$ telles que $h(z)\,|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et $z^{k-2}h(1/z)\,|_{\mathbb{Z}_p-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$, quotienté par les polynômes en z de degré au plus $k-2$ (rappelons que, si k est pair pour simplifier, une fonction est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ moralement si elle est $\frac{k-2}{2}$ fois dérivable avec dernière dérivée continue, cf. §3.2 pour le cas général). L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est induite par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(h)(z) = |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}h\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

Dans **[4]**, on a associé à tout entier $k \geq 2$ et tout $\mathscr{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ un Banach p-adique $B(k,\mathscr{L})$ sur E (quitte à agrandir E) muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-2$. La définition est par dualité : si $\log_{\mathscr{L}}$ est la branche du logarithme p-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ telle que $\log_{\mathscr{L}}(p) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{L}$, le dual de $B(k,\mathscr{L})$ est un sous-espace convenable de l'espace des fonctions « $\log_{\mathscr{L}}$-rigides » sur le demi-plan p-adique avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de poids $2-k$ (cf. §3.1). Pour $k=2$, $B(2,\mathscr{L})$ est une extension non scindée $0 \to B(2) \to B(2,\mathscr{L}) \to E \to 0$ dépendant de $\mathscr{L}$. Pour $k>2$, $B(k,\mathscr{L})$ est une complétion p-adique de $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes$ Steinberg dépendant de $\mathscr{L}$ et on a un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant continu $B(k) \to B(k,\mathscr{L})$ d'image dense (en fait surjectif, voir théorème 1.1.1 ci-dessous). On donne dans ce texte une description directe plus concrète des $B(k,\mathscr{L})$ pour $k>2$ (cf. Cor.3.3.4) :

Théorème 1.1.1. — *Si $k>2$, le Banach $B(k,\mathscr{L})$ avec son action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie au quotient du Banach $B(k)$ par l'adhérence du sous-espace vectoriel des fonctions :*

$$h(z)=\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathscr{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i\in E$, $z_i\in\mathbb{Q}_p$, $n_i\in\{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1,\dots,k-2\}$ et $\deg\bigl(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\bigr)<\frac{k-2}{2}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que les $B(2,\mathscr{L})$ (munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sont tous distincts, admissibles au sens de **[27]** et topologiquement de longueur 2. Pour $k>2$, les $B(k,\mathscr{L})$ (munis de leur action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) sont encore tous distincts, admissibles au sens de **[27]** et topologiquement irréductibles, mais la preuve est alors nettement plus délicate et utilise de façon cruciale la théorie des (φ,Γ)-modules (**[10]**, **[12]**), même si quelques résultats partiels peuvent s'obtenir par un calcul géométrique plus direct (**[7]**). Les Banach $B(k,\mathscr{L})$ et leurs tordus par des caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ « correspondent » aux représentations p-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2, de poids de Hodge-Tate $(0,k-1)$ et de déterminant le caractère cyclotomique p-adique à la puissance $k-1$ (à un caractère non ramifié près).

Le résultat principal de ce texte est (cf. Cor.5.1.9) :

Théorème 1.1.2. — *Soit $f=\sum_{n>0}a_ne^{2i\pi nz}$ une forme modulaire parabolique normalisée de poids $k>2$ nouvelle sur $\Gamma_1(M)$ avec $M=Np$ et $(N,p)=1$. On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke et son caractère trivial en p de sorte que $\pi_p(f)=\mathrm{Steinberg}\otimes\mathrm{nr}(a_p^{-1})$ où $\mathrm{nr}(\lambda)(x)\overset{\text{déf}}{=}\lambda^{\mathrm{val}(x)}$ si $x\in\mathbb{Q}_p$. Si E est une extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on a :*

$$\widehat{\pi}_p(f)\simeq B(k,-\mathscr{L}(f))\otimes\mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}).$$

Lorsque $k=2$, on a $\widehat{\pi}_p(f)\simeq B(2)\otimes\mathrm{nr}(a_p^{-1})$ et $-\mathscr{L}(f)$ est la *seule* valeur de $\mathscr{L}$ telle que l'injection $\widehat{\pi}_p(f)\hookrightarrow\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}E$ s'étende en une injection $B(2,\mathscr{L})\otimes\mathrm{nr}(a_p^{-1})\hookrightarrow\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}E$ (voir corollaire 1.1.6 ci-dessous). Le fait que la valeur de $\mathscr{L}$ intervenant dans $\widehat{\pi}_p(f)$ lorsque $k>2$ soit précisément $-\mathscr{L}(f)$ est conséquence des résultats de **[3]** pour k pair et des résultats de **[10]** (voir aussi **[12]**) combinés avec le corollaire 5.2.4 pour $k>2$ (voir §5.1 et aussi **[16]**, Th.7.10.1).

On explique maintenant les étapes de la preuve du théorème 1.1.2.

Soit B un Banach p-adique à coefficients dans une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $B^\vee$ son dual muni de l'action duale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_n\bigl(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(N,p^r),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\bigr)$ où N est premier à p et $Y(N,p^r)=Y(K_1^p(N)K(p^r))$ est la courbe modulaire « associée » au groupe de congruence $\Gamma_1(N)\cap\Gamma(p^r)$ (voir §2.1 et §2.2 pour une définition précise). On exprime pour commencer les espaces $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p}E)$ comme des symboles modulaires (cf. Th.2.4.2) :

Théorème 1.1.3. — *Soit* $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ *le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ *des matrices de déterminant positif congrues à* $\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$ *modulo* N *et* $\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ *le* $\mathbb{Z}$*-module des diviseurs de degré* 0 *de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ *muni de son action naturelle de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. *Soit* $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B^\vee\big)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B^\vee\big)$ *des éléments invariants par* $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ *(agissant sur* $B^\vee$ *et* $\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$*). Il y a un isomorphisme canonique compatible aux opérateurs de Hecke :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B, \widehat{H}^1_c(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p} E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B^\vee\big)$$

où l'action de Hecke sur le membre de gauche provient de celle sur $\widehat{H}^1_c(N)$ *et est donnée sur le membre de droite par l'action des doubles classes en* $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$.

Si V est un E-espace vectoriel sur lequel les opérateurs de Hecke hors Np agissent, notons V^f le sous-espace sur lequel ils agissent par les valeurs propres associées à f. Soit $\Gamma_1^p(N) \subset \widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. On étudie dans un second temps les espaces $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathscr{L})^\vee\big)^f$ pour $\mathscr{L} \in E$. Plus précisément, une certaine involution w_∞ (correspondant grosso-modo à une conjugaison complexe) agit sur ces espaces et on étudie les sous-espaces $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathscr{L})^\vee\big)^{f,\pm}$ sur lesquels elle vaut $\pm$identité. Pour cela, on utilise de façon essentielle les résultats de **[14]** lorsque $k = 2$ et **[25]** lorsque $k > 2$ (étendus aux formes modulaires de caractère non trivial) qui, combinés avec les constructions de **[4]**, permettent d'obtenir (cf. Cor.4.5.3) :

Théorème 1.1.4. — *Soit* f *comme dans le Th.1.1.2 avec* $k \geq 2$. *Il existe un (unique) nombre p-adique* $\mathscr{L}^+(f)$ *(resp.* $\mathscr{L}^-(f)$*) dans* $\overline{\mathbb{Q}_p}$ *tel que, si* E *est une extension finie suffisamment grande de* $\mathbb{Q}_p$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}_p}$*, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathscr{L})^\vee\big)^{f,+} = 0 \quad \text{si} \quad \mathscr{L} \neq -\mathscr{L}^+(f)$$

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathscr{L})^\vee\big)^{f,+} = E \quad \text{si} \quad \mathscr{L} = -\mathscr{L}^+(f)$$

(resp. avec $-$ *au lieu de* $+$*).*

Pour mettre ensembles les théorèmes 1.1.4 et 1.1.3, on voit qu'il faut passer de $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ à $\Gamma_1^p(N)$ (ou l'inverse). On utilise ici l'« involution » d'Atkin-Lehner w_p. À partir de la relation $f|_{W_p} = -a_p f$ pour $W_p \in \widetilde{\Gamma}_1^p(N)\backslash\Gamma_1^p(N)$ tel que $\det(W_p) = p$, on déduit (cf. Prop.5.1.1) :

Proposition 1.1.5. — *Si* $\lambda = p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}$*, l'inclusion naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), (B(k,\mathscr{L})\otimes \mathrm{nr}(\lambda))^\vee\big)^f \subseteq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k,\mathscr{L})^\vee\big)^f$$

est un isomorphisme pour $\mathscr{L} \in E$.

En combinant les théorèmes 1.1.3 et 1.1.4, la proposition 1.1.5 et en utilisant l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{H}^1_c(N)$, on obtient alors (cf. Cor.5.1.2 et Th.5.1.6) :

Corollaire 1.1.6. — *Soit f comme dans le Th.1.1.2 avec $k \geq 2$. On a $\mathscr{L}^+(f) = \mathscr{L}^-(f)$ et, notant $\widetilde{\mathscr{L}}(f)$ cette valeur commune :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathscr{L})\otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p} E)^f\big) = 0 \quad \text{si} \quad \mathscr{L} \neq -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathscr{L})\otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1}), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(N)\otimes_{\mathbb{Z}_p} E)^f\big) \simeq E^2 \quad \text{si} \quad \mathscr{L} = -\widetilde{\mathscr{L}}(f).$$

Du corollaire 1.1.6 et des résultats de Colmez ([**10**], [**12**]) sur l'irréductibilité et l'admissibilité des Banach $B(k,\mathscr{L})$, il est facile de déduire $\widehat{\pi}_p(f) \simeq B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))\otimes \mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1})$ pour $k>2$. L'identification $\widetilde{\mathscr{L}}(f) = \mathscr{L}(f)$ n'est pas due à l'auteur (comme déjà signalé) et est conséquence des résultats de [**3**] et [**10**]. L'énoncé du corollaire 1.1.6 est encore valable en remplaçant $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}$ par $\widehat{H}^1$ (cohomologie usuelle sans support).

Dans [**22**] sont associées à une forme f comme dans le théorème 1.1.2 des distributions p-adiques sur $\mathbb{Z}_p^\times$ dépendant (outre de f) d'un entier c premier à p, d'un élément $\nu \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$ et du choix d'une période complexe $\Omega_f^{\pm}$ (que l'on oublie ici mais voir §4.1). On les note $\mu_{f,c,\nu}$. Il est facile de les prolonger de $\mathbb{Z}_p^\times$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ de façon à les voir comme éléments du dual $B(k)^\vee$ (cf. §5.2). Une relecture des résultats de [**14**] et [**25**] montre qu'elles peuvent alors s'obtenir par « spécialisations » à partir des éléments de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}\big(\mathrm{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})), B(k)^\vee\big)^f$ (cf. Prop.5.2.2). Ceci combiné avec les résultats précédents entraîne (cf. Cor.5.2.5) :

Corollaire 1.1.7. — *Soit f comme dans le théorème 1.1.2 avec $k>2$. Pour tout $c\in\mathbb{Z}$ tel que $(c,p)=1$ et tout $\nu\in(\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times$, on a :*

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu_{f,c,\nu}(z) = 0$$

pour toute fonction $h:\mathbb{Q}_p\to E$ de la forme :

$$h(z) = \sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{-\mathscr{L}(f)}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i\in E$, $z_i\in\mathbb{Q}_p$, $n_i\in\{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1,\dots,k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

L'article est organisé comme suit. Dans la partie 2, on définit les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$, on vérifie qu'ils ne dépendent d'aucun choix et on montre le théorème 1.1.3 (la vérification de la compatibilité à Hecke étant un peu fastidieuse). Dans la partie 3, on rappelle les définitions des Banach $B(k)$, $B(k,\mathscr{L})$ et de leur duaux et on montre le théorème 1.1.1. Dans la partie 4, après quelques rappels classiques, on introduit ce dont on a besoin du formalisme de Darmon-Orton et on l'utilise pour montrer le théorème 1.1.4. Dans la partie 5, on combine les résultats des parties précédentes pour montrer la proposition 1.1.5, le corollaire 1.1.6 et le corollaire 1.1.7, puis avec les résultats de [**10**] et [**12**], le théorème 1.1.2.

Remerciements. — Pour des discussions avant et pendant la rédaction de cet article, ou pour leurs réponses à mes questions, je remercie K. Buzzard, G. Chenevier, L. Clozel, M. Emerton, L. Fargues, A. Genestier, A. Iovita, L. Merel, L. Orton, J. Nekovář, J.-P. Serre et G. Stevens. Je suis particulièrement reconnaissant à A. Genestier pour d'innombrables échanges de points de vue et à A. Iovita et G. Stevens pour m'avoir signalé la référence **[25]**. Pour leur soutien mathématique et/ou psychologique, je remercie M. Harris, L. Lafforgue, A. Mézard et M.-F. Vignéras.

1.2. Notations. — On note $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$ la complétion p-adique de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On fixe des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. On note $\sqrt{p}$ la racine carrée positive de p (pour le premier plongement). Pour $x \in \mathbb{C}_p$, $\mathrm{val}(x) \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$ et $|x| \overset{\text{déf}}{=} p^{-\mathrm{val}(x)} \in \mathbb{R}^+$. On note $\widehat{\mathbb{Z}} \overset{\text{déf}}{=} \prod_\ell \mathbb{Z}_\ell$ le complété profini de $\mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}}^p \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathbb{A}^p_{\mathbb{Q},f} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\mathbb{Z}}^p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f} \times \mathbb{R}^\times$.

Pour $\mathscr{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $\log_{\mathscr{L}} : \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p$ l'unique fonction telle que $\log_{\mathscr{L}}(xy) = \log_{\mathscr{L}}(x) + \log_{\mathscr{L}}(y)$, $\log_{\mathscr{L}}(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ si $|x| < 1$ et $\log_{\mathscr{L}}(p) = \mathscr{L}$.

Un sous-groupe ouvert compact K (resp. K^p) de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ (resp. $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$) sera toujours supposé de la forme $K = \prod_\ell K_\ell$ (resp. $K^p = \prod_\ell K^p_\ell$) où K_ℓ (resp. K^p_ℓ) est un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ (qui lui est égal pour presque tout ℓ). On note $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des matrices triangulaires supérieures et $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ des matrices triangulaires supérieures modulo p.

On pose $\Omega \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ et on fait agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à gauche sur Ω par $z \mapsto gz \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $z \in \Omega$.

On normalise l'application de réciprocité du corps de classes local en envoyant les Frobenius arithmétiques sur l'inverse des uniformisantes. On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et on remarque que, via la réciprocité locale en p, $\varepsilon(x) = x\,|x|$ si $x \in \mathbb{Q}_p^\times$.

On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ les matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ de déterminant positif et $\mathscr{H}$ le demi-plan de Poincaré complexe avec action à gauche usuelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ ($z \mapsto gz \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+b}{cz+d}$ si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$). Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on fait agir à droite les matrices $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ sur les fonctions $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ par la formule :

$$(f|_g)(z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\det(g)^{k-1}}{(cz+d)^k} f(gz).$$

Si $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ est une forme modulaire holomorphe de poids $k \geq 2$ nouvelle pour un groupe de congruence $\Gamma_1(M)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et si E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ dont l'anneau des entiers $\mathscr{O}_E$ contient les valeurs propres associées, on note $\sigma(f) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_E)$ la représentation p-adique

semi-simple associée à f par Deligne. Son déterminant est $\varepsilon^{k-1}\chi$ si χ est le caractère de f. Elle est absolument irréductible si f est parabolique. On note $\pi_p(f)$ la composante locale en p de la représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ associée à f. C'est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central $|\ |^{k-2}\chi_p$ où χ_p est la composante locale en p de χ vu comme caractère de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^{\times}$.

Si E est une extension finie quelconque de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note indifféremment St la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E. Elle s'identifie au E-espace vectoriel des fonctions localement constantes $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \to E$ muni de l'action à gauche $(g(f))(z) \overset{\text{déf}}{=} f(\frac{dz-b}{-cz+a})$ (où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) quotienté par le sous-espace invariant des fonctions constantes.

Si A est un anneau (commutatif unitaire), on note $\mathrm{Sym}^{k-2}A^2$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(A)$ de plus haut poids $(0, k-2)$. Elle s'identifie aux polynômes $\oplus_{0\leq j\leq k-2} AT^j$ munis de l'action à gauche $(g(P))(T) \overset{\text{déf}}{=} (-cT+a)^{k-2}P(\frac{dT-b}{-cT+a})$ où $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(A)$ et $P \in \mathrm{Sym}^{k-2}A^2$. Lorsque A est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}A^2$ la représentation $|\det|^{\frac{k-2}{2}} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}A^2$.

Si V est un espace vectoriel topologique sur un corps E muni d'une action à gauche E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus, on note $V^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_E(V, E)$ le dual continu que l'on munit de l'action à gauche $(g(f))(v) \overset{\text{déf}}{=} f(g^{-1}(v))$ où $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $f \in \mathrm{Hom}_E(V, E)$.

On fait agir $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ à gauche sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ via $g(x, y) \overset{\text{déf}}{=} (ax + by, cx + dy)$ si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On note D_0 le $\mathbb{Z}$-module des diviseurs de degré 0 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ muni de l'action à gauche induite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Pour tout $\mathbb{Z}$-module M, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)$ est le $\mathbb{Z}$-module des applications $\mathbb{Z}$-linéaires de D_0 dans M. Si M est muni d'une action à gauche $\mathbb{Z}$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, on munit le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)$ d'une action à gauche $\mathbb{Z}$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ par :

$$g(\phi)(\{r_2\} - \{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} g\big(\phi(\{g^{-1}r_2\} - \{g^{-1}r_1\})\big)$$

où $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)$ et $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$. Pour tout sous-groupe H de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\mathrm{Hom}_H(D_0, M) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, M)^H$ désigne les invariants sous H.

Si M est un module sur l'anneau des entiers $\mathscr{O}$ d'un corps de nombres muni d'endomorphismes T_ℓ et S_ℓ pour tout nombre premier ℓ sauf un nombre fini et si f est une forme modulaire quelconque telle que, pour tous ces ℓ, on a $T_\ell f = a_\ell f$, $S_\ell f = \alpha_\ell f$ avec $a_\ell, \alpha_\ell \in \mathscr{O}$, on note $M^f \overset{\text{déf}}{=} \{x \in M \ \mid \ T_\ell x = a_\ell x,\ S_\ell x = \alpha_\ell x\}$.

Tous les espaces de Banach B de ce texte sont p-adiques et tels que $\|B\| \subseteq |E|$ où $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne le corps des coefficients qui est toujours une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On appelle $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire un espace de Banach B muni d'une action à gauche E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ telle que les applications $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to B$, $g \mapsto gv$ sont continues pour tout $v \in B$ et telle que, pour un choix de norme $\|\ \|$ sur B, on a $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tout $v \in B$. Un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire est dit admissible (suivant **[27]**, §3) si le Banach dual est de type fini sur $E \otimes_{\mathscr{O}_E} \mathscr{O}_E[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ où

$\mathscr{O}_E[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]] \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim \mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/H]$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes de congruences principaux H de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

2. Cohomologies étales complétées, Banach p-adiques et symboles modulaires

On définit les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$ et on démontre le Th.1.1.3 de l'introduction (Th.2.4.2 ci-dessous). Les définitions et résultats de cette partie sont valables pour toute forme modulaire f parabolique nouvelle de poids $k \geq 2$, niveau $\Gamma_1(M)$ (M entier quelconque) vecteur propre des opérateurs de Hecke.

2.1. Cohomologies étales complétées. — On introduit les espaces de cohomologie étale (ou de Betti) complétés et on en rappelle quelques propriétés.

Pour $K = \prod_\ell K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, on note $Y(K)$ la courbe modulaire algébrique ouverte sur $\mathbb{Q}$ dont les points complexes sont :

$$Y(K)(\mathbb{C}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^\times K$$

Elle a un nombre de composantes connexes géométriques égal au cardinal de $(\mathbb{Q}^+)^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^\times/\det(K)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $H^1(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (resp. $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$) désigne au choix la cohomologie de Betti de l'espace topologique $Y(K)(\mathbb{C})$ ou la cohomologie étale de la variété algébrique $Y(K)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ (resp. les cohomologies à support compact) et $H^1_{\mathrm{par}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ l'image de $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ dans $H^1(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Dans la suite, on écrit $H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ pour désigner l'une quelconque de ces cohomologies. Les $H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ sont munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et d'une action des opérateurs de Hecke KgK pour $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$, ces actions commutant entre elles. Voici nos conventions pour l'action de KgK : on voit $H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}_p)$ dans $\left(\varinjlim_{K'} H^1_*(Y(K'), \mathbb{Z}_p)\right)^K$ et on fait agir $KgK = \amalg_i Kg_i$ par $KgKx \overset{\text{déf}}{=} \sum_i g_i^{-1}(x)$ si $x \in H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq H^1_*(Y(K), \mathbb{Z}_p)/p^n$. On note T_ℓ et S_ℓ pour ℓ tel que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ les opérateurs de Hecke correspondant aux doubles classes $K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}K$ et $K\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}K$ avec $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

Soit maintenant $K^p = \prod_{\ell \neq p} K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$. On pose en suivant les notations de [**17**] :

$$H^1_*(K^p) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r H^1_*(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}_p)$$

$$\widehat{H}^1_*(K^p) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \left(\varinjlim_r H^1_*(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\right) \simeq \varprojlim_n H^1_*(K^p)/p^n H^1_*(K^p)$$

où $K(p^r) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}))$ et où, pour $* = \mathrm{c}$, les applications de transition dans la limite inductive sont les duales des applications traces $H^1(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Les $H^1_*(K^p)$ et $\widehat{H}^1_*(K^p)$

sont des $\mathbb{Z}_p$-modules sans torsion. Les modules $H^1_*(K^p)$ sont munis d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire des T_ℓ, S_ℓ pour $\ell \nmid p$ tel que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ et d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, toutes ces actions commutant entre elles. Les modules $\widehat{H}^1_*(K^p)$ sont munis d'une action $\mathbb{Z}_p$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, T_ℓ, S_ℓ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ces actions commutant entre elles et l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ faisant de $\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire (voir **[17]**, §3.3 pour plus de détails).

Les quatre lemmes qui suivent n'ont rien d'original. Quand on donne leurs preuves, c'est pour la commodité du lecteur.

Lemme 2.1.1. — *On a une surjection $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \twoheadrightarrow \widehat{H}^1(K^p)$ et un isomorphisme $\widehat{H}^1_{\mathrm{par}}(K^p) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1(K^p)$.*

Démonstration. — Pour tout r et tout n, on a une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^c \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\mathrm{ptes}} \to H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{\mathrm{ptes}} \to (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^c \to 0$$

où c est le nombre de composantes connexes géométriques de $Y(K^pK(p^r))$. En se rappelant que les pointes de $Y(K^pK(p^{r+1}))$ sont ramifiées avec indice de ramification p au-dessus des pointes de $Y(K^pK(p^r))$ (**[30]**, p.23), et en utilisant la commutativité des diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) & \to & H^1(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) & \to & H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}), \end{array}$$

un passage à la limite inductive sur (1) donne une surjection :

$$H^1_{\mathrm{c}}(K^p)/p^n H^1_{\mathrm{c}}(K^p) \twoheadrightarrow H^1(K^p)/p^n H^1(K^p).$$

Le résultat s'en déduit par passage à la limite projective, les conditions de Mittag-Leffler étant trivialement satisfaites. □

Lemme 2.1.2. — *Les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires $\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ sont admissibles.*

Démonstration. — Ce lemme est un cas particulier des résultats généraux de **[17]**, mais se déduit aussi directement de **[24]**. Il suffit de regarder $* = \mathrm{c}$ et $* =$ rien par le Lem.2.1.1. L'admissibilité des Banach $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ est démontrée dans **[24]**, §4 (via l'étude de leur dual $\varinjlim H^1(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$). La surjection $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \twoheadrightarrow \widehat{H}^1(K^p)$ entraîne que les Banach $\widehat{H}^1(K^p) \otimes \mathbb{Q}_p$ sont aussi admissibles (cf. **[27]**, §3). □

Lemme 2.1.3. — *Pour tout $r > 1$ et tout n, les applications de transition :*

$$H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^{r+1})), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

sont injectives.

Démonstration. — Par [**1**], Prop. 4.2 et la décomposition de la variété non-connexe $Y(K^pK(p^r))(\mathbb{C})$ en sommes disjointe de quotients de $\mathscr{H}$ par des sous-groupes de congruences $\Gamma_i(r)$ contenus (à conjugaison près) dans $\Gamma(p^r)$, on a :

$$H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \oplus_{i\in I(r)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

De même, $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K^pK(p^{r+1})),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \oplus_{i\in I(r+1)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et l'application de transition est la composée d'injections :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

pour $\Gamma_i(r+1)\subset\Gamma_i(r)$ et d'applications diagonales :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_i(r+1)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{d_i}$$

d'où le résultat. □

Lemme 2.1.4. — *Si f est une forme modulaire parabolique de poids $k\geq 2$ vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ et S_ℓ pour ℓ suffisamment grand et si $\mathscr{O}_E$ est l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant les valeurs propres associées, on a :*

$$(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E)^f \xrightarrow{\sim} (\widehat{H}^1_{\mathrm{par}}(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E)^f \xrightarrow{\sim} (\widehat{H}^1(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E)^f.$$

Démonstration. — En vertu du Lem.2.1.1, il suffit de montrer le premier isomorphisme. Il découle du fait que les noyau et conoyau de la flèche $(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E)^f \to (\widehat{H}^1(K^p)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_E)^f$ sont « Eisenstein », et donc nuls puisque f est parabolique. Pour plus de détails, voir la preuve de [**6**], Prop. 3.2.4 ou de [**16**], Prop. 7.7.13. □

2.2. Les Banach $\widehat{\pi}_p(f)$. — On vérifie que l'adhérence de la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes_E\pi_p(f)$ dans les divers Banach p-adiques cohomologiques dans lesquels elle se plonge naturellement de façon équivariante ne dépend d'aucun choix.

Soit $K^p=\prod_{\ell\neq p}K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ et notons $(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee$ le faisceau localement constant associé pour chaque $r\in\mathbb{N}$ au fibré sur la variété $Y(K^pK(p^r))(\mathbb{C})$:

$$\Big((\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee\times[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\mathbb{R}^\times K^p]\Big)/K(p^r)$$

où $g\in K(p^r)$ agit sur la représentation algébrique $(\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee$ par l'action à gauche de l'image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ de g^{-1} et sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ par la multiplication à droite par g. On note encore $(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee$ le faisceau descendu sur le petit site étale de $Y(K^pK(p^r))_{\overline{\mathbb{Q}}}$ (cf. [**8**], §2.1). Lorsque $r\geq n$, la cohomologie (de Betti ou étale) $H^1_*(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee)$ est isomorphe à $(\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee\otimes H^1_*(Y(K^pK(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ car le fibré est alors trivial d'où un isomorphisme :

$$\varprojlim_n\big(\varinjlim_r H^1_*(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2)^\vee)\big)\simeq(\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p{}^2)^\vee\otimes_{\mathbb{Z}_p}\widehat{H}^1_*(K^p)$$

qui est compatible aux actions de Hecke et Galois (agissant trivialement à droite sur $(\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee$) et à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ si l'on tensorise par $\mathbb{Q}_p$). En composant avec l'application naturelle de $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)$ dans le membre de gauche, en tensorisant par $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2$ et en composant à droite avec l'application d'évaluation :

$$\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2\otimes(\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\otimes\widehat{H}^1_*(K^p)\to\widehat{H}^1_*(K^p),$$

on en déduit une application canonique qui commute aux actions de Hecke, Galois et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$:

$$\Psi:\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2\otimes_{\mathbb{Z}_p}\varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)\longrightarrow\widehat{H}^1_*(K^p).$$

Lemme 2.2.1. — *Le noyau de Ψ est la torsion du membre de gauche.*

Démonstration. — Notons que $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)$ n'a pas de torsion si $k=2$ ou si $*\in\{\mathrm{c},\mathrm{par}\}$ de sorte que l'énoncé dit que Ψ est injectif dans ces cas. Ce lemme est une conséquence de la suite spectrale de **[17]**, §4.3, mais se déduit aussi de **[24]**, §6. En effet, on déduit facilement de *loc.cit.* que pour tout $v\in\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2$ non nul, la flèche :

$$\Psi_v:\varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)\to\widehat{H}^1_*(K^p),x\mapsto\Psi(v\otimes x)$$

est injective modulo torsion. Mais si Ψ n'est pas injectif (modulo torsion), soit $N\leq k-2$ minimal tel que $\Psi(\sum_{i=0}^N T^i\otimes x_i)=0$ avec x_N qui n'est pas de torsion dans $\varinjlim H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p^2)^\vee\big)$ et $N>0$ puisque $\Psi_1=\Psi_{T^0}$ est injectif (modulo torsion). Soit $b\in\mathbb{Z}_p$ de valuation suffisamment grande pour que $\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)x_i=x_i$ pour tout i. Alors :

$$\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\Big(\sum_{i=0}^N T^i\otimes x_i\Big)-\sum_{i=0}^N T^i\otimes x_i=\sum_{i=0}^{N-1}T^i\otimes y_i$$

avec y_{N-1} qui n'est pas de torsion. Donc $\Psi(\sum_{i=0}^{N-1}T^i\otimes y_i)=0$ ce qui contredit la minimalité de N. □

L'application $\Psi\otimes\mathbb{Q}_p$ est donc injective et commute à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Soit maintenant f une forme parabolique normalisée de poids $k\geq 2$ nouvelle pour le groupe de congruence $\Gamma_1(Np^\alpha)$ (N premier à p) et vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ pour $\ell\nmid Np$. On note χ son caractère de sorte que $S_\ell f=\ell^{k-2}\chi(\ell)f$. On fixe une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant les valeurs propres associées et on note $K_1^p(N)\subseteq\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ le sous-groupe ouvert compact :

$$K_1^p(N)\overset{\text{déf}}{=}\prod_{\ell\nmid Np}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\times\prod_{\ell\mid N}K_{1,\ell}(\ell^{n_\ell})\tag{2}$$

où $K_{1,\ell}(\ell^{n_\ell}) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ g_\ell \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell),\ g_\ell \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod \ell^{n_\ell} \right\}$ et $N = \prod_\ell \ell^{n_\ell}$.

On choisit un sous-groupe ouvert compact $K^p \subseteq K_1^p(N)$ et un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)^f$$

où $(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee \overset{\text{déf}}{=} (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathbb{Z}_p{}^2)^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$. Noter que ι est juste le tensorisé par $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$ d'un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de la représentation lisse $\pi_p(f)$ dans $\varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)^f$. En composant ι à droite avec l'injection canonique $\Psi_E \overset{\text{déf}}{=} \Psi \otimes E$, on obtient un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\Psi_E \circ \iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow (\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E)^f \subset \widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E.$$

Définition 2.2.2. — *Pour $*$, K^p et ι comme ci-dessus, on note $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ l'adhérence de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ via l'injection $\Psi_E \circ \iota$.*

En d'autres termes, $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ est le complété p-adique de $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ par rapport au $\mathscr{O}_E$-réseau $(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)) \cap (\Psi_E \circ \iota)^{-1}(\widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E)$. Les $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires.

Proposition 2.2.3. — *Le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ est indépendant des choix de $*$, K^p ou ι et est admissible.*

Démonstration. — L'admissibilité résulte du Lem.2.1.2. Fixons d'abord $*$ et K^p. Soit $\pi^p(f)$ le produit restreint aux places finies hors p des composantes locales de la représentation automorphe associée à f (c'est-à-dire des composantes locales unitaires tordues en chaque place par le caractère norme à la puissance $k/2-1$) que l'on peut réaliser sur E. On a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}\big(\pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee, \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \varinjlim_r H^1_*\big(Y(K^pK(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)\big) \simeq \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$$

où il s'agit à gauche des applications E-linéaires commutant aux actions de Hecke et Galois. Un plongement ι comme ci-dessus revient au choix d'un élément $v \in \pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee$ via $\iota(x) \overset{\text{déf}}{=} x(v)$ si $x \in \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ est vu à gauche comme un homomorphisme. Soit M_v le $\mathscr{O}_E$-réseau de $\pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee$ stable par Hecke et Galois engendré par v. Le $\mathscr{O}_E$-réseau ci-dessus induit par $\Psi_E \circ \iota$ sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$ est l'ensemble des x tels que $\Psi_E(x(v)) \in \widehat{H}^1_*(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E$ ou, de manière équivalente, l'ensemble des x tels que $\Psi_E(x(M_v))$ est « entier ». Or, comme $\pi^p(f)^{K^p} \otimes_E \sigma(f)^\vee$ est un E-espace vectoriel de dimension finie, tous les M_v sont commensurables entre eux, donc aussi tous les réseaux induits par les $\Psi_E \circ \iota$ ce qui entraîne que $\widehat{\pi}_p(f)_{*,K^p,\iota}$ ne dépend pas de ι. Fixons maintenant $* =$ rien, K^p, ι et soit

$K'^p \subseteq K^p$ un autre sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, que l'on peut prendre normal, et $\Psi_E \circ \iota'$ le plongement $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1(K'^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ déduit de $\Psi_E \circ \iota$ par composition avec $\widehat{H}^1(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E \hookrightarrow \widehat{H}^1(K'^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$. Il est facile de voir que cette dernière immersion est fermée (car par exemple $\widehat{H}^1(K^p) \otimes E = (\widehat{H}^1(K'^p) \otimes E)^{K^p}$, cf. [**17**], §3.3), d'où $\widehat{\pi}_p(f)_{K^p,\iota} \xrightarrow{\sim} \widehat{\pi}_p(f)_{K'^p,\iota'}$ et de même avec $* =$ par par le Lem.2.1.1. Enfin, fixons K^p, $\Psi_E \circ \iota : \mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ et notons $\Psi_E \circ \iota'$ le plongement $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f) \hookrightarrow \widehat{H}^1(K^p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ déduit par composition avec la surjection $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K^p) \otimes E \twoheadrightarrow \widehat{H}^1(K^p) \otimes E$ (Lem.2.1.1). On a une application continue d'image dense $\widehat{\pi}_p(f)_{\mathrm{c},K^p,\iota} \to \widehat{\pi}_p(f)_{K^p,\iota}$. La catégorie des Banach admissibles étant abélienne ([**27**], §3), c'est forcément une surjection. Par le Lem.2.1.4, c'est aussi une injection. Ceci achève la preuve. □

On note simplement $\widehat{\pi}_p(f)$ ce Banach ne dépendant que de f. Son caractère central (via la réciprocité locale) est $\varepsilon^{k-2}\chi_p$ où χ_p est la composante en p de $\chi : (\mathbb{Q}^+)^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^\times \to \mathscr{O}_E^\times$. Par ailleurs, on déduit des résultats de [**17**], §4.3 que les vecteurs localement algébriques de $\widehat{\pi}_p(f)$ sont exactement $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes_E \pi_p(f)$.

2.3. Cohomologie et symboles modulaires. — Pour N premier à p, on explicite $H^1_{\mathrm{c}}(Y(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et $\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ avec leurs actions de GL_2 et de Hecke en termes de symboles modulaires (cf. (2) pour $K_1^p(N)$). Tous les résultats sont certainement bien connus, mais faute de références précises, nous donnons des preuves complètes.

Pour n entier ≥ 1, soit I_n le $\mathbb{Z}_p$-module des fonctions localement constantes $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ telles que $f(\gamma g) = \gamma f(g)$ pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. On le munit d'une action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ par translation à droite. Soit $K = \prod_\ell K_\ell$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, on munit I_n^K d'une action $\mathbb{Z}$-linéaire des doubles classes $KgK = \amalg_i Kg_i$ par :

$$KgK\Phi \overset{\text{déf}}{=} \sum_i g_i^{-1}(\Phi)$$

où $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ et $\Phi \in I_n$. Pour ℓ tel que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$, on note T_ℓ (resp. S_ℓ) l'action de la double classe $K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}K$ (resp. $K\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}K$) avec $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$) dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$. Si $K_p = K(p^r)$ pour un entier $r > 0$, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ sur I_n induit une action sur I_n^K via son quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/K_p \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Le lemme suivant est une version adélique d'un cas simple de [**1**], Prop. 4.2 qui suffit pour la suite. Je remercie A. Genestier pour son aide dans sa démonstration.

Lemme 2.3.1. — *Pour K suffisamment petit, on a un isomorphisme canonique compatible aux opérateurs de Hecke KgK :*

$$H^1_c(Y(K),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq I_n^K.$$

Si $K_p = K(p^r)$ pour un entier $r > 0$, cet isomorphisme commute aux actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

Démonstration. — Soit $\mathscr{I}_n$ le $\mathbb{Z}_p$-module des fonctions localement constantes $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ muni de l'action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ par translation à gauche et de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ par translation à droite. Notons $\overline{\mathscr{H}} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, en utilisant que $H^1(\overline{\mathscr{H}},\mathbb{P}^1(\mathbb{Q});\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ (il s'agit de la cohomologie de Betti relative), on a un isomorphisme canonique :

$$H^1\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \overline{\mathscr{H}}, \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q});\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq \mathscr{I}_n \tag{3}$$

compatible à toutes les actions. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ agit librement sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \overline{\mathscr{H}}$ et un examen de la suite spectrale de Hochschild-Serre fournit un isomorphisme canonique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$-équivariant :

$$H^1\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \overline{\mathscr{H}}\big), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\big);\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq I_n.$$

Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \times K$, même pour K suffisamment petit, n'agit pas librement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, mais en remplaçant dans (3) $\overline{\mathscr{H}}$ par $\mathscr{H}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ par un système stable sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ de petits disques (épointés) dans $\mathscr{H}$ contractiles dans $\overline{\mathscr{H}}$ autour de chaque pointe de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ sur lequel $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \times K$ agit librement pour K suffisamment petit (c'est possible), on a un H^1 relatif isomorphe (par excision) à celui de (3) et la suite spectrale de Hochschild-Serre donne encore un isomorphisme :

$$H^1\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \times \overline{\mathscr{H}}\big), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\big);\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq I_n^K.$$

On en déduit le résultat car $H^1(Y(K) \cup \mathrm{ptes},\mathrm{ptes};\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = H^1_c(Y(K),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et car toutes les actions passent par celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$. □

Le Lem.2.3.1 s'applique en particulier pour $K \subseteq K_1^p(N)K(p^r)$ avec $Np^r > 2$.

Pour tout entier $n > 0$ et tout entier $r \geq 0$, on note $\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module des fonctions $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Il est muni de *deux* actions à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (via son quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$) :

$$(g *_1 f)(\cdot) \overset{\text{déf}}{=} f(\cdot g) \quad \text{et} \quad (g *_2 f)(\cdot) \overset{\text{déf}}{=} f(g^{-1}\cdot).$$

Ces deux actions commutent entre elles. Soit $N > 0$ un entier premier à p. On définit :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$

comme le $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module des fonctions $\mathbb{Z}$-linéaires $\phi : D_0 \to \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ telles que $\gamma *_1 \phi(\{r_2\} - \{r_1\}) = \phi(\{\gamma r_2\} - \{\gamma r_1\})$ pour tout $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$ et tout $\gamma \in \Gamma_1(N)$. Il est muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$:

$$(g(\phi))(\{r_2\} - \{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} g *_2 \phi(\{r_2\} - \{r_1\}). \tag{4}$$

On définit de façon strictement analogue $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ avec la même action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$. On munit $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ de l'action des opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ pour $\ell \nmid Np$ suivante :

$$(T_\ell\phi)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1} *_1 \phi(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})$$

$$(S_\ell\phi)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \sigma_\ell^{-1}\begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & \ell^{-1}\end{pmatrix} *_1 \phi(\{\sigma_\ell r_2\}-\{\sigma_\ell r_1\})$$

où les δ_i sont définis par :

$$\Gamma_1(N)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}\Gamma_1(N) = \amalg_i \Gamma_1(N)\delta_i \tag{5}$$

et où $\sigma_\ell \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est tel que $\sigma_\ell \equiv \begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & \ell\end{pmatrix}$ mod. N. Les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ et des T_ℓ, S_ℓ sur $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ commutent entre elles.

On note $H^1_c\big(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)), -\big)$ la cohomologie étale à support compact d'une composante *connexe* géométrique (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) de $Y(K_1^p(N)K(p^r))$ ou la cohomologie de Betti à support compact de ses points complexes. Rappelons que ceux-ci s'identifient à $(\Gamma_1(N)\cap\Gamma(p^r))\backslash\mathscr{H}$.

Lemme 2.3.2. — *Pour tout entier $n>0$ et tout entier $r>1$, on a des isomorphismes canoniques :*

$$H^1_c\big(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$
$$H^1_c\big(Y(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$

qui commutent aux actions de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ pour le premier, de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ et des T_ℓ, S_ℓ pour le deuxième.

Démonstration. — On montre seulement le deuxième isomorphisme avec ses compatibilités, laissant le premier, plus facile, au lecteur. Notons $K \overset{\text{déf}}{=} K_1^p(N)K(p^r) \subseteq K_1(N)$. On définit :

$$\varphi : I_n^K \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$

par $\varphi(\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\})(g) \overset{\text{déf}}{=} \Phi(\widehat{g}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})$ où $\widehat{g}$ est un élément quelconque de $K_1(N)$ dont la composante en p relève g^{-1} modulo p^r. Montrons que $\varphi(\Phi)$ commute bien à $\Gamma_1(N)$. Pour $\{r_2\}-\{r_1\} \in D_0$, $\gamma \in \Gamma_1(N)$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\Phi)(\{\gamma r_2\}-\{\gamma r_1\})(g) &= \Phi(\widehat{g}^{-1})(\{\gamma r_2\}-\{\gamma r_1\}) = \gamma^{-1}(\Phi(\widehat{g}^{-1}))(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \Phi(\gamma^{-1}\widehat{g}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\}) = \Phi((\widehat{g}\gamma)^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \gamma *_1 (\varphi(\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\}))(g).\end{aligned}$$

On définit $\psi : \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) \to I_n^K$ par $\psi(\phi)(g)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \phi(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\})(k_{1,p}^{-1})$ où $g = \gamma k_1$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ K_1(N)$ et $k_{1,p}$ est l'image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ de la composante en p de k_1. On vérifie facilement que ψ est un inverse de φ, de sorte que φ est un isomorphisme. Montrons que φ commute à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$. Soit $g_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ de relevé $\widehat{g}_0$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(g_0(\Phi))(\{r_2\}-\{r_1\})(g) &= \Phi(\widehat{g}^{-1}\widehat{g}_0)(\{r_2\}-\{r_1\}) = \Phi((\widehat{g}_0^{-1}\widehat{g})^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= g_0 *_2 (\varphi(\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\}))(g)\\ &= (g_0(\varphi(\Phi)))(\{r_2\}-\{r_1\})(g).\end{aligned}$$

Montrons que φ commute à T_ℓ :

$$\begin{aligned}\varphi(T_\ell\Phi)(\{r_2\}-\{r_1\})(g) &= \sum_i \Phi(\widehat{g}^{-1}\delta_{i,\ell}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\}) = \sum_i \Phi(\delta_{i,\ell}^{-1}\widehat{g}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \sum_i \delta_i^{-1}(\Phi(\tilde{\delta}_i\widehat{g}^{-1}))(\{r_2\}-\{r_1\})\\ &= \sum_i \Phi((\widehat{g}\delta_{i,p}^{-1})^{-1})(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\})\\ &= \sum_i \delta_i^{-1} *_1 (\varphi(\Phi)(\{\delta_i r_2\}-\{\delta_i r_1\}))(g)\\ &= (T_\ell\varphi(\Phi))(\{r_2\}-\{r_1\})(g)\end{aligned}$$

où $\widehat{g} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ relève g, $\delta_{i,\ell'} = \delta_i$ mais vu dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{\ell'}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ (ℓ' premier quelconque) et $\tilde{\delta}_i \overset{\text{déf}}{=} \delta_i\delta_{i,\ell}^{-1}$. On laisse le cas de S_ℓ en exercice au lecteur. On conclut avec le Lem.2.3.1. □

On munit $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})} 1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ de l'action d'un opérateur supplémentaire w_∞ donnée par :

$$(w_\infty\phi)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \tau *_1 \phi(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\})$$

où τ est un élément quelconque de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap K_1(N)$ de déterminant négatif, par exemple $\tau = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Elle commute à l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ et on vérifie facilement qu'elle commute aussi à l'action des T_ℓ, S_ℓ.

Lemme 2.3.3. — *L'isomorphisme du Lem.2.3.2 transforme l'action de la conjugaison complexe à gauche en l'action de w_∞.*

Démonstration. — Notons $K \overset{\text{déf}}{=} K_1^p(N)K(p^r)$. En termes adéliques, la conjugaison complexe agit sur $Y(K)(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})/K \times \mathscr{H}\big)$ par :

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+(gK, z) \mapsto \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+(\tau gK, \tau\overline{z})$$

de sorte qu'elle agit sur $H_c^1(Y(K), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq I_n^K$ (Lem.2.3.1) en envoyant Φ sur Φ^τ défini par :

$$\Phi^\tau(g)(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \Phi(\tau g)(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\}).$$

Par l'isomorphisme φ de la preuve du Lem.2.3.2, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\Phi^\tau)(\{r_2\}-\{r_1\})(g) &= \Phi^\tau(\widehat{g}^{-1})(\{r_2\}-\{r_1\}) = \Phi(\tau\widehat{g}^{-1})(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\})\\ &= \Phi((\widehat{g}\tau)^{-1})(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\}) = \varphi(\Phi)(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\})(g\tau)\\ &= \tau *_1 (\varphi(\Phi)(\{\tau r_2\}-\{\tau r_1\}))(g)\\ &= (w_\infty\varphi(\Phi))(\{r_2\}-\{r_1\})(g).\end{aligned}$$

□

Soit $\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$) le $\mathbb{Z}_p$-module des fonctions continues de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ (resp. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$) dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et définissons comme précédemment $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$) muni de l'action (4) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et des mêmes actions de Hecke (resp. de l'action (4) de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$).

Lemme 2.3.4. — *On a des isomorphismes compatibles à toutes les actions :*

$$\varinjlim_r \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$
$$\varinjlim_r \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$$

Démonstration. — Cela résulte du fait que D_0 est un $\mathbb{Z}[\Gamma_1(N)]$-module de type fini. Voir le Lem.4.3.1 plus loin. □

Soit $\mathrm{G}_p \overset{\text{déf}}{=} \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \mid \det(g) \in p^{\mathbb{Z}}\}$, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ s'étend en une action lisse de G_p comme suit :

$$(g(\phi))(\{r_2\}-\{r_1\})(h) \overset{\text{déf}}{=} \phi(\{\gamma^{-1}\gamma_h r_2\}-\{\gamma^{-1}\gamma_h r_1\})(1) \tag{6}$$

où $g \in \mathrm{G}_p$, $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)$ via le Lem.2.3.4, γ_h relève h modulo p^r dans $\Gamma_1(N)$ et $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$, $\gamma^{-1}g \in K(p^r)$ via $\mathrm{G}_p = \Gamma_1^p(N)K(p^r)$. Notons que l'on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_p}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\\ F &\mapsto \big(\{r_2\}-\{r_1\} \mapsto F(\{r_2\}-\{r_1\})|_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\big)\end{aligned}$$

où l'induite de gauche désigne les fonctions localement constantes sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ se transformant à gauche selon la représentation induite de G_p avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite.

Proposition 2.3.5. — *Pour tout entier $n > 0$, on a des isomorphismes canoniques compatibles aux actions de G_p (pour le premier), de Hecke (pour le deuxième) et de*

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *(pour le troisième) :*

$$\begin{aligned}\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0,\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\\ \varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0,\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big)\\ &\simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_p}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}\big(D_0,\mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)}1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Vus le Lem.2.3.2, le Lem.2.3.3 et le Lem.2.3.4, il reste seulement à vérifier les compatibilités à G_p et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Celle à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du troisième isomorphisme résulte de celle à G_p du premier. Par [**1**], Prop. 4.2, on a un isomorphisme compatible à G_p :

$$\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y^0(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma(p^r)}(D_0,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

où l'action de G_p sur le membre de droite est

$$(g(\phi))(\{r_2\}-\{r_1\}) \overset{\text{déf}}{=} \phi(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\})$$

($g\in \mathrm{G}_p$, $\gamma\in\Gamma_1^p(N)$ est tel que $\gamma^{-1}g\in K(p^r)$). Par réciprocité de Frobenius, il est facile de vérifier que l'on retrouve (6). □

2.4. Banach p-adiques et symboles modulaires. — Si B est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique unitaire à coefficients dans E et $N\geq 1$ un entier premier à p, on exprime le E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))\otimes E\big)$ en termes de symboles modulaires. On conserve les notations des paragraphes précédents.

Soit $\mathscr{O}_E$ l'anneau des entiers d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, π_E une uniformisante de $\mathscr{O}_E$ et M un $\mathscr{O}_E$-module muni d'une action à gauche $\mathscr{O}_E$-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On note :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M,\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}_p)\otimes\mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E\big)$$

le $\mathscr{O}_E$-module des morphismes $\mathscr{O}_E$-linéaires de M dans la limite inductive de droite commutant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On le munit d'une action de T_ℓ, S_ℓ, w_∞ via leur action sur $\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}(Y(K_1^p(N)K(p^r)),\mathbb{Z}_p)$ (w_∞ correspondant à l'action de la conjugaison complexe). Soit $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\cap K_1^p(N)\subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[1/p])^+$ (matrices de déterminant >0). On munit $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0,M)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,M)^{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}$ d'une action des opérateurs T_ℓ, S_ℓ ($\ell\nmid Np$) et w_∞ par ($\phi\in\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0,M)$) :

$$\begin{aligned}T_\ell\phi &\overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1}(\phi)\\ S_\ell\phi &\overset{\text{déf}}{=} \sigma_\ell^{-1}\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&\ell^{-1}\end{pmatrix}(\phi)\\ w_\infty\phi &\overset{\text{déf}}{=} \tau^{-1}(\phi)\end{aligned}$$

en remarquant que l'on a $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)\begin{pmatrix}1&0\\0&\ell\end{pmatrix}\widetilde{\Gamma}_1^p(N) = \amalg_i \widetilde{\Gamma}_1^p(N)\delta_i$ pour les mêmes δ_i qu'en (5).

Proposition 2.4.1. — *Soit n un entier >0 et M un $\mathscr{O}_E$-module muni d'une action à gauche $\mathscr{O}_E$-linéaire lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On munit $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}(M, \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E)$ de l'action $(g(f))(\cdot) \overset{\text{déf}}{=} f(g^{-1}(\cdot))$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y(K_1^p(N)K(p^r)), \mathbb{Z}_p)\otimes \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}(M, \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E)\big)$$

compatible aux actions des opérateurs T_ℓ, S_ℓ ($\ell \nmid Np$) et w_∞.

Démonstration. — Via la Prop.2.3.5, on est ramené à montrer un isomorphisme canonique compatible à Hecke :

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}\big(M, \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E)\big).$$

Pour F à gauche, on définit $\varphi(F) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}\big(M, \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E)\big)$ par :

$$\varphi(F)(\{r_2\}-\{r_1\})(m) \overset{\text{déf}}{=} F(m)(\{r_2\}-\{r_1\})(1). \tag{7}$$

Montrons que $\varphi(F)$ est fixé par $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. Par la Prop.2.3.5 et une réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_p}\big(M, \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E})\big)$$

et on note encore F l'image de F. Comme F commute à G_p, donc à $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$:

$$\begin{aligned} F(\gamma(m))(\{r_2\}-\{r_1\})(1) &= (\gamma(F(m)))(\{r_2\}-\{r_1\})(1) \\ &\overset{(6)}{=} F(m)(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\})(1) \end{aligned}$$

pour tout $m\in M$, $\{r_2\}-\{r_1\}\in D_0$ et $\gamma\in\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. Par (7), cela veut dire que $\varphi(F)$ est invariant sous $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. Soit $G\in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}\big(M, \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E)\big)$, on définit $\psi(G)\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}\big(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \mathrm{Ind}_1^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} 1_{\mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E})\big)$ par :

$$\begin{aligned} \psi(G)(m)(\{r_2\}-\{r_1\})(h) &\overset{\text{déf}}{=} G(\{r_2\}-\{r_1\})(\gamma_h^{-1}(m)) \\ &= G(\{\gamma_h r_2\}-\{\gamma_h r_1\})(m) \end{aligned} \tag{8}$$

où $\{r_2\}-\{r_1\}\in D_0$, $h\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $m\in M$ et $\gamma_h\in\Gamma_1(N)$ est tel que $h\gamma_h^{-1}\in K(p^r)$ pour $K(p^r)$ fixant m. Comme G commute à $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$, donc à $\Gamma_1(N)$, on voit facilement

que $\psi(G)(m)$ est fixé par $\Gamma_1(N)$. Soit $g \in G_p$, $m \in M$ et $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$, la commutation de $\psi(G)$ à G_p est équivalente par (6) à l'égalité :

$$\psi(G)(g(m))(\{r_2\} - \{r_1\})(h) = \psi(G)(m)(\{\gamma^{-1}\gamma_h r_2\} - \{\gamma^{-1}\gamma_h r_1\})(1)$$

où $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_1^p(N)$, $\gamma^{-1}g \in K(p^r)$ avec r tel que $K(p^r)$ fixe m. Par (8), cela se récrit :

$$G(\{\gamma_h r_2\} - \{\gamma_h r_1\})(\gamma(m)) = G(\{\gamma^{-1}\gamma_h r_2\} - \{\gamma^{-1}\gamma_h r_1\})(m)$$

qui est précisément la commutation de G à $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_1^p(N)$. On vérifie facilement que $G = \varphi(\psi(G))$ et $F = \psi(\varphi(F))$ d'où le fait que φ est un isomorphisme. Reste la commutation de φ aux opérateurs de Hecke. Si F est comme avant, rappelons que $T_\ell F(m)(\{r_2\} - \{r_1\})(g) = \sum_i F(m)(\{\delta_i r_2\} - \{\delta_i r_1\})(g\delta_i^{-1})$ pour tout $m \in M$, $\{r_2\} - \{r_1\} \in D_0$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(T_\ell F)(\{r_2\} - \{r_1\})(m) &= \sum_i F(m)(\{\delta_i r_2\} - \{\delta_i r_1\})(\delta_i^{-1}) \\
&= \sum_i F(\delta_i(m))(\{\delta_i r_2\} - \{\delta_i r_1\})(1) \\
&= \sum_i \varphi(F)(\{\delta_i r_2\} - \{\delta_i r_1\})(\delta_i(m)) \\
&= T_\ell \varphi(F)(\{r_2\} - \{r_1\})(m)
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de la commutation de F à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et les autres des définitions. Les opérateurs S_ℓ et w_∞ se traitent de même. □

Si B_1 et B_2 sont deux $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adiques unitaires (à coefficients dans E), on note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B_1, B_2)$ le E-espace vectoriel des applications continues E-linéaires $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariantes de B_1 dans B_2.

Théorème 2.4.2. — *Soit $N \geq 1$ un entier premier à p, B un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique unitaire à coefficients dans E et $B^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_E(B, E)$ le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire dual. On a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, B^\vee)$$

compatible aux actions des opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ ($\ell \nmid Np$) et w_∞ (où l'action sur le membre de gauche se fait via l'action sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ et sur le membre de droite comme dans la Prop.2.4.1).

Démonstration. — Soit M une boule unité stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans B et $M^\vee \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}(M, \mathscr{O}_E)$ (homomorphismes $\mathscr{O}_E$-linéaires) avec $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agissant comme dans la Prop.2.4.1. Il suffit de montrer que l'on a un isomorphisme compatible aux opérateurs de Hecke :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(M, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_E\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}(D_0, M^\vee).$$

Cela découle de la Prop.2.4.1 avec $M \otimes \mathscr{O}_E/\pi_E^n\mathscr{O}_E$ et un passage à la limite évident sur n dont on laisse les détails au lecteur. □

3. Espaces de distributions, invariant $\mathscr{L}$ et Banach p-adiques

On revient sur les définitions et résultats de [**4**] et on montre le Th.1.1.1 de l'introduction (Cor.3.3.4 ci-dessous).

3.1. Rappels sur les espaces $O(k)^{\mathrm{b}}$, $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ de [4] et les Banach associés. — On rappelle sans preuve l'essentiel des constructions de [**4**], auquel on renvoie le lecteur pour plus de précisions. On fixe un entier $k \geq 2$, une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant $p^{k/2}$ et un nombre $\mathscr{L} \in E$.

On note $C(k,\mathscr{L})$ le E-espace vectoriel des fonctions localement analytiques $h : \mathbb{Q}_p \to E$ qui, pour $|z| \gg 0$, sont de la forme :

$$h(z) = z^{k-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n} - 2P(z)\log_{\mathscr{L}}(z)$$

avec $a_n \in E$ et $P(z) \in E[z]$ de degré au plus $k-2$. On note $C(k) \subset C(k,\mathscr{L})$ le sous-espace des h telles que $P = 0$. On munit $C(k,\mathscr{L})$ et $C(k)$ d'une topologie comme suit. Soit $U = \amalg_{0\leq i\leq s} U_i$ un recouvrement de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ par des ouverts U_i deux à deux disjoints tels que $U_0 \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| > r_0\}$ et $U_i \overset{\text{déf}}{=} \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - z_i| < r_i\}$ pour $1 \leq i \leq s$ avec $r_i \in |E^\times|$ et $z_i \in \mathbb{Q}_p$. On définit $C(k,\mathscr{L})_U \subset C(k,\mathscr{L})$ comme le sous-espace des h telles que :

$$\begin{aligned} h(z)|_{U_i\cap\mathbb{Q}_p} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{i,n}(z-z_i)^n,\ 1 \leq i \leq s \\ h(z)|_{U_0\cap\mathbb{Q}_p} &= z^{k-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{z^n} - 2P(z)\log_{\mathscr{L}}(z) \end{aligned}$$

avec $a_n, a_{i,n} \in E$ et $|a_n|r_0^{-n}$, $|a_{i,n}|r_i^n$ bornés quand $n \to +\infty$, et on pose $C(k)_U \overset{\text{déf}}{=} C(k) \cap C(k,\mathscr{L})_U$. L'espace $C(k)_U$ est un Banach pour la norme :

$$\|h\|_U \overset{\text{déf}}{=} \max\big(\sup_{n\geq 0}|a_n|r_0^{-n}, \max_{1\leq i\leq s}(\sup_{n\geq 0}|a_{i,n}|r_i^n)\big).$$

L'espace $C(k,\mathscr{L})_U$ hérite aussi d'une structure de Banach puisque $C(k)_U$ y est d'indice fini. Si U' est un recouvrement plus fin que U, on a des injections continues $C(k,\mathscr{L})_U \hookrightarrow C(k,\mathscr{L})_{U'}$, $C(k)_U \hookrightarrow C(k)_{U'}$ et, en passant à la limite, des isomorphismes E-linéaires $C(k,\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim C(k,\mathscr{L})_U$, $C(k) \xrightarrow{\sim} \varinjlim C(k)_U$. On munit alors $C(k,\mathscr{L})$ et $C(k)$ de la topologie limite inductive au sens de [**26**] ainsi que d'une action à gauche E-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(h)(z) \overset{\text{déf}}{=} |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}\Big[h\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big) + P\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big)\log_{\mathscr{L}}\Big(\frac{ad-bc}{(-cz+a)^2}\Big)\Big]$$

prolongé par continuité en z tel que $-cz+a=0$. Notons que cette action n'est pas tout-à-fait celle de [**4**], §2.2. Elle préserve le sous-espace de $C(k)$ des polynômes de degré au plus $k-2$ et on note $\Sigma(k,\mathscr{L})$ (resp. $\Sigma(k)$) le quotient de $C(k,\mathscr{L})$ (resp. $C(k)$) par ce sous-espace. Les représentations $C(k,\mathscr{L})$, $C(k)$, $\Sigma(k,\mathscr{L})$ et $\Sigma(k)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sont localement analytiques au sens de [**28**] et on a pour tout $\mathscr{L}$ une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante : $0\to\Sigma(k)\to\Sigma(k,\mathscr{L})\to\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\to 0$. De plus, les vecteurs « localement algébriques » de $\Sigma(k,\mathscr{L})$ et $\Sigma(k)$ s'identifient à la représentation $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St}$ et il n'y a pas d'entrelacements entre les $\Sigma(k,\mathscr{L})$ (et *a fortiori* les $\overline{C(k,\mathscr{L})}$) pour des valeurs distinctes de $\mathscr{L}$.

Les duaux topologiques :

$$O(k,\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} \Sigma(k,\mathscr{L})^\vee\subset C(k,\mathscr{L})^\vee\simeq\varinjlim_U C(k,\mathscr{L})_U^\vee$$

$$O(k) \overset{\text{déf}}{=} \Sigma(k)^\vee\subset C(k)^\vee\simeq\varinjlim_U C(k)_U^\vee$$

sont des espaces de Fréchet. Ce sont par définition des espaces de distributions mais ils admettent aussi une description comme espaces de fonctions. L'espace $O(k)$ s'identifie à l'espace des fonctions rigides analytiques E-rationnelles $H:\Omega\to\mathbb{C}_p$ muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(H)(z)=|ad-bc|^{-\frac{k-2}{2}}\frac{ad-bc}{(-cz+a)^k}H\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

L'espace $O(k,\mathscr{L})$ s'identifie à l'espace des fonctions $H:\Omega\to\mathbb{C}_p$ qui, en restriction à chaque affinoïde $\Omega_U\overset{\text{déf}}{=}\mathbb{C}_p-U\subset\Omega$ pour U comme avant, sont de la forme :

$$H|_{\Omega_U}=H_U+\sum_{i=1}^{s}\sum_{n=0}^{k-2}c_{i,n}z^n\log_{\mathscr{L}}(z-z_i)$$

avec $c_{i,n}\in E$ et H_U rigide analytique E-rationnelle sur Ω_U, muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(H)(z)=|ad-bc|^{-\frac{k-2}{2}}\frac{(-cz+a)^{k-2}}{(ad-bc)^{k-2}}H\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big).$$

On a une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$0\to\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\varepsilon(\det)^{-(k-2)}\to O(k,\mathscr{L})\to O(k)\to 0 \tag{9}$$

où la surjection de droite est la dérivation $(k-1)^{\text{ième}}$ sur les fonctions H. On a aussi une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $O(k)\twoheadrightarrow(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee$.

Fixons U comme avant et une norme sur les Banach duaux $C(k,\mathscr{L})_U^\vee$ et $C(k)_U^\vee$. On note $O(k,\mathscr{L})^U$ (resp. $O(k)^U$) l'ensemble des $H\in O(k,\mathscr{L})$ (resp. des $H\in O(k)$) telles que, pour tout $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'image de $g(H)$ dans $C(k,\mathscr{L})_U^\vee$ (resp. dans $C(k)_U^\vee$) tombe dans la boule unité de $C(k,\mathscr{L})_U^\vee$ (resp. de $C(k)_U^\vee$). Muni de la topologie induite par $O(k,\mathscr{L})$ (resp. $O(k)$), $O(k,\mathscr{L})^U$ (resp. $O(k)^U$) est un

$\mathscr{O}_E$-module compact au sens de [**27**] stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le E-espace vectoriel $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}} \overset{\text{déf}}{=} O(k,\mathscr{L})^U \otimes E \subset O(k,\mathscr{L})$ (resp. $O(k)^{\mathrm{b}} \overset{\text{déf}}{=} O(k)^U \otimes E \subset O(k)$) est indépendant des choix. On le munit de la topologie localement convexe la plus fine rendant continue l'inclusion $O(k,\mathscr{L})^U \subset O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ (resp. $O(k)^U \subset O(k)^{\mathrm{b}}$) (ce n'est plus la topologie induite par $O(k,\mathscr{L})$ ou $O(k)$). On a un morphisme continu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}} \to O(k)^{\mathrm{b}}$ qui est injectif pour $k>2$. Par l'anti-équivalence de [**27**], §2, le dual $(O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}})^\vee$ (resp. $(O(k)^{\mathrm{b}})^\vee$) est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(k,\mathscr{L})$ (resp. $B(k)$) contenant $\Sigma(k,\mathscr{L})$ (resp. $\Sigma(k)$).

Remarque 3.1.1. — La définition de $O(k,\mathscr{L})^U$ et $O(k)^U$ n'est pas exactement celle de [**4**], §4.1 mais donne des modules compacts commensurables, ce qui ne change donc pas $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$, $O(k)^{\mathrm{b}}$ et leur duaux.

Pour tout $k\geq 2$, $B(k)$ s'identifie en tant que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire au complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E \mathrm{St}$ par rapport à un quelconque $\mathscr{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de type fini sur $\mathscr{O}_E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$. Pour $k>2$, $B(k,\mathscr{L})$ s'identifie aussi comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire à un complété de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E \mathrm{St}$ par rapport à un $\mathscr{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si $k=2$, $B(2)$ est admissible et topologiquement irréductible. Si $k>2$, $B(k)$ n'est ni admissible ni topologiquement irréductible. Si $k=2$, $B(2,\mathscr{L})$ est une extension non-scindée $0\to B(2)\to B(2,\mathscr{L})\to E\to 0$ et les $B(2,\mathscr{L})$ sont tous distincts. Si $k>2$, $B(k,\mathscr{L})$ devrait être admissible, topologiquement irréductible et les $B(k,\mathscr{L})$ devraient être tous distincts.

3.2. Une formulation plus concrète de $O(k)^{\mathrm{b}}$ et $B(k)$. — On donne une description explicite de $O(k)^{\mathrm{b}}$ et $B(k)$. On garde les notations du §3.1 et on renvoie à [**11**] pour des preuves détaillées des affirmations des deux paragraphes qui suivent.

Pour $r\in\mathbb{R}^+$, une fonction $h:\mathbb{Z}_p\to E$ est dite uniformément de classe $\mathscr{C}^r$ si, dans la décomposition de Mahler $h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(h)\binom{z}{n}$, les $a_n(h)\in E$ sont tels que $n^r|a_n(h)|\to 0$ dans $\mathbb{R}^+$ quand $n\to+\infty$. L'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ est un Banach pour la norme $\|h\|_r \overset{\text{déf}}{=} \sup_n (n+1)^r \mid a_n(h)\mid$ que l'on note $\mathscr{C}^r(\mathbb{Z}_p,E)$. Si $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,E)$ est le E-espace vectoriel des fonctions localement analytiques de $\mathbb{Z}_p$ dans E avec sa topologie « limite inductive », on a une injection continue $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,E)\hookrightarrow\mathscr{C}^r(\mathbb{Z}_p,E)$ d'image dense.

Une *distribution* μ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans E est un élément du dual continu $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,E)^\vee$. Si $h\in\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,E)$, on note $\int_{\mathbb{Z}_p}h(z)\mu(z)$ l'accouplement et on pose $\int_{D(a,n)}h(z)\mu(z)\overset{\text{déf}}{=}\int_{\mathbb{Z}_p}h(z)\mathbf{1}_{D(a,n)}\mu(z)$ où $\mathbf{1}_{D(a,n)}$ est la fonction caractéristique de $D(a,n)\overset{\text{déf}}{=}a+p^n\mathbb{Z}_p$ ($a\in\mathbb{Z}_p$, $n\in\mathbb{N}$). Pour $r\in\mathbb{R}^+$, μ est dite *tempérée d'ordre* r s'il existe $C_\mu\in E$ tel que, pour tout $j\in\mathbb{N}$, tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $a\in\mathbb{Z}_p$, on a $\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z)\in C_\mu p^{n(j-r)}\mathscr{O}_E$. On peut supposer $0\leq j\leq r$ et $n>\mathrm{val}(a)$ si $a\neq 0$ dans cette condition. L'espace des distributions tempérées d'ordre r est un Banach pour la norme $\|\mu\|_r\overset{\text{déf}}{=}\sup_{j,n,a}p^{n(j-r)}\left|\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z)\right|$ qui s'identifie au

Banach dual $\mathscr{C}^r(\mathbb{Z}_p,E)^\vee \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,E)^\vee$. En particulier, si μ est tempérée d'ordre r, on peut définir $\int_{D(a,n)} h(z)\mu(z)$ pour h seulement uniformément de classe $\mathscr{C}^r$.

On dit qu'une fonction $h:\mathbb{Q}_p\to E$ est uniformément de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ avec un pôle d'ordre au plus $k-2$ à l'infini si $h_1 \overset{\text{déf}}{=} \big(z\mapsto h(pz)\big)|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et si $\big(z\mapsto z^{k-2}h(1/z)\big)\,|_{\mathbb{Z}_p-\{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction h_2 de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$. L'espace de ces fonctions est un Banach $D(k)$ pour la norme $\|h\| \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}(\|h_1\|_{\frac{k-2}{2}},\|h_2\|_{\frac{k-2}{2}})$. Il contient l'espace $C(k)$ du §3.1 via une injection évidente qui est continue (par **[4]**, preuve du Lem. 2.3.1 et ce qui précède) et d'image dense. Il est aussi muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus qui prolonge celle sur $C(k)$: $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}(h)(z) = |ad-bc|^{\frac{k-2}{2}}(-cz+a)^{k-2}h\big(\frac{dz-b}{-cz+a}\big)$. On note $\widetilde{B}(k)$ le quotient de $D(k)$ par les polynômes de degré au plus $k-2$. On a donc une injection canonique continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante d'image dense $\Sigma(k)\hookrightarrow\widetilde{B}(k)$.

Une distribution μ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini est par définition un élément du dual continu $C(k)^\vee$. Une telle distribution est dite tempérée d'ordre $(k-2)/2$ s'il existe $C_\mu\in E$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\int_{D(\infty,n)} z^j\mu(z) \in C_\mu p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\mathscr{O}_E$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$, $j\le k-2$ où $D(\infty,n)\overset{\text{déf}}{=}\{z\in\mathbb{Q}_p \mid \mathrm{val}(z)\le -n\}$

(ii) $\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z) \in C_\mu p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathscr{O}_E$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $a\in\mathbb{Q}_p$ où $D(a,n)\overset{\text{déf}}{=} a+p^n\mathbb{Z}_p$.

L'espace de ces distributions est un Banach pour la norme :

$$\|\mu\| \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Max}\left(\sup_{j,n,a} p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\left|\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu(z)\right|, \sup_{j,n} p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\left|\int_{D(\infty,n)} z^j\mu(z)\right|\right).$$

Lemme 3.2.1. — *Pour $k\ge 2$, l'espace des distributions tempérées d'ordre $\frac{k-2}{2}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini s'identifie topologiquement au Banach dual $D(k)^\vee\hookrightarrow C(k)^\vee$.*

Démonstration. — Par l'application $h\mapsto(h_1,h_2)$, le Banach $D(k)$ s'identifie à deux copies de $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbb{Z}_p,E)$. Un élément μ du dual est donc un couple de distributions μ_1,μ_2 sur $\mathbb{Z}_p$ tempérées d'ordre $\frac{k-2}{2}$ avec par définition :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} h(z)\mu(z) = \int_{\mathbb{Z}_p} h_1(z)\mu_1(z) + \int_{\mathbb{Z}_p} h_2(z)\mu_2(z).$$

Soit $a\in\mathbb{Z}_p$, $n\in\mathbb{N}$ tel que $n>\mathrm{val}(a)$ si $a\ne 0$ et $j\in\mathbb{N}$, traduisons la condition :

$$\int_{D(a,n)}(z-a)^j\mu_2(z) = \int_{\mathbb{Z}_p}(z-a)^j\mathbf{1}_{D(a,n)}\mu_2(z) \in C_{\mu_2}p^{n(j-\frac{k-2}{2})}\mathscr{O}_E.$$

Si $a=0$, la fonction $h\in C(k)$ correspondant au couple $(h_1,h_2)=(0,z^j\mathbf{1}_{D(0,n)})$ est la fonction $z^{k-2-j}\mathbf{1}_{D(\infty,n)}$ et donc pour $j\in\mathbb{N}$:

$$\int_{D(\infty,n)} z^{k-2-j}\mu(z)\in C_{\mu_2}p^{n(j-\frac{k-2}{2})}=C_{\mu_2}p^{n(\frac{k-2}{2}-(k-2-j))}$$

qui est bien une des deux conditions précédentes en remplaçant $k-2-j$ par j. Si $a\neq 0$, la fonction $h\in C(k)$ correspondant au couple $(h_1,h_2)=(0,(z-a)^j\mathbf{1}_{D(a,n)})$ est la fonction $(-a)^j z^{k-2-j}(z-\frac{1}{a})^j\mathbf{1}_{D(\frac{1}{a},n-2\mathrm{val}(a))}$ de sorte que l'on a pour $j\in\mathbb{N}$:

$$\int_{D(\frac{1}{a},n-2\mathrm{val}(a))} z^{k-2-j}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^j\mu(z)\in C_{\mu_2}p^{n(j-\frac{k-2}{2})-j\mathrm{val}(a)}. \tag{10}$$

En décomposant z^{k-2-j} sous la forme $a^{j-k+2}(1+\sum_{m\geq 1}*_m a^m(z-\frac{1}{a})^m)$ où $*_m\in\mathbb{Z}$ (ce qu'il est possible de faire pour tout $j\in\mathbb{N}$), une récurrence montre, quitte à modifier C_{μ_2}, que (10) est équivalent à :

$$\int_{D(\frac{1}{a},n-2\mathrm{val}(a))}\Big(z-\frac{1}{a}\Big)^j\mu(z)\in C_{\mu_2}p^{(n-2\mathrm{val}(a))(j-\frac{k-2}{2})}$$

pour tout $j\in\mathbb{N}$: on obtient l'autre condition. Les conditions pour μ_1 donnent essentiellement les mêmes conditions pour μ. On laisse les derniers détails au lecteur. □

Un examen de la preuve du Lem.3.2.1 montre qu'il suffit de vérifier les conditions (i) et (ii) précédentes pour $0\leq j\leq k-2$ pour les avoir pour les autres j. Le théorème qui suit est dû à Teitelbaum pour k pair ([**34**]). Nous en donnons une preuve directe pour tout k.

Théorème 3.2.2. — *Pour $k\geq 2$, l'inclusion $O(k)^{\mathrm{b}}\subset O(k)$ identifie $O(k)^{\mathrm{b}}$ avec le sous-espace vectoriel de $O(k)$ des distributions qui sont tempérées d'ordre $\frac{k-2}{2}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini.*

Démonstration. — Rappelons que $O(k)$ est le sous-espace de $C(k)^\vee$ des distributions μ telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}z^j\mu(z)=0$ pour $j\in\{0,\cdots,k-2\}$. C'est un espace de Fréchet dont la topologie peut se définir par la collection des normes $(\|\cdot\|_U)_U$ où :

$$\|\mu\|_U\overset{\text{déf}}{=}\sup_{h\in C(k)_U\setminus\{0\}}\frac{|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}h(z)\mu(z)|}{\|h\|_U}$$

si $\mu\in O(k)$. On fixe un recouvrement $U=\amalg_{0\leq i\leq s}U_i$ de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ comme au §3.1. On a :

$$O(k)^{\mathrm{b}}=\left\{\mu\in O(k),\left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}g(h)(z)\mu(z)\right|\leq\|h\|_U\ \forall g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p),\forall h\in C(k)_U\right\}\otimes E.$$

On peut choisir U tel que $C(k)_U$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est compact, il existe $c_\mu\in|E^\times|$ tel que $\|g(h)\|_U\leq c_\mu\|h\|_U$ pour tout $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et

$h \in C(k)_U$. Comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, on voit que $O(k)^{\mathrm{b}}$ est aussi :

$$\left\{\mu \in O(k), \left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)\right| \leq \|h\|_U \ \forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p),\ \forall h \in C(k)_U\right\} \otimes E.$$

On a $U \cap \mathbb{Q}_p = D(\infty, n_0) \amalg \big(\amalg_{1\leq i\leq s} D(z_i, n_i)\big)$ pour des $z_i \in \mathbb{Q}_p$ et des entiers $n_i > \mathrm{val}(z_i)$. Comme la norme p-adique est ultramétrique, la condition dans (11) est équivalente à :

$$\left|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)\right| \leq \|h\|_U \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p) \tag{12}$$

pour $h = (z - z_i)^j \mathbf{1}_{D(z_i,n_i)}$ ou $h = z^{k-2-j}\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $j \in \mathbb{N}$. Soit $g = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ et $h = (z - z_i)^j \mathbf{1}_{D(z_i,n_i)}$, on a :

$$g(h)(z) = \mid \lambda\nu \mid^{\frac{k-2}{2}} \lambda^{k-2-j}\nu^j \Big(z - \frac{\lambda z_i + \mu}{\nu}\Big)^j \mathbf{1}_{D\left(\frac{\lambda z_i+\mu}{\nu}, n_i + \mathrm{val}(\lambda/\nu)\right)},$$

et un calcul montre que (12) pour $h = (z - z_i)^j \mathbf{1}_{D(z_i,n_i)}$, $j \in \mathbb{N}$ est équivalent à :

$$\int_{D(a,n)} (z - a)^j \mu(z) \in C_\mu \alpha_i^j p^{n(j-\frac{k-2}{2})} \mathscr{O}_E$$

pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ où $C_\mu \in E$ est une constante et $\alpha_i \in E$ est une constante dépendant du rayon r_i de U_i dans $\mathbb{C}_p$ (cf. §3.1) telle que $-1 \leq \mathrm{val}(\alpha_i) < 0$. En écrivant $D(a, n) = \amalg_{a' \equiv a (p^n)} D(a', n + 1)$ et en développant $(z - a)^{j+1} = ((z - a') + (a' - a))^{j+1}$, une récurrence sur j à la Amice-Vélu montre que c'est encore équivalent à $\int_{D(a,n)} (z - a)^j \mu(z) \in C_\mu p^{n(j-\frac{k-2}{2})} \mathscr{O}_E$ pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$ où $C_\mu \in E$ est une constante. On retrouve donc la condition (ii) précédente. Soit $g = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ et $h = z^j \mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, on a :

$$g(h)(z) = \mid \lambda\nu \mid^{\frac{k-2}{2}} \lambda^{k-2-j}\nu^j \Big(z - \frac{\mu}{\nu}\Big)^j \big(\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} - \mathbf{1}_{D(\frac{\mu}{\nu}, -n_0 + \mathrm{val}(\lambda/\nu)+1)}\big)$$

et on vérifie que (12) pour $h = z^j \mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \leq k - 2$ est équivalent à :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) - D(a,-n+1)} (z - a)^j \mu(z) \in C_\mu \alpha_0^{-j} p^{n(\frac{k-2}{2} - j)} \mathscr{O}_E$$

pour $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}$, $j \leq k - 2$ où $C_\mu, \alpha_0 \in E$ sont des constantes avec $-1 \leq \mathrm{val}(\alpha_0) < 0$. Si $0 \leq j \leq k - 2$, on retrouve un bout de la condition (ii) car $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} (z - a)^j \mu(z) = 0$. Si $j < 0$, on écrit $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) - D(a, -n + 1) = D(\infty, -\mathrm{val}(a)+1) \amalg (\amalg_i D(a+x_i, -n+1))$ pour des x_i tels que $\mathrm{val}(a) \leq \mathrm{val}(x_i) \leq -n$. En décomposant $(z - a)^j = x_i^j(1 + \sum_{m\geq 1} *_m x_i^{-m}(z - (a + x_i))^m)$ où $*_m \in \mathbb{Z}$ et en utilisant la condition (ii) pour les disques $D(a + x_i, -n + 1)$, on peut se ramener à la seule condition $\int_{D(\infty,n)} z^j \mu(z) \in \alpha_0^{-j} p^{n(\frac{k-2}{2} - j)} \mathscr{O}_E$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j < 0$. On vérifie par

une récurrence sur j qu'elle est équivalente à $\int_{D(\infty,n)} z^j \mu(z) \in C_\mu p^{n(\frac{k-2}{2}-j)} \mathscr{O}_E$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j < 0$, i.e. à la condition (i) pour $j < 0$. Ceci achève la preuve. □

Corollaire 3.2.3. — *Pour $k \geq 2$, le Banach $B(k)$ s'identifie topologiquement et de façon $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante au Banach $\widetilde{B}(k)$ i.e. au quotient par les polynômes de degré au plus $k-2$ du Banach des fonctions $h : \mathbb{Q}_p \to E$ telles que $h|_{\mathbb{Z}_p}$ est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ et $z^{k-2}h(1/z)|_{\mathbb{Z}_p - \{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{B}(k)^0$ une boule unité quelconque du Banach $\widetilde{B}(k)$. Via l'injection continue $\Sigma(k) \hookrightarrow \widetilde{B}(k)$ d'image dense, elle induit un $\mathscr{O}_E$-réseau ouvert $\Sigma(k)^0 \overset{\text{déf}}{=} \widetilde{B}(k)^0 \cap \Sigma(k)$ de $\Sigma(k)$ et $\widetilde{B}(k)^0$ s'identifie au complété $\varprojlim \Sigma(k)^0/p^n\Sigma(k)^0$. On montre comme dans [**4**], preuve de Prop. 4.3.4 que le $\mathscr{O}_E$-module des morphismes $\mathscr{O}_E$-linéaires $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}(\widetilde{B}(k)^0, \mathscr{O}_E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_E}(\Sigma(k)^0, \mathscr{O}_E)$ s'identifie au $\mathscr{O}_E$-module $\{\mu \in O(k), \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu(z) \in \mathscr{O}_E \ \forall\ h \in \Sigma(k)^0\}$. Ce dernier est compact dans $O(k)$ par [**26**], Lem. 13.1(vi)+Prop. 14.2 (et le fait que $\mathscr{O}_E$ est compact). On montre comme dans [**4**], Prop. 4.3.4 que le Banach associé s'identifie au complété de $\Sigma(k)$ par rapport à $\Sigma^0(k)$, c'est-à-dire à $\widetilde{B}(k)$ par ce qui précède. Par ailleurs, ce module compact est contenu dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ par le Lem.3.2.1 et le Th.3.2.2. Par [**28**], Lem. 1.5(ii), il est donc commensurable dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ à $O(k)^U$ pour un U comme au §3.1. Comme le Banach associé à $O(k)^U$ est $B(k)$, on a un isomorphisme topologique $B(k) \simeq \widetilde{B}(k)$ qui est l'identité sur $\Sigma(k)$. Par densité et continuité de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il est aussi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. □

3.3. Une formulation plus concrète de $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ et $B(k,\mathscr{L})$. — On donne une description explicite de $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ et $B(k,\mathscr{L})$ pour $k > 2$. On conserve les notations du §3.1 et du §3.2. On suppose $k > 2$.

Lemme 3.3.1. — *Soit n et j des entiers > 0, $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < j$ et $a \in \mathbb{Z}_p$. La fonction $(z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a)\mathbf{1}_{D(a,n)-D(a,n+1)}$ tend vers 0 dans le Banach $\mathscr{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Par [**26**], Lem. 9.9, il suffit de montrer que cette fonction tend vers 0 dans le Banach dual du Banach des distributions tempérées d'ordre r sur $\mathbb{Z}_p$, i.e. :

$$\sup_{\mu} \frac{\left|\int_{D(a,n)-D(a,n+1)} (z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a)\mu(z)\right|}{\|\mu\|_r} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

En écrivant $D(a,n) - D(a,n+1) = \amalg_{u \in \mathbb{F}_p^\times} D(a + p^n[u], n+1)$ où $[\cdot]$ désigne le représentant de Teichmüller, un calcul donne pour $z \in D(a+p^n[u], n+1)$:

$$(z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a) = n\mathscr{L}(z-a)^j + (z-a)^j \log\left(1 + \frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right).$$

Le terme avec un logarithme se développe pour $z \in D(a+p^n[u], n+1)$:

$$(z-a)^j \log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right) = \sum_{m\geq 0} *_m p^{n(j-m)}(z-(a+p^n[u]))^m$$

où $*_m \in \mathscr{O}_E$. Pour $b \in \mathbb{Z}_p$, la somme $\sum_{m\geq 0} p^{-nm}(z-b)^m \mathbf{1}_{D(b,n+1)}$ converge dans $\mathscr{C}^r(\mathbb{Z}_p, E)$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ de sorte que, pour μ tempérée :

$$(13) \quad \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-a)^j \log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right)\mu(z) = \sum_{m\geq 0} *_m p^{n(j-m)} \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-(a+p^n[u]))^m \mu(z).$$

Pour μ d'ordre r, on a par ailleurs pour tout $m \geq 0$:

$$\left| *_m p^{n(j-m)} \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-(a+p^n[u]))^m \mu(z) \right| \leq \|\mu\|_r p^{n(r-j)} p^{r-m}$$

ce qui entraîne par (13) :

$$\left| \int_{D(a+p^n[u],n+1)} (z-a)^j \log\left(1+\frac{z-(a+p^n[u])}{p^n[u]}\right)\mu(z) \right| \leq p^r \|\mu\|_r p^{n(r-j)}.$$

En traitant de même le terme plus simple $n\mathscr{L}(z-a)^j$ et en sommant sur $u \in {\mathbb{F}_p}^\times$, on a finalement une constante $c_r \in |E^\times|$ telle que pour μ tempérée d'ordre r :

$$\left| \int_{D(a,n)-D(a,n+1)} (z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a)\mu(z) \right| \leq c_r \|\mu\|_r p^{n(r-j)}$$

d'où on déduit clairement le résultat puisque $r < j$. □

Notons $L(k, \mathscr{L})$ le sous-espace vectoriel du E-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{Q}_p$ dans E engendré par les polynômes de degré au plus $k-2$ et les fonctions suivantes :

$$h(z) = \sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1, \ldots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Lemme 3.3.2. — *L'espace $L(k, \mathscr{L})$ est un sous-espace vectoriel de $D(k)$ et est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $D(k)$.*

Démonstration. — Par l'application $h \mapsto (h_1, h_2)$ du §3.2, on a pour $j \in \mathbb{N}$ et n entier suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
(z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a)\mathbf{1}_{D(a,n)} &\mapsto ((pz-a)^j \log_{\mathscr{L}}(pz-a)\mathbf{1}_{D(a/p,n-1)}, 0) \text{ si } a \in p\mathbb{Z}_p \\
(z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a)\mathbf{1}_{D(a,n)} &\mapsto \big(0, z^{k-2-j}(1-az)^j(\log_{\mathscr{L}}(1-az) - \\
&\qquad \log_{\mathscr{L}}(z))\mathbf{1}_{D(\frac{1}{a},n-2\mathrm{val}(a))}\big) \text{ si } a \in \mathbb{Q}_p - p\mathbb{Z}_p \\
z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n)} &\mapsto (0, -z^{k-2-j}\log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(0,n)}).
\end{aligned}$$

Le Lem.3.3.1 entraîne que les fonctions de droite sont dans $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbb{Z}_p, E)$ si $j > (k-2)/2$ pour les deux premières et $j < (k-2)/2$ pour la dernière. Vu la définition de $D(k)$ et $L(k,\mathscr{L})$, on en déduit facilement $L(k,\mathscr{L}) \subset D(k)$. La stabilité par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est laissée en exercice au lecteur. □

On note $\widetilde{B}(k,\mathscr{L})$ le quotient de $D(k)$ par l'adhérence de $L(k,\mathscr{L})$ dans $D(k)$. Par le Lem.3.3.2 et le Cor.3.2.3, c'est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire.

Théorème 3.3.3. — *Pour $k > 2$ et $\mathscr{L} \in E$, l'inclusion $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$ identifie topologiquement $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ avec le sous-espace vectoriel de $O(k)^{\mathrm{b}}$ (muni de la topologie induite) des distributions μ telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z)\mu(z) = 0$ pour tout $h \in L(k,\mathscr{L})$.*

Démonstration. — Soit $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. On va d'abord étendre μ en une forme linéaire continue sur $C(k,\mathscr{L})$. Il suffit de définir $\int_{D(\infty,n)} z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mu(z)$ pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Soit $\ell_j(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i\in I} \lambda_i (z - z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z - z_i)$ avec des $\lambda_i \in E$, des $z_i \in \mathbb{Q}_p$ et des $n_i \in \{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1, \ldots, k-2\}$ en nombre fini tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i (z - z_i)^{n_i} = -z^j$. Alors le Lem.3.3.1 entraîne $\ell_j(z) + z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n)} \in D(k)$ et on pose :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mu(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \big(\ell_j(z) + z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n)}\big)\mu(z) \tag{14}$$

où le membre de droite est bien défini par le Lem.3.2.1 et le Th.3.2.2. La condition sur μ montre que c'est indépendant du choix de ℓ_j et donne une forme linéaire bien définie sur $C(k,\mathscr{L})$ qui prolonge μ. La continuité résulte facilement de celle de μ et on note encore μ l'élément de $O(k,\mathscr{L})$ ainsi construit. Montrons $\mu \in O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$. Comme dans la preuve du Th.3.2.2, on choisit un recouvrement U de $\mathbb{Q}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et il suffit montrer qu'il existe une constante $c_\mu \in |E^\times|$ telle que $|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)| \leq c_\mu \|h\|_U \ \forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p),\ \forall h \in C(k,\mathscr{L})_U$. Comme c'est déjà vrai pour $h \in C(k)_U$ car $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$, on peut supposer $h(z) = z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $0 \leq j \leq k-2$ et il suffit de montrer que $|\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z)|$ est majoré indépendamment de $g \in B(\mathbb{Q}_p)$. Fixons ℓ_j comme précédemment tel que $h_j(z) \overset{\text{déf}}{=} \ell_j(z) + z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)} \in D(k)$. En utilisant (14), on voit que l'on a :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)})\mu(z) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\mu(z).$$

Puisque $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}} \simeq \widetilde{B}(k)^\vee \subset D(k)^\vee$ (voir §3.2), on a $c_\mu \in |E^\times|$ tel que :

$$\left| \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\mu(z) \right| \leq c_\mu \| g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\|$$

où la norme à droite est une norme sur le Banach $\widetilde{B}(k)$. Or, $\widetilde{B}(k)$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire par le Cor.3.2.3 de sorte que $\| g\big(h_j(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}\big)\| \leq c$ $\forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ pour une constante $c \in |E^\times|$ indépendante de g ce qui entraîne la majoration cherchée (par $c_\mu c$). Soit maintenant $\mu \in O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ et montrons que μ, vu dans $O(k)^{\mathrm{b}}$, annule $L(k,\mathscr{L})$. Comme dans la preuve du Th.3.2.2, on a en particulier la condition pour $h(z) = z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mathbf{1}_{D(\infty,n_0)}$, $0 \leq j \leq k-2$:

$$\left| \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} g(h)(z)\mu(z) \right| \leq \|h\|_U \ \forall g \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p). \tag{15}$$

L'action de $\mathbb{Q}_p^\times$ se faisant via un caractère unitaire, on peut supposer $g = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ et on a :

$$g(h)(z) = |\ \lambda\ |^{\frac{k-2}{2}}\ \lambda^{k-2-j}(z-\mu)^j \log_{\mathscr{L}}(z-\mu)(\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} - \mathbf{1}_{D(\mu,-n_0+\mathrm{val}(\lambda)+1)}).$$

La condition (15) est alors équivalente après calcul à :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(a,-n+1)} (z-a)^j \log_{\mathscr{L}}(z-a)\mu(z) \in C_\mu p^{n(\frac{k-2}{2}-j)}\mathscr{O}_E \tag{16}$$

pour $a \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq j \leq k-2$ ($C_\mu \in E$ est une constante). Supposons d'abord $j < \frac{k-2}{2}$ et $a = 0$, (16) entraîne alors :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \log_{\mathscr{L}}(z)\mu(z) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{17}$$

Soit $\sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z-z_i) \in L(k,\mathscr{L})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $h_n(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z-z_i)\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(z_i,-n+1)}$ est à la fois dans $C(k,\mathscr{L})$ et dans $D(k)$ (par le Lem.3.3.1 et le Lem.3.3.2) de sorte qu'il y a *a priori* deux valeurs pour $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h_n(z)\mu(z)$: la première en voyant μ dans $O(k,\mathscr{L})$ et la seconde en voyant μ dans $O(k)^{\mathrm{b}}$. Ces deux valeurs coïncident pour $\mu \in O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$. En effet, soit $m \in \mathbb{N}$, alors $h_n(z)\mathbf{1}_{D(0,-m+1)} \in C(k)$ et les valeurs $\int_{D(0,-m+1)} h_n(z)\mu(z)$ sont donc les mêmes. En voyant μ dans $O(k,\mathscr{L})$, on a $\int_{D(0,-m+1)} h_n(z)\mu(z) \to \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h_n(z)\mu(z)$ dans E par (17) quand $m \to +\infty$. En voyant μ dans $O(k)^{\mathrm{b}}$, on a $\int_{D(0,-m+1)} h_n(z)\mu(z) \to \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h_n(z)\mu(z)$ dans E car $h_n(z)\mathbf{1}_{D(\infty,m)}$ tend vers 0 dans $D(k)$ quand $m \to +\infty$ (cela se déduit du Lem.3.3.1). Comme $n_i > \frac{k-2}{2}$, par (16) on a donc pour $n < 0$ en voyant μ dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ (quitte à modifier C_μ) :

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z-z_i)\mathbf{1}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)-D(z_i,-n+1)}\mu(z) \in C_\mu p^{-n/2}\mathscr{O}_E.$$

Quand n tend vers $-\infty$, la fonction $(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathscr{L}}(z-z_i)\mathbf{1}_{D(z_i,-n+1)}$ tend vers 0 dans $D(k)$ (encore le Lem.3.3.1) et l'intégrale de gauche tend donc dans E vers $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathscr{L}}(z-z_i)\mu(z)$. Or, le membre de droite tend clairement vers 0 quand n tend vers $-\infty$, d'où la nullité de cette intégrale. Tout ceci montre que $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ est exactement le sous-espace vectoriel de $O(k)^{\mathrm{b}}$ des distributions μ telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}h(z)\mu(z)=0$ pour tout $h\in L(k,\mathscr{L})$. Par [**4**], Cor.4.2.3, la topologie de $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ est induite par celle de $O(k)^{\mathrm{b}}$, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.3.4. — *Pour $k>2$ et $\mathscr{L}\in E$, le Banach $B(k,\mathscr{L})$ s'identifie topologiquement et de façon $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante au Banach $\widetilde{B}(k,\mathscr{L})$ i.e. au quotient de $\widetilde{B}(k)$ par l'adhérence du sous-espace vectoriel des fonctions $h:\mathbb{Q}_p\to E$ de la forme :*

$$h(z)=\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\log_{\mathscr{L}}(z-z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i\in E$, $z_i\in\mathbb{Q}_p$, $n_i\in\{\lfloor\frac{k-2}{2}\rfloor+1,\dots,k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I}\lambda_i(z-z_i)^{n_i}\big)<\frac{k-2}{2}$.

Démonstration. — Par la définition de $\widetilde{B}(k,\mathscr{L})$, les résultats du §3.2 et [**27**], §1, le module compact tensorisé par E, $\widetilde{O}(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$, associé à $\widetilde{B}(k,\mathscr{L})$ est topologiquement isomorphe à $\{\mu\in O(k)^{\mathrm{b}},\mu|_{L(k,\mathscr{L})}=0\}$ muni de la topologie induite par celle de $O(k)^{\mathrm{b}}$. Par le Th.3.3.3, on a donc un isomorphisme topologique $\widetilde{O}(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}\simeq O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ d'où le résultat par [**27**], Th.1.2. □

4. Arbre de Bruhat-Tits, symboles modulaires et invariant $\mathscr{L}$

On introduit ici le formalisme de [**14**] et [**25**] (légèrement étendu) que l'on utilise pour démontrer le Th.1.1.4 de l'introduction (Th.4.5.2 et Cor.4.5.3 ci-dessous).

4.1. Quelques rappels classiques. — On commence par réviser les symboles modulaires classiques associés aux formes modulaires.

On fixe une forme modulaire f parabolique normalisée de poids $k\geq 2$ nouvelle pour le groupe de congruence $\Gamma_1(M)$ de caractère $\chi:(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^\times$ (M entier ≥ 1). On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell\nmid M$ (ou de manière équivalente pour tout ℓ puisque f est nouvelle) et on note $a_\ell\in\overline{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C}$ la valeur propre associée. Pour $\ell\nmid M$, rappelons que $T_\ell f\overset{\text{déf}}{=}\sum_i f|_{\delta_i}$ où $\Gamma_1(M)\begin{pmatrix}1&0\\0&\ell\end{pmatrix}\Gamma_1(M)=\amalg_i\Gamma_1(M)\delta_i$ et $S_\ell f\overset{\text{déf}}{=}\ell^{k-2}f|_{\sigma_\ell}=\ell^{k-2}\chi(\ell)f$ où $\sigma_\ell\in\Gamma_0(M)$, $\sigma_\ell\equiv\begin{pmatrix}\ell^{-1}&0\\0&\ell\end{pmatrix}$ mod. M.

On note E_f l'extension finie de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ engendrée par les a_ℓ et les $\chi(\ell)$ pour $\ell\nmid M$ et O_f l'anneau des entiers de E_f. Pour $a\in\mathbb{Q}$ et $j\in\{0,\cdots,k-2\}$, on désigne par $\int_a^\infty f(z)z^j dz\in\mathbb{C}$ l'intégrale sur la droite verticale du demi-plan complexe supérieur issue de a. On rappelle le théorème classique suivant :

Théorème 4.1.1. — *Il existe* $\Omega_f^{\pm} \in \mathbb{C}^{\times}$ *tels que pour tout* $r \in \mathbb{Q}$ *et tout* $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ *:*

$$\frac{1}{2}\Big(2i\pi \int_r^{\infty} f(z) z^j dz \pm (-1)^j 2i\pi \int_{-r}^{\infty} f(z) z^j dz\Big) \in O_f \Omega_f^{\pm} \subset \mathbb{C}.$$

Démonstration. — Soit $\overline{f}$ la forme conjuguée de f i.e. ayant comme coefficients de Fourier les conjugués complexes de ceux de f et plongeons E_f dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par $x \mapsto (x, \overline{x})$ où $\overline{x}$ est le conjugué de x. Les couples $(2i\pi \int_r^{\infty} f(z) z^j dz, 2i\pi \int_r^{\infty} \overline{f}(z) z^j dz)$ pour $r \in \mathbb{Q}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ engendrent E_f-linéairement dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ un E_f-espace vectoriel V_f de dimension au plus 2. Cela se déduit par exemple des résultats de [**31**], en particulier de [**31**], Th.0.5, Cor.4.5 et preuve de Prop. 5.7. L'involution E_f-linéaire $\iota : (x, y) \mapsto (\overline{y}, \overline{x})$ sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ préserve V_f et est différente de $\pm\mathrm{Id}$. En effet, si par exemple $\iota = \mathrm{Id}$, on a pour $r \in \mathbb{Q}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ en remarquant que $(-1)^j 2i\pi \int_{-r}^{\infty} f(z) z^j dz$ est le conjugué complexe de $2i\pi \int_r^{\infty} \overline{f}(z) z^j dz$:

$$\int_r^{\infty} f(z) z^j dz - (-1)^j \int_{-r}^{\infty} f(z) z^j dz = 0$$

et, si ψ est un caractère de Dirichlet primitif de niveau m tel que $\psi(-1) = (-1)^{j-1}$ et f_{ψ} désigne la forme tordue de f par ψ, la formule :

$$L(f_{\psi}, j+1) = \frac{(-2i\pi)^{j+1}}{j! m^{j+1}} \mathrm{Gauss}(\psi) \sum_{a \bmod m} \overline{\psi}(a) \int_{-\frac{a}{m}}^{\infty} f(z)(mz + a)^j dz$$

entraîne alors $L(f_{\psi}, j+1) = 0$ pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ ce qui est impossible si $f \neq 0$ (voir [**30**], §1). La preuve de $\iota \neq -\mathrm{Id}$ est similaire. Soit $V_f^{\pm} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\iota \pm \mathrm{Id})$, on a donc $1 \leq \dim_{E_f} V_f^{\pm}$ et $\dim_{E_f} V_f^{+} + \dim_{E_f} V_f^{-} \leq 2$ d'où $\dim_{E_f} V_f^{\pm} = 1$ (et $\dim_{E_f} V_f = 2$). Cela donne l'assertion de l'énoncé avec E_f au lieu de O_f. Mais l'assertion avec O_f se déduit du théorème de Manin-Drinfeld (voir e.g. [**31**], Th.5.1). □

Remarque 4.1.2. — Si $E_f \subset \mathbb{R}$ (par exemple si $\chi = 1$), Ω_f^{+} (resp. Ω_f^{-}) est réel (resp. imaginaire pur).

On choisit $\Omega_f^{\pm}$ comme ci-dessus (on voit que $E_f \Omega_f^{\pm}$ est bien déterminé si $\Omega_f^{\pm}$ ne l'est pas) et, pour tout polynôme $P(z) \in E_f[z]$ de degré au plus $k-2$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, on note :

$$\Big(\int_r^{\infty} f(z) P(z) dz\Big)^{\pm} \overset{\text{déf}}{=} \frac{2i\pi}{2\Omega_f^{\pm}} \Big(\int_r^{\infty} f(z) P(z) dz \pm \int_{-r}^{\infty} f(z) P(-z) dz\Big) \in E_f.$$

Pour tous $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$ et tout $P(z) \in E_f[z]$ (de degré $\leq k-2$), on note plus généralement :

$$\Big(\int_{r_1}^{r_2} f(z) P(z) dz\Big)^{\pm} \overset{\text{déf}}{=} \Big(\int_{r_1}^{\infty} f(z) P(z) dz\Big)^{\pm} - \Big(\int_{r_2}^{\infty} f(z) P(z) dz\Big)^{\pm} \in E_f.$$

Par le Th.4.1.1, on a $\big(\int_{r_1}^{r_2} f(z) P(z) dz\big)^{\pm} \in O_f$ si $P \in O_f[z]$.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une action à gauche linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Comme au §2.4, on munit le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0,V)$ de l'action des opérateurs de Hecke $T_\ell\phi \overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1}(\phi)$, $S_\ell\phi \overset{\text{déf}}{=} \sigma_\ell^{-1}\begin{pmatrix}\ell^{-1} & 0\\ 0 & \ell^{-1}\end{pmatrix}(\phi)$ et $w_\infty\phi \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(\phi)$ où $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0,V)$ et $\ell \nmid M$.

À la forme f sont classiquement associés les symboles modulaires :

$$\phi_f^{\pm} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0, (\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee)$$

définis comme suit (via $\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2 \simeq \oplus_{0\le j\le k-2} E_f T^j$) :

$$\phi_f^{\pm}\big(\{r_2\}-\{r_1\}\big)(T^j) \overset{\text{déf}}{=} \Big(\int_{r_1}^{r_2} f(z)z^j dz\Big)^{\pm}.$$

La droite $E_f\phi_f^{\pm} \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee)$ ne dépend pas du choix de $\Omega_f^{\pm}$.

Le lemme bien connu suivant se déduit d'un calcul simple et de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura (via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee) \simeq H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E_f^2)^\vee)$ Hecke-équivariant, cf. [**1**], Prop. 4.2) :

Lemme 4.1.3. — *On a $w_\infty\phi_f^{\pm} = \pm\phi_f^{\pm}$ et :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(M)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E_f^2)^\vee)^f = E_f\phi_f^+ \oplus E_f\phi_f^-.$$

4.2. Arbre de Bruhat-Tits et symboles modulaires. — Lorsque f comme au §4.1 est « Steinberg en p », on lui associe en suivant [**14**] et [**25**] une forme modulaire sur l'arbre de Bruhat-Tits et de nouveaux symboles modulaires.

On reprend la forme f du §4.1 et on suppose $M = Np$ avec $(N,p)=1$ et χ trivial sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. On note encore $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$. On a dans ce cas (cf. [**22**], §I.12) :

$$a_p^2 = \chi(p)p^{k-2}. \tag{18}$$

Soit $W_p \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} pu & v\\ pNw & pt\end{pmatrix}$ avec $u,v,w,t\in\mathbb{Z}$, $put - Nvw = 1$ et $pu \equiv 1\ (N)$, une autre formule importante dans ce cas est (cf. [**2**], §2) :

$$f\,|_{W_p} = -a_p f. \tag{19}$$

On note $\mathscr{BT}$ l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathscr{A}(\mathscr{BT})$ l'ensemble de ses arêtes orientées et $\mathscr{S}(\mathscr{BT})$ l'ensemble de ses sommets. On fixe un sommet central σ_0 correspondant au réseau $\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p$ et on note α_0 l'arête orientée allant de σ_0 au sommet correspondant au réseau $\mathbb{Z}_p\oplus p\mathbb{Z}_p$. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur $\mathscr{BT}$, $\mathscr{A}(\mathscr{BT})$ et $\mathscr{S}(\mathscr{BT})$. Si $\alpha\in\mathscr{A}(\mathscr{BT})$, $\overline{\alpha}$ désigne l'arête avec orientation opposée et $o(\alpha)\in\mathscr{S}(\mathscr{BT})$ le sommet origine de α. Il est commode de voir $\mathscr{A}(\mathscr{BT})$ comme l'ensemble des classes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ avec $\alpha_0 = \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$.

On pose :

$$\Gamma_1^p(N) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p]),\ c \equiv 0 \bmod. N,\ a \equiv 1 \bmod. N \right\}.$$

On a $\Gamma_1(N) = \Gamma_1^p(N) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p) = \Gamma_1^p(N) \cap \mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ et on voit que le groupe $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ du §2.4 est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ engendré par W_p et $\Gamma_1^p(N)$ et que W_p normalise $\Gamma_1^p(N)$. Pour $\alpha \in \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T})$, on note Γ_α son stabilisateur dans $\Gamma_1^p(N)$. Puisque $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$ agit transitivement sur $\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T})$ et puisque W_p normalise $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ et $\Gamma_1^p(N)$, on voit que Γ_α est conjugué dans $\Gamma_1^p(N)$ à $\Gamma_{\alpha_0} = \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$.

En suivant **[14]**, Def. 1.2 et **[25]**, §2.1, on définit $S_k(\mathscr{B}\mathscr{T}, \Gamma_1^p(N))$ comme le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $F : \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T}) \times \mathscr{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

(i) $F(\gamma\alpha, \gamma z) = (cz+d)^k F(\alpha, z)$ pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1^p(N)$

(ii) $F(\overline{\alpha}, z) = -F(\alpha, z)$ pour $\alpha \in \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T})$ et $\sum_{o(\alpha)=\sigma} F(\alpha, z) = 0$ pour $\sigma \in \mathscr{S}(\mathscr{B}\mathscr{T})$

(iii) $F_\alpha \overset{\text{déf}}{=} F(\alpha, \cdot)$ est une forme parabolique sur $\mathscr{H}$ de poids k pour Γ_α.

On munit $S_k(\mathscr{B}\mathscr{T}, \Gamma_1^p(N))$ d'une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ par :

$$(F|_g)(\alpha, z) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\det(g)^{k-1}}{(cz+d)^k} F(g\alpha, gz)$$

(où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$) ainsi qu'une action des opérateurs de Hecke T_ℓ et S_ℓ pour ℓ premier, $\ell \nmid Np$, par $T_\ell F \overset{\text{déf}}{=} \sum_i F|_{\delta_i}$ où $\Gamma_1^p(N) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ell \end{pmatrix} \Gamma_1^p(N) = \amalg_i \Gamma_1^p(N)\delta_i$ pour les mêmes δ_i qu'en (5) et $S_\ell F \overset{\text{déf}}{=} \ell^{k-2} F|_{\sigma_\ell}$ pour le même σ_ℓ.

Soit $S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))^{p-\text{nouv}}$ le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))$ des formes nouvelles en p. Le principal intérêt de l'espace $S_k(\mathscr{B}\mathscr{T}, \Gamma_1^p(N))$ réside dans la proposition suivante qui se démontre exactement comme **[14]**, Lem. 1.3 :

Proposition 4.2.1 **([14], [25])**. — *L'application de $S_k(\mathscr{B}\mathscr{T}, \Gamma_1^p(N))$ dans $S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))$ qui envoie F sur F_{α_0} induit un isomorphisme :*

$$S_k(\mathscr{B}\mathscr{T}, \Gamma_1^p(N)) \xrightarrow{\sim} S_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p))^{p-\text{nouv}}$$

compatible aux opérateurs de Hecke T_ℓ et S_ℓ (pour $(\ell, Np) = 1$).

Soit $F \in S_k(\mathscr{B}\mathscr{T}, \Gamma_1^p(N))$ associé à f par la Prop. 4.2.1, on a $T_\ell F = a_\ell F$ et $S_\ell F = \ell^{k-2}\chi(\ell)F$ pour $\ell \nmid Np$. La deuxième égalité se récrit :

$$F(g\alpha, gz) = \chi(d)(cz+d)^k F(\alpha, z) \tag{20}$$

pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[1/p])$ tel que $c \equiv 0\ (N)$. On a aussi par (19) et la propriété (ii) de F :

$$F|_{W_p} = a_p F. \tag{21}$$

Pour $\alpha \in \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T})$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$, considérons l'intégrale :

$$\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)(T-z)^{k-2}dz \in \mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}^2 \simeq \oplus_{0\leq j\leq k-2}\mathbb{C}T^j.$$

On a $\alpha = \gamma\alpha_0$ ou bien $\overline{\alpha} = \gamma\alpha_0$ pour un $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$. Dans le premier cas, un calcul donne dans $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}^2$:

$$\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)(T-z)^{k-2}dz = \gamma\Big(\int_{\gamma^{-1}r_1}^{\gamma^{-1}r_2} F(\alpha_0, z)(T-z)^{k-2}dz\Big) \tag{22}$$

de sorte que, pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, $\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz$ est une $\mathbb{Z}[1/p]$-combinaison linéaire d'intégrales $\int_{\gamma^{-1}r_1}^{\gamma^{-1}r_2} f(z)z^i dz$ pour $i \in \{0, \cdots, k-2\}$ ce qui permet de définir $\big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz\big)^{\pm} \in E_f$ par linéarité à partir des $\big(\int_{\gamma^{-1}r_1}^{\gamma^{-1}r_2} f(z)z^i dz\big)^{\pm}$. Le deuxième cas se ramène au premier en posant :

$$\Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz\Big)^{\pm} \overset{\text{déf}}{=} -\Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\overline{\alpha}, z)z^j dz\Big)^{\pm}. \tag{23}$$

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant E_f et $\sqrt{p}$ si k est impair. À F on associe les symboles modulaires :

$$\phi_F^{\pm} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^{\vee})$$

en posant pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et $\alpha \in \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T})$:

$$\phi_F^{\pm}\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j \otimes [\alpha]) \overset{\text{déf}}{=} \Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z)z^j dz\Big)^{\pm} \tag{24}$$

où $[\alpha]$ désigne l'élément correspondant de $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}]$ (on rappelle que l'on a une surjection canonique $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}] \twoheadrightarrow \mathrm{St}$). L'harmonicité de F (propriété (ii) ci-dessus) montre que $\phi_F^{\pm}\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j \otimes [\alpha])$ ne dépend que de l'image de $[\alpha]$ dans St de sorte que $\phi_F^{\pm}\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big) : \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St} \to E$ est bien défini. Un calcul analogue à (22) via l'identification $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\begin{aligned} (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^{\vee} &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)} \\ h &\mapsto \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}h(z^j)(-1)^j T^{k-2-j} \end{aligned} \tag{25}$$

montre que $\phi_F^{\pm}$ commute bien à $\Gamma_1^p(N)$.

Pour tout $\alpha \in \mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{T})$ et tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^{\vee})$, on définit $\phi_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_\alpha}(D_0, (\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^{\vee})$ par :

$$\phi_\alpha\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j) \overset{\text{déf}}{=} \phi\big(\{r_2\} - \{r_1\}\big)(T^j \otimes [\alpha]).$$

Lemme 4.2.2. — *$\phi_F^{\pm}$ est l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^{\vee})$ tel que $(\phi_F^{\pm})_{\alpha_0} = \phi_f^{\pm}$. De plus, on a $w_\infty\phi_F^{\pm} = \pm\phi_F^{\pm}$ et :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^{\vee})^f = E\phi_F^{+} \oplus E\phi_F^{-}.$$

Démonstration. — L'unicité est conséquence des définitions, de l'égalité (23) et du fait que $\Gamma_1^p(N)$ agit transitivement sur les arêtes *non* orientées. Le reste découle alors de l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)^f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(Np)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)^f,$$

du Lem.4.1.3 et du fait que la flèche :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E \mathrm{St})^\vee) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}(D_0,(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2)^\vee)$$

qui envoie ϕ sur ϕ_{α_0} commute aux opérateurs de Hecke. □

4.3. Espaces de distributions et symboles modulaires. — On compare les symboles modulaires à valeurs dans les espaces $O(k)$ et $O(k)^{\mathrm{b}}$, $O(k,\mathscr{L})$ et $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ du §3. On conserve les notations précédentes. En particulier E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ contenant E_f et $\sqrt{p}$ si k est impair.

***Lemme 4.3.1* (Manin).** — *On a* $D_0=\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})](\{\infty\}-\{0\})$.

Démonstration. — Un diviseur de D_0 s'écrit $\sum_{i\in I} n_i(\{\infty\}-\{r_i\})$ pour des r_i dans $\mathbb{Q}$ et des n_i dans $\mathbb{Z}$. Donc il suffit de montrer $\{\infty\}-\{r\}\in\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})](\{\infty\}-\{0\})$ pour $r\in\mathbb{Q}$. Un résultat dû à Manin (cf. e.g. **[23]**, Prop. 1) dit qu'il existe $(g_j)_{j\in\{0,\cdots,n\}}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $(r_j)_{j\in\{1,\cdots,n+1\}}\in\mathbb{Q}$ tels que $r_{n+1}=r$, $g_0(\infty)=\infty$, $g_0(0)=r_1$, $g_j(\infty)=r_j$ et $g_j(0)=r_{j+1}$. On a alors :

$$\sum_{j=0}^{n} g_j(\{\infty\}-\{0\})=\{\infty\}-\{r_1\}+\sum_{j=1}^{n}(\{r_j\}-\{r_{j+1}\})=\{\infty\}-\{r\}.$$

□

Proposition 4.3.2. — (i) *Si* $k>2$, *on a* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)=0$.
(ii) *L'injection* $O(k)^{\mathrm{b}}\hookrightarrow O(k)$ *et la surjection* $O(k)\twoheadrightarrow(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee$ *(cf. §3.1) induisent des isomorphismes :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,O(k)^{\mathrm{b}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,O(k))\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes_E\mathrm{St})^\vee).$$

(iii) *Pour tout* $\mathscr{L}\in E$, *l'injection* $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}\hookrightarrow O(k,\mathscr{L})$ *(cf. §3.1) induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,O(k,\mathscr{L})).$$

Démonstration. — On démontre (iii) en détail et on indique les modifications à apporter pour (i) et (ii). Il faut montrer la surjectivité. Puisque $\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)$ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a par le Lem.4.3.1 un nombre fini de diviseurs $(\{s_i\}-\{r_i\})_{i\in I}\in D_0$ tels que :

$$D_0=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}[\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)]\big(\{s_i\}-\{r_i\}\big). \tag{26}$$

Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))$, il faut montrer $\Phi(\{s_i\}-\{r_i\}) \in O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ pour tout $i \in I$. Soit $O^0 \subset O(k,\mathscr{L})$ le $\mathscr{O}_E$-module image inverse d'une boule unité de $C(k,\mathscr{L})_U^\vee$ (cf. §3.1). Quitte à choisir correctement U et la norme sur $C(k,\mathscr{L})_U^\vee$, on peut supposer O^0 stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ et contenant les distributions en nombre fini $\Phi(\{s_i\}-\{r_i\})$ et $W_p(\Phi(\{s_i\}-\{r_i\}))$. Vu la définition de $O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}}$, il suffit de montrer que pour tout $i \in I$ et tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $g(\Phi(\{s_i\}-\{r_i\})) \in O^0$. Puisque $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times\Gamma_1^p(N) \amalg \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times W_p\Gamma_1^p(N)$ et O^0 est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$, on peut se limiter à $g=\gamma$ et $g=W_p\gamma$ avec $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$. Dans le premier cas, on a :

$$\gamma(\Phi(\{s_i\}-\{r_i\})) = \Phi(\{\gamma s_i\}-\{\gamma r_i\}) \in \sum_{j\in I} \mathbb{Z}[\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)]\big(\Phi(\{s_j\}-\{r_j\})\big) \subset O^0$$

en utilisant (26). Le deuxième cas est similaire puisque W_p normalise $\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)$. Le premier isomorphisme de (ii) se montre de la même manière et (i) résulte de (iii) et de $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee \cap O(k,\mathscr{L})^{\mathrm{b}} = 0$ si $k>2$ (cf. §3.1). Le deuxième isomorphisme de (ii) résulte de la même méthode appliquée à $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ et de l'isomorphisme $O(k)^{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} ((\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee)^{\mathrm{b}}$ ([**34**], Th.17 pour k pair et [**20**], Th.4.1 pour k impair) où :

$$\big((\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee\big)^{\mathrm{b}} \overset{\text{déf}}{=} \Big((\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee \cap \mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}\mathscr{O}_E^2)^\vee\Big) \otimes_{\mathscr{O}_E} E$$

(voir [**4**], §4.6 pour plus de détails). □

On note $\Phi_F^\pm$ l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$ par le (ii) de la Prop.4.3.2 ayant pour image $\phi_F^\pm$ dans $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee)$.

Corollaire 4.3.3. — *On a $w_\infty\Phi_F^\pm = \pm\Phi_F^\pm$ et :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f = E\Phi_F^+ \oplus E\Phi_F^-.$$

4.4. 1-cocycles et symboles modulaires. — Dans cette partie, on associe, suivant [**25**], deux classes de cohomologie aux symboles modulaires $\Phi_F^\pm$. On conserve les notations précédentes.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une action à gauche linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. On munit le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, V))$ d'une action des opérateurs T_ℓ, S_ℓ et w_∞ comme suit :

$$\begin{aligned}
(T_\ell c)(\gamma) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_i \delta_i^{-1}(c(\gamma_i)) \\
(S_\ell c)(\gamma) &\overset{\text{déf}}{=} \ell^{2-k}\sigma_\ell^{-1}\big(c(\sigma_\ell\gamma\sigma_\ell^{-1})\big) \\
(w_\infty c)(\gamma) &\overset{\text{déf}}{=} \tau\big(c(\tau\gamma\tau)\big).
\end{aligned}$$

où c est un 1-cocycle $\Gamma_1^p(N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, V)$, $\tau \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et où $\gamma, \gamma_i \in \Gamma_1^p(N)$ sont tels que $\delta_i^{-1}\gamma_i = \gamma\delta_j^{-1}$ (σ_ℓ et les δ_i sont les mêmes qu'au §4.2).

Lemme 4.4.1. — *On a les égalités :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)^f = 0 \tag{27}$$

$$H^1(\Gamma_1(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f = 0. \tag{28}$$

Démonstration. — Par **[1]**, Prop. 4.2, on a des isomorphismes commutant aux opérateurs de Hecke pour $i \geq 0$:

$$H^i(\Gamma_1(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)) \simeq H^{i+1}_{\mathrm{c}}(Y_1(N), (\widetilde{\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}}E^2)^\vee) \tag{29}$$

et idem avec $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$ au lieu de $\Gamma_1(N)$. (27) résulte de (29) pour $i = 0$ et de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura. (28) résulte de (29) pour $i = 1$ et du fait que $H^2_{\mathrm{c}}(Y_1(N), (\widetilde{\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}}E^2)^\vee)$ n'a pas de valeurs propres « paraboliques » sous les opérateurs de Hecke (il est même nul pour $k > 2$). On peut aussi recopier la preuve de **[25]**, §7.1 en remplaçant « pointes » par « pointes régulières » si k est impair. □

Comme dans **[14]**, Cor.3.3 et **[25]**, Prop. 7.1, on déduit de ce qui précède :

Proposition 4.4.2. — *(i) On a* $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)^f = 0$.
(ii) On a un isomorphisme commutant à w_∞ *:*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1(N)\cap\Gamma_0(p)}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)^f \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f$$

qui envoie $\phi_f^\pm$ *sur la classe du* 1*-cocycle* $c_f^\pm$ *défini par :*

$$c_f^\pm(\gamma)(\{r_2\} - \{r_1\})(z^j) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha \in [\sigma_0, \gamma\sigma_0]} \Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z) z^j dz \Big)^\pm$$

où $[\sigma_0, \gamma\sigma_0]$ *est l'ensemble des arêtes orientées reliant le sommet central* σ_0 *à* $\gamma\sigma_0$*. En particulier la classe de* $c_f^\pm$ *est non nulle,* $w_\infty c_f^\pm = \pm c_f^\pm$ *et :*

$$H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f = Ec_f^+ \oplus Ec_f^-.$$

Démonstration. — (i) et (ii) résultent de la deuxième suite exacte de **[29]**, Prop. 13 p.169 appliquée à $G = \Gamma_1^p(N)$ et $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee)$ et des égalités (27) et (28). Pour plus de détails, voir **[14]**, §3.1 et **[25]**, §7.3, §5.2. Notons que (i) pour $k > 2$ découle aussi du (i) de la Prop.4.3.2. □

Soit $\mathscr{L} \in E$. Pour H une fonction rigide analytique E-rationnelle sur Ω (que l'on peut voir comme un élément de $O(2)$, cf. §3.1), rappelons qu'une intégrale de Coleman de H relativement à la détermination $\log_{\mathscr{L}}$ du logarithme p-adique est une primitive $\tilde{H}$ de H dans $O(2, \mathscr{L})$ (définie à addition d'une constante près) via la surjection $O(2, \mathscr{L}) \twoheadrightarrow O(2)$ (cf. §3.1). Si Q_1 et Q_2 sont deux points de Ω, $\tilde{H}(Q_2) - \tilde{H}(Q_1)$ ne dépend pas de la primitive choisie et se note $\int_{Q_1}^{Q_2} H(z)dz$.

Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$, $Q \in \Omega$ et définissons le 1-cocycle :

$$\begin{aligned} c_{\mathscr{L},Q}(\Phi) : \Gamma_1^p(N) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee) \\ \gamma &\mapsto c_{\mathscr{L},Q}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j) \overset{\text{déf}}{=} \int_Q^{\gamma Q} \Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z) z^j dz \end{aligned}$$

où $\Phi(\{r_2\}-\{r_1\}) \in O(k)$ est vu comme fonction rigide analytique sur Ω. Via l'identification (25), on a :

$$c_{\mathscr{L},Q}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\}) = \int_Q^{\gamma Q} \Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z)(T-z)^{k-2} dz. \tag{30}$$

Par **[33]**, preuve du Th.4, le 1-cocycle $c_{0,Q}(\Phi_F^\pm)$ (pour le choix $\mathscr{L} = 0$) est le même lorsque $\chi = 1$ que le 1-cocycle noté $\widetilde{lc}_{f,Q}$ dans **[25]**, §5.1. On vérifie que la classe de $c_{\mathscr{L},Q}(\Phi)$ dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))$ ne dépend pas de Q et on la note simplement $c_{\mathscr{L}}(\Phi)$. En particulier, $c_0(\Phi_F^\pm)$ est un élément de $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f$ et $w_\infty c_0(\Phi_F^\pm) = \pm c_0(\Phi_F^\pm)$ (**[25]**, §5.2).

Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$, $\sigma \in \mathscr{S}(\mathscr{B}\mathscr{T})$ et définissons le 1-cocycle :

$$\begin{aligned} c_{\infty,\sigma}(\Phi) : \Gamma_1^p(N) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee) \\ \gamma &\mapsto c_{\infty,\sigma}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\alpha \in [\sigma, \gamma\sigma]} \Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z^j \otimes [\alpha]) \end{aligned}$$

où $[\sigma, \gamma\sigma]$ est l'ensemble des arêtes orientées reliant σ à $\gamma\sigma$, $\Phi(\{r_2\}-\{r_1\}) \in O(k)$ est vu dans $(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ par la surjection $O(k) \twoheadrightarrow (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes_E \mathrm{St})^\vee$ (cf. §3.1) et où $[\alpha]$ est l'image de $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times$ dans $E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times]$. Le 1-cocycle $c_{\infty,\sigma}(\Phi_F^\pm)$ est le même lorsque $\chi = 1$ que le 1-cocycle noté $\widetilde{oc}_{f,s}$ dans **[25]**, §5.1. La classe de $c_{\infty,\sigma}(\Phi)$ dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))$ ne dépend pas de σ et on la note simplement $c_\infty(\Phi)$. En particulier, on voit que $c_\infty(\Phi_F^\pm) = c_f^\pm$ dans $H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, (\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee))^f$ (cf. Prop.4.4.2).

Lemme 4.4.3. — *Il existe $\mathscr{L}^+(f) \in E$ (resp. $\mathscr{L}^-(f) \in E$) unique tel que :*

$$c_0(\Phi_F^+) = \mathscr{L}^+(f) c_\infty(\Phi_F^+)$$

(resp. avec $-$).

Démonstration. — C'est une conséquence directe de ce qui précède et du (ii) de la Prop.4.4.2. □

4.5. Invariant $\mathscr{L}$ et symboles modulaires. — On rassemble ce qui précède avec la suite exacte (9) du §3.1 pour étudier l'espace de symboles modulaires $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathscr{L}))^f$.

Lemme 4.5.1. — *Pour tout $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$, on a $c_{\mathscr{L}}(\Phi) = c_0(\Phi) + \mathscr{L} c_\infty(\Phi)$.*

Démonstration. — Si $Q \in \Omega$ se projette sur un sommet $\sigma_Q \in \mathscr{S}(\mathscr{BT})$ par la flèche de « réduction » (voir e.g. [**34**]), on a plus précisément $c_{\mathscr{L},Q}(\Phi) = c_{0,Q}(\Phi) + \mathscr{L} c_{\infty,\sigma_Q}(\Phi)$: en remarquant que $\Phi(\{r_2\} - \{r_1\})(z^j \otimes [\alpha])$ n'est autre que le résidu $\mathrm{res}_\alpha(z^j \Phi(\{r_2\} - \{r_1\})(z)dz)$ (cf. [**4**], §5.2), l'argument est le même que celui de [**4**], Prop. 5.2.2. □

Le résultat qui suit est essentiel :

Théorème 4.5.2. — *(i) On suppose $k > 2$. Pour tout $\mathscr{L} \in E$, la surjection $O(k, \mathscr{L}) \twoheadrightarrow O(k)$ induit une injection :*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathscr{L})) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$$

et on a :

$$\Phi_F^{\pm} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathscr{L})) \Leftrightarrow \mathscr{L} = -\mathscr{L}^{\pm}(f).$$

(ii) On suppose $k = 2$. Pour tout $\mathscr{L} \in E$, la surjection $O(2, \mathscr{L}) \twoheadrightarrow O(2)$ induit une injection :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2, \mathscr{L}))^f \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2))^f$$

et on a :

$$\Phi_F^{\pm} \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(2, \mathscr{L}))^f \Leftrightarrow \mathscr{L} = -\mathscr{L}^{\pm}(f).$$

Démonstration. — Pour tout k, la suite exacte (9) donne lieu à une suite exacte courte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$-équivariante :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, O(k, \mathscr{L})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, O(k)) \to 0$$

et à un début de suite exacte longue commutant aux opérateurs de Hecke :

$$\begin{aligned}(31)\quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)}) \longrightarrow \\ \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathscr{L})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k)) \xrightarrow{\delta_{\mathscr{L}}} \\ H^1(\Gamma_1^p(N), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)})).\end{aligned}$$

Calculons $\delta_{\mathscr{L}}$. Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))$ et $\widetilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, O(k, \mathscr{L}))$ relevant Φ, alors $\delta_{\mathscr{L}}(\Phi)$ est la classe du 1-cocycle $\gamma \mapsto \gamma(\widetilde{\Phi}) - \widetilde{\Phi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0, \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \varepsilon(\det)^{-(k-2)})$. Pour $r_1, r_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})^2$ et $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$, $\gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1} r_2\} - \{\gamma^{-1} r_1\})) - \widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\})$ est un polynôme en z de degré au plus $k-2$ où $\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1} r_2\} - \{\gamma^{-1} r_1\})$ et $\widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\})$ sont ici vus comme fonctions « $\log_{\mathscr{L}}$-rigides » de la variable $z \in \Omega$ (cf. §3.1). Changeant z en T, on a donc pour tout $z_0 \in \Omega$ l'égalité dans $\mathbb{C}_p[T]$:

$$\begin{aligned}(32)\quad \gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1} r_2\} - \{\gamma^{-1} r_1\})) - \widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\}) = \\ \sum_{i=0}^{k-2} \gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1} r_2\} - \{\gamma^{-1} r_1\}))^{(i)}(z_0) \frac{(T - z_0)^i}{i!} \\ - \sum_{i=0}^{k-2} \widetilde{\Phi}(\{r_2\} - \{r_1\})^{(i)}(z_0) \frac{(T - z_0)^i}{i!}\end{aligned}$$

où (i) en exposant est la dérivée i-ième par rapport à z. Mais par [4], Lem. 5.1.4 (modulo la modification sur l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, cf. §3.1), on a dans $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{C}_p^2$:

$$\sum_{i=0}^{k-2}\gamma(\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\}))^{(i)}(z_0)\frac{(T-z_0)^i}{i!}=$$
$$\gamma\Big(\sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{\gamma^{-1}r_2\}-\{\gamma^{-1}r_1\})^{(i)}(\gamma^{-1}z_0)\frac{(T-\gamma^{-1}z_0)^i}{i!}\Big).$$

Par (32) appliqué à $z_0=\gamma z_Q$ pour $Q\in\Omega$ fixé, on a $\delta_{\mathscr{L}}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})=X(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})-Y(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})$ où $X(\gamma),Y(\gamma)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\varepsilon(\det)^{-(k-2)})$ sont donnés par $X(\gamma)\overset{\text{déf}}{=}\gamma(\phi)-\phi$ avec $\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\varepsilon(\det)^{-(k-2)})$, $\phi(\{r_2\}-\{r_1\})\overset{\text{déf}}{=}\sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{r_2\}-\{r_1\})^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}$ et :

$$\begin{aligned}Y(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})&\overset{\text{déf}}{=}\sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{r_2\}-\{r_1\})^{(i)}(\gamma z_Q)\frac{(T-\gamma z_Q)^i}{i!}\\&\qquad-\sum_{i=0}^{k-2}\widetilde{\Phi}(\{r_2\}-\{r_1\})^{(i)}(z_Q)\frac{(T-z_Q)^i}{i!}\\&=\frac{1}{(k-2)!}\int_Q^{\gamma Q}\Phi(\{r_2\}-\{r_1\})(z)(T-z)^{k-2}dz\\&\overset{(30)}{=}\frac{1}{(k-2)!}c_{\mathscr{L},Q}(\Phi)(\gamma)(\{r_2\}-\{r_1\})\end{aligned}$$

(la deuxième égalité résulte d'un calcul simple). Puisque $X(\gamma)$ est un cobord, on a finalement dans $H^1(\Gamma_1^p(N),\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(D_0,\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2\otimes\varepsilon(\det)^{-(k-2)}))$ avec le Lem.4.5.1 :

$$\delta_{\mathscr{L}}(\Phi)=-\frac{1}{(k-2)!}c_{\mathscr{L}}(\Phi)=-\frac{1}{(k-2)!}(c_0(\Phi)+\mathscr{L}c_\infty(\Phi)).$$

Donc, par le Lem.4.4.3 et le fait que $c_\infty(\Phi_F^\pm)=c_f^\pm\neq 0$:

$$\delta_{\mathscr{L}}(\Phi_F^\pm)=0\Leftrightarrow c_0(\Phi_F^\pm)+\mathscr{L}c_\infty(\Phi_F^\pm)=0\Leftrightarrow\mathscr{L}=-\mathscr{L}^\pm(f).\tag{33}$$

Si $k>2$, par le (i) de la Prop.4.3.2, le terme de gauche dans la suite exacte (31) est nul d'où la première injection et il est clair que $\Phi_F^\pm\in\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,O(k,\mathscr{L}))$ si et seulement si $\mathscr{L}=-\mathscr{L}^\pm(f)$ par (33). Si $k=2$, (31) induit une autre suite exacte longue avec partout des f en exposant et on utilise le Cor.4.3.3, le (i) de la Prop.4.4.2 et encore (33) (noter que $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,E)$ est un E-espace vectoriel de dimension finie, de même que $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0,O(2))^f$, et que si $0\to V_1\to V_2\to V_3\to 0$ est une suite exacte de E-espaces vectoriels de dimension finie sur laquelle agissent les opérateurs de Hecke avec $V_1^f=0$, alors $V_2^f\xrightarrow{\sim}V_3^f$). □

Pour tout $\mathscr{O}_E$-module M muni d'une action de T_ℓ, S_ℓ et w_∞, on note $M^{f,\pm}\overset{\text{déf}}{=}\{x\in M^f\mid w_\infty x=\pm x\}$.

Corollaire 4.5.3. — *Soit $\mathscr{L} \in E$.*
(i) Si $\mathscr{L} \neq -\mathscr{L}^{\pm}(f)$, on a $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))^{f,\pm} = 0$.
(ii) Si $\mathscr{L} = -\mathscr{L}^{\pm}(f)$, on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))^{f,\pm} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^{f,\pm} = E\Phi_F^{\pm}.$$

On va voir dans la suite que l'on a $\mathscr{L}^+(f) = \mathscr{L}^-(f)$.

5. Applications

On rassemble les énoncés du §2, du §3 et du §4, dont on conserve les notations, pour démontrer la Prop.1.1.5, le Cor.1.1.6, le Th.1.1.2 et le Cor.1.1.7 de l'introduction (Prop.5.1.1, Th.5.1.6, Th.5.1.7 et Cor.5.2.5 ci-dessous).

5.1. Applications à la cohomologie étale complétée. — On montre les principaux résultats de l'introduction.

On fixe une forme modulaire f comme au §4.2. On a alors :

$$\pi_p(f) = \mathrm{St} \otimes \mathrm{nr}(a_p^{-1})$$

où $\mathrm{nr}(\lambda)$ désigne le caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^{\times}$ qui envoie p sur λ.

Proposition 5.1.1. — *(i) On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, O(k) \otimes \mathrm{nr}(p^{-\frac{k-2}{2}} a_p)\big)^f = \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f.$$

(ii) Soit $\mathscr{L} \in E$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\Gamma}_1^p(N)}\big(D_0, O(k,\mathscr{L}) \otimes \mathrm{nr}(p^{-\frac{k-2}{2}} a_p)\big)^f = \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))^f.$$

Démonstration. — Comme W_p normalise $\Gamma_1^p(N)$ dans $\widetilde{\Gamma}_1^p(N)$, il suffit de montrer (i) par le Cor.4.5.3. Il suffit pour cela de voir que tout $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f$ est automatiquement invariant par W_p à condition de tordre $O(k)$ par le caractère non ramifié $\mathrm{nr}(p^{-\frac{k-2}{2}} a_p)$. Par le Cor.4.3.3, il suffit donc de montrer $W_p(\Phi_F^{\pm}) = p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1} \Phi_F^{\pm}$. Par le (ii) de la Prop.4.3.2 et le Cor.4.2.2, il suffit de faire de même avec $\phi_F^{\pm}$. On calcule à partir de (24) :

$$\begin{aligned}
W_p(\Phi_F^{\pm})(\{r_2\}-\{r_1\})(T^j \otimes [\alpha]) &= \Phi_F^{\pm}(\{W_p^{-1} r_2\} - \{W_p^{-1} r_1\})(W_p^{-1}(T^j) \otimes [W_p^{-1}\alpha]) \\
&= p^{-\frac{k-2}{2}} \Big(\int_{W_p^{-1} r_1}^{W_p^{-1} r_2} F(W_p^{-1}\alpha, z) \frac{(W_p z)^j dz}{(pNwz + pt)^{2-k}} \Big)^{\pm} \\
&= p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1} \Big(\int_{W_p^{-1} r_1}^{W_p^{-1} r_2} F(\alpha, W_p z)(W_p z)^j d(W_p z) \Big)^{\pm} \\
&= p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1} \Big(\int_{r_1}^{r_2} F(\alpha, z) z^j dz \Big)^{\pm} \\
&= p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1} \Phi_F^{\pm}(\{r_2\} - \{r_1\})(T^j \otimes [\alpha])
\end{aligned}$$

où l'on rappelle que $W_p = \begin{pmatrix} pu & v \\ pNw & pt \end{pmatrix}$ (cf. §4.2) et où l'on a utilisé (21) sous la forme :

$$F(W_p^{-1}\alpha, z) = \frac{p^{k-1}}{a_p} F(\alpha, W_p z)(pNwz + pt)^{-k}. \qquad \square$$

Dans la suite, on pose $\lambda \overset{\text{déf}}{=} p^{\frac{k-2}{2}} a_p^{-1}$.

Corollaire 5.1.2. — *(i) On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k)\otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))\otimes E\big)^f \quad \simeq \quad \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f.$$

(ii) Soit $\mathscr{L} \in E$, on a des isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathscr{L})\otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))\otimes E\big)^f \quad \simeq \quad \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))^f.$$

Démonstration. — Il suffit de combiner la Prop.5.1.1 et le Th.2.4.2. $\square$

Corollaire 5.1.3. — *On a $\mathscr{L}^+(f) = \mathscr{L}^-(f)$.*

Démonstration. — Si $\mathscr{L}^+(f) \neq \mathscr{L}^-(f)$, alors par le Cor.4.5.3, on a par exemple $\dim_E \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, -\mathscr{L}^+(f)))^f = 1$ c'est-à-dire par le (ii) du Cor.5.1.2 :

$$\dim_E \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,-\mathscr{L}^+(f))\otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))\otimes E)^f\big) = 1.$$

Cet espace est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui agit via son action sur $(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))\otimes E)^f$. Or, sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))$, donc sur l'espace ci-dessus, on a les relations d'Eichler-Shimura $\mathrm{Frob}_\ell^{-2} + T_\ell \mathrm{Frob}_\ell^{-1} + \ell S_\ell = 0$ pour $\ell \nmid Np$ où Frob_ℓ est un Frobenius arithmétique en ℓ. Comme la forme f est parabolique, on voit que l'espace ci-dessus ne peut être de dimension 1 d'où forcément $\mathscr{L}^+(f) = \mathscr{L}^-(f)$. $\square$

On note $\widetilde{\mathscr{L}}(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{L}^+(f) = \mathscr{L}^-(f)$ la valeur commune. On a en fait :

***Théorème 5.1.4* ([3], [10], [12])**. — *On a $\widetilde{\mathscr{L}}(f) = \mathscr{L}(f)$.*

Pour déduire ce résultat (lorsque $k > 2$) de [**10**] (et du Cor.5.2.4 ci-après), on renvoie à la preuve de [**16**], Th.7.10.1. Une autre méthode, lorsque k est pair, consiste à passer par les fonctions L. Il est montré dans [**14**], §3 pour $k = 2$, dans [**25**], §6, §7 pour $k > 2$ pair, et aussi (plus directement) dans [**15**], §5 pour tout k pair, que $\widetilde{\mathscr{L}}(f)$ mesure, à une période près, le rapport entre la dérivée en $k/2$ de la fonction L p-adique de f (convenablement tordue) et la valeur en $k/2$ de la fonction L complexe de f (idem). Or, il est montré dans [**19**] et [**32**] que ce même rapport est précisément l'invariant $\mathscr{L}(f)$ associé à f. On peut en déduire comme cela l'égalité du Th.5.1.4 pour k pair.

Comme le Th.5.1.4 est indépendant des méthodes de cet article, on conserve la valeur $\widetilde{\mathscr{L}}(f)$ dans la suite de cette partie. Du Cor.5.1.3 et du Cor.4.5.3, on déduit immédiatement :

Corollaire 5.1.5. — *Soit $\mathscr{L} \in E$.*
(i) Si $\mathscr{L} \neq -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$, on a $\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))^f = 0$.
(ii) Si $\mathscr{L} = -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k,\mathscr{L}))^f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k))^f = E\Phi_F^+ \oplus E\Phi_F^-.$$

Rappelons que $\widehat{H}^1_*$ signifie $\widehat{H}^1$ ou $\widehat{H}^1_{\mathrm{par}}$ ou $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}$ (cf. §2.1).

Théorème 5.1.6. — (i) *Si $\mathscr{L} \neq -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathscr{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_*(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big) = 0$$

(ii) *Si $\mathscr{L} = -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$, on a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathscr{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_*(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big) \simeq \sigma(f)^\vee.$$

Démonstration. — Par le Lem.2.1.4, il suffit de démontrer le cas $* = \mathrm{c}$. Le (i) se déduit du (i) du Cor.5.1.5 et du (ii) du Cor.5.1.2. Par le (ii) du Cor.5.1.5 et le (ii) du Cor.5.1.2, on voit que la dimension (sur E) du membre de gauche dans (ii) est 2 et avec le (i) du Cor.5.1.2 qu'il est isomorphe à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big).$$

Or, si B est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire (sur E), on a une injection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}, B) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B(k), B)$$

puisque $B(k)$ est la complétion unitaire « minimale » de $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2 \otimes \mathrm{St}$ (cf. §3.1) de sorte que l'espace en (ii) contient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Sym}^{k-2}E^2 \otimes \pi_p(f), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N)) \otimes E)^f\big).$$

Via l'injection Ψ_E du §2.2 et en se débarrassant des $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2$, cet espace contient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\pi_p(f), \varinjlim H^1_{\mathrm{c}}\big(Y(K_1^p(N)K(p^r)), (\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)\big)$$

qui est exactement la représentation galoisienne $\sigma(f)^\vee$ puisque f est nouvelle. On conclut par un argument évident de dimensions. □

En passant aux vecteurs localement analytiques, on voit en particulier que $(\widehat{H}^1_*(K_1^p(N)) \otimes E)^f$ *contient* la représentation localement analytique $\Sigma(k, -\widetilde{\mathscr{L}}(f))$ du §3.1 convenablement tordue.

Théorème 5.1.7. — *Soit $\mathscr{L} \in E$.*
(i) *On a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,\mathscr{L}) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{\pi}_p(f)\big) = 0$ si $\mathscr{L} \neq -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$.*
(ii) *Si $k > 2$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k, -\widetilde{\mathscr{L}}(f)) \otimes \mathrm{nr}(\lambda), \widehat{\pi}_p(f)\big) = E$.*

Démonstration. — Le (i) découle du (i) du Th.5.1.6. En notant + la partie sur laquelle la conjugaison complexe agit par l'identité, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))\otimes \mathrm{nr}(\lambda),(\widehat{H}^1_c(K_1^p(N))\otimes E)^{f,+}\big)=(\sigma(f)^\vee)^+\simeq E$$

par le (ii) du Th.5.1.6. De plus, cet unique morphisme (à scalaire près) induit sur $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes\pi_p(f)\subset B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))\otimes\mathrm{nr}(\lambda)$ via Ψ_E l'unique plongement équivariant (à scalaire près) :

$$\iota:\mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes\pi_p(f)\hookrightarrow \mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes\big(\varinjlim H^1_{\mathrm{c}}\big(Y(K_1^p(N)K(p^r)),(\widetilde{\mathrm{Sym}}^{k-2}E^2)^\vee\big)\big)^{f,+}.$$

En définissant $\widehat{\pi}_p(f)$ via ce plongement (cf. Prop.2.2.3), on voit qu'il induit pour $k>2$ un unique (à scalaire près) morphisme continu non nul comme en (ii) puisque, dans ce cas, $\mathrm{Sym}^{k-2}E^2\otimes\pi_p(f)$ est dense dans $B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))\otimes\mathrm{nr}(\lambda)$ (cf. §3.1). □

Remarque 5.1.8. — Si $k=2$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(2,\mathscr{L})\otimes\mathrm{nr}(\lambda),\widehat{\pi}_p(f)\big)=0$ pour tout $\mathscr{L}\in E$ car, dans ce cas, $\widehat{\pi}_p(f)$ est simplement à torsion près le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(2)$.

Corollaire 5.1.9. — *L'unique (à multiplication par un scalaire non-nul près) entrelacement non nul* $B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))\otimes\mathrm{nr}(p^{\frac{k-2}{2}}a_p^{-1})\to\widehat{\pi}_p(f)$ *du Th.5.1.7 lorsque* $k>2$ *est un isomorphisme topologique.*

Démonstration. — Il est clair que l'image de ce morphisme est dense dans $\widehat{\pi}_p(f)$. Comme $\widehat{\pi}_p(f)$ et $B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))$ sont admissibles (Prop.2.2.3 et **[10]**, Th.5.24), ce morphisme est surjectif. Comme $B(k,-\widetilde{\mathscr{L}}(f))$ est topologiquement irréductible (**[10]**, Cor.5.21), il est aussi injectif, et donc est un isomorphisme topologique. □

5.2. Applications aux distributions p-adiques de Mazur, Tate et Teitelbaum. — On montre comment, pour $k>2$, l'invariant $\widetilde{\mathscr{L}}(f)$ précédent (qui est donc en fait égal à l'invariant $\mathscr{L}(f)$ par le Th.5.1.4) peut se voir directement sur les distributions p-adiques de Mazur, Tate et Teitelbaum associées à f dans **[22]** et convenablement prolongées de $\mathbb{Z}_p^\times$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.

On reprend la forme f du paragraphe précédent. On rappelle (Th.3.2.2) que $O(k)^{\mathrm{b}}$ est le E-espace vectoriel des distributions p-adiques tempérées d'ordre $(k-2)/2$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ à l'infini telles que $\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)}z^j\mu(z)=0$ si $\mu\in O(k)^{\mathrm{b}}$ et $j\in\{0,\cdots,k-2\}$. On rappelle aussi les notations $D(\infty,n)\overset{\text{déf}}{=}\{z\in\mathbb{Q}_p\mid \mathrm{val}(z)\le -n\}$ et $D(a,n)\overset{\text{déf}}{=}\{z\in\mathbb{Q}_p\mid \mathrm{val}(z-a)\ge n\}$ où $a\in\mathbb{Q}_p$ et $n\in\mathbb{Z}$. Le théorème qui suit et sa preuve sont de simples variantes de **[22]**, §I.11 :

Théorème 5.2.1. — *Pour tout* $c\in\mathbb{Z}$ *tel que* $(c,p)=1$ *et tout* $\nu\in\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, *il existe une unique distribution* $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}\in O(k)^{\mathrm{b}}$ *telle que pour tout* $j\in\{0,\cdots,k-2\}$, *tout* $n\in\mathbb{Z}$ *et tout* $a\in\mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ *tel que* $\overline{a}=\nu$ *dans* $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$:

$$\int_{D(a,n)}z^j\mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z)\overset{\text{déf}}{=}-\frac{1}{a_p^n}\Big(\int_{-\frac{a}{p^nc}}^{\infty}f(z)(a+p^ncz)^j\,dz\Big)^{\pm}\in E. \tag{34}$$

Démonstration. — Notons que $\big(\int_{-\frac{a}{p^n c}}^{\infty} f(z)(a+p^n cz)^j dz\big)^{\pm}$ dépend de a modulo $p^n c$ et donc en particulier de ν. Commençons par l'unicité de $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$. Soit $\mu \in O(k)^{\mathrm{b}}$ tel que $\int_{D(a,n)} z^j \mu(z) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, on a aussi :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \mu(z) = \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} z^j \mu(z) - \int_{D(0,-n+1)} z^j \mu(z) = 0 - 0 = 0$$

donc μ est nul contre toutes les fonctions localement polynomiales de degré (local) au plus $k-2$ de $\Sigma(k)$, c'est-à-dire $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \mathrm{St}$ (cf. §3.1). Mais ces fonctions sont denses dans $B(k)$ d'où la nullité de μ (cf. §3.2) et l'unicité de $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k)^{\mathrm{b}}$. Montrons maintenant l'existence de $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ et vérifions d'abord que $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ est bien défini sur $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \mathrm{St}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit a quelconque dans $\mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $\mathrm{val}(a) = -n+1$ et $\overline{a} = \nu$ dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ (de tels a existent), alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) = D(\infty, n) \amalg D(a, -n+1)$ de sorte que :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = -\int_{D(a,-n+1)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) \tag{35}$$

est bien défini pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$. Soit $a \in \mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $\overline{a} = \nu$ dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $I_{a,n} \subset a + p^n c\mathbb{Z}$ un ensemble de p éléments $\{b\}$ tels que $\{b-a\}$ est un système de représentants de $p^n c\mathbb{Z}/p^{n+1}c\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors $D(a,n) = \amalg_{b \in I_{a,n}} D(b, n+1)$ et un calcul immédiat utilisant :

$$\int_{\mp \frac{b}{p^{n+1}c}}^{\infty} f(z)\Big(z \pm \frac{b}{p^{n+1}c}\Big)^j dz = \frac{1}{p^{j+1}} \int_0^{\infty} f\Big(\frac{z}{p} \mp \frac{b}{p^{n+1}c}\Big) z^j dz$$

et $(T_p f)(z \mp \frac{a}{p^n c}) = \frac{1}{p} \sum_{b \in I_{a,n}} f\big(\frac{z}{p} \mp \frac{b}{p^{n+1}c}\big) = a_p f(z \mp \frac{a}{p^n c})$ donne :

$$\int_{D(a,n)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = \sum_{b \in I_{a,n}} \int_{D(b,n+1)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z). \tag{36}$$

Soit $I_{\infty,n} \subset p^{-n}\mathbb{Z}$ un système de représentants de $\big(p^{-n}\mathbb{Z}/p^{-n+1}\mathbb{Z}\big)^{\times}$ dont la réduction dans $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ vaut ν, on a $D(\infty, n) = \big(\amalg_{b \in I_{\infty,n}} D(b, -n+1)\big) \amalg D(\infty, n+1)$ et le même calcul que précédemment combiné avec (35) donne encore :

$$\int_{D(\infty,n)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = \int_{D(\infty,n+1)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) + \sum_{b \in I_{\infty,n}} \int_{D(b,-n+1)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z). \tag{37}$$

Les égalités (36) et (37) assurent que $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ est bien défini sur $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes \mathrm{St} \subset \Sigma(k)$. Pour savoir que $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ se prolonge sur toutes les fonctions de $B(k)$, c'est-à-dire définit bien un élément de $O(k)^{\mathrm{b}}$, il suffit de montrer qu'il existe $C_{f,c,\nu} \in E$ tel que pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, on a $\int_{D(\infty,n)} z^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) \in C_{f,c,\nu} p^{n(\frac{k-2}{2}-j)} \mathscr{O}_E$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\int_{D(a,n)} (z-a)^j \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) \in C_{f,c,\nu} p^{n(j-\frac{k-2}{2})} \mathscr{O}_E$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a \in \mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ (cf. §3.2). Cela résulte facilement de (34), du §4.1, de (35) et du fait que $\mathrm{val}(a_p) = \frac{k-2}{2}$ (cf. (18)). □

Il y a des relations dans $O(k)^{\mathrm{b}}$ entre les $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$, cf. Cor.5.2.3 ci-dessous.

Le résultat suivant, essentiellement dû à Darmon ($k=2$) et Orton ($k>2$, cf. **[25]**, §6.3) mais dont on redonne une preuve, montre que l'on peut retrouver les distributions $\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ par une « spécialisation » convenable des symboles modulaires $\Phi^{\pm}_F \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k)^{\mathrm{b}})$ du §4.3 :

Proposition 5.2.2. — *Pour $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,p)=1$ et pour $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, on a dans $O(k)^{\mathrm{b}}$:*

$$\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big(\Phi^{\pm}_F\big(\{\infty\} - \{-\frac{\nu}{c}\}\big)\Big) = -\frac{1}{c^{k-2}} \mu^{\pm}_{f,c,\nu}$$

où l'on désigne encore par ν un relevé quelconque de ν dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \big(\phi^{\pm}_F\big(\{\infty\} - \{-\frac{\nu}{c}\}\big)\big)$ coïncide avec $-\frac{1}{c^{k-2}}\mu^{\pm}_{f,c,\nu}$ sur $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes_E \mathrm{St}$. Comme les deux distributions sont par construction nulles sur les polynômes de degré au plus $k-2$, on peut oublier le point à l'infini et se limiter à l'image dans $\Sigma(k)$ des fonctions de $C(k)$ de la forme $z^j \mathbf{1}_{D(a,n)}$ où $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}p^{\mathbb{Z}}$ tel que $a \equiv \nu\ (c)$ et $\mathbf{1}_{D(a,n)}$ est la fonction caractéristique de $D(a,n)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que, par l'application $\underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes_E E[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^{\times}] \twoheadrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}^{k-2} E^2 \otimes_E \mathrm{St} \hookrightarrow \Sigma(k)$, $T^j \otimes [\alpha_0] \mapsto z^j \mathbf{1}_{D(0,0)}$ et $T^j \otimes \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\alpha_0] \mapsto z^j \mathbf{1}_{D(a,n)}$. Supposons d'abord n impair. On a par (24) :

$$\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big(\Phi^{\pm}_F\big(\{\infty\} - \{-\frac{\nu}{c}\}\big)\Big)\Big(T^j \otimes \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\alpha_0]\Big) =$$

$$\phi^{\pm}_F\big(\{\infty\} - \{-\frac{\nu}{c}\}\big)\Big(\begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (T^j) \otimes \begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\alpha_0]\Big)$$

$$= \frac{1}{c^{k-2}} \Big(\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty} F(\alpha, z)(cz+\nu)^j dz \Big)^{\pm}$$

où :

$$\alpha \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} c & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0 = \begin{pmatrix} p^n & \frac{a-\nu}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha_0 = p^{-\frac{n+1}{2}} \begin{pmatrix} p^n & \frac{a-\nu}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W_p \overline{\alpha}_0.$$

Les propriétés (20) et (ii) de F donnent :

$$F(\alpha, z) = -\frac{\chi(p)^{-\frac{n+1}{2}} \chi(p) p^{-\frac{k(n+1)}{2}}}{(-Nwz'+u)^k} F(\alpha_0, W_p^{-1} z') = -\chi(p)^{\frac{1-n}{2}} \frac{p^{k-1}}{p^{\frac{k(n+1)}{2}}} (f|_{W_p^{-1}})(z')$$

où $z' = \begin{pmatrix} p^n & \frac{a-\nu}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} z$ (noter que l'on utilise *ici* $a \equiv \nu\ (c)$). L'intégrale précédente vaut donc en utilisant (19) et (18) :

$$\frac{\chi(p)^{-\frac{1-n}{2}} p^{k-1}}{p^{\frac{k(n+1)}{2}} c^{k-2} a_p} \Big(\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty} f(z')(cz+\nu)^j dz \Big)^{\pm} = \frac{p^{-n}}{c^{k-2} a_p^n} \Big(\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty} f(z')(cz+\nu)^j dz \Big)^{\pm}.$$

On vérifie enfin par un changement de variables l'égalité :

$$\int_{-\frac{\nu}{c}}^{\infty} f(z')(cz+\nu)^j dz = p^n \int_{-\frac{a}{p^n c}}^{\infty} f(z)(a+p^n cz)^j dz$$

d'où la même égalité avec $\pm$ ce qui achève la preuve pour n impair au vu de (34). Pour n pair, l'introduction de W_p et l'usage de la formule (19) sont inutiles : on a un calcul analogue plus simple que l'on laisse au lecteur. □

Corollaire 5.2.3. — *Soit* $(c, c') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *tel que* $(c,p) = (c',p) = 1$ *et* $(\nu, \nu') \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/c'\mathbb{Z}$ *tel qu'il existe des relevés encore notés* ν *et* ν' *dans* $\mathbb{Z}$ *vérifiant* $\nu/c = \nu'/c'$, *alors dans* $O(k)^{\mathrm{b}}$:

$$\mu^{\pm}_{f,c,\nu} = \frac{c^{k-2}}{c'^{k-2}} \begin{pmatrix} \frac{c}{c'} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mu^{\pm}_{f,c',\nu'}).$$

Des résultats du §5.1, on déduit alors :

Corollaire 5.2.4. — *Supposons* $k > 2$. *Il existe un unique* $\mathscr{L} = -\widetilde{\mathscr{L}}(f) \in E$ *tel que, pour tout* $c \in \mathbb{Z}$ *tel que* $(c,p) = 1$ *et tout* $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, *on a* $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k, \mathscr{L})^{\mathrm{b}} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$.

Démonstration. — Par le (ii) du Cor.5.1.5, le (iii) de la Prop.4.3.2 et la Prop.5.2.2, on a $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k, -\widetilde{\mathscr{L}}(f))^{\mathrm{b}} \subset O(k)^{\mathrm{b}}$ pour tout $c \in \mathbb{Z}$ tel que $(c,p) = 1$ et tout $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$. Inversement, supposons $\mu^{\pm}_{f,c,\nu} \in O(k, \mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ pour tout c, ν. Soit $r \in \mathbb{Q}$, il est facile de trouver $\gamma \in \Gamma_1^p(N)$ et c, ν avec $(c,p) = 1$ tels que $\gamma(\{\infty\} - \{-\frac{\nu}{c}\}) = \{\infty\} - \{r\}$, d'où $\Phi^{\pm}_F(\{\infty\} - \{r\}) \in O(k, \mathscr{L})^{\mathrm{b}}$ par la Prop.5.2.2 puisque $\Phi^{\pm}_F$ commute à $\Gamma_1^p(N)$. Donc $\Phi^{\pm}_F \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_1^p(N)}(D_0, O(k, \mathscr{L})^{\mathrm{b}})$ et $\mathscr{L} = -\widetilde{\mathscr{L}}(f)$ par le Cor.5.1.5. □

Par le Th.3.3.3, on en déduit finalement :

Corollaire 5.2.5. — *Supposons* $k > 2$ *et soit* E *une extension finie de* $\mathbb{Q}_p$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}_p}$ *contenant* E_f *et* $p^{k/2}$. *Alors il existe un unique* $\mathscr{L} = -\widetilde{\mathscr{L}}(f) \in E$ *tel que, pour tout* $c \in \mathbb{Z}$ *tel que* $(c,p) = 1$ *et tout* $\nu \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$, *on a :*

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} h(z) \mu^{\pm}_{f,c,\nu}(z) = 0$$

pour toute fonction $h : \mathbb{Q}_p \to E$ *de la forme :*

$$h(z) = \sum_{i \in I} \lambda_i (z - z_i)^{n_i} \log_{\mathscr{L}}(z - z_i)$$

où I est un ensemble fini, $\lambda_i \in E$, $z_i \in \mathbb{Q}_p$, $n_i \in \{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1, \dots, k-2\}$ et $\deg\big(\sum_{i\in I} \lambda_i (z-z_i)^{n_i}\big) < \frac{k-2}{2}$.

Références

[1] A. Ash & G. Stevens – Modular forms in characteristic l and special values of their L-functions, *Duke Math. J.* **53** (1986), p. 849–868.

[2] A. O. L. Atkin & W. C. W. Li – Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators, *Invent. Math.* **48** (1978), p. 221–243.

[3] M. Bertolini, H. Darmon & A. Iovita – Families of automorphic forms on definite quaternion algebras and Teitelbaum's conjecture, ce volume.

[4] C. Breuil – Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[5] C. Breuil & L. Berger – Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 155–211.

[6] C. Breuil & M. Emerton – Représentations p-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et compatibilité local-global, ce volume.

[7] C. Breuil & A. Mézard – Représentations semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, ce volume.

[8] H. Carayol – Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19** (1986), p. 409–468.

[9] R. Coleman & A. Iovita – Hidden structures on semi-stable curves, ce volume.

[10] P. Colmez – Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication, 2004.

[11] ———, Fonctions d'une variable p-adique, *Astérisque* **330** (2010), p. 13–59.

[12] ———, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[13] ———, Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius, ce volume.

[14] H. Darmon – Integration on $\mathscr{H}_p \times \mathscr{H}$ and arithmetic applications, *Ann. of Math.* **154** (2001), p. 589–639.

[15] M. Emerton – p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, *Duke Math. J.* **130** (2005), p. 353–392.

[16] ———, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), p. 279–393.

[17] ———, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, *Invent. Math.* **164** (2006), p. 1–84.

[18] ———, Local-global compatibility in the p-adic langlands program for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, en préparation.

[19] R. Greenberg & G. Stevens – On the conjecture of Mazur, Tate, and Teitelbaum, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 183–211.

[20] E. Grosse-Klönne – Integral structures in automorphic line bundles on the p-adic upper half plane, *Math. Ann.* **329** (2004), p. 463–493.

[21] A. Iovita & M. Spiess – Derivatives of p-adic L-functions, Heegner cycles and monodromy modules attached to modular forms, *Invent. Math.* **154** (2003), p. 333–384.

[22] B. Mazur, J. Tate & J. T. Teitelbaum – On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.

[23] L. Merel – Opérateurs de Hecke pour $\Gamma_0(N)$ et fractions continues, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **41** (1991), p. 519–537.

[24] M. Ohta – On cohomology groups attached to towers of algebraic curves, *J. Math. Soc. Japan* **45** (1993), p. 131–183.

[25] L. Orton – An elementary proof of a weak exceptional zero conjecture, *Canad. J. Math.* **56** (2004), p. 373–405.

[26] P. Schneider – *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Math., Springer, 2002.

[27] P. Schneider & J. T. Teitelbaum – Banach space representations and Iwasawa theory, *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[28] ———, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[29] J-P. Serre – Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* **46** (1977).

[30] G. Shimura – On the periods of modular forms, *Math. Ann.* **229** (1977), p. 211–221.

[31] V. Sokurov – Shimura integral of cusps forms, *Math. USSR Izv.* **16** (1981), p. 603–646.

[32] G. Stevens – Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, ce volume.

[33] J. T. Teitelbaum – Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel, *Invent. Math.* **101** (1990), p. 395–410.

[34] ———, Modular representations of PGL_2 and automorphic forms for Shimura curves, *Invent. Math.* **113** (1993), p. 561–580.

C. Breuil, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr

Astérisque
331, 2010, p. 117–178

REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, DEMI-PLAN p-ADIQUE ET RÉDUCTION MODULO p

par

Christophe Breuil & Ariane Mézard

Résumé. — On calcule par voie cohomologique la réduction modulo p de représentations p-adiques semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). Les calculs exploitent la géométrie du demi-plan p-adique. Ils permettent de retrouver certaines formules de la réduction modulo p de représentations p-adiques semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

Abstract **(Semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, p-adic half-plane and modulo p reduction)**
We compute by cohomological means the reduction modulo p of some p-adic semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). The calculations use the geometry of the p-adic upper half plane. They allow to recover some of the formulae of the reduction modulo p of p-adic semi-stable representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers, π une uniformisante de $\mathfrak{O}$ et $\mathbb{F} \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{O}/(\pi)$. Dans [**14**], Teitelbaum calcule par voie cohomologique la réduction modulo π d'un réseau invariant dans le dual (algébrique) de la représentation $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour $k \geq 2$ entier pair ($|\ |$ est la norme p-adique). Plus précisément, si $B(k)$ désigne le Banach p-adique complété de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à un quelconque $\mathfrak{O}$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$, alors le dual $B(k)^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes L$ où $\mathscr{X}$ est le schéma formel du demi-plan p-adique et ω le faisceau inversible des différentielles « régulières » sur $\mathscr{X}$. La réduction modulo π $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes \mathbb{F}$ ci-dessus est alors isomorphe à la représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2} \otimes \mathbb{F})$ qui se calcule explicitement en utilisant la géométrie de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$.

Dans [**4**], d'autres complétés de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L \mathrm{Steinberg}$ par rapport à des réseaux invariants qui ne sont pas de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ont été définis. Ils

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11F.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes semi-stables, correspondance de Langlands p-adique, demi-plan p-adique.

© Astérisque 331, SMF 2010

font intervenir un paramètre supplémentaire $\mathscr{L} \in L$ et sont notés $B(k,\mathscr{L})$. De plus, la réduction modulo π de $B(k,\mathscr{L})$, ou du dual $B(k,\mathscr{L})^*$, est reliée à la réduction modulo π des représentations p-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**4**], [**2**]) et est donc plus intéressante à étudier que celle de $B(k)$. Il était donc naturel d'essayer d'étendre le calcul cohomologique de [**14**] à ces nouvelles complétions. C'est l'objet du présent article.

On définit dans un premier temps pour k pair, $2 \leq k \leq p+1$ et $\mathscr{L} \in L$ un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sans torsion $\omega(k,\mathscr{L})$ pour la topologie de Zariski sur le schéma formel $\mathscr{X}$, extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par un faisceau cohérent. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et est construit de telle sorte que $B(k,\mathscr{L})^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes L$. Dans cet article, nous calculons $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ pour k pair, $4 \leq k \leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1.1.1. — *Supposons k pair, $4 \leq k \leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Alors, on a une suite exacte de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:*

$$0 \to \left\{ f \in \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2 \right) \otimes \omega\circ\det, a(\mathscr{L})T_p f = f \right\}$$
$$\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F} \to \left\{ f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1, T_p f = a(\mathscr{L}) f \right\} \to 0$$

où $a(\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\Big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathscr{L}-2(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i})\big)\Big) \in \mathfrak{O}$, où ω est le caractère cyclotomique modulo p (vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$), où $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ est l'induite compacte usuelle sans condition de support et où T_p est un certain opérateur de Hecke sur cette induite (voir §1.2).

Le cas $k=2$ est trivial mais se comporte un peu différemment (cf. [**4**, §4.5]) . Un corollaire immédiat de ce théorème est que, sous les conditions de l'énoncé, $B(k,\mathscr{L})$ est non nul et admissible au sens de [**12**] (cf. [**4**, Prop.4.4.4]). Mais ces résultats sont maintenant connus sans restriction sur k ou $\mathscr{L}$ par une méthode complètement différente ([**7**], [**8**]). Notons que, lorsque $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$, l'induite de gauche dans la suite exacte est nulle de sorte que l'on a dans ce cas $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1, T_p f = 0\}$. Lorsque $k \leq p-1$ (et sous les autres conditions du théorème 1.1.1), la semi-simplifiée modulo p de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ correspondant à $B(k,\mathscr{L})$ est, à une torsion convenable près, $\omega\mathrm{nr}(a(\mathscr{L})^{-1}) \oplus \mathrm{nr}(a(\mathscr{L}))$ si $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) = 0$ (où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathrm{Frob\ arith}) \overset{\text{déf}}{=} \lambda$) et la représentation irréductible de dimension 2 correspondant au caractère fondamental de niveau 2 si $\mathrm{val}(a(\mathscr{L})) > 0$ (voir [**6**]). Dans les deux cas, on retrouve bien exactement un cas particulier de la correspondance modulo p définie dans [**3**] (dualisée), de sorte que les calculs de cet article sont en quelque sorte l'analogue côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des calculs galoisiens de [**6**] pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$. Le théorème 1.1.1 se déduit aussi par une méthode complètement différente des résultats généraux de [**2**] (combinés avec les calculs de [**6**]) sur cette

correspondance modulo p. Signalons que nous avons également calculé la représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ lorsque $\mathrm{val}(\mathscr{L})<0$, ce qui fait apparaître des formules analogues à celles du théorème 1.1.1 mais différentes (voir **[6]** pour le côté Galois). Néanmoins, devant la technicité de ces calculs, nous avons finalement renoncé à les rédiger.

Donnons quelques brèves indications sur la preuve du théorème 1.1.1.

Le calcul se fait en deux étapes. Dans la première, on détermine la représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$, dans la deuxième, on détermine $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$. Contrairement au cas purement cohérent de **[14]**, ces deux représentations sont ici différentes.

Commençons par $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$. On calcule d'abord la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ où $\mathbb{P}^1$ est une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, ce qui donne (cf. §4.2) :

Proposition 1.1.2. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *:*

$$0\to\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\otimes\omega^{i+1}\circ\det\to H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})\to\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1\to 0$$

où $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *des matrices triangulaires supérieures modulo* p*.*

Puis on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de la fibre spéciale de $\mathscr{X}$ (un arbre infini de $\mathbb{P}^1$) par toutes ses composantes irréductibles. La condition de « recollement » aux points d'intersection des composantes fait apparaître une condition faisant intervenir l'opérateur de Hecke T_p et on trouve (cf. §4.4) :

Théorème 1.1.3. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$0\to\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\right)\otimes\omega^{i+1}\circ\det\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})\to$$
$$\left\{f\in\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1\mid T_pf=a(\mathscr{L})f\right\}\to 0$$

où $a(\mathscr{L})$ *est comme au théorème 1.1.1.*

Passons maintenant à $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$. Toutes les sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ se relèvent dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$. Mais toutes les sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ ne se relèvent pas dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$. Le calcul du défaut de recollement modulo p^2 des sections modulo π du théorème 1.1.3 montre que, dans $\oplus_{i=0}^{k/2-2}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\right)\otimes\omega^{i+1}\circ\det$, seules se relèvent les sections f de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2\right)\otimes\omega\circ\det$ satisfaisant $a(\mathscr{L})T_pf=f$. Mais c'est là la seule obstruction, au sens où les sections qui se relèvent modulo p^2 se relèvent alors modulo p^n pour tout n (et finalement se relèvent dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$). On obtient ainsi le théorème 1.1.1.

L'article est organisé comme suit. Dans le paragraphe 2, on rappelle la définition des espaces $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$ comme espaces de fonctions sur le demi-plan p-adique (§2.1), la définition du schéma formel $\mathscr{X}$ de ce demi-plan (§2.2) puis les calculs de Teitelbaum (§2.3). Dans le paragraphe 3, on définit les faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})$ (§3.1) et quelques variantes (§3.2). Dans le paragraphe 4, après des préliminaires sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $\mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ pour certains i (§4.1), on détermine les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.2) et $H^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.3), puis $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ et $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ (§4.4). Dans le paragraphe 5, après des considérations de cohomologie de Čech (§5.1) et quelques calculs préliminaires (§5.2), on détermine le défaut de recollement des sections de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ modulo p^2, ce qui définit des classes de Čech dans $\check{H}^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ que l'on identifie (§5.3), puis on en déduit par dévissage la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ (§5.4). Deux appendices rassemblent les calculs les plus techniques de l'article. Le premier donne des résultats combinatoires et les calculs permettant de déterminer la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$, le deuxième donne des calculs de classes de cohomologie de Čech dans $\check{H}^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ utilisés au §5.3.

Les calculs de cet article sont parfois techniques mais ont au moins l'avantage d'être entièrement géométriques. Nous ignorons si l'on peut définir un autre faisceau que $\omega(k,\mathscr{L})$ qui aurait les mêmes sections globales tensorisées par L mais donnerait lieu à des calculs plus simples. Peut-on par exemple définir un tel faisceau cohérent, ou est-on condamné à travailler avec un faisceau analogue à $\omega(k,\mathscr{L})$, c'est-à-dire mélange d'un faisceau cohérent et d'un faisceau de type fini ? Y-a-t'il une théorie intéressante de tels faisceaux « hybrides » ? Peut-on simplifier les calculs en rajoutant des puissances divisées dans la partie cohérente du faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$?

Signalons pour finir que les calculs présentés dans cet article ont aussi une valeur historique. Ce sont eux qui ont suggéré, dès juillet 2002 ([**3**],[**4**]), la définition des représentations $B(k,\mathscr{L})$, ou de leur duale $B(k,\mathscr{L})^*=H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes L$.

Le deuxième auteur remercie B. Edixhoven et V. Maillot pour plusieurs discussions.

1.2. Notations. — Dans tout cet article, on travaille avec des coefficients dans une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dont on note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, π une uniformisante et $\mathbb{F}$ le corps résiduel.

On note $G\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $K\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $I\subset K$ le sous-groupe d'Iwahori, i.e. le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo p, et N le normalisateur de I dans G. Le groupe N est engendré par les scalaires, K et la matrice $w_p\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}$.

On note val la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p)=1$, $|\ |\overset{\text{déf}}{=}p^{-\mathrm{val}}$ la norme p-adique et $\chi : G\to\{1,-1\}$ le caractère $\chi(g)\overset{\text{déf}}{=}(-1)^{\mathrm{val}(\det(g))}$. Si n, m sont des entiers positifs ou nuls, on note $\sigma(n,m)$ la représentation de dimension $n+1$ de K

sur $\mathbb{F}$ donnée par l'action à gauche suivante sur le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\oplus_{i=0}^{n}\mathbb{F}u^i$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u^i \overset{\text{déf}}{=} (ad-bc)^m(au+c)^i(bu+d)^{n-i},\ \ 0\leq i\leq n.$$

Cette action se factorise en une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On étend cette action de manière tacite à $K\mathbb{Q}_p^\times$ en faisant agir p par l'identité.

Si $x\in\mathbb{F}_p$, on note $[x]\in\mathbb{Z}_p^\times$ le représentant multiplicatif de x. Si $H\subset G$ est un sous-groupe ouvert contenant $\mathbb{Q}_p^\times$ et σ une représentation de dimension finie de H sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V, on note $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions quelconques $f:G\to V$ telles que $f(hg)=h\cdot f(g)$ $(h\in H,\ g\in G)$ muni de l'action à gauche de G donnée par $(g\cdot f)(g')\overset{\text{déf}}{=}f(g'g)$. Si $g\in G$ et $v\in V$, on note $[g,v]$ l'unique fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ à support dans Hg^{-1} telle que $[g,v](g')\overset{\text{déf}}{=}g'g\cdot v$ si $g'g\in H$. Toute fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ s'écrit de manière unique comme une somme (infinie en général) de fonctions $[g,v]$ où g parcourt un système de représentants fixé de $H\backslash G$.

Lorsque $\sigma=\sigma(n,m)$ et $H=K\mathbb{Q}_p^\times$, on dispose d'un G-entrelacement canonique $T_p:\mathrm{Ind}_H^G\sigma\to\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ donné par linéarité sur chaque $[g,v]$ par la formule ([**1**], [**3**]) :

$$T_p([g,v])\overset{\text{déf}}{=}\sum_{g'H\in G/H}[gg',\varphi(g'^{-1})(v)]$$

où $\varphi:G\to\mathrm{End}_K(\sigma(n,m))$ est l'unique fonction à support dans $H\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/p\end{smallmatrix}\right)H$ telle que $\varphi(h_1\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/p\end{smallmatrix}\right)h_2)=h_1\circ\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/p\end{smallmatrix}\right)\right)\circ h_2$ avec $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/p\end{smallmatrix}\right)\right)(u^i)=0$ si $0<i\leq n$ et $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/p\end{smallmatrix}\right)\right)(1)=1$. On en déduit en particulier la formule :

$$T_p([\mathrm{Id},1])=\sum_{y\in\mathbb{F}_p}\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ p & [y]\end{smallmatrix}\right)[\mathrm{Id},u^n]. \tag{1}$$

On peut munir les représentations $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ d'une topologie « faible » naturelle pour laquelle l'espace sous-jacent est compact et les opérateurs T_p ci-dessus continus. Néanmoins, dans cet article, nous avons pris le parti de ne pas insister sur ces aspects topologiques. Le lecteur scrupuleux pourra vérifier que toutes les applications G-équivariantes de cet article sont continues pour cette topologie.

Si V est un L-espace vectoriel topologique localement convexe, on note V^* son dual, c'est-à-dire le L-espace vectoriel des formes linéaires continues sur V.

On note $\mathbb{C}_p$ le complété p-adique de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et, si $\mathscr{L}\in L$, $\log_{\mathscr{L}}$ l'unique logarithme p-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ tel que $\log_{\mathscr{L}}(p)\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{L}$. On note ε le caractère cyclotomique p-adique $\mathbb{Q}_p^\times\to\mathbb{Z}_p^\times$: il envoie p sur 1 et est l'identité sur $\mathbb{Z}_p^\times$.

On note $H_0\overset{\text{déf}}{=}0$ et $H_n\overset{\text{déf}}{=}1+1/2+\cdots+1/n$ pour n entier >0. Pour des entiers n,m tels que $0\leq m\leq n$, on note $\binom{n}{m}$ les coefficients binômiaux habituels. Si $m<n$ ou si $m<0$, on convient que $\binom{n}{m}=0$.

2. Préliminaires

On rappelle la définition des représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$, la construction du modèle formel du demi-plan p-adique, et le calcul géométrique (dû à Teitelbaum) de la réduction modulo π de $B(k)^*$.

2.1. Rappels sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$. — Dans ce paragraphe, on rappelle la définition des représentations p-adiques $B(k)^*$ et $B(k,\mathscr{L})^*$ de G ([**4**],[**5**]) en termes de fonctions sur le demi-plan p-adique.

On munit $\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p$ de l'action à gauche de G donnée par $z\mapsto z|_g \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+c}{bz+d}$ pour $g=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G$. Soit $\mathfrak{W}\subset\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p$ l'affinoïde des points z tels que $0<|z|<1$, $|z-[x]|=1$ et $|\frac{p}{z}-[x]|=1$ pour $x\in\mathbb{F}_p^\times$. Pour $g\in G$, on pose $\mathfrak{W}_g \overset{\text{déf}}{=} \{z|_g, z\in\mathfrak{W}\}\subset\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p$. Les ouverts rigides $\mathfrak{W}_g$ recouvrent $\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p$ quand g varie. On note $O(k)_{\mathfrak{W}_g}$ le L-espace vectoriel des fonctions rigides analytiques L-rationnelles h sur $\mathfrak{W}_g$. C'est un espace de Banach pour la norme $\max_{z\in\mathfrak{W}_g}|h(z)|$ naturellement muni d'une action à gauche de $g^{-1}Ng$ par $h\mapsto h(z|_{g^{-1}ng})$. Il s'identifie aux fonctions sur $\mathfrak{W}_g$ de la forme $z\mapsto h(z|_{g^{-1}})$ avec $h\in O(k)_{\mathfrak{W}}$. On note $O(k)^0_{\mathfrak{W}}$ une boule unité quelconque de $O(k)_{\mathfrak{W}}$ stable par N et $O(k)^0_{\mathfrak{W}_g}\overset{\text{déf}}{=}\{z\mapsto h(z|_{g^{-1}}), h\in O(k)^0_{\mathfrak{W}}\}$. C'est une boule unité de $O(k)_{\mathfrak{W}_g}$.

On définit $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ comme le L-espace vectoriel des fonctions $f:\mathfrak{W}\to\mathbb{C}_p$ de la forme :

$$f(z)=h(z)+\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\sum_{i=0}^{k-2}c_{x,i}z^i\log_{\mathscr{L}}(z-[x])+\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\sum_{i=0}^{k-2}d_{x,i}z^i\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{z}-[x]\big)$$

avec $h\in O(k)_{\mathfrak{W}}$ et $c_{x,i}$, $d_{x,i}\in L$. C'est encore un espace de Banach car $O(k)_{\mathfrak{W}}$ y est d'indice fini et on note $O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}$ une boule unité quelconque de $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ stable par N (pour l'action $f\mapsto(z\mapsto f(z|_n))$). Pour $g\in G$, on définit $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}$ (resp. $O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}_g}$) comme le L-espace vectoriel (resp. le $\mathfrak{O}$-module) des fonctions $\mathfrak{W}_g\to\mathbb{C}_p$, $z\mapsto f(z|_{g^{-1}})$ avec $f\in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ (resp. $f\in O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}$). C'est encore naturellement un L-espace de Banach (resp. une boule unité). On pose enfin (cf. [**4**, §3 et §4]) :

$$\begin{aligned}
O(k) &\overset{\text{déf}}{=} \big\{f:\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p\to\mathbb{C}_p, f|_{\mathfrak{W}_g}\in O(k)_{\mathfrak{W}_g}\forall g\in G\big\}\\
O(k,\mathscr{L}) &\overset{\text{déf}}{=} \big\{f:\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p\to\mathbb{C}_p, f|_{\mathfrak{W}_g}\in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}\forall g\in G\big\}\\
O(k)^0 &\overset{\text{déf}}{=} \big\{f\in O(k), f|_{\mathfrak{W}_g}\in O(k)^0_{\mathfrak{W}_g}\forall g\in G\big\}\\
O(k,\mathscr{L})^0 &\overset{\text{déf}}{=} \big\{f\in O(k,\mathscr{L}), f|_{\mathfrak{W}_g}\in O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}_g}\forall g\in G\big\}.
\end{aligned}$$

Les espaces fonctionnels $O(k)$ et $O(k,\mathscr{L})$ sont naturellement des espaces de Fréchet, tandis que les espaces fonctionnels $O(k)^0$ et $O(k,\mathscr{L})^0$ sont naturellement des modules compacts (cf. [**4**]). De plus, $O(k)^0\otimes L$ (resp. $O(k,\mathscr{L})^0\otimes L$) est topologiquement isomorphe et de façon G-équivariante au dual tordu (muni de la topologie faible) $B(k)^*\otimes\varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (resp. $B(k,\mathscr{L})^*\otimes\varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$) d'un espace de Banach p-adique $B(k)$ (resp.

$B(k,\mathscr{L})$) muni d'une action continue de G. En fait, $B(k)$ (resp. $B(k,\mathscr{L})$) est un G-Banach p-adique unitaire au sens de [**4**] et [**5**] et admet aussi une description directe qui ne passe pas par le demi-plan p-adique (voir [**5**, §3]). Par ailleurs, $B(k)$ s'identifie avec son action de G au complété p-adique de la représentation localement algébrique $|\det|^{k/2-1}\otimes \mathrm{Sym}^{k-2}L^2\otimes_L$ Steinberg par rapport à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant de type fini sur $\mathfrak{O}[G]$ (cf. [**4**, §4]).

2.2. Rappels sur le modèle formel semi-stable de $\mathbb{C}_p-\mathbb{Q}_p$. — Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la construction explicite du modèle formel semi-stable du demi-plan p-adique.

Chaque $\mathfrak{W}_g$ pour $g\in G$ (cf. §2.1) admet un modèle formel affine naturel $\mathscr{W}_g=\mathrm{Spf}(\mathscr{A}_g)$ sur $\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})$ où :

$$\mathscr{A}_g \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathfrak{O}[u_g,v_g]}{(u_gv_g-p)}\left[\frac{1}{1-u_g^{p-1}},\frac{1}{1-v_g^{p-1}}\right]^\wedge$$

($^\wedge$ désigne le complété p-adique). Notons $\mathscr{U}_g \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Spf}(\mathfrak{O}[u_g][\frac{1}{u_g-u_g^p}]^\wedge)\subset\mathscr{W}_g$ et $\mathscr{V}_g \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Spf}(\mathfrak{O}[v_g][\frac{1}{v_g-v_g^p}]^\wedge)\subset\mathscr{W}_g$. Les schémas formels $(\mathscr{W}_g)_{g\in G}$ se recollent (pour la topologie de Zariski) en un schéma formel $\mathscr{X}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})$ via les données de recollement suivantes (voir [**13**] pour plus de détails) :

(i) $\mathscr{W}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{W}_{g'}$, $(u_{g'},v_{g'})\mapsto(v_g,u_g)$ si $g'g^{-1}=w_p$ et $(u_{g'},v_{g'})\mapsto(\frac{du_g-c}{-bu_g+a},\frac{d'v_g-c'}{-b'v_g+a'})$ si $g'g^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=w_p\left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)w_p\in I\mathbb{Q}_p^\times$;

(ii) $\mathscr{U}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{U}_{g'}$, $u_{g'}\mapsto\frac{du_g-c}{-bu_g+a}$ si $g'g^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in K\mathbb{Q}_p^\times$;

(iii) $\mathscr{V}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{V}_{g'}$, $v_{g'}\mapsto\frac{dv_g-c}{-bv_g+a}$ si $g'g^{-1}=w_p\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)w_p\in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$.

Lorsque $g=1$, on oublie dans la suite l'indice 1 dans $\mathscr{W}_1$, $\mathscr{A}_1$, u_1, etc. On a une action à droite de G sur $\mathscr{X}$ induite par $g:\mathscr{W}_{g'}\xrightarrow{\sim}\mathscr{W}_{g'g}$, $(u_{g'g},v_{g'g})\mapsto(u_{g'},v_{g'})$. Elle est telle que $\mathscr{W}$ est stable sous l'action de N, $\mathscr{U}$ est stable sous l'action de $K\mathbb{Q}_p^\times$ et $\mathscr{V}$ est stable sous l'action de $w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$. Explicitement, si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in K\mathbb{Q}_p^\times$, l'action $g:\mathscr{U}\to\mathscr{U}$ est donnée sur $f\in\mathfrak{O}[u][\frac{1}{u-u^p}]^\wedge$ par $f(u)\mapsto f(\frac{au+c}{bu+d})$ et si $g=w_p\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)w_p\in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$, l'action $g:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ est donnée sur $f\in\mathfrak{O}[v][\frac{1}{v-v^p}]^\wedge$ par $f(v)\mapsto f(\frac{av+c}{bv+d})$.

On note $X\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{X}\times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})}\mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ la fibre spéciale de $\mathscr{X}$. On voit que X est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ d'un arbre infini de $\mathbb{P}^1$, chaque $\mathbb{P}^1$ étant coupé « perpendiculairement » par un $\mathbb{P}^1$ différent en chacun de ses points fermés rationnels sur $\mathbb{F}_p$ (de sorte que chaque $\mathbb{P}^1$ coupe exactement $p+1$ autres $\mathbb{P}^1$). On vérifie que $W_g\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{W}_g\times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})}\mathrm{Spf}(\mathbb{F})=\mathrm{Spec}(A_g)$ où :

$$A_g\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{A}_g\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}=\frac{\mathbb{F}[u_g,v_g]}{(u_gv_g)}\left[\frac{1}{1-u_g^{p-1}},\frac{1}{1-v_g^{p-1}}\right]$$

est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ de l'ouvert égal à deux $\mathbb{P}^1$ se coupant « perpendiculairement » au point $(u_g, v_g) = (0,0)$ privés de leurs autres points définis sur $\mathbb{F}_p$. De même, $U_g \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{U}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ du $\mathbb{P}^1$ « horizontal » de W_g privé de tous ses points définis sur $\mathbb{F}_p$ et $V_g \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{V}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ du $\mathbb{P}^1$ « vertical » privé de ses points définis sur $\mathbb{F}_p$.

On note dans la suite C une composante irréductible quelconque de X et P un point singulier quelconque de X. On appelle « ouvert central » l'ouvert affine $W = \mathrm{Spec}(A_1) = \mathrm{Spec}(A)$ et « composante centrale » la composante C associée à la variable u de A (en termes d'arbre de Bruhat-Tits, l'ouvert central correspond à l'arête centrale non orientée et la composante centrale au sommet central). Pour chaque C, on note $d(C) \in \mathbb{N}$ la distance à la composante centrale, i.e. la longueur de la chaîne de $\mathbb{P}^1$ reliant C à la composante centrale avec la convention $d(\text{composante centrale}) \overset{\text{déf}}{=} 0$.

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$, on dit que $\mathscr{F}$ est G-équivariant si pour tout $g \in G$ l'isomorphisme $g : \mathscr{X} \xrightarrow{\sim} \mathscr{X}$ induit des isomorphismes de faisceaux de $\mathfrak{O}$-modules $g^{-1}\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$ vérifiant des relations de composition évidentes que l'on laisse au lecteur. Pour un tel faisceau, les groupes de cohomologie $H^i(\mathscr{X}, \mathscr{F}) \overset{\text{déf}}{=} H^i(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{F}) = H^i(X, \mathscr{F}) \overset{\text{déf}}{=} H^i(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{F})$ sont alors munis d'une action à gauche $\mathfrak{O}$-linéaire de G. Rappelons enfin que X étant un schéma séparé, pour définir un faisceau sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$ il suffit de le définir sur les ouverts affines de X.

2.3. Rappels sur les résultats de Teitelbaum. — Dans ce paragraphe, on rappelle le calcul cohomologique ([**14**]) pour $k \geq 4$ pair de la réduction modulo π (et aussi modulo p) de $B(k)^*$.

On note ω le faisceau inversible sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ des « différentielles régulières », c'est-à-dire l'unique faisceau cohérent tel que $\Gamma(\mathrm{Spf}(\mathscr{A}_g), \omega) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{A}_g \frac{du_g}{u_g} = \mathscr{A}_g \frac{dv_g}{v_g}$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ω^n la puissance tensorielle n-ième de ω. Les faisceaux ω^n sont G-équivariants de sorte que les groupes de cohomologie $H^i(\mathscr{X}, \omega^n)$ sont munis d'une action $\mathfrak{O}$-linéaire de G.

Théorème 2.3.1. — *Soit k un entier pair positif et non nul.*
(i) *La G-représentation $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2})$ est un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans l'espace de Banach dual $B(k)^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (cf. §2.1).*
(ii) *On a $H^1(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) = 0$.*

Démonstration. — Le (i) résulte de [**14**, Theorem 17] (voir aussi [**10**, Theorem 4.2]) et de [**4**, Proposition 4.3.5 et Proposition 4.6.1] (on peut aussi procéder comme dans la proposition 3.1.2). Le (ii) est démontré dans [**14**, Corollary 24] (voir aussi [**10**, Theorem 2.1]). □

On note $\overline{\omega} \overset{\text{déf}}{=} \omega \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}$ qui s'identifie au faisceau G-équivariant inversible des (vraies) différentielles régulières sur X (cf. [**14**]) et, pour k positif et pair, $\overline{\omega}^{k/2}$ la puissance tensorielle $k/2$-ième de $\overline{\omega}$. Si C (resp. P) est une composante irréductible de X (resp.

un point singulier de X), on note $\overline{\omega}^{k/2}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*\overline{\omega}^{k/2}$ (resp. $\overline{\omega}^{k/2}|_P \overset{\text{déf}}{=} i^*\overline{\omega}^{k/2}$) où i est l'immersion fermée $C \hookrightarrow X$ (resp. $P \hookrightarrow X$) et i^* est au sens des faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules. Par exemple $\overline{\omega}^{k/2}|_P = \mathbb{F}(\frac{du_g}{u_g})^{k/2} = \mathbb{F}(\frac{dv_g}{v_g})^{k/2}$ pour $g \in G$ convenable. On a de plus une suite exacte évidente de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-modules :

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2} \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{2}$$

où la flèche $\overline{\omega}^{k/2} \to \prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ est induite par les restrictions sur les diverses composantes irréductibles de X et la flèche $\prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P)$ est induite par les restrictions sur les divers points singuliers de X multipliées par $(-1)^{d(C)}$ (pour chaque composante C).

Remarque 2.3.2. — L'action naturelle de G sur le faisceau $\prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P)$ dans (2) (induite par $g : (du_g/u_g)^{k/2} \mapsto (du/u)^{k/2}$) doit être tordue par le caractère χ pour que la suite (2) soit G-équivariante.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe $k \geq 4$ et k pair. Soit $D \overset{\text{déf}}{=} \amalg\, P$ le diviseur des points singuliers de X et $\overline{\omega}^{k/2}(1) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{k/2}(-D)$ le sous-faisceau G-équivariant inversible de $\overline{\omega}^{k/2}$ des différentielles s'annulant aux points singuliers. On définit comme précédemment $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{k/2}(1))$ si $i : C \hookrightarrow X$ et les restrictions induisent dans ce cas un isomorphisme G-équivariant :

$$\overline{\omega}^{k/2}(1) \xrightarrow{\sim} \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C). \tag{3}$$

On a de plus les deux suites exactes, respectivement K-équivariante et G-équivariante :

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C \to \prod_{i:P\hookrightarrow C} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{4}$$

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2}(1) \to \overline{\omega}^{k/2} \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{5}$$

où le produit dans (4) est sur les points singuliers P de X contenus dans C et dans (5) sur les points singuliers P de X.

Lemme 2.3.3. — *On a* $H^1(X, \overline{\omega}^{k/2}) = H^1(X, \overline{\omega}^{k/2}(1)) = H^1(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) = 0$.

Démonstration. — La nullité des deux premiers est démontrée dans [**14**, Lemma 28] et [**10**, Theorem 2.1]. Pour le dernier, on a $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \simeq \mathscr{O}_C((k/2-1)(p+1)-k)$ et $H^1(C, \mathscr{O}_C((k/2-1)(p+1)-k)) = 0$ car $(k/2-1)(p+1)-k \geq -1$ si $k \geq 4$. □

Du lemme 2.3.3 et de (2), (3), (4) et (5), on déduit immédiatement :

Corollaire 2.3.4. — (i) *On a un isomorphisme G-équivariant* $H^0(\mathscr{X}, \omega^{k/2}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} H^0(X, \overline{\omega}^{k/2})$.

(ii) *Pour chaque composante C, on a une suite exacte :*

$$0 \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod_{P \in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0.$$

(iii) *On a un diagramme commutatif de suites exactes de G-représentations :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & \prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & H^0(X, \overline{\omega}^{k/2}) & \to & \prod_C H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C) & \to & \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & H^0(X, \overline{\omega}^{k/2}(1)) & \to & \prod_C H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) & \to & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où les deux surjections de droite sont les restrictions multipliées par $(-1)^{d(C)}$ (comparer avec la remarque 2.3.2).

Nous allons préciser les K-représentations et G-représentations supportées par certains des espaces vectoriels du corollaire 2.3.4.

Proposition 2.3.5. — (i) *Soit C la composante centrale et $n_k \overset{\text{déf}}{=} (p-1)(k/2-1)-2$. L'application :*

$$\frac{u^i (du)^{k/2}}{(u-u^p)^{(k-2)/2}} \mapsto u^i, \ 0 \le i \le n_k$$

induit un isomorphisme K-équivariant :

$$H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \xrightarrow{\sim} \sigma(n_k, 1).$$

(ii) *L'application :*

$$\prod_{C \hookrightarrow X} H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

qui envoie $(s_g(u_g))_{g\in J}$ où J est un système de représentants quelconque de $K\mathbb{Q}_p^\times \backslash G$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g) = s_g(u)$ pour tout $g \in J$ induit via (i) *un isomorphisme G-équivariant :*

$$\prod_{C \hookrightarrow X} H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k, 1).$$

Démonstration. — Voir [**14**, Proposition 27] et aussi [**10**, §3]. Notons que $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ agit trivialement sur $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ et que l'application définie en (ii) ne dépend bien sûr pas du choix de J. □

On en déduit par le (iii) du corollaire 2.3.4 :

Corollaire 2.3.6. — *On a un isomorphisme de G-représentations* $H^0(X,\overline{\omega}^{k/2}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k,1)$.

Lemme 2.3.7. — *On a une suite exacte G-équivariante, scindée si $p>2$:*

$$0 \to \mathrm{Ind}_N^G 1 \to \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \to \mathrm{Ind}_N^G \chi \to 0. \tag{6}$$

Démonstration. — Si $f \in \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$, on note $\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} (g \mapsto f(w_p g)) \in \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$. La flèche de gauche dans la suite exacte est l'injection canonique et celle de droite donnée par $f \mapsto f-\sigma(f)$. L'exactitude de la suite (pour tout p) est laissée au lecteur. Si $p>2$, un scindage s'obtient en écrivant $f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$. □

Corollaire 2.3.8. — *La suite exacte de G-représentations :*

$$0 \to \prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \prod_C \prod_{P\in C} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0$$

du (iii) *du corollaire 2.3.4 est isomorphe à la suite exacte (6) tordue par* $\chi^{k/2}$.

Démonstration. — L'application $\prod_C \prod_{P\in C} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathbb{F}(\frac{du}{u})^{k/2}$ qui envoie $(c_g(\frac{du_g}{u_g})^{k/2})_{g\in J}$ où J est un système de représentants quelconque de $I\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ et $c_g \in \mathbb{F}$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g) = c_g(\frac{du}{u})^{k/2}$ pour tout $g\in J$ induit un isomorphisme G-équivariant indépendant de J :

$$\prod_C \prod_{P\in C} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \simeq \chi^{k/2} \otimes \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1.$$

On définit de manière similaire un isomorphisme G-équivariant $\prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2}$ et la commutation du diagramme avec la suite exacte (6) est laissée au lecteur. Noter que la torsion par χ dans le terme de droite de (6) est bien compatible avec la torsion par χ de la remarque 2.3.2. □

La colonne verticale de gauche dans le (iii) du corollaire 2.3.4 se récrit donc :

Corollaire 2.3.9. — *On a une suite exacte G-équivariante :*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k,1) \to H^0(\mathscr{X},\omega^{k/2}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \to \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \to 0.$$

Nous reprendrons cette suite exacte au §4.1.

3. Définition des faisceaux

3.1. Les faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})$. — Dans ce paragraphe, on définit pour $2 \le k \le p+1$, k pair et $\mathscr{L} \in L$ un faisceau G-équivariant de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})$ sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$ muni d'un morphisme $\mathfrak{O}$-linéaire G-équivariant $\omega(k,\mathscr{L}) \to \omega^{k/2}$. On montre que les sections globales $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$ sont isomorphes à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans $B(k,\mathscr{L})^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$.

Soit $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}$ (resp. $(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$) l'unique section de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_g}(\omega^{\frac{k}{2}-1}(\mathscr{W}_g),\mathscr{A}_g)$ telle que $\langle(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1},(\frac{du_g}{u_g})^{k/2-1}\rangle = 1$ (resp. $\langle(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1},(\frac{dv_g}{v_g})^{k/2-1}\rangle = 1$) avec la convention $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1} = 1$ (resp. $(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1} = 1$) si $k = 2$. On a $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1} = (-1)^{k/2-1}(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$. On note aussi $\frac{1}{du_g^{k/2-1}}$ (resp. $\frac{1}{dv_g^{k/2-1}}$) l'unique section de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{U}_g)$ (resp. $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_g)$) telle que $\left\langle \frac{1}{du_g^{k/2-1}}, du_g^{k/2-1}\right\rangle = 1$ (resp. $\left\langle \frac{1}{dv_g^{k/2-1}}, dv_g^{k/2-1}\right\rangle = 1$) avec encore $\frac{1}{du_g^{k/2-1}} = 1$ (resp. $\frac{1}{dv_g^{k/2-1}} = 1$) si $k = 2$.

Soit $[\mathscr{L}^{-1}] \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0 \\ \mathscr{L}^{-1} & \text{si } \mathrm{val}(\mathscr{L}) < 0 \end{cases}$, de sorte que l'on a toujours $[\mathscr{L}^{-1}] \in \mathfrak{O}$ et $[\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L} \in \mathfrak{O}$. Dans la définition des $\mathfrak{O}$-modules ci-dessous, on convient que $\sum_{i=0}^{j} \overset{\text{déf}}{=} 0$ si $j < 0$. On définit pour $g \in G$ les $\mathfrak{O}$-modules :

$$\begin{aligned}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g) &\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}v_g)^j}{j}\right)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{U}_g) &\overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{U}_g) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{V}_g) &\overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_g) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Pour le moment, les formules à droite avec des $\log_{\mathscr{L}}$ sont juste des symboles formels qui vont prendre leur sens avec les flèches de restriction et les flèches de recollement. Si $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{W}_g$ est un ouvert affine tel que $\mathscr{Z}_g$ n'est inclus ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$, on pose :

$$\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g)} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g).$$

Si $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{U}_g$ est un ouvert affine non vide, on pose :

$$\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{U}_g)} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{U}_g)$$

et si $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{V}_g$ est un ouvert affine non vide, on pose :

$$\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_g)} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{V}_g).$$

Soit $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{W}_g$ un ouvert affine qui n'est ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$, on définit une application de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \to \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g \cap \mathscr{U}_g)$ comme la restriction usuelle sur le faisceau $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme suit sur les « symboles » :

$$\begin{aligned}
[\mathscr{L}^{-1}]\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x]) + \textstyle\sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\Big) \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} &\mapsto [\mathscr{L}^{-1}]\left(\sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right) \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\
&\oplus [\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x]) \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\
[\mathscr{L}^{-1}]\Big(\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x]) + \textstyle\sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{([x]^{-1}v_g)^j}{j}\Big) \frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} &\mapsto (-1)^{k/2-1}[\mathscr{L}^{-1}] \left(\sum_{j\geq \frac{k}{2}-1-i} \frac{p^{j+i-\frac{k-2}{2}}}{j[x]^j u_g^j}\right) \\
&\times \frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}} \\
[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g) \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} &\mapsto [\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g) \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\
[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g) \frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} &\mapsto (-1)^{k/2-1}[\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}p^{i-\frac{k-2}{2}} \frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}} \\
&\oplus (-1)^{\frac{k}{2}}[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g) p^{i-\frac{k-2}{2}} \frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}.
\end{aligned}$$

Noter que, pour les termes en v_g, on a juste écrit $v_g = \frac{p}{u_g}$ et développé $\log_{\mathscr{L}}(\frac{p}{u_g} - [x]) = \log_{\mathscr{L}}(1 - \frac{p}{[x]u_g})$. On définit de manière strictement analogue $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g) \to \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g \cap \mathscr{V}_g)$ en remplaçant (u_g, v_g) par (v_g, u_g). On vérifie facilement que cela définit un faisceau $\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g}$ sur $\mathscr{W}_{g,\mathrm{Zar}}$ qui est extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini (engendré par les « symboles » avec des $\log_{\mathscr{L}}$) par le faisceau cohérent $\omega^{-\frac{k-2}{2}}|_{\mathscr{W}_g}$.

Proposition 3.1.1. — *Les faisceaux $(\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g})_{g\in G}$ se recollent en un faisceau G-équivariant $\omega(k,\mathscr{L})$ sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ qui est extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par le faisceau inversible $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$.*

Démonstration. — Nous allons recoller les $\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g}$ suivant les données de recollement (i), (ii) et (iii) du §2.2.

(i) Soit $(g,g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = w_p$, $\mathscr{Z}_g \subseteq \mathscr{W}_g$ un ouvert affine qui n'est ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$ et $\mathscr{Z}_{g'} \subseteq \mathscr{W}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathscr{W}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{W}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathscr{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathscr{Z}_{g'}$ sur le faisceau cohérent $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $(u_{g'}, v_{g'}) \mapsto (v_g, u_g)$ dans les logarithmes, en remplaçant $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g)(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$

lorsque ce terme apparaît par $(-1)^{k/2-1}([\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}-[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g))(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}$. Soit $(g,g')\in G^2$ tels que $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=w_p\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}w_p\in I\mathbb{Q}_p^\times$, on définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_{g'})\xrightarrow{\sim}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g)$ comme l'isomorphisme déjà défini sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $(u_{g'},v_{g'})\mapsto(\frac{du_g-c}{-bu_g+a},\frac{d'v_g-c'}{-b'v_g+a'})$ dans les logarithmes (en les développant). Explicitons le calcul pour les trois types de matrices qui engendrent I. Si $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&[y](1+pz)\end{pmatrix}$ avec $y\in\mathbb{F}_p^\times$ et $z\in\mathbb{Z}_p$, on développe formellement :

$$\begin{aligned}\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz)u_g-[x]) &= \log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])+\log_{\mathscr{L}}\left(1+pz\frac{u_g}{u_g-[xy^{-1}]}\right)\\ &= \log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])-\sum_{j\geq1}\frac{p^j(-z)^ju_g^j}{j(u_g-[xy^{-1}])^j}\end{aligned}$$

où $x\in\mathbb{F}_p^\times$. Un calcul (formel) donne alors pour $i\in\{0,\cdots,k-2\}$:

$$\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz)u_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}y]^j(1+pz)^ju_g^j}{j}=\log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}y]^ju_g^j}{j}+\sum_{j_1+j_2\geq k/2-2-i}*\cdot p^{j_1}u_g^{j_2}$$

où $*\in\mathscr{A}_g$. En multipliant par $[\mathscr{L}^{-1}]([y](1+pz))^{i-k/2+1}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$, on obtient bien au final une expression dans :

$$\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g)\oplus\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[xy^{-1}])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}y]^ju_g^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}.$$

On a un calcul similaire avec les termes en $\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])$. Noter que, si $x=0$ (et $i\geq k/2-1$), le calcul devient trivial en écrivant $\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz)u_g)=\log_{\mathscr{L}}([y](1+pz))+\log_{\mathscr{L}}(u_g)$. Si $g'g^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\pz&1\end{pmatrix}$ avec $z\in\mathbb{Z}_p$, on développe encore formellement :

$$\log_{\mathscr{L}}(u_g-pz-[x])=\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])-\sum_{j\geq1}\frac{p^jz^j}{j(u_g-[x])^j}$$

si $x\neq0$, et un calcul donne encore pour $i\in\{0,\cdots,k-2\}$:

$$\log_{\mathscr{L}}(u_g-pz-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}]^j(u_g-pz)^j}{j}=\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{[x^{-1}]^ju_g^j}{j}+\sum_{j_1+j_2\geq k/2-2-i}*\cdot p^{j_1}u_g^{j_2}$$

avec $* \in \mathscr{A}_g$. En multipliant par $[\mathscr{L}^{-1}]\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}$ et en développant $(u_g-pz)^i$, on obtient bien (après un calcul simple) une expression dans :

$$\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_g)\oplus\bigoplus_{\ell=0}^{i}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-\ell}\frac{[x^{-1}]^j u_g^j}{j}\right)\frac{u_g^\ell}{du_g^{k/2-1}}.$$

Si $x=0$, on écrit pour $i\geq k/2-1$:

$$[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g-pz)\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}=[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}+[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(1-zv_g)\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}.$$

En développant $(u_g-pz)^i\frac{1}{du_g^{k/2-1}}$ et en remplaçant $\frac{p^{i-j}u_g^j}{du_g^{k/2-1}}$ dans le développement par $(-1)^{k/2-1}p^{i-k/2+1}\frac{v_g^{k-2-j}}{dv_g^{k/2-1}}$ si $j\leq k/2-2$, le premier terme se récrit comme un élément de :

$$\bigoplus_{j=k/2}^{k-2}\mathfrak{O}\cdot([\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}-[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g))\frac{v_g^j}{dv_g^{k/2-1}}\oplus\bigoplus_{j=k/2-1}^{i}\mathfrak{O}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_g)\frac{u_g^j}{du_g^{k/2-1}}.$$

Pour le deuxième, si $z\in p\mathbb{Z}_p$, on écrit $\log_{\mathscr{L}}(1-zv_g)=-\sum_{j\geq 1}\frac{z^jv_g^j}{j}$ et si $z\in\mathbb{Z}_p^\times$, on écrit $\log_{\mathscr{L}}(1-zv_g)=\log_{\mathscr{L}}(z)+\log_{\mathscr{L}}(v_g-z^{-1})$, $\frac{(u_g-pz)^i}{du_g^{k/2-1}}=(-1)^{k/2-1}p^{i-k/2+1}\frac{(1-v_g)^iv_g^{k-2-i}}{dv_g^{k/2-1}}$ puis on corrige $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_g-z^{-1})p^{i-k/2+1}\frac{(1-v_g)^iv_g^{k-2-i}}{dv_g^{k/2-1}}$ par des éléments de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g)$ de manière à faire apparaître $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])+\sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-2-\ell}\frac{[x^{-1}]^jv_g^j}{j}\right)\frac{v_g^\ell}{dv_g^{k/2-1}}$ où $x\overset{\text{déf}}{=}z^{-1}$ modulo p. On a un calcul similaire avec les termes en $\log_{\mathscr{L}}(v_g-[x])$ que l'on épargne au lecteur. Enfin, si $g'g^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}1&z\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ avec $z\in\mathbb{Z}_p$, les calculs sont strictement analogues en échangeant u_g et v_g.

(ii) Soit $(g,g')\in G^2$ tels que $g'g^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in K\mathbb{Q}_p^\times$, $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{U}_g$ un ouvert affine et $\mathscr{Z}_{g'}\subseteq\mathscr{U}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathscr{U}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{U}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_{g'})\xrightarrow{\sim}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathscr{Z}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{Z}_{g'}$ sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $u_{g'}\mapsto\frac{du_g-c}{-bu_g+a}$ dans les logarithmes (que l'on développe). Les calculs sont analogues au cas (i) en plus simples car il n'y a plus à distinguer entre $x=0$ et $x\neq 0$.

(iii) Soit $(g,g')\in G^2$ tels que $g'g^{-1}=w_p\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)w_p\in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$, $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{V}_g$ un ouvert affine et $\mathscr{Z}_{g'}\subseteq\mathscr{V}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathscr{V}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{V}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_{g'})\xrightarrow{\sim}\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathscr{Z}_g\xrightarrow{\sim}\mathscr{Z}_{g'}$ sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $v_{g'}\mapsto\frac{dv_g-c}{-bv_g+a}$ dans les logarithmes.

Ces isomorphismes de recollement sont compatibles avec les flèches de restriction (vérification formelle) et permettent donc de définir un faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$ sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}$ qui est clairement G-équivariant. □

En particulier, on a une action $\mathfrak{O}$-linéaire de G sur $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$. Le faisceau $\omega(k,\mathscr{L})$ a été fabriqué pour satisfaire la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. — *Soit k un entier pair compris entre 2 et $p+1$. La G-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$ est isomorphe à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans l'espace de Banach dual $B(k,\mathscr{L})^*\otimes\varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (cf. §2.1).*

Démonstration. — Tout élément de $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W})$ s'écrit (formellement) de manière unique sous la forme $\frac{s(u)}{du^{k/2-1}}+\frac{t(v)}{dv^{k/2-1}}$ où $s(u)$ (resp. $t(v)$) est somme d'un élément de $\mathscr{A}$ avec uniquement des u (resp. des v) et de termes $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u)^j}{j}\right)u^i$ ou $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u)u^i$ (resp. avec u à la place de v). À tout élément de $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W})$, on associe la fonction $f:\mathfrak{W}\to\mathbb{C}_p$, $z\mapsto s(z)+(-p)^{k/2-1}t(p/z)z^{2-k}$. Il est facile de voir que cela définit un isomorphisme N-équivariant entre $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W})$ et un $\mathfrak{O}$-réseau ouvert $O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}$ stable par N dans le Banach $O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$ (cf. §2.1). Si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in G$, à tout élément $\frac{s(u_g)}{du_g^{k/2-1}}+\frac{t(v_g)}{dv_g^{k/2-1}}\in\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g)$ on associe de même une fonction $f:\mathfrak{W}_g\to\mathbb{C}_p,\ z\mapsto(ad-bc)^{1-k/2}(-bz+a)^{k-2}\left(s(\frac{dz-c}{-bz+a})+(-p)^{k/2-1}t(\frac{p(-bz+a)}{dz-c})(\frac{-bz+a}{dz-c})^{k-2}\right)$ qui induit un isomorphisme entre $\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_g)$ et $g^{-1}\cdot O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}\subset O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}$ (où, si $f\in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}}$, $g^{-1}.f\in O(k,\mathscr{L})_{\mathfrak{W}_g}$ est la fonction $z\mapsto f(z|_{g^{-1}})$). Avec les définitions de $O(k,\mathscr{L})$ et $O(k,\mathscr{L})^0$ données au §2.1, on a donc clairement un isomorphisme $\mathfrak{O}$-linéaire G-équivariant :

$$\begin{aligned}H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))&\xrightarrow{\sim}\{f\in O(k,\mathscr{L})\ \mid\ f|_{\mathfrak{W}_g}\in g^{-1}\cdot O(k,\mathscr{L})^0_{\mathfrak{W}}\ \forall\ g\in G\}\\&=O(k,\mathscr{L})^0\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit $\mathscr{P}(k)\subset\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ l'unique sous-faisceau G-équivariant tel que, si $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{W}_g$ est un ouvert affine non vide, on a :

$$\mathscr{P}(k)(\mathscr{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}\oplus\bigoplus_{i=k/2}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}\subset\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{Z}_g)$$

lorsque $\mathscr{Z}_g$ n'est ni dans $\mathscr{U}_g$ ni dans $\mathscr{V}_g$, $\mathscr{P}(k)(\mathscr{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$ lorsque $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{U}_g$ est non vide et $\mathscr{P}(k)(\mathscr{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}$ lorsque $\mathscr{Z}_g\subseteq\mathscr{V}_g$ est non vide.

Proposition 3.1.3. — *La différentiation $k-1$-ième induit un morphisme $\mathfrak{O}$-linéaire G-équivariant $\omega(k,\mathscr{L})\to\omega^{k/2}$ de noyau $\mathscr{P}(k)$.*

Démonstration. — C'est le même argument que celui à la base de la construction du complexe $\omega^{-k/2+1} \xrightarrow{d^{k-1}} \omega^{k/2}$ en notant que les logarithmes disparaissent en différentiant (la différentiation sur les "logarithmes formels" étant celle naturelle). □

Remarque 3.1.4. — Le lecteur aura remarqué que la définition des faisceaux $\omega(k,\mathscr{L})|_{\mathscr{W}_g}$ et de leur recollement nécessite seulement $k/2-1 < p$. Néanmoins, les autres calculs de cet article sont strictement limités à $k \leq p+1$.

On note dans la suite $\overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} \omega(k,\mathscr{L}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}$ le faisceau modulo π sur X_{Zar}.

3.2. Les faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P$. — Dans ce paragraphe, on définit des faisceaux de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ (resp. $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P$) pour la topologie de Zariski sur une composante C (resp. un point singulier P) et on montre que l'on a une suite exacte de faisceaux sur X_{Zar} : $0 \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to \Pi_C i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \Pi_P i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \to 0$ où $i : C \hookrightarrow X$ (resp. $P \hookrightarrow X$).

Soit $C \simeq \mathbb{P}^1$ une composante de X et $i : C \hookrightarrow X$ l'immersion fermée correspondante. On note $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}})$. Pour $P \in C$ un point singulier quelconque de X, on note $W_P \subset C$ l'ouvert affine $C \setminus \{\text{points singuliers autres que } P\}$ et u_{g_P} une coordonnée sur C nulle au point P. On pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_P) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P}-x) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{(x^{-1}u_{g_P})^j}{j}\right) \frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=\frac{k}{2}-1}^{k-2} \mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P}) \frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}.$$

Si $u_{g'_P}$ est une autre coordonnée sur C nulle au point P, on a $u_{g'_P} = \frac{du_{g_P}-c}{-bu_{g_P}+a}$ pour $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I\mathbb{Q}_p^\times$ et en développant les logarithmes exactement comme dans le (i) de la preuve de la proposition 3.1.1, on voit que l'on reste bien dans $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P)$ de sorte que $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P)$ ne dépend pas du choix de la coordonnée u_{g_P}. Si $Z \subseteq W_P$ est un ouvert affine contenant P, on pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(Z) \oplus_{\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_P)} \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_P).$$

Si $Z \subseteq W_P$ est un ouvert affine ne contenant pas P (donc $Z \subseteq C \setminus \{\text{points singuliers}\} = U$), on pose $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}(k,\mathscr{L})(Z)$. Les applications de restriction $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z) \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(Z \cap U)$ sont définies comme au §3.1 et permettent par recollement de définir un faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriel $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ sur C, extension d'un faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie par le faisceau inversible $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$. On a de plus une application naturelle de faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ définie comme suit sur les ouverts W_{g_P} de X (cf. §2.2) où $g_P \in G$ est tel que $i^{-1}(W_{g_P}) = W_P$: sur $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ c'est l'application canonique de restriction, sur les termes u_{g_P} c'est l'identité

(i.e. on garde la même formule), les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(v_{g_P})\frac{v_{g_P}^i}{dv_{g_P}^{k/2-1}}$ (pour $i \geq k/2$) sont envoyés sur 0 et les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(v_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1-i}\frac{(x^{-1}v_{g_P})^j}{j}\right)\frac{v_{g_P}^i}{dv_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$ sont envoyés sur 0 (noter la sommation jusqu'à $k/2-1-i$ et pas $k/2-2-i$ et voir §3.1 pour la définition de $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})(W_{g_P}) = \omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_{g_P})\otimes\mathbb{F}$).

Soit $P \in X$ un point singulier, u_{g_P} une coordonnée sur une composante C contenant P qui est nulle au point P et $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{F}(\frac{u_{g_P}}{du_{g_P}})^{k/2-1}$. On pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P \oplus \mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}$$

qui ne dépend pas du choix de la coordonnée u_{g_P} par les formules de développement du logarithme comme précédemment et en écrivant :

$$[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{w_pg_P})\frac{u_{w_pg_P}^{k/2-1}}{du_{w_pg_P}^{k/2-1}} = (-1)^{k/2-1}[\mathscr{L}^{-1}]\mathscr{L}\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}} \oplus (-1)^{k/2}[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}.$$

On a de même une application naturelle évidente $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ où $i : P \hookrightarrow C$ qui est l'application canonique sur $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ et qui, sur les ouverts contenant P, envoie les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\left(\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1-i}\frac{(x^{-1}u_{g_P})^j}{j}\right)\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$ sur 0 (noter la sommation jusqu'à $k/2-1-i$), les termes $[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $i \leq k/2$ sur 0 et est l'identité sur $\mathbb{F}\cdot[\mathscr{L}^{-1}]\log_{\mathscr{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}$.

Proposition 3.2.1. — *On a une suite exacte naturelle G-équivariante de faisceaux de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels :*

$$0 \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \to 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que la suite est exacte en restriction à chaque ouvert W_g de X (car ces ouverts recouvrent X), ce qui est évident. Noter que, comme au §2.3, $\prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ est l'application induite par les restrictions ci-dessus sur les divers points singuliers de X multipliées par $(-1)^{d(C)}$ et que l'action de G sur le faisceau $\prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ doit être tordue par χ (voir la remarque 2.3.2). □

4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathbb{F})$ pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de la G-représentation $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ pour $4 \leq k \leq p+1$, k pair et $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$.

4.1. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\sigma(n_k,1)$. — On commence par l'étude des facteurs de Jordan-Hölder de la K-représentation $\sigma(n_k,1)$ (cf. proposition 2.3.5).

Pour $0 \leq n \leq p-1$ et m quelconque, rappelons que la représentation $\sigma(n,m)$ (cf. §1.2) est irréductible (voir par exemple [**1**]). Rappelons aussi les deux lemmes suivants :

***Lemme 4.1.1* ([3])**. — *Soit $n \in \{p+1,\cdots,2p-2\}$. On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \to \sigma(n-p-1,1) \oplus \sigma(n+1-p,0) \to \sigma(n,0) \to \sigma(2p-n-2,n+1-p) \to 0$$

où l'injection $\sigma(n-p-1,1) \hookrightarrow \sigma(n,0)$ est donnée par $u^{n-p-1-i} \mapsto (u^p-u)u^{n-p-1-i}$ et où $\sigma(n+1-p,0)$ est la sous-représentation engendrée par $1 \in \sigma(n,0)$.

***Lemme 4.1.2* ([9])**. — *Soit $n \geq 2p-1$ et écrivons $n = j + m(p-1)$ avec $p+1 \leq j \leq 2p-1$. On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \longrightarrow \sigma(n-p-1,1) \overset{\times(u-u^p)}{\longrightarrow} \sigma(n,0) \longrightarrow \sigma(n,0)/\sigma(n-p-1,1) \longrightarrow 0$$

où $\sigma(n,0)/\sigma(n-p-1,1)$ est isomorphe à $\sigma(j,0)/\sigma(j-p-1,1)$.

On rappelle que $n_k = (k/2-1)p - k/2 - 1 = (k/2-2)(p+1) + p + 1 - k$. Si $k=4$, on voit que $\sigma(n_k,1)$ est irréductible et vaut $\sigma(p-3,1)$. Pour $k \geq 6$, on a :

Lemme 4.1.3. — *Supposons $6 \leq k \leq p+1$, on a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \longrightarrow \sigma(n-(i+1)(p+1),1) \overset{\times(u-u^p)}{\longrightarrow} \sigma(n-i(p+1),0) \longrightarrow \sigma \longrightarrow 0$$

où σ est une extension de $\sigma(2(i+1),p-3-2i)$ par $\sigma(p-3-2i,0)$.

Démonstration. — On écrit $n - i(p+1) = (k/2-3-i)(p-1) + 2p - 2i - 4$. Pour $j = 2p-2i-4$, on a $p+1 \leq j \leq 2p-4$ et, d'après le lemme 4.1.2, on a la suite exacte :

$$0 \to \sigma(n-(i+1)(p+1),1)) \to \sigma(n-i(p+1),0) \to \sigma(j,0)/\sigma(j-p-1,1) \to 0.$$

Par le lemme 4.1.1 appliqué à $\sigma(2p-2i-4,0) = \sigma(j,0)$, on a :

$$0 \to \sigma(p-2i-5,1) \oplus \sigma(p-3-2i,0) \to \sigma(j,0) \to \sigma(2(i+1),p-3-2i) \to 0$$

avec $\sigma(j-p-1,1) \simeq \sigma(p-2i-5,1)$. On en déduit le résultat annoncé. □

D'après le lemme 4.1.3, les composantes de Jordan-Hölder de $\sigma(n_k,1)$ pour $6 \leq k \leq p+1$ sont donc d'une part $\sigma(p-3,1)$, $\sigma(p-5,2)$ etc. jusqu'à $\sigma(p-3-2(k/2-2),k/2-1)$ et d'autre part $\sigma(2,-1)$, $\sigma(4,-2)$ etc. jusqu'à $\sigma(k-4,2-k/2)$. On a en fait une structure assez simple de la K-représentation $\sigma(n_k,1)$:

Lemme 4.1.4. — *Supposons $6 \leq k \leq p+1$, on a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \longrightarrow \sigma(p-3,1) \oplus \sigma(p-5,2) \oplus \cdots \oplus \sigma(p-k+1,k/2-1) \longrightarrow \sigma(n_k,1) \longrightarrow$$
$$\sigma(2,-1) \oplus \sigma(4,-2) \oplus \cdots \oplus \sigma(k-4,2-k/2) \longrightarrow 0$$

où $\sigma(p-3-2i,i+1)$ pour $0 \leq i \leq k/2-2$ est la sous-K-représentation de $\sigma(n_k,1)$ engendrée par $(u-u^p)^i$.

Démonstration. — Soit n un entier positif ou nul de la forme $n = rp - s$ avec r et s entiers tels que $0 < r < s \leq p$, alors le sous-$\mathbb{F}$-espace vectoriel de $\sigma(n,0)$ engendré sous K par 1 est de dimension $p-(s-r)$ (développer $(bu+d)^n = (bu^p+d)^{r-1}(bu+d)^{p-s}$ et regrouper les mêmes puissances de $b^i d^{n-i}$). En prenant $n = n_k - i(p+1) = (k/2-1-i)p - (k/2+1+i)$ pour $0 \leq i \leq k/2-2$ et en utilisant le lemme 4.1.3, on en déduit que la sous-représentation de $\sigma(n_k,1)$ engendrée sous K par $(u-u^p)^i$ est de dimension $p-2(i+1)$ et est isomorphe à $\sigma(p-3-2i,i+1)$. La somme directe $\sigma(p-3,1)\oplus\sigma(p-5,2)\oplus\cdots\oplus\sigma(p-k+1,k/2-1)$ est donc une sous-représentation de $\sigma(n_k,1)$. Le quotient admet les facteurs de Jordan-Hölder restants, et on verra dans la preuve du lemme 4.3.4 qu'il s'agit encore d'une somme directe. □

4.2. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_{\mathbb{P}^1})$. — Dans cette partie, on se place sur la composante centrale C de X et on détermine la représentation $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ de K sous les conditions du §4 en utilisant le §4.1 et la proposition 2.3.5.

Notons $\overline{\omega}^{k/2}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*([\mathscr{L}^{-1}]\overline{\omega}^{k/2})$ (resp. $\overline{\omega}^{k/2}|_P \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{k/2})$) où $i : C \hookrightarrow X$ (resp. $i : P \hookrightarrow X$). Comme dans la proposition 3.1.3 et sachant que $k-2 \leq p-1$, la différentiation $(k-1)$-ième induit un morphisme $\mathbb{F}$-linéaire K-équivariant $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$ (resp. un morphisme $\mathbb{F}$-linéaire $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P \to \overline{\omega}^{k/2}|_P$) de noyau contenu dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$ (resp. $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P$).

Lemme 4.2.1. — *La différentiation $k-1$-ième $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$ induit une injection de K-représentations :*

$$H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \hookrightarrow H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C).$$

Démonstration. — Notons $\overline{\mathscr{P}}(k)|_C$ le noyau de $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$, on a donc une suite exacte :

$$0 \to H^0(C, \overline{\mathscr{P}}(k)|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C).$$

De plus, $\overline{\mathscr{P}}(k)|_C$ est contenu dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$. Or $H^0(C, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) = 0$ car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \cong \mathscr{O}_C(-\frac{k-2}{2}(p+1)+k-2)$ et $-\frac{k-2}{2}(p+1)+k-2 < 0$. D'où aussi $H^0(C, \overline{\mathscr{P}}(k)|_C) = 0$ et l'injection voulue. □

Pour déterminer la K-représentation $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$, nous allons déterminer les sections de $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$ qui se relèvent en des sections de $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'application du lemme 4.2.1. On note dans la suite $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ un point

de C défini sur $\mathbb{F}_p$ et $W_y \subset C$ l'ouvert affine $C \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_\mathrm{p} \text{ autres que } y\}$. Rappelons que $U = C \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_p\}$ (cf. §2.2). On note u_y une coordonnée sur C nulle en y et telle que $u_y|_U = u - y$ si $y \neq \infty$, $u_y|_U = u^{-1}$ si $y = \infty$ (où u est la variable sur U, cf. §2.2). Par abus de notation, on note aussi $u = u_0$.

Pour les calculs qui vont suivre, nous utiliserons la description alternative suivante de $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_y)$ (où $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$) :

$$\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C(W_y) = \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_y) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y-x)^i}{du_y^{k/2-1}}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathbb{F}(\log_{\mathscr{L}}(u_y))\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$$

(pour revenir à la description du §3.2, il suffit de développer le terme $(u_y - x)^i$ en facteur des logarithmes à droite et de remarquer que $\frac{u_y^{j+i}}{du_y^{k/2-1}}$ est déjà dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_y)$ pour $j > k/2 - 2 - i$).

Pour $\alpha \in \{1, \cdots, k/2-1\}$, considérons les sections $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (cf. proposition 2.3.5). En prenant une « primitive $(k-1)$-ième » sur chaque ouvert W_y de la section globale $(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(-1)^{\alpha-1}\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$, définissons les sections locales suivantes $s_{\alpha,y} \in H^0(W_y, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$:

$$s_{\alpha,\infty} \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$s_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y-x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}+\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$
$$+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}.$$

Lemme 4.2.2. — *Le $(p+1)$-uplet $(s_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ définit une section $s_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les restrictions $s_{\alpha,y}|_U$ ne dépendent pas de y. Les sections locales $s_{\alpha,y}|_U$ se récrivent :

$$s_{\alpha,\infty}|_U = (-1)^{k/2-\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}u_\infty^{\alpha-1}x^{-k+1+\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$s_{\alpha,y}|_U = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u_y-x)\frac{(u_y-x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$

car $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}(\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j})\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}=0$ et $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}(u_y-x)^{k-1-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}=-u_y^{k-1-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}$ modulo p. On vérifie alors que :

$$s_{\alpha,\infty}|_U=s_{\alpha,y}|_U=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-x)\frac{(u-x)^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}\in H^0(U,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$$

d'où le résultat. □

Nous renvoyons à la fin de l'appendice A.2 pour la preuve de la proposition qui suit :

Proposition 4.2.3. — (i) *Soit $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et :*

$$r_\alpha\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

avec $f(u)(du)^{k/2}$ un élément de la sous-représentation :

$$\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)=\bigoplus_{r=0}^{n_k-(k/2-\alpha)(p+1)}\mathbb{F}\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Alors r_α n'admet pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.
(ii) *Il existe une section $r_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme :*

$$r_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

avec $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.

Corollaire 4.2.4. — *On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0\to H\to H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to\mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}\to 0$$

où $H\subseteq\sigma(n_k,1)$ est la sous-K-représentation (cf. lemme 4.1.4) :

$$H\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\sigma(p-3-2i,i+1).$$

Démonstration. — Pour alléger les notations, nous omettons les torsions par les caractères centraux. D'après le lemme 4.1.3, pour $0\leq i\leq k/2-2$, $\sigma(n_k-i(p+1))$ est une sous-représentation de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Soit H_i son image inverse dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1 (ne pas confondre avec $H_i=1+\cdots+1/i!$). Nous allons démontrer par récurrence descendante sur $0\leq i\leq k/2-2$ que $H_i=\oplus_{j=i}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j)$. Pour $i=k/2-2$, la sous-représentation $\sigma(p-k+1)$ de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ est engendrée par $\frac{(du)^{k/2}}{u-u^p}$ (lemme 4.1.4). Or, par le lemme 4.2.2, il existe une section $s_1\in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ qui s'envoie sur $\frac{(du)^{k/2}}{u-u^p}$ par l'injection du lemme 4.2.1. On en déduit donc $H_{k/2-2}=\sigma(p-k+1)$.

Supposons $0 \leq i \leq k/2-3$ et la récurrence établie pour $i+1$. Notons Q_i le conoyau $0 \to H_{i+1} \to H_i \to Q_i \to 0$. On a un diagramme commutatif dont toutes les flèches verticales sont des injections :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & & H_{i+1} & \to & H_i & \to & Q_i \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & \sigma(n_k-(i+1)(p+1)) & \to & \sigma(n_k-i(p+1)) & \to & \tilde{\sigma}_{n_k,i} & \to 0 \end{array}$$

avec $0 \to \sigma(p-3-2i) \to \tilde{\sigma}_{n_k,i} \to \sigma(2i+2) \to 0$ par le lemme 4.1.3. La section $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}} \in \sigma(n_k-i(p+1)) \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ est un générateur de $\sigma(p-3-2i)$ par le lemme 4.1.4. Or, la section globale $s_{k/2-1-i} \in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ s'envoie sur $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}}$ par l'injection du lemme 4.2.1 (cf. lemme 4.2.2). On en déduit que Q_i contient $\sigma(p-3-2i)$. Toute section de $\sigma(n_k-i(p+1)) \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ de la forme :

$$\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

où $f(u)(du)^{k/2} \in \sigma(n_k-(i+1)(p+1))$ n'a pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ d'après le (i) de la proposition 4.2.3. Une telle section s'envoie donc nécessairement vers un élément non nul de $\sigma(2i+2)$ (sinon, elle aurait un antécédent pour un certain $f(u)$ par ce qui précède et la K-équivariance des flèches). Comme $\sigma(2i+2)$ est irréductible, aucune section de $\sigma(2i+2)$ ne peut donc se relever dans H_i et $Q_i = \sigma(p-3-2i)$. Comme H est scindé, on a donc $H_i = H_{i+1} \oplus \sigma(p-3-2i) = \oplus_{j=i}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j)$ et la récurrence est établie. Enfin, d'après le (ii) de la proposition 4.2.3, il existe une section $r_{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme $r_{k/2} = \big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\big)(du)^{k/2}$ avec $f(u)(du)^{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$. De plus, on vérifie facilement que, dans la suite exacte $0 \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2} \to 0$ (cf. le (ii) du corollaire 2.3.4), la section $r_{k/2}$ s'envoie vers la fonction $f \in \mathrm{ind}_I^K 1 \simeq \mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}$ telle que $f(g)=1$ si $g \in I$ et $f(g)=0$ sinon, donc vers un générateur de $\mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}$. Ceci achève la preuve. □

Notons que, pour $k=4$, on a un isomorphisme $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \xrightarrow{\sim} H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ puisque, dans ce cas, $\sigma(p-3,1) = \sigma(n_4,1) = H \simeq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (cf. proposition 2.3.5).

Remarque 4.2.5. — Les formules explicites des sections s_α du lemme 4.2.2 montrent que leurs images par $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ (où $P \in C$ est défini sur $\mathbb{F}_p$, cf. §3.2) sont nulles. On en déduit que la sous-représentation H du corollaire 4.2.4 est dans le noyau de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$.

4.3. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^1(\mathbb{P}^1,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_{\mathbb{P}^1})$. — On détermine la K-représentation $H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$. On conserve les hypothèses et notations du §4.2.

Soit $\mathscr{I}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ le faisceau sur C de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie défini comme suit. Pour $W_y \subset C$ et $U \subset C$ comme au §4.2 (où $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ est un point de C défini sur $\mathbb{F}_p$), on pose :

$$\mathscr{I}(k)(W_y) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{(u_y-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{k/2-1} \mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{u_y^{i+1}}$$

$$\mathscr{I}(k)(U) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p} \bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{(u-x)^{i+1}}.$$

Par un calcul élémentaire, on vérifie que les applications de restriction $(\overline{\omega}^{k/2}|_C)(W_y) \to (\overline{\omega}^{k/2}|_C)(U)$ envoient bien $\mathscr{I}(k)(W_y)$ dans $\mathscr{I}(k)(U)$ (le seul point non évident est lorsque $y=\infty$). De plus, $\mathscr{I}(k)(W_y)$ (resp. $\mathscr{I}(k)(U)$) est stable sous l'action de I (resp. de K). Si $Z \subset W_y$ est un ouvert affine contenant y, on pose $\mathscr{I}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{I}(k)(W_y)$ et si $Z \subset U$ est un ouvert non vide, on pose $\mathscr{I}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{I}(k)(U)$. Cela permet de définir un sous-faisceau K-équivariant $\mathscr{I}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$.

Lemme 4.3.1. — *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'inclusion $\mathscr{I}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ induit des isomorphismes de K-représentations $H^i(C,\mathscr{I}(k)) \xrightarrow{\sim} H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. En particulier, on a $H^1(C,\mathscr{I}(k))=0$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que l'inclusion de faisceaux $\mathscr{I}(k) \hookrightarrow \overline{\omega}^{k/2}|_C$ admet un scindage. Définissons en effet un autre sous-faisceau $\mathscr{S}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ comme suit :

$$\mathscr{S}(k)(W_y) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \bigoplus_{i\geq k-1} \mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{(u_y-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{F}u_y^i(du_y)^{k/2}$$

$$\mathscr{S}(k)(U) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p} \bigoplus_{i\geq k-1} \mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{(u-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{F}u^i(du)^{k/2}.$$

Si $Z \subset W_y$ (resp. $Z \subset U$) est un ouvert affine contenant y (resp. un ouvert affine non vide) défini en inversant un polynôme $f(u_y)$ (resp. $f(u)$) ne s'annulant pas aux points de $\mathbb{F}_p$, on pose $\mathscr{S}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{S}(k)(W_y) \oplus \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{f(u_y)^{i+1}}$ (resp. $\mathscr{S}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{S}(k)(U) \oplus \bigoplus_{i\geq 0} \mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{f(u)^{i+1}}$). Les flèches de restriction $(\overline{\omega}^{k/2}|_C)(W_y) \to (\overline{\omega}^{k/2}|_C)(U)$ envoient encore $\mathscr{S}(k)(W_y)$ dans $\mathscr{S}(k)(U)$ (vérifier pour $y=\infty$) ce qui permet donc de définir un sous-faisceau $\mathscr{S}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ satisfaisant de manière évidente $\mathscr{S}(k) \oplus \mathscr{I}(k) \xrightarrow{\sim} \overline{\omega}^{k/2}|_C$. Comme $H^1(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) = 0$ (car $\overline{\omega}^{k/2}|_C \simeq \mathscr{O}_C(k/2(p+1)-k)$ et $k/2(p+1)-k = k/2(p-1) \geq 0$), on a en particulier $H^1(C,\mathscr{I}(k))=0$ d'où $H^1(C,\mathscr{I}(k)) = H^1(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. On a déjà calculé que $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ était engendré sous K par les sections suivantes :

$$\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n_k} \mathbb{F}\frac{u^i(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1}}.$$

Comme toutes ces sections globales sont déjà dans $H^0(C,\mathscr{I}(k))$ qui est stable par K, on a $H^0(C,\mathscr{I}(k)) = H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. Enfin, les deux espaces $H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ et $H^i(C,\mathscr{I}(k))$ sont nuls pour $i \geq 2$ puisque C est une courbe. □

On peut alors compléter le lemme 4.2.1 par la proposition :

Proposition 4.3.2. — *On a une suite exacte longue de cohomologie K-équivariante :*

$$0 \to H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to 0.$$

Démonstration. — Il n'est pas difficile de vérifier que le faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C/\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)$ est canoniquement isomorphe au sous-faisceau $\mathscr{I}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ (un isomorphisme équivariant est donné en dérivant formellement $k-1$ fois les parties avec les logarithmes). En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C \to \mathscr{I}(k) \to 0$ et en utilisant les lemmes 4.2.1 et 4.3.1, on a le résultat. □

Corollaire 4.3.3. — *On a une suite exacte de représentations de K :*

$$0 \to \sigma(n_k,1)/H \to H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to 0$$

où $H \subseteq \sigma(n_k,1)$ est défini dans le corollaire 4.2.4.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 4.3.2 et du corollaire 4.2.4. □

Notons que, pour $k=4$, on a un isomorphisme $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \xrightarrow{\sim} H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ puisque $H = \sigma(n_4,1)$.

Comme $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \simeq \mathscr{O}_C(k-2-(p+1)(k/2-1)) = \mathscr{O}_C(2-n_k)$ et $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \simeq \mathscr{O}_C(n_k)$, on a par dualité de Serre un isomorphisme K-équivariant $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \simeq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)^* \simeq \sigma(n_k,1)^*$. La proposition 4.3.2 donne donc une flèche :

$$\delta : H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)^*,$$

c'est-à-dire une flèche K-équivariante $\sigma(n_k,1) \to \sigma(n_k,1)^*$.

Lemme 4.3.4. — *L'image de la flèche $\sigma(n_k,1) \to \sigma(n_k,1)^*$ s'identifie dans $\sigma(n_k,1)^*$ au dual de $\sigma(n_k,1)/H$.*

Démonstration. — Il faut montrer que, si un élément est dans l'image de δ, son accouplement contre un élément quelconque de $H \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ par la dualité de Serre est nul. On peut vérifier cette nullité par un calcul explicite mais donnons un argument théorique. Lorsque $k < (p+5)/2$, les facteurs de Jordan-Hölder de $\sigma(n_k,1)/H$ sont tous distincts des facteurs de Jordan-Hölder de H (cf. §4.1 pour la liste de ces facteurs), et comme tous ces facteurs irréductibles sont auto-duaux (car le caractère central de $\sigma(n_k,1)$ est trivial), l'image de $\sigma(n_k,1)$ dans $\sigma(n_k,1)^*$ se factorise nécessairement en un isomorphisme $\sigma(n_k,1)/H \xrightarrow{\sim} (\sigma(n_k,1)/H)^*$. Cela démontre au passage que la représentation $\sigma(n_k,1)/H$ est scindée (car ses facteurs de Jordan-Hölder sont distincts pour $k \leq p+1$), i.e. que l'on a un isomorphisme $\sigma(n_k,1)/H \simeq \sigma(2,-1) \oplus \sigma(4,-2) \oplus \cdots \oplus \sigma(k-4,2-k/2)$ pour $k \geq 6$ (cf. lemme

4.1.4). Mais le calcul de résidus (issu de la définition explicite de la dualité de Serre, cf. §B.1) donnant $\langle \delta(s), h\rangle = 0$ pour $s \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ et $h \in H \subseteq H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ lorsque $k < (p+5)/2$, i.e. $\langle \delta(s), s_\alpha\rangle = 0$ pour s_α comme au lemme 4.2.2, est un calcul purement combinatoire qui ne voit pas la condition $k < (p+5)/2$ et qui est donc valable pour $4 \leq k \leq p+1$. On en déduit le résultat. □

Corollaire 4.3.5. — *La surjection $H^1(C, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \twoheadrightarrow H^1(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$ du corollaire 4.3.3 induit un isomorphisme de K-représentations $H^* \xrightarrow{\sim} H^1(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$.*

Notons que, H étant scindé, on a aussi un isomorphisme K-équivariant $H^* \simeq H$.

4.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X}, \overline{\omega}(k, \mathscr{L}))$. — On détermine la G-représentation $H^0(X, \overline{\omega}(k, \mathscr{L}))$ (sous les conditions du §4) en combinant le corollaire 4.2.4 avec la proposition 3.2.1.

L'injection $\overline{\omega}(k, \mathscr{L}) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$ (cf. proposition 3.2.1) induit une injection de G-représentations :

$$H^0(X, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})) \hookrightarrow \prod_{i:C\hookrightarrow X} H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C). \tag{7}$$

Pour y un point de la composante centrale de X défini sur $\mathbb{F}_p$, on note encore W_y l'ouvert de X défini au §2.2 « centré » en y et (u_y, v_y) les coordonnées sur W_y. Avec les notations du §2.2, on a $W_y = W_{g_y}$ (et $(u_y, v_y) = (u_{g_y}, v_{g_y})$) où $g_y \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ [y] & 1 \end{smallmatrix}\right) \in K$ si $y \in \mathbb{F}_p$ et $W_\infty = W_{g_\infty}$ (et $(u_\infty, v_\infty) = (u_{g_\infty}, v_{g_\infty})$) où $g_\infty \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in K$. On note également $V_y \overset{\text{déf}}{=} V_{g_y}$ l'ouvert des points non rationnels de la composante « verticale » au point y et on remarque que $U_{g_y} = U$ pour tout y. Par abus de notation, on note aussi $u = u_0$ et $v = v_0$.

Lemme 4.4.1. — *Soit $\alpha \in \{1, \cdots, k/2-2\}$. La section $s_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$ (cf. lemme 4.2.2) se prolonge par zéro via l'injection (7) en une section $\widetilde{s}_\alpha \in H^0(X, \overline{\omega}(k, \mathscr{L}))$ à support dans la composante centrale.*

Démonstration. — On va construire directement une section $\widetilde{s}_\alpha$ dans $H^0(X, \overline{\omega}(k, \mathscr{L}))$ qui s'envoie sur s_α par l'injection (7). On définit des sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(W_y, \overline{\omega}(k, \mathscr{L}))$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ par les mêmes formules qu'au §4.2 :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty} \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha} u_\infty^{\alpha-1} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \left(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\right) \frac{((u_\infty - x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\widetilde{s}_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \left(\log_{\mathscr{L}}(u_y - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u_y x^{-1})^j}{j}\right) \frac{(u_y - x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$

$$+\log_{\mathscr{L}}(u_y) \frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(-1)^j}{j} \binom{k-1-\alpha}{j} \frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}.$$

Il suffit de vérifier que les sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ sont telles que $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_U$ est indépendant de y et $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{V_y} = 0$ pour tout y. Le premier calcul est déjà fait (preuve du lemme 4.2.2). Pour le deuxième, on trouve en utilisant les applications de restriction du §3.1 (i.e. en remplaçant u_y par p/v_y et en développant les logarithmes) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{s}_{\alpha,\infty}|_{V_\infty} &= (-1)^{\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{-k+1+\alpha}}{p^{k/2-\alpha}}\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_\infty x}-1\big)+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(px^{-1})^i}{iv_\infty^i}\Big)\frac{(p-v_\infty x)^{k-1-\alpha}}{dv_\infty^{k/2-1}}\\
\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{V_y} &= (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\\
&\quad+\frac{(-1)^{k/2-1}}{p^{k/2-1}}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_yx}-1\big)+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(px^{-1})^i}{iv_y^i}\Big)\frac{(p-v_yx)^{k-1-\alpha}v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\\
&\quad+(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^i}{i}\binom{k-1-\alpha}{i}\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}
\end{aligned}$$

et un calcul facile montre que toutes ces sections locales sont nulles (modulo p). □

L'analogue du lemme 4.4.1 pour les sections de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ s'envoyant sur un générateur de $\mathrm{Ind}_I^K\chi^{k/2}$ (cf. corollaire 4.2.4) est plus subtil. Rappelons que l'on a déjà défini un relèvement $s_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ du générateur de $\mathrm{Ind}_I^K\chi^{k/2}$ donné par la fonction identité à support dans I (voir la fin de la preuve du corollaire 4.2.4 et le lemme A.2.2).

De la proposition 3.2.1, on déduit une suite longue de cohomologie G-équivariante :

(8)
$$\begin{aligned}
0\to H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))&\to\prod_{i:C\hookrightarrow X}H^0(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C))\to\prod_{i:P\hookrightarrow X}H^0(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P))\\
&\to H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\to\prod_{i:C\hookrightarrow X}H^1(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C))\to 0
\end{aligned}$$

et rappelons que l'action de G sur $\prod_{i:P\hookrightarrow X}H^0(X,i_*(\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P))$ est l'action naturelle tordue par χ (cf. remarque 2.3.2). Rappelons aussi que l'action de K sur $H^i(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$, $H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ etc. est étendue à $K\mathbb{Q}_p^\times$ en envoyant p vers l'identité.

Lemme 4.4.2. — (i) *On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X}H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$$

qui envoie $(s_g(u_g,v_g))_{g\in J}$ où J est un système de représentants quelconque de $K\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g)=s_g(u)$ pour tout $g\in J$.

(ii) *On a des isomorphismes G-équivariants :*

$$\prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \xrightarrow{\sim} \chi\otimes \mathrm{Ind}_N^G H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$$

où le premier isomorphisme envoie $\big(c_g(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}+d_g\log_{\mathscr{L}}(u_g)(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}\big)_{g\in J}$ *où J est un système de représentants quelconque de $N\backslash G$ et $c_g,d_g\in\mathbb{F}$ sur l'unique fonction f dans l'induite telle que $f(g)=c_g(\frac{u}{du})^{k/2-1}+d_g\log_{\mathscr{L}}(u)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ pour tout $g\in J$ et où le deuxième isomorphisme envoie f sur l'unique couple de fonctions (h,l) dans les induites de droite tel que $h(g)=c_g+\frac{1}{2}\mathscr{L}d_g$ et $l(g)=-d_g$.*

Démonstration. — Le (i) et le premier isomorphisme du (ii) sont laissés au lecteur. Pour le deuxième isomorphisme du (ii), il suffit de remarquer que l'action naturelle de N dans la base $\mathbb{F}(\frac{u}{du})^{k/2-1}\oplus\mathbb{F}\big(\frac{1}{2}\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(u)\big)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ de $H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_P)$ réalise un isomorphisme de cette représentation avec $\chi^{k/2-1}\oplus\chi^{k/2}$ (regarder l'action de w_p et utiliser $\log_{\mathscr{L}}(p)=\mathscr{L}$). Comme il faut tordre par χ cette action naturelle (cf. ci-dessus), on en déduit le résultat. □

Notons $\phi : \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \to \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$ le morphisme induit par la suite exacte longue (8) (et en utilisant le lemme 4.4.2). Par la remarque 4.2.5, ϕ se factorise par le quotient $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^{K\mathbb{Q}_p^\times}\chi^{k/2}$ de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ et définit donc un morphisme $\overline{\phi} : \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathrm{ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^{K\mathbb{Q}_p^\times}\chi^{k/2} \to \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}$, c'est-à-dire un morphisme :

$$\overline{\phi} : \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1} \to \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}$$

via l'isomorphisme du lemme 2.3.7 (car $p>2$).

Rappelons que $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ (resp. $\mathrm{Ind}_N^G 1$) s'identifie au $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{F}$ définies sur les sommets (resp. les arêtes non orientées) de l'arbre de Bruhat-Tits pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On note T_p (resp. U_p) l'endomorphisme de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ (resp. $\mathrm{Ind}_N^G 1$) défini par $(T_pf)(s)=\sum_{s'} f(s')$ (resp. $(U_pf)(a)=\sum_{a'} f(a')$), la somme portant sur les $p+1$ sommets (resp. les $2p$ arêtes) adjacents au sommet s (resp. issues de l'arête a) (T_p coïncide avec l'endomorphisme déjà noté T_p défini au §1.2). Le lemme suivant est immédiat et laissé au lecteur :

Lemme 4.4.3. — *On a un diagramme commutatif G-équivariant :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 1 & \to & \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 & \to & \mathrm{Ind}_N^G 1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow {\scriptstyle T_p-1} & & \downarrow {\scriptstyle U_p} & & \\ 0 & \to & 1 & \to & \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 & \to & \mathrm{Ind}_N^G 1 & \to & 0 \end{array}$$

où l'application $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\to\mathrm{Ind}_N^G 1$ envoie $f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ sur la fonction $a\mapsto f(o(a))+f(t(a))$ en notant $o(a)$ et $t(a)$ les deux sommets de l'arête a.

Lemme 4.4.4. — *Soit* $a(\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathscr{L}-2H_{k/2-1}\big)\big) \in \mathfrak{O}$ *(où* $H_i = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{i}$*, cf. §1.2). L'endomorphisme* $\overline{\phi}$ *de* $(\mathrm{Ind}_N^G 1 \oplus \mathrm{ind}_N^G \chi)\otimes\chi^{k/2}$ *est donné (à multiplication près par un scalaire non nul) par une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} (U_p+1)+(-1)^{k/2-1}a(\mathscr{L}) & * \\ 0 & -k(k/2-1) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Reprenons la section $s_{k/2}(u) \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ précédente (où C désigne la composante centrale) et notons $s_{k/2}(v) \overset{\text{déf}}{=} w_p(s_{k/2}(u))$ (i.e. on remplace u par v dans la formule de $s_{k/2}(u)$, la notation étant légitime puisque $w_p u = v$, cf. §2.2). En revenant à la définition du scindage $\mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \chi^{k/2} \simeq \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \oplus \mathrm{ind}_N^G \chi^{k/2+1}$ (cf. preuve du lemme 2.3.7), on voit qu'il suffit de calculer $\phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big)$ et $\phi\big(s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)\big)$ en terme des fonctions $(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ et $\big(\frac{1}{2}\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(u)\big)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ (vues comme fonctions dans l'induite à support dans N). Notons $\mathrm{res}_y(s_{k/2}(u))$ (resp. $\mathrm{res}_y(s_{k/2}(v))$ la restriction de $s_{k/2}(u)$ (resp. $s_{k/2}(v)$) au point rationnel y de la composante support de $s_{k/2}(u)$ (resp. de $s_{k/2}(v)$). Posons $\Delta_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2 k/2(k/2-1)}$ et $b_{k/2,k/2} \overset{\text{déf}}{=} k/2(k/2-1)\Delta_{k/2}$, on trouve pour $y \in \mathbb{F}_p^\times \cup \{\infty\}$ d'après la démonstration du lemme A.2.1 et d'après le lemme A.2.3 (en se rappelant que $s_{k/2} = s'_{k/2}$, cf. la fin de la preuve de la proposition 4.2.3 dans l'appendice A.2) :

$$\mathrm{res}_y(s_{k/2}(u)) = -\Delta_{k/2}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1}, \quad \mathrm{res}_y(s_{k/2}(v)) = -\Delta_{k/2}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}$$

et, pour $y = 0 \in \mathbb{F}_p$:

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_0(s_{k/2}(u)) &= -\big(\Delta_{k/2} - b_{k/2,k/2}H_{k/2-1}\big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} - b_{k/2,k/2}\log_{\mathscr{L}}(u)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ \mathrm{res}_0(s_{k/2}(v)) &= -\big(\Delta_{k/2} - b_{k/2,k/2}H_{k/2-1}\big)\Big(\frac{v}{dv}\Big)^{k/2-1} - b_{k/2,k/2}\log_{\mathscr{L}}(v)\Big(\frac{v}{dv}\Big)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

En se rappelant que, dans le morphisme ϕ de la suite exacte (8), on multiplie les restrictions par -1 dès que l'on « change de branche », on obtient :

$$\begin{aligned} \phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big) &= -\Delta_{k/2}\Big(\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1} - \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}\Big) \\ &\quad +(-1+(-1)^{k/2-1})(\Delta_{k/2}-b_{k/2,k/2}H_{k/2-1})\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ &\quad +(-1+(-1)^{k/2})b_{k/2,k/2}\log_{\mathscr{L}}(u)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ &\quad +(-1)^{k/2+1}b_{k/2,k/2}\mathscr{L}\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

Or, dans $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \chi^{k/2} \simeq \chi \otimes \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathbb{F}(\frac{u}{du})^{k/2-1}$, on a :

$$U_p\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} = \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}} \Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1} + (-1)^{k/2-1} \sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}} \Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}.$$

On trouve donc pour $\phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big)$:

$$\begin{aligned} -\Delta_{k/2}\Big(U_p + 2 - k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)H_{\frac{k}{2}-1} + \mathscr{L}\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \quad &\text{si} \quad (-1)^{k/2}=1 \\ *\oplus \Delta_{k/2}k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}\mathscr{L} - \log_{\mathscr{L}}(u)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \quad &\text{si} \quad (-1)^{k/2}=-1 \end{aligned}$$

où le premier terme est dans $\mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2}$ et le deuxième dans $\mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \oplus \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2+1}$ (on n'aura pas besoin de la formule pour $* \in \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2}$). Par un calcul analogue, on obtient pour $\phi\big(s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)\big)$:

$$\begin{aligned} *\oplus \Delta_{k/2}k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}\mathscr{L} - \log_{\mathscr{L}}(u)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \quad &\text{si} \quad (-1)^{k/2}=1 \\ -\Delta_{k/2}\Big(U_p + 2 - k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)H_{\frac{k}{2}-1} + \mathscr{L}\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \quad &\text{si} \quad (-1)^{k/2}=-1. \end{aligned}$$

En remarquant que l'image de $s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)$ (resp. $s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)$) dans $\mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \chi^{k/2}$ est dans $\mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2}$ si $(-1)^{k/2}=1$ (resp. si $(-1)^{k/2}=-1$), on en déduit facilement le résultat. □

Corollaire 4.4.5. — (i) *Le morphisme $\overline{\phi}$ est surjectif.*
(ii) *Le noyau de $\overline{\phi}$ est isomorphe à $\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathscr{L})f\}$.*

Démonstration. — Tout endomorphisme $\mu T_p - \lambda$ de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ avec $(\mu,\lambda)\in\mathbb{F}$, $\mu\lambda\neq 0$ est surjectif (vérification facile), on en déduit donc (i) par le lemme 4.4.3 combiné avec le lemme 4.4.4. On voit aussi que le noyau de ϕ est isomorphe à $\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = (-1)^{k/2} a(\mathscr{L})f\} \otimes \chi^{k/2}$. Mais cette dernière représentation de G est isomorphe à $\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathscr{L})f\}$, d'où (ii). □

De la suite exacte longue (8), des résultats du §2.3, du §4.2 et du §4.3, on déduit alors facilement :

Corollaire 4.4.6. — (i) *On a une suite exacte G-équivariante :*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H \to H^0(X, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathscr{L})f\} \to 0.$$

(ii) *On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$H^1(X, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C) \simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^*.$$

5. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$ pour $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de la G-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}$ pour $4\leq k\leq p+1$, k pair et $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$.

5.1. Cohomologie de Čech. — On compare les groupes H^1 et $\check{H}^1$ pour les faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k,\mathscr{L})$.

Reprenons les notations du §4.2 et considérons le recouvrement $(W_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de C. On munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ d'une relation d'ordre total par $0<1<\cdots<p-1<\infty$. Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur C_{Zar}, on définit le groupe de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(C,\mathscr{F})\overset{\text{déf}}{=}\Big(\prod_{\substack{y<z\\(y,z)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)^2}}\mathscr{F}(U)\Big)/\sim$$

où $(s_{y,z})_{y<z}\sim(t_{y,z})_{y<z}$ si et seulement s'il existe $s_y\in\mathscr{F}(W_y)$ pour tout $y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ tel que $s_{y,z}-t_{y,z}=s_z|_U-s_y|_U$ pour tout $y<z$. Si le faisceau $\mathscr{F}$ est K-équivariant, on a une action naturelle de K sur $\check{H}^1(C,\mathscr{F})$.

Lemme 5.1.1. — *On a un isomorphisme canonique K-équivariant :*

$$\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\xrightarrow{\sim}H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C).$$

Démonstration. — Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$, on sait par la théorie générale (cf. e.g. [**11**, §III.4]) qu'il y a un morphisme canonique (K-équivariant si $\mathscr{F}$ l'est) $\check{H}^1(C,\mathscr{F})\to H^1(C,\mathscr{F})$. En revenant à la preuve de la proposition 4.3.2, on a pour tout ouvert affine V de C et tout $i\geq 1$ une suite exacte courte $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\to H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to H^i(V,\mathscr{I}(k))$. Or, $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)=0$ car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$ est quasi-cohérent et $H^i(V,\mathscr{I}(k))=0$ car $\mathscr{I}(k)$ est un facteur direct de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ (cf. preuve du lemme 4.3.1) et $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ est aussi quasi-cohérent, d'où $H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)=0$. Comme les ouverts W_y et U du recouvrement sont affines, la théorie générale (cf. e.g. [**11**, Ex.III.4.11]) entraîne alors en particulier que le morphisme canonique $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)\to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ est un isomorphisme. □

Considérons un système de représentants $J\subset G$ de $N\backslash G$ et le recouvrement affine $(W_g)_{g\in J}$ de X correspondant. Pour toute relation d'ordre total $<$ sur J et tout faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur X, définissons le groupe de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(X,\mathscr{F})\overset{\text{déf}}{=}\Big(\prod_{\substack{g<h\\(g,h)\in J^2}}\mathscr{F}(W_g\cap W_h)\Big)/\sim$$

où $(s_{g,h})_{g<h}\sim(t_{g,h})_{g<h}$ si et seulement s'il existe $s_g\in\mathscr{F}(W_g)$ pour tout $g\in J$ tel que $s_{g,h}-t_{g,h}=s_h|_{W_g\cap W_h}-s_g|_{W_g\cap W_h}$ pour tout $g<h$. Si le faisceau $\mathscr{F}$ est G-équivariant, on a une action naturelle de G sur $\check{H}^1(C,\mathscr{F})$.

Lemme 5.1.2. — *On a un isomorphisme canonique G-équivariant :*

$$\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))\xrightarrow{\sim}H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})).$$

Démonstration. — Définissons un sous-faisceau $\mathscr{J}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}$ sur X comme suit (avec les notations du §2.2) :

$$\mathscr{J}(k)(W_g) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{\frac{k}{2}}}{(u_g-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{\frac{k}{2}}}{(v_g-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{\frac{k}{2}}}{u_g^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{\frac{k}{2}}}{v_g^{i+1}}$$

$$\mathscr{J}(k)(U_g) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{k/2}}{(u_g-x)^{i+1}}$$

$$\mathscr{J}(k)(V_g) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{k/2}}{(v_g-x)^{i+1}}$$

et $\mathscr{J}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{J}(k)(W_g)$ (resp. $\mathscr{J}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{J}(k)(U_g)$, resp. $\mathscr{J}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{J}(k)(V_g)$) si $Z \subseteq W_g$ et $Z \not\subseteq U_g$, $Z \not\subseteq V_g$ (resp. $Z \subseteq U_g$ et $Z \neq \varnothing$, resp. $Z \subseteq V_g$ et $Z \neq \varnothing$). Comme pour la preuve de la proposition 4.3.2, on a une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}} \to \overline{\omega}(k,\mathscr{L}) \to \mathscr{J}(k) \to 0$ qui induit pour tout ouvert $V \subset X$ et tout $i \geq 1$ des suites exactes $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}) \to H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \to H^i(V,\mathscr{J}(k))$. Si V est affine, le premier groupe est nul car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ est quasi-cohérent et le troisième aussi car $\overline{\omega}^{k/2}$ est quasi-cohérent et car on peut montrer, comme dans la preuve du lemme 4.3.1, que l'injection de faisceaux $\mathscr{J}(k) \hookrightarrow \overline{\omega}^{k/2}$ admet un scindage. Comme toutes les intersections du recouvrement $(W_g)_{g\in J}$ sont affines, la théorie générale (cf. e.g. [**11**, Ex.III.4.11]) donne en particulier que le morphisme canonique $\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \to H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ est un isomorphisme. □

On obtient alors :

Corollaire 5.1.3. — *On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C).$$

Démonstration. — Cela découle du (ii) du corollaire 4.4.6 et des lemmes 5.1.1 et 5.1.2. □

5.2. Modifications de sections. — On effectue quelques modifications sur les sections $(\widetilde{s}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq k/2-1}$ du lemme 4.4.1. Ces calculs serviront au paragraphe suivant.

Reprenons les notations du §4.4 et notons de plus $\mathscr{W}_y \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{W}_{g_y}$, $\mathscr{V}_y \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{V}_{g_y}$ et $(u_y,v_y) \overset{\text{déf}}{=} (u_{g_y},v_{g_y})$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ (voir §2.2). On remarque que $\mathscr{U} = \mathscr{U}_{g_y}$ et on note aussi $(u,v) = (u_0,v_0)$.

Pour $\alpha \in \{1,\cdots,k/2-1\}$, nous avons défini au lemme 4.4.1 des sections globales $\widetilde{s}_\alpha \in H^0(\mathscr{X},\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ à support dans la composante centrale C par recollement de sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(W_y,\omega(k,\mathscr{L}))$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$. Notons encore $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(\mathscr{W}_y,\omega(k,\mathscr{L}))$ la section locale en caractéristique zéro définie par (presque)

les mêmes formules :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty} \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha} u_\infty^{\alpha-1} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \Big(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{([u_\infty][x]^{-1})^j}{j}\Big) \frac{((u_\infty - [x])[x]^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\widetilde{s}_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{([u_y][x]^{-1})^j}{j}\Big) \frac{(u_y - [x])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} + \log_{\mathscr{L}}(u_y) \frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(-1)^j}{j} \binom{k-1-\alpha}{j} \frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$$

où rappelons que $[x] \in \mathbb{Z}_p$ désigne le représentant de Teichmüller de x.

Lemme 5.2.1. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on a :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u - [y] - [x]) \frac{(u - [y] - [x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y} = (-1)^{k/2-1} p^{k/2-\alpha} \Big(- \log_{\mathscr{L}} v_y \frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} + \big(\mathscr{L} - H_{k-1-\alpha}\big) \frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} \Big) + p^2 *$$

où $* \in \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_y)$.

Démonstration. — La première formule est laissée au lecteur. Pour la deuxième, on a :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}\,|_{\mathscr{V}_y} = (-1)^{k/2-1} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y[x]} - 1\big) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(p[x]^{-1})^j}{j v_y^j}\Big) \frac{(p - v_y[x])^{k-1-\alpha} v_y^{\alpha-1}}{(p dv_y)^{k/2-1}}$$
$$+ (-1)^{k/2-1} p^{k/2-\alpha} \log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y}\big) \frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}$$
$$+ (-1)^{k/2-1} p^{k/2-\alpha} \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(-1)^j}{j} \binom{k-1-\alpha}{j} \frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}$$

d'où on déduit la formule de l'énoncé en développant les logarithmes puis en utilisant le lemme A.1.2 et $\log_{\mathscr{L}}(p) = \mathscr{L}$. □

Remarque 5.2.2. — Par le (i) du lemme 4.4.1, les sections locales $(\widetilde{s}_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ se recollent en fait en une section globale de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ (et pas seulement de $H^0(\mathscr{X}, \overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$) à support dans la composante centrale.

Nous allons modifier les sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ pour $y \in \mathbb{F}_p$ sans changer leur réduction modulo p. Cela nous servira dans la paragraphe suivant pour mener à bien les calculs dans $\check{H}^1(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$.

Pour $0 \leq j \leq p-1$ et $y \in \mathbb{F}_p$, posons :

$$t^j_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} p \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} [x]^j \Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y - [x]) + \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{([x]^{-1}u_y)^i}{i} \Big) \frac{(u_y - [x])^{k-2-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} \in p\omega(k, \mathscr{L})(\mathscr{W}_y).$$

Lemme 5.2.3. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on peut modifier la section locale $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in \omega(k, \mathscr{L})(\mathscr{W}_y)$ par un élément dans $\oplus_{1 \leq j \leq p-1} \mathfrak{O} t^j_{\alpha,y}$ de telle sorte que la nouvelle section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ vérifie :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u - [x]) \frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p(k-1-\alpha) \frac{A_y(u)}{du^{k/2-1}} - p \frac{B_y(u)}{du^{k/2-1}} + p^2 *$$

où $* \in \omega(k, \mathscr{L})(\mathscr{U})$ et :

$$\begin{aligned} A_y(u) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p} [y]^{p-i} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} [x]^i \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{[x]^{-j}}{j} (u - [y])^j (u - [x+y])^{k-2-\alpha} \\ B_y(u) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{p-i} \frac{\binom{p}{i}}{p} [y]^{p-i} \sum_{x \neq y} [x]^i (u - [x])^{k-2-\alpha}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Un calcul formel de développement des logarithmes donne (voir lemmes 5.2.1 et A.3.3) :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u - [x] - [y]) \frac{(u-[x]-[y])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} &= \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u - [x+y]) \frac{(u-[x+y])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} \\ &\quad - p(k-1-\alpha) \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \delta_{x,y} \log_{\mathscr{L}}(u - [x+y]) \frac{(u-[x+y])^{k-2-\alpha}}{du^{k/2-1}} \\ &\quad - p \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \delta_{x,y} \frac{(u-[x+y])^{k-2-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p^2 * \end{aligned}$$

où $* \in \omega(k, \mathscr{L})(\mathscr{U})$ et $\delta_{x,y} \overset{\text{déf}}{=} -\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{j}}{p} [y]^{p-j} [x]^j \in \mathbb{Z}_p$ (cf. lemme A.3.2). Il suffit alors de corriger $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ par $-(k-1-\alpha)\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{j}}{p} [y]^{p-j} t^j_{\alpha,y}$. Un dernier calcul fournit $A_y(u)$ et $B_y(u)$. □

Lemme 5.2.4. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on peut modifier la section locale $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ par un élément dans $p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_y) + p\mathfrak{O}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y + [y]) + \sum_{j=1}^{k/2-2} (-1)^j \frac{(u_y [y]^{-1})^j}{j}\Big) \frac{(u_y + [y])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$ de telle*

sorte que la nouvelle section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ vérifie :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$
$$+p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha'_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}} - p\sum_{i=1}^{k/2-2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$

où :

$$\alpha'_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{k-1-\alpha}{k-1-\alpha-i}(-1)^{\alpha+i+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{\binom{k-2-\alpha}{i-j}}{j}(-1)^{i-j+1+\alpha}$$
$$+\sum_{j=i}^{k-2-\alpha}\binom{k-2-\alpha}{j}\frac{(-1)^{\alpha+1+j}}{k-1-\alpha-j}\binom{j}{i}.$$

Démonstration. — En modifiant la section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ du lemme 5.2.3 par un élément dans $p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_y)$ (cf. lemme A.3.4), on peut supposer déjà :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha'_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}.$$

Puis en ajoutant à $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ le terme $-p\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+[y]) + \sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\frac{(u_y[y]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+[y])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$ dont la restriction à $\mathscr{U}$ est :

$$-p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\sum_{i=1}^{k/2-2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$
$$-p*\frac{(u-[y])^{k/2-1}}{du^{k/2-1}}$$

avec $*\in\mathbb{Z}_p[u-[y]]$ et en rajoutant encore $p*\frac{u_y^{k/2-1}}{du_y^{k/2-1}}\in p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{W}_y)$ (pour le même $*$), on obtient une restriction comme dans l'énoncé. □

Posons :

$$\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \alpha'_i + \sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}\in\mathbb{Z}_p \tag{9}$$

(on ne fait pas apparaître la dépendance en α dans l'écriture α_i), on a donc pour $y \in \mathbb{F}_p$:

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}} \tag{10}$$

et notons que :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty}|_{\mathscr{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathscr{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}. \tag{11}$$

Reprenons maintenant le calcul de $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y}$ du lemme 5.2.1 :

Lemme 5.2.5. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on a (avec $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ comme dans le lemme 5.2.4) :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y} = (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\Big(-\log_{\mathscr{L}}(v_y)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} + \big(\mathscr{L}-H_{k-1-\alpha}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\Big) + p*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2*_2$$

où $*_1 \in \mathbb{Z}_p$ et $*_2 \in \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathscr{V}_y)$.

Démonstration. — Par le lemme 5.2.1, il suffit de vérifier que les modifications des lemmes 5.2.3 et 5.2.4 sont des termes de la forme $p*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2*_2$ en restriction à $\mathscr{V}_y$. Prenons par exemple $t^j_{\alpha,y}$ (lemme 5.2.3), on a :

$$t^j_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y} = p(-1)^{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^j\Big(\log_{\mathscr{L}}\big(\frac{p}{v_y}-[x]\big) + \sum_{i=1}^{k/2-2}\Big(\frac{p[x]^{-1}}{v_y}\Big)^i\frac{1}{i}\Big)\frac{(\frac{p}{v_y}-[x])^{k-2-\alpha}v_y^{k-2}}{(pdv_y)^{k/2-1}}$$

et en développant les logarithmes, un calcul donne :

$$t^j_{\alpha,y}|_{\mathscr{V}_y} = p\frac{(-1)^{k/2-\alpha}}{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p}[x]^{k/2-1-\alpha+j}\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2*.$$

On laisse les autres termes correctifs (lemme 5.2.4) au lecteur. □

5.3. Défauts de recollement. — On calcule explicitement les classes de cohomologie dans $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ provenant du défaut de recollement modulo p^2 des sections locales $(\widetilde{s}_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ modifiées du §5.2.

Un examen soigneux des preuves des parties 2, 4 et 5.1 (et des preuves utilisées de l'appendice) montre d'abord que tous les résultats concernant $H^i(X,\overline{\omega}^{k/2})$ et $H^i(X,\overline{\omega}(k,\mathscr{L}))$ $(i = 0,1)$ s'étendent à l'identique à $H^i(X,\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)$ et $H^i(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à condition de remplacer le corps $\mathbb{F}$ des coefficients par la

$\mathbb{F}$-algèbre artinienne $\mathfrak{O}/p$. En particulier (cf. corollaires 4.4.6 et 5.1.3), on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{O}/p) \to H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1_{\mathfrak{O}/p} \mid T_p f = a(\mathscr{L}) f\} \to 0$$

et des isomorphismes :

$$\check{H}^1(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \simeq H^1(X, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{O}/p)^*.$$

Pour $n \geq 2$, la suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1} \xrightarrow{p} \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^n \longrightarrow \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1}) \longrightarrow H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^n) \longrightarrow$$
$$H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \xrightarrow{\psi_n} H^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1}).$$

Pour voir si $s \in H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ se relève en une section de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^n)$, il suffit donc de calculer son image par l'application :

$$\psi_n : H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \longrightarrow H^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^{n-1}).$$

On détermine maintenant les images dans $H^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \simeq \check{H}^1(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ par ψ_2 des sections $(\widetilde{s}_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq k/2-1}$ de $H^0(\mathscr{X}, \omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ (cf. §5.2).

Pour $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ et $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, on définit $g_{y_z} \in G$ comme suit. Si $y \in \mathbb{F}_p$ et $z \in \mathbb{F}_p$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} [y] & 1 \\ p + [yz] & [z] \end{pmatrix}$. Si $y \in \mathbb{F}_p$ et $z = \infty$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} p & 0 \\ [y] & 1 \end{pmatrix}$. Si $y = \infty$ et $z \in \mathbb{F}_p$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [z] & p \end{pmatrix}$ et si $y = \infty$ et $z = \infty$, $g_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{W}_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{W}_{g_{y_z}}$, $W_{y_z} \overset{\text{déf}}{=} W_{g_{y_z}}$ (cf. §2.2) et on remarque que $\mathscr{W}_{y_0} = \mathscr{W}_y$ et $W_{y_0} = W_y$. Les ouverts W_{y_z} recouvrent (dans X) la composante C_y « perpendiculaire » au point y à la composante centrale C et on a $W_{y_z} \times_X C_y = C_y \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_\mathrm{p} \text{ autres que } y_z\}$ et $\mathscr{W}_{y_z} \cap \mathscr{W}_{y_{z'}} = \mathscr{V}_y$ (avec les notations du §5.2) si $z \neq z'$. Dans la suite, un élément de $\check{H}^1(C_y, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ (resp. de $\check{H}^1(C, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_C)$) est écrit dans le recouvrement $(W_{y_z})_{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de C_y dans X (resp. $(W_y)_{y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de C dans X) avec l'ordre total $y = y_0 < y_1 < \cdots < y_{p-1} < y_\infty$ (resp. $0 < 1 < \cdots < p-1 < \infty$), cf. §5.1 (le faisceau $(\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_C$ est défini exactement comme au §3.2 en remplaçant $\mathbb{F}$ par $\mathfrak{O}/p$).

Lemme 5.3.1. — *Soit* $a(\mathscr{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\big(1 + \frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)(\mathscr{L} - 2H_{k/2-1})\big) \in \mathfrak{O}$ *(cf. lemme 4.4.4). L'image de* $\widetilde{s}_{k/2-1}$ *par* ψ_2 *est donnée dans* $\Pi_C \check{H}^1(C, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_C)$ *par :*
• *sur* C_y *pour* $y \in \mathbb{F}_p$ *par la classe dans* $\check{H}^1(C_y, (\omega(k,\mathscr{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ *du uplet :*

$$-\frac{a(\mathscr{L})}{k/2(k/2-1)}\Big(\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0} \cap W_{y_1}}, \cdots, \frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0} \cap W_{y_\infty}}, 0, \cdots, 0\Big)$$

• *sur C (la composante centrale) par la classe dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ du uplet :*

$$\frac{(-1)^{k/2}}{k/2(k/2-1)}\Big(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\Big)$$

et par 0 sur les autres $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$.

Démonstration. — L'image par ψ_2 d'une section $s\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à support dans la composante centrale est simplement donnée dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ par la classe du uplet $(-p^{-1}\hat{s}_y\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,-p^{-1}\hat{s}_y\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0)$ où $\hat{s}_y\in\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_y)$ est un relevé local de $s|_{W_y}$. Par le lemme 5.2.5, on obtient donc pour $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1})$:

$$(-1)^{k/2}\Big((\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(v_y)-H_{k/2})\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\\ (\mathscr{L}-\log_{\mathscr{L}}(v_y)-H_{k/2})\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big).$$

En effet, les uplets de la forme $\big(\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\big)$ (qui apparaissent avec le terme correctif $*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ dans le lemme 5.2.5) ont une classe nulle dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ car la section locale $\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ appartient à $H^0(W_y,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$. Par ailleurs, on l'égalité dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ d'après le lemme B.2.2 :

$$\Big(\log_{\mathscr{L}}(v_y)\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\log_{\mathscr{L}}(v_y)\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big)=\\ H_{k/2-2}\Big(\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big)$$

d'où la première égalité de l'énoncé en remarquant que $\mathscr{L}-H_{k/2-2}-H_{k/2}=\frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}a(\mathscr{L})$. Passons à la deuxième. L'image par ψ_2 d'une section $s\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à support dans la composante centrale est donnée dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ par la classe du uplet $(p^{-1}(\hat{s}_z|_{W_y\cap W_z}-\hat{s}_y|_{W_y\cap W_z}))_{y<z}$ où les $\hat{s}_y\in\omega(k,\mathscr{L})(\mathscr{W}_y)$ sont des relevés locaux des $s|_{W_y}$, $y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$. En développant $(u-[y])^i=\sum_{r=0}^{k/2-1}\binom{i}{r}u^r(-1)^{i-r}[y]^{i-r}$ et en utilisant (10), (11) et le lemme B.2.2, un calcul donne dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$:

$$\big((\widetilde{s}_{k/2-1,z}|_{W_y\cap W_z}-\widetilde{s}_{k/2-1,y}|_{W_y\cap W_z})\big)_{y<z}=\\ -p\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i\Big(0,\cdots,0,\big(\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)$$

où rappelons que α_i est défini en (9). Mais par le lemme A.3.8, on a :

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i=\frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}$$

d'où la deuxième égalité de l'énoncé. Le fait que l'on trouve une classe nulle sur les autres composantes (en particulier la composante « perpendiculaire » au point ∞ à la composante centrale) est un calcul facile laissé au lecteur. □

Lemme 5.3.2. — *Soit $\alpha\in\{1,\cdots,k/2-2\}$. L'image de $\widetilde{s}_\alpha$ par ψ_2 est donnée dans $\Pi_C\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ par la classe dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ (où C est la composante centrale) du uplet :*

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\Big(\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i\Big)\Big(\big((z^{k-\alpha-1-r}-y^{k-\alpha-1-r})\frac{u^r}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_z}\big)_{y<z,z\neq\infty},\big(-y^{k-\alpha-1-r}\frac{u^r}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)$$

et par 0 sur les autres $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$.

Démonstration. — On utilise (10) et (11) comme précédemment et on développe $(u-[y])^i=\sum_{r=0}^i\binom{i}{r}u^r(-1)^{i-r}[y]^{i-r}$. La dernière assertion provient du lemme 5.2.5 et du fait que les termes correctifs en $*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ ne contribuent pas (cf. preuve précédente). □

Remarque 5.3.3. — La formule sommatoire du lemme 5.3.2 est encore valable pour $\alpha=k/2-1$, mais dans le lemme 5.3.1, on a complètement identifié la classe de Čech « centrale » dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ en utilisant le lemme B.2.2.

5.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathbb{F}$. — On détermine la G-représentation $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}$ (sous les conditions du §5).

Proposition 5.4.1. — *Soit $a(\mathscr{L})\in\mathfrak{O}$ comme au lemme 5.3.1.*
(i) *L'application $\psi_2:H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\to H^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ est surjective.*
(ii) *On a un isomorphime de G-représentations :*

$$\mathrm{Ker}\big(\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)}\big)=\Big\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p),a(\mathscr{L})T_pf=f\Big\}.$$

Démonstration. — Nous allons montrer que $\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)}$ est surjectif et calculer son noyau. Rappelons que :

$$H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p=\bigoplus_{j=0}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p$$

et que chaque représentation $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$ est engendrée sous K par la section globale $\widetilde{s}_{k/2-1-j}\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ (voir le lemme

4.4.1, la preuve du corollaire 4.2.4 et le début du §5.3). Rappelons aussi que $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^*$ (voir le début du §5.3). Montrons que la projection de $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1-j})$ sur la composante centrale est non nulle modulo π. Pour cela, considérons le uplet du lemme 5.3.2 (et aussi le uplet « central » du lemme 5.3.1 pour $j=0$) vu dans $\check{H}^1(C,(\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ et calculons son accouplement avec la section :

$$\frac{u^{(p+1)(k/2-1-j)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-j}}=(-1)^{k/2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}s_{k/2-1-j}\in H^0(C,(\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)(1)\,|_C)$$

donné par la dualité de Serre entre $H^0(C,(\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)(1)\,|_C)$ et $\check{H}^1(C,(\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$. Un calcul facile de résidus donne :

$$(-1)^{k/2-1-j}\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2-j}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i$$

qui est dans $\mathbb{Z}_p^\times$ d'après le lemme A.3.8. Comme la section $\frac{u^{(p+1)(k/2-1-j)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-j}}$ a un antécédent dans $H^0(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$, on en déduit par le corollaire 4.3.5 que le uplet du lemme 5.3.2 (et le uplet « central » du lemme 5.3.1 pour $j=0$) est vraiment non nul modulo π dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$. Comme $\widetilde{s}_{k/2-1-j}$ engendre sous K la représentation « irréductible » $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (au sens où cette représentation n'admet pas de sous-représentation stricte non nulle facteur direct comme $\mathfrak{O}/p$-module), ψ_2 est injectif en restriction à $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$. Lorsque $j>0$, on sait de plus par la dernière assertion du lemme 5.3.2 que la projection de $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1-j})$ sur les composantes non centrales est nulle. On a donc $\mathrm{Ker}(\psi_2\,|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p)})=0$ et $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p)^*\subset\mathrm{Im}(\psi_2)$ pour $j>0$. Pour $j=0$, on déduit facilement du lemme 5.3.1 que :

$$\psi_2\,|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)}\colon \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)\longrightarrow \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^*$$
$$\simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)$$

s'identifie (à multiplication près par un scalaire non nul) à l'endomorphisme surjectif $-a(\mathscr{L})T_p+\mathrm{Id}$. En effet, les éléments de Čech $\big(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\big)$ et $(-1)^{k/2-1}\big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\big)$ s'envoient nécessairement respectivement sur 1 et $-u^{p-3}$ dans $\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (à homothétie près) via un isomorphisme $(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p)^*\xrightarrow{\sim}\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (pour le premier, cela découle du fait qu'il est la projection de l'image de $\widetilde{s}_{k/2-1}$ et pour le deuxième, on applique $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$). On applique alors la formule (1) donnant $T_p([\mathrm{Id},1])$ en remarquant que $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\p&[-y]\end{smallmatrix}\right)u=v_y$ sur $\mathscr{X}$ (§2.2). Donc ψ_2 est finalement surjectif (et même surjectif en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$) et son noyau en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$ est exactement donné par les $f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p)$ tels que $a(\mathscr{L})T_pf=f$. □

Proposition 5.4.2. — *L'image de* $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$ *dans* $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ *se relève dans* $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))$ *via l'application*

$$H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p).$$

Démonstration. — Pour alléger les notations, on note $\omega(k,\mathscr{L})/p^n$ pour $\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^n$. Par la proposition 5.4.1, l'application $\psi_2 : H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\to H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)$ est surjective. En reprenant la suite exacte longue de cohomologie définissant ψ_2, on en déduit que l'application $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\to H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)$ est nulle et que l'application $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\to H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)$ est injective. Par ailleurs, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & \omega(k,\mathscr{L})/p^2 & \xrightarrow{p} & \omega(k,\mathscr{L})/p^3 & \to & \omega(k,\mathscr{L})/p & \to 0\\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ 0\to & \omega(k,\mathscr{L})/p & \xrightarrow{p} & \omega(k,\mathscr{L})/p^2 & \to & \omega(k,\mathscr{L})/p & \to 0 \end{array}$$

induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^3) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p) & \xrightarrow{\psi_3} & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\\ \downarrow & & \| & & \downarrow \\ H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p) & \xrightarrow{\psi_2} & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p) \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est injective. Cela implique immédiatement que ψ_3 est surjectif et que l'on a un isomorphisme $H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\xrightarrow{\sim} H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)$. Comme ψ_3 est surjectif, on peut recommencer le raisonnement précédent avec ψ_3 au lieu de ψ_2, puis ψ_4 au lieu de ψ_3 etc. et on obtient par récurrence des isomorphismes pour tout $n\geq 1$:

$$H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\xrightarrow{\sim} H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p).$$

On a des diagrammes commutatifs analogues au précédent :

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+m}) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n) & \to & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^m)\\ \downarrow & & \| & & \downarrow\wr \\ H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+1}) & \to & H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n) & \to & H^1(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p) \end{array}$$

d'où on déduit des isomorphismes pour tous $n,m>0$:

$$\mathrm{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+m})\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\Big)\xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n+1})\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\Big). \tag{12}$$

En passant à la limite projective sur n sur les suites exactes :

$$0\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^{n-1})\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\to \mathrm{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^n)\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\Big)\to 0$$

et en remarquant que le quotient de droite est constant par (12) appliqué avec $n=1$ et que les conditions de Mittag-Leffler sont satisfaites sur les noyaux par (12) encore, on en déduit :

$$H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes\mathfrak{O}/p\xrightarrow{\sim}\mathrm{Im}\Big(H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p^2)\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})/p)\Big)$$

d'où le résultat. □

On en déduit le résultat principal de cet article (théorème 1.1.1) :

Théorème 5.4.3. — *Soit $a(\mathscr{L})\in\mathfrak{O}$ comme au lemme 5.3.1.*
(i) *Si* $\mathrm{val}(a(\mathscr{L}))>0$, *on a un isomorphisme de G-représentations :*

$$H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}\simeq\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1, T_pf=0\}.$$

(ii) *Si* $\mathrm{val}(a(\mathscr{L}))=0$, *on a un isomorphisme de G-représentations :*

$$0\to\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\sigma(p-3,1), a(\mathscr{L})T_pf=f\}\to H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}\to$$
$$\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1, T_pf=a(\mathscr{L})f\}\to 0.$$

Démonstration. — Noter que (ii) lorsque $\mathrm{val}(a(\mathscr{L}))>0$ redonne (i) puisque la représentation de gauche est alors nulle. Par le lemme 5.4.2, on voit donc qu'il suffit de montrer le même énoncé que (ii) pour $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$ avec la G-représentation image de $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$ dans $H^0(\mathscr{X},\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$, c'est-à-dire avec $\mathrm{Ker}(\psi_2)$. Par le corollaire 4.4.6, on a une suite exacte :

$$0\to\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)\to H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\to\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\mid T_pf=a(\mathscr{L})f\}\to 0$$

et par la proposition 5.4.1, on a :

$$\mathrm{Ker}\big(\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)}\big)=\Big\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p), a(\mathscr{L})T_pf=f\Big\}.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(\psi_2)\subset H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ s'envoie encore surjectivement vers la représentation quotient $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\mid T_pf=a(\mathscr{L})f\}$. Soit $\bar{s}$ un élément de cette représentation quotient et $s\in H^0(X,\omega(k,\mathscr{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ un relevé de $\bar{s}$. Comme l'application ψ_2 est surjective en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$ (cf. preuve de la proposition 5.4.1), il existe $s'\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$ tel que $\psi_2(s')=\psi_2(s)$ et l'élément $s-s'\in\mathrm{Ker}(\psi_2)$ s'envoie encore sur $\bar{s}$. Ceci achève la preuve. □

Corollaire 5.4.4. — *Supposons k pair, $k\leq p+1$ et* $\mathrm{val}(\mathscr{L})\geq 0$.
(i) *Le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(k,\mathscr{L})$ est non nul et admissible.*
(ii) *La correspondance définie dans* [**4**] *est compatible à la réduction modulo p.*

Démonstration. — Le (i) résulte de [**4**, Prop.4.4.4]. Le (ii) résulte de [**6**] et de la définition de cette correspondance ([**3**]). □

Appendice A
Calculs de sections

A.1. Calculs combinatoires

Lemme A.1.1. — *Soit* $1 \leq n \leq p-2$ *et* $0 \leq \ell \leq p-1$. *On a les égalités dans* $\mathbb{F}_p(u)$:

$$\frac{u^\ell}{(u-u^p)^n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{\ell+i-n}}{(u-x)^i}\binom{\ell}{\ell+i-n} + \begin{cases} \frac{1}{u^{n-\ell}} & \text{si } 0 \leq \ell \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{1}{u(u-u^p)^n} = \frac{1}{u^{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{j-n-1}}{(u-x)^j}.$$

Démonstration. — La première égalité se démontre par récurrence sur $\ell \geq 0$. La deuxième se démontre en remarquant que :

$$\frac{1}{(u-u^p)^n} = \frac{1}{u^n} + \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \frac{x^{-n+i-1}}{(u-x)^{i-1}} + (-1)^{n-i} \frac{x^{-n+i}}{(u-x)^i}. \qquad \square$$

Lemme A.1.2. — *Soit* $1 \leq \ell \leq n$. *On a (dans* $\mathbb{Q}$*) :*

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \frac{(-1)^j}{j}\binom{n}{\ell-j} = \binom{n}{\ell}(H_{n-\ell} - H_n).$$

Démonstration. — La somme $\sum_{1\leq j\leq \ell} \frac{(-1)^j}{j}\binom{n}{\ell-j}$ est le coefficient de degré ℓ dans le développement en série entière de $z \mapsto -(1+z)^n \log(1+z)$. En dérivant $(1+z)^x = \sum_{i\geq 0} \binom{x}{i} z^i$ par rapport à x, on obtient par ailleurs :

$$(1+z)^x \log(1+z) = \sum_{i\geq 1} z^i \frac{d}{dx}\binom{x}{i}.$$

Or, si x n'est pas un entier de 0 à $i-1$, on a par dérivation logarithmique :

$$\frac{d}{dx}\binom{x}{i} = \binom{x}{i} \sum_{0\leq j\leq i-1} \frac{1}{x-j} = \binom{x}{i}(H_x - H_{x-i})$$

où $H_x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n>0} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ pour tout nombre complexe $x \notin \mathbf{Z}_{<0}$ (avec $H_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$). Donc le coefficient de degré ℓ dans le développement en série entière de $z \mapsto (1+z)^x \log(1+z)$ est $\binom{x}{\ell}(H_x - H_{x-\ell})$ lorsque $x \in \mathbb{C}_p - \{0, \cdots, \ell-1\}$. On en déduit le résultat. $\square$

Lemme A.1.3. — *Soit* $1 \leq m \leq n$ *des entiers et* $M \overset{\text{déf}}{=} (M_{i,l})_{\substack{0\leq i\leq m \\ 0\leq l\leq m}}$ *la matrice à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *définie par* $M_{i,0} \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+i}{i}$ *pour* $0 \leq i \leq m$ *et* $M_{i,l} \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+i-l}{i} \sum_{j=1}^{l} \frac{(-1)^j}{j}\binom{n+i}{l-j}$ *pour* $1 \leq l \leq m$ *et* $0 \leq i \leq m$. *Alors* $\det(M) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!}$.

Démonstration. — Par le lemme A.1.2, on a $M_{i,l} = \binom{n+i-l}{i}\binom{n+i}{l}(H_{n+i-l} - H_{n+i})$ pour $1 \leq l \leq m$ et $0 \leq i \leq m$. On en déduit :

$$\det(M) = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & 1/n & 1/(n-1) & \dots & 1/(n-m+1) \\ 1 & 1/(n+1) & 1/n & \dots & 1/(n-m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1/(n+m) & \dots & \dots & 1/(n+1) \end{vmatrix} \prod_{0\leq i,l\leq m} \binom{n}{l}\binom{n+i}{n}.$$

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on reconnaît des déterminants de Cauchy. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \Big(\prod_{i=1}^{m} \frac{(n+i)!}{i!} \prod_{l=1}^{m} \frac{l!}{(n-l)!} \frac{\prod_{\substack{0\leq i<l\leq m \\ i,l\neq j}} (l-i) \prod_{1\leq i<l\leq m} (-l+i)}{\prod_{\substack{1\leq l\leq m, 0\leq i\leq m \\ i\neq j}} (n+1+i-l)} \Big) \\ &= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{\frac{1}{j!(m-j)!} \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!}}{\frac{(n+j-m)!}{(n+j)!}} \\ &= \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n+j}{m}\binom{m}{j}. \end{aligned}$$

On en déduit $\det(M) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!}$. □

La démonstration du lemme combinatoire qui suit est laissée en exercice au lecteur.

Lemme A.1.4. — *Soit $1 \leq m \leq n$ des entiers et $M' = (M'_{i,l})_{\substack{0\leq i\leq m \\ 0\leq l\leq m}}$ la matrice obtenue à partir de la matrice M du lemme A.1.3 en ajoutant à la dernière colonne le terme :*

$$M'_{i,m} = M_{i,m} + (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n+i}{i-j}, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Alors $\mathrm{Ker}({}^tM')$ *est de dimension* 1 *et est engendré par le vecteur colonne* $(c_i)_{0\leq i\leq m}$ *où* $c_i \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+1}{i+1+n-m}(-1)^{n+i}$. *En particulier, on a :*

$$\sum_{i=0}^{m} M_{i,m} c_i = (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n+i}{i-j} c_i = \frac{(-1)^{n+1}}{m}.$$

A.2. Calculs de sections modulo p. — Rappelons que $n_k = (k/2-1)(p-1)-2$ avec $4 \leq k \leq p+1$ et k pair. Dans ce paragraphe, on détermine si les sections de $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$:

$$\frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}}, \ \frac{u^r (du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1}}, \ 0 \leq r \leq n_k$$

admettent un antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|_C)$ (via l'injection du lemme 4.2.1 et pour $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \geq 0$). Par décomposition en éléments simples (lemme A.1.1), les fractions

$\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}$ et $\frac{u^r}{(u-u^p)^{k/2-1}}$ pour $0 \leq r \leq n_k$ appartiennent à :

$$\bigoplus_{i=1}^{k/2-1} \bigoplus_{\alpha=1}^{p-1} \mathbb{F} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{i-\alpha}}{(u-x)^i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k/2} \mathbb{F} \frac{1}{u^i}.$$

Reprenons les notations du §4.2. On commence par « intégrer » formellement $k-1$ fois la section locale $(-1)^i(i-1)!(k-1-i)!\frac{(du)^{k/2}}{u^i}$ pour $1 \leq i \leq k/2$ par rapport à la variable $u = u_0$, puis par rapport à u_∞, enfin par rapport à u_y pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$. On obtient, à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:

$$\begin{aligned}
t_{i,0} &\overset{\text{déf}}{=} -\log_{\mathscr{L}}(u_0)\frac{u_0^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}} \\
t_{i,\infty} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2+1}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{i-1}}{du_\infty^{k/2-1}} \\
t_{i,y} &\overset{\text{déf}}{=} -\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+y) + \sum_{j=1}^{k/2-1} \frac{(-1)^j(u_y y^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+y)^{k-i-1}}{du_y^{k/2-1}}.
\end{aligned}$$

Puis on fait de même avec $(k-1-i)!(i-1)!(-1)^{\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{i-\alpha}}{(u-x)^i}(du)^{k/2}$:

$$\begin{aligned}
t_{i,\alpha,0} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\alpha-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-\alpha}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_0-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{u_0^j x^{-j}}{j}\Big)\frac{(u_0-x)^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}} \\
t_{i,\alpha,\infty} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2+\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} u_\infty^{i-1}x^{\alpha-k+1}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-i}}{du_\infty^{k/2-1}} \\
&\quad +(-1)^{k/2+\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{-k+1+\alpha}(u_\infty-x)^{k-1-i}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{i-1}}{du_\infty^{k/2-1}} \\
t_{i,\alpha,y} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\alpha-i}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times \\ x\neq y}} x^{i-\alpha}\Big(\log_{\mathscr{L}}(u_y+y-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_y(x-y)^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+y-x)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}} \\
&\quad +(-1)^{\alpha-i}y^{i-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}.
\end{aligned}$$

Les éléments $(t_{i,y})_{1\leq i\leq k/2}$ et $(t_{i,\alpha,y})_{\substack{1\leq i\leq k/2-1\\ 1\leq\alpha\leq p-1}}$ sont des sections dans $H^0(W_y, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y \in \mathbb{F}_p$. Ce ne sont pas, en général, des sections dans $H^0(W_\infty, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y=\infty$ à cause des termes $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$, $1 \leq \alpha \leq k/2-1$ (ce sont alors seulement des sections dans $H^0(U, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$).

Rappelons la convention $\binom{n}{m} = 0$ si $m > n$ ou $m < 0$.

Lemme A.2.1. — (i) *Pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$, $1 \leq i \leq k/2-1$ et $1 \leq \alpha \leq p-1$, on a à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:*

$$t_{i,\alpha,0}|_U = (-1)^{\alpha-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_0-x)\frac{(u_0-x)^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}}$$
$$+\begin{cases} \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{1}{j}\binom{k-1-i}{k/2-1-j}(-1)^{j+1}\frac{u_0^{k-1-\alpha}}{du_0^{k/2-1}} & si\ k/2\leq\alpha\leq k-2\\ 0 & sinon,\end{cases}$$

$$t_{i,\alpha,\infty}|_U = (-1)^{k/2+\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} u_\infty^{i-1}x^{\alpha-k+1}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty-x)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-i}}{du_\infty^{k/2-1}}$$
$$+\begin{cases} (-1)^{k/2+1}\binom{k-1-i}{k-1-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}+(-1)^{k/2}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j}\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}} & si\ \alpha\leq k/2\\ 0 & sinon\end{cases}$$

et, pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$:

$$t_{i,\alpha,y}|_U = y^{i-\alpha}(-1)^{\alpha-i}\log_{\mathscr{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}$$
$$+(-1)^{\alpha-i}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}} x^{i-\alpha}\log_{\mathscr{L}}(u_y+y-x)\frac{(u_y+y-x)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}$$
$$-\sum_{l=1}^{k/2-1}\binom{k-i-l-1}{\alpha-i}y^{k-1-\alpha-l}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{l-j}\frac{u_y^l}{du_y^{k/2-1}}.$$

(ii) *Pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$, $1 \leq i \leq k/2$, on a à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:*

$$t_{i,y}|_U = -\log_{\mathscr{L}}(u_y+y)\frac{(u_y+y)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}+\sum_{r=1}^{k/2-1}y^{k-1-i-r}\sum_{j=1}^{r}\binom{k-i-1}{r-j}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\frac{u_y^r}{du_y^{k/2-1}}.$$

Démonstration. — Nous démontrons seulement le cas de $t_{i,\alpha,y}|_U$, laissant les autres cas au lecteur. On observe que, à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$:

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}} x^{i-\alpha}(u_y+y-x)^{k-1-i}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_y(x-y)^{-1})^j}{j}=$$
$$\sum_{l=1}^{k/2-1}u_y^l\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{1}{j}\binom{k-1-i}{l-j}(-1)^{-1+i-l+j}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}(x-y)^{k-1-i-l}x^{i-\alpha}$$

et, par le lemme A.3.1 :

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}} (x-y)^{k-1-i-l}x^{i-\alpha} = -\binom{k-1-i-l}{\alpha-i}(-y)^{k-1-l-\alpha}.$$

On en déduit la formule de l'énoncé. □

Lemme A.2.2. — *Pour $2\leq\alpha\leq k/2$ et $y\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$, notons :*

$$s'_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\alpha}t_{i,\alpha,y} \text{ si } 2\leq\alpha\leq k/2-1$$

$$s'_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{k/2-1} b_{i,k/2}t_{i,k/2,y} + b_{k/2,k/2}t_{k/2,y}$$

où les $b_{i,\alpha}$ sont dans $\mathbb{F}$. Il existe un unique choix de $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq\alpha}$ dans $\mathbb{F}$, qui est en fait dans $\mathbb{F}_p$, de telle sorte que :

(i) $b_{\alpha,\alpha} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!} & si \quad 2\leq\alpha\leq k/2-1, \\ \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2} & si \qquad \alpha=k/2 \end{cases}$;

(ii) *les coefficients de $\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $1\leq i\leq\alpha-2$ et $y\in\mathbb{F}_p$ sont nuls ;*

(iii) *le coefficient de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ est nul.*

De plus, pour $\alpha=k/2$, l'élément $s'_{k/2}$ ainsi défini s'obtient localement par « intégration » $k-1$ fois (comme au début de ce paragraphe) d'un élément :

$$r_{k/2} = \Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}} + f(u)\Big)(du)^{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$$

avec $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$.

Démonstration. — Définissons une matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ avec $\alpha-1$ lignes par :

$$M_{i,0} \overset{\text{déf}}{=} \binom{k-1-i}{\alpha-i}, \quad 1\leq i\leq\alpha-1$$

$$M_{i,\ell} \overset{\text{déf}}{=} \binom{k-i-\ell-1}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\ell-j}, \quad 1\leq\ell\leq\alpha-2,\ 1\leq i\leq\alpha-1.$$

Les conditions (ii) et (iii) imposent que $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq\alpha-1}$ est solution du système linéaire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\alpha-1} M_{i,0}b_{i,\alpha} &= -b_{\alpha,\alpha} \\ \sum_{i=1}^{\alpha-1} M_{i,\ell}b_{i,\alpha} &= -\sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{\ell-j}b_{\alpha,\alpha} \quad 1\leq\ell\leq\alpha-2 \end{aligned}$$

(voir lemme A.2.1 en notant que, pour $\ell \leq \alpha-2 \leq k/2-2$, on peut remplacer les sommes $\sum_{j=1}^{k/2-1}$ par $\sum_{j=1}^{\ell}$ car $\binom{k-1-\alpha}{\ell-j}=0$ pour $j>\ell$). Or, en changeant i en $\alpha-i$, on observe que la matrice M est une matrice du même type que celle définie au lemme A.1.3, donc M est inversible, i.e. $M \in \mathrm{GL}_{\alpha-1}(\mathbb{Z}_p)$. On en déduit l'existence et l'unicité $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq \alpha-1}$ (dans $\mathbb{F}_p$). Par construction, $s'_{k/2,y}$ s'obtient par « intégration » $k-1$ fois (comme au début de ce paragraphe) de :

$$r_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{a_{k/2}}{u^{k/2}}(du)^{k/2} + \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\sum_{i=1}^{k/2-1} a_i \frac{x^{i-k/2}}{(u-x)^i}(du)^{k/2} \tag{13}$$

avec $a_{k/2}=1$ et $a_i=(-1)^{k/2+1}(k-1-i)!(i-1)!b_{i,k/2}$ pour $1\leq i\leq k/2-1$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite $(a'_i)_{2\leq i\leq k/2-1}$ dans $\mathbb{F}_p$ telle que :

$$r_{k/2} = \Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}} + \sum_{i=2}^{k/2-1} a'_i \frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}\Big)(du)^{k/2}$$

où on remarque que les sections $\big(\frac{u^{p-1+i-k/2}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^i}\big)_{2\leq i\leq k/2-1}$ sont dans $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (le terme $\frac{u^{p-k/2}(du)^{k/2}}{u-u^p}$ n'y est pas). Pour cela, on constate que le système :

$$\Big(\Big(\frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}\Big)_{1\leq i\leq k/2-1}, \frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}\Big)$$

est échelonné en $\big(\big(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{i-k/2}}{(u-x)^i}\big)_{1\leq i\leq k/2-1}, \frac{1}{u^{k/2}}\big)$ (utiliser le lemme A.1.1) et que l'expression de $r_{k/2}$ comme en (13) dans la base $\big(\big(\frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}(du)^{k/2}\big)_{1\leq i\leq k/2-1}, \frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}}\big)$ ne fait pas intervenir de termes en $\frac{u^{p-k/2}}{u-u^p}$. En effet, la matrice de changement de base $(A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq k/2\\ 1\leq j\leq k/2}}$ est donnée par :

$$A_{i,j} = \begin{cases} \binom{n+i}{n+j} & \text{si} \quad 1\leq i\leq k/2-1 \quad \text{et} \quad 1\leq j\leq k/2 \\ (-1)^{k/2-1+j} & \text{si} \quad i=k/2 \quad \text{et} \quad 1\leq j\leq k/2-1 \\ 1 & \text{si} \quad i=j=k/2 \end{cases}$$

avec $n \overset{\text{déf}}{=} p-k/2-1$. On a donc $A^{-1}_{i,1}=\binom{k/2-1}{i-1}$ si $1\leq i\leq k/2-1$ et $A^{-1}_{k/2,1}=-1$. On doit vérifier la nullité de $a'_1=\sum_{i=1}^{k/2-1}\binom{k/2-1}{i-1}a_i - a_{k/2}$. Or la condition (iii) implique :

$$\sum_{i=1}^{k/2-1}\binom{k-1-i}{k/2-i}b_{i,k/2} = -b_{k/2,k/2}.$$

En remplaçant $b_{i,k/2}$ par son expression en fonction de a_i, on obtient $a'_1=0$. Ceci achève la preuve du lemme. □

Lemme A.2.3. — *Soit $2\leq\alpha\leq k/2$, les coefficients de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ et de $y^{k-2\alpha}u_y^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $y\in\mathbb{F}_p^\times$ (avec $s'_{\alpha,\infty}$ et $s'_{\alpha,y}$ comme au lemme A.2.2 pour*

le choix de $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq\alpha}$ du lemme A.2.2) sont tous égaux à :

$$\Delta_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(k-\alpha)\binom{k-\alpha-1}{k-2\alpha+1}} \quad \text{si } 2\leq\alpha\leq k/2-1$$

$$\Delta_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2 k/2(k/2-1)} \quad \text{si } \alpha=k/2.$$

Démonstration. — Définissons une matrice carrée $N=(N_{i,\ell})_{\substack{1\leq i\leq\alpha\\ 0\leq\ell\leq\alpha-1}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ par :

$$N_{i,\ell} \overset{\text{déf}}{=} M_{i,\ell},\ 1\leq i\leq\alpha-1,\ 0\leq\ell\leq\alpha-2$$

$$N_{i,\alpha-1} \overset{\text{déf}}{=} \binom{k-\alpha-i}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-1-j}+(-1)^\alpha\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j},\ 1\leq i\leq\alpha$$

$$N_{\alpha,\ell} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{\ell-j},\ 1\leq\ell\leq\alpha-2$$

$$N_{\alpha,0} \overset{\text{déf}}{=} 1.$$

En changeant i en $\alpha-i$, on reconnait la matrice M' définie dans le lemme A.1.4 avec $m=\alpha-1$ et $n=k-\alpha-1$. Donc le vecteur $(c_{i,\alpha}\overset{\text{déf}}{=}b_{\alpha-i,\alpha})_{0\leq i\leq\alpha-1}$ est l'unique vecteur du noyau de N avec $c_{0,\alpha}=b_{\alpha,\alpha}=\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ si $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et $c_{0,k/2}=b_{k/2,k/2}=\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2}$. En particulier, on a :

$$-\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}\binom{k-\alpha-i}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-1-j}=\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}(-1)^\alpha\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j}.$$

Via le lemme A.2.1, on remarque que le terme de gauche s'identifie au coefficient de $u_y^{\alpha-1}y^{k-2\alpha}$ dans $s'_{\alpha,y}$ et que celui de droite s'identifie au coefficient de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$. Via le lemme A.2.2, on remarque que les coefficients de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ et de $y^{k-2\alpha}u^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,y}$ sont égaux à $\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(\alpha-1)\binom{k-\alpha}{k-2\alpha+1}}$ si $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et à $\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2k/2(k/2-1)}$ si $\alpha=k/2$. On conclut en observant que $(\alpha-1)\binom{k-\alpha}{k-2\alpha+1}=(k-\alpha)\binom{k-\alpha-1}{k-2\alpha+1}$. □

On démontre maintenant la proposition 4.2.3, dont on rappelle l'énoncé :

Proposition A.2.4. — (i) *Soit $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et :*

$$r_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

avec $f(u)(du)^{k/2}$ un élément de la sous-représentation :

$$\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)=\bigoplus_{r=0}^{n_k-(k/2-\alpha)(p+1)}\mathbb{F}\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Alors r_α n'admet pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.
(ii) *Il existe une section $r_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme :*

$$r_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

avec $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.

Démonstration. — Commençons par le (i). Soit $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et $r_\alpha=\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ avec $f(u)(du)^{k/2}\in\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)$. D'après le lemme A.1.1, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha} &= \sum_{j=1}^{\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{j-\alpha}}{(u-x)^j}(-1)^{\alpha-j}\\ f(u) &\in \bigoplus_{j=1}^{\alpha-1}\mathbb{F}\frac{1}{u^j}\oplus\bigoplus_{j=1}^{\alpha-1}\bigoplus_{\beta=1}^{p-1}\mathbb{F}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{j-\beta}}{(u-x)^j}.\end{aligned}$$

Lorsque l'on « intègre » $k-1$ fois r_α (comme au début du paragraphe), on obtient une expression de la forme $s''_y\overset{\text{déf}}{=}s'_{\alpha,y}+s'_{\neq\alpha,y}$ avec :

$$\begin{aligned}s'_{\alpha,y} &= \sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}t_{i,\alpha,y}\\ s'_{\neq\alpha,y} &= \sum_{\substack{\beta=1\\\beta\neq\alpha}}^{p-1}\sum_{i=1}^{\alpha-1}b_{i,\beta}t_{i,\beta,y}+\sum_{j=1}^{\alpha-1}b_it_{i,y}\end{aligned}$$

où $b_{\alpha,\alpha}=\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ et $b_{i,\beta},b_i\in\mathbb{F}$ (notons que s''_y dépend de α ce que n'indique pas la notation). Si $(s''_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ définit une section globale de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ alors on a d'une part $s''_y\in H^0(W_y,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $y\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$, d'autre part $s''_y|_U=s''_{y'}|_U$ pour $y,y'\in\mathbb{F}_p\cup\{\infty\}$. En particulier, les coefficients de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans s''_∞ pour $1\leq\beta\leq k/2-1$ doivent être nuls. D'après le lemme A.2.1, les termes $(t_{i,\alpha,\infty})_{1\leq i\leq\alpha}$ (resp. $(t_{i,\beta,\infty})_{\substack{1\leq i\leq\alpha-1\\\beta\neq\alpha}}$ et $(t_{i,\infty})_{1\leq i\leq\alpha-1}$) n'introduisent que des termes en $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ (resp. en $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ pour $\beta\neq\alpha$), donc qui ne se mélangent pas. On en déduit en particulier que le coefficient de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ doit être nul.

La condition $s''_\infty|_U=s''_0|_U$ entraîne que les coefficients de $\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans s''_∞ déterminent les coefficients de $\frac{u_0^{k-1-\beta}}{du_0^{k/2-1}}$ dans s''_0 pour $1\leq\beta\leq k/2-1$. Comme on intègre

$k-1$ fois des fractions rationnelles sans partie principale, les coefficients de $\frac{u_0^j}{du_0^{k/2-1}}$ dans s_0'' pour $j \geq k-1$ sont nuls. Enfin, les coefficients de $\frac{u_0^{k-1-\beta}}{du_0^{k/2-1}}$ dans s_0'' pour $k/2 \leq \beta \leq k-2$ sont déterminés par le lemme A.2.1. Tout ceci fait que la partie « polynomiale » de s_0'' s'écrit :

$$\sum_{\beta=1}^{k-2} u_0^{k-1-\beta} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} a_{i,\beta} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} u_0^{k-1-i} b_i a_i$$

où les coefficients $a_{i,\beta}$, a_i (dans $\mathbb{F}$) sont déterminés par le lemme A.2.1.

La condition $s_y''|_U = s_0''|_U$ pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$ entraîne l'égalité de polynômes (en développant $u_0^{k-1-\beta} = (u_y + y)^{k-1-\beta}$) :

$$\sum_{l=0}^{k/2-1} u_y^l \Bigg(\sum_{\beta=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{k-1-\beta}{l} a_{i,\beta} b_{i,\beta} y^{k-1-\beta-l} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_i a_i \binom{k-1-i}{l} y^{k-1-i-l} \Bigg) =$$
$$\sum_{l=0}^{k/2-1} u_y^l \Bigg(\sum_{\beta=1}^{k-1-l} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} c_{i,\beta,l} y^{k-1-\beta-l} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_i c_{i,l} \binom{k-1-i}{l} y^{k-1-i-l} \Bigg)$$

où les coefficients $c_{i,\beta,l}$ $c_{\beta,l}$ sont déterminés par le lemme A.2.1. En identifiant les coefficients de chaque u_y^l pour $l > 0$, on obtient que certains polynômes en y de degré inférieur ou égal à $k-3$ sont nuls en chaque $y \in \mathbb{F}_p^\times$. Comme $k-3 \leq p-2$, ces polynômes sont donc identiquement nuls. Pour $l = 0$, on obtient de même la nullité d'un polynôme en y de degré $\leq k-2$ en chaque $y \in \mathbb{F}_p^\times$, et même en $y = 0$ car $c_{i,k-1,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ par le lemme A.2.1. Ce polynôme est donc aussi identiquement nul. Finalement, on en déduit pour tout $1 \leq \beta \leq k-2$ et tout $0 \leq l \leq k/2-1$:

$$\binom{k-1-\beta}{l} \sum_{i=1}^{\alpha} a_{i,\beta} b_{i,\beta} + \binom{k-1-\beta}{l} \begin{cases} b_\beta a_\beta & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} =$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} c_{i,\beta,l} + \begin{cases} b_\beta c_{\beta,l} & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

En particulier, pour $\beta = \alpha$ et $l = 0$, on a $\sum_{i=1}^{\alpha} a_{i,\alpha} b_{i,\alpha} = 0$ car $c_{i,\alpha,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ (utiliser que, dans l'expression de $t_{i,\alpha,y}|_U$ du lemme A.2.1, la somme $\sum_{l=1}^{k/2-1}$ commence à $l = 1$). On en déduit que les coefficients de $\frac{u_y^l}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ sont nuls pour $1 \leq l \leq k/2-2$.

En résumé, si $r_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ a un antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathscr{L})|C)$, alors il existe $(b_{i,\alpha})_{1 \leq i \leq \alpha}$ avec $b_{i,\alpha} \in \mathbb{F}$ tels que $s'_{\alpha,y} = \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\alpha} t_{i,\alpha,y}$ ($y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$) vérifie :
(i) $b_{\alpha,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$;
(ii) les coefficients de $\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $1 \leq i \leq k/2-2$ et $y \in \mathbb{F}_p$ sont nuls ;
(iii) le coefficient de $\log_{\mathscr{L}}(u_\infty) \frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ est nul.

Par les lemmes A.2.2 et A.2.3, on voit qu'il n'existe pas de tel élément s'_α pour $\alpha \leq k/2-1$, et r_α n'admet donc pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $\alpha \leq k/2-1$. Ceci démontre le (i) de la proposition. Quant au (ii), i.e. au cas $\alpha = k/2$, il a déjà fait l'objet du lemme A.2.2 en posant $s_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} s'_{k/2}$. □

A.3. Calculs de sections modulo p^2. — On rappelle que k est un entier pair compris entre 4 et $p+1$.

Les lemmes A.3.1 à A.3.4 ci-dessous interviennent au §5.2.

Lemme A.3.1. — *Soit $y \in \mathbb{F}_p^\times$ et $0 < s \leq r$. On a :*

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times \\ x\neq y}} (x-y)^r x^{-s} = -\binom{r}{s}(-y)^{r-s}.$$

Lemme A.3.2. — *Soient $x,y \in \mathbb{F}_p$ et $\delta_{x,y} \overset{\text{déf}}{=} \frac{[x]+[y]-([x]+[y])^p}{p}$. On a $[x]+[y] = [x+y]+p\delta_{x,y}$ avec :*

$$\delta_{x,y} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[x+y]^i[y]^{p-i}(-1)^{p-i} = -\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[x]^i[y]^{p-i}.$$

Lemme A.3.3. — *Soit $n \geq 2$. On a :*

$$\begin{aligned}(u-[x]-[y])^n\log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y]) = \\ -p\delta_{x,y}(u-[x+y])^{n-1} + (u-[x+y])^n\log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]) \\ -np\delta_{x,y}(u-[x+y])^{n-1}\log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]) + p^2*\end{aligned}$$

où $*$ est une série de Laurent en $u-[x+y]$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. — On écrit :

$$\log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y]) = \log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]-p\delta_{x,y}) = \log_{\mathscr{L}}(u-[x+y]) - p\frac{\delta_{x,y}}{u-[x+y]} + p^2*$$

et on développe $(u-[x]-[y])^n\log_{\mathscr{L}}(u-[x]-[y])$. □

Lemme A.3.4. — *Soit $0 \leq \ell \leq k/2-1$, $y \in \mathbb{F}_p$ et définissons les éléments suivants de $\mathbb{Z}_p[u]$:*

$$A_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^i\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{[x]^{-j}}{j}(u-[y])^j(u-[x+y])^{k-2-\ell}$$

$$B_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\neq y}[x]^i(u-[x])^{k-2-\ell}.$$

On a modulo $p\mathbb{Z}_p[u]$:

$$A_y(u) = \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-i}}{p} y^{k-1-\ell-i}(u-y)^i \sum_{j=1}^{i} \frac{\binom{k-2-\ell}{i-j}}{j}(-1)^{i-j+1+\ell} + (u-y)^{k/2-1} *$$

$$B_y(u) = \sum_{i=0}^{k/2-2} y^{k-1-\ell-i}(u-y)^i \sum_{j=i}^{k-2-\ell} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} \binom{k-2-\ell}{j}\binom{j}{i} + (u-y)^{k/2-1} *$$

où $* \in \mathbb{Z}_p[u]$.

Démonstration. — Posons dans $\mathbb{F}_p[u]$:

$$\begin{aligned} a_y(u,i) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^i \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{x^{-j}}{j}(u-y)^j(u-x-y)^{k-2-\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u-y)^j}{j} \sum_{n=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{n}(u-y)^n(-1)^{k-2-\ell-n} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-j+k-2-\ell-n}. \end{aligned}$$

Pour $1 \le i \le p-1$, $1 \le j \le k/2-2$ et $0 \le n \le k-2-\ell$, on a $-k/2+3 \le i-j+k-2-\ell-n \le 2p-2$. En posant $\binom{k-2-\ell}{n} = 0$ si $n \notin \{0,\cdots,k-2-\ell\}$, on peut écrire $a_y(u,i) = \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{1}{j}\Big(\binom{k-2-\ell}{j-i}(u-y)^{i+k-2-\ell}(-1)^{i-j} + \binom{k-2-\ell}{j-i+p-1}(u-y)^{i+k-1-\ell-p}(-1)^{i-j}\Big)$. Comme $0 \le \ell \le k/2-1$, on a :

$$a_y(u,i) = \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{\binom{k-2-\ell}{j-i+p-1}}{j}(u-y)^{i+k-1-\ell-p}(-1)^{i-j} + (u-y)^{k/2-1} *$$

avec $* \in \mathbb{F}_p[u]$. On obtient alors la formule donnant $A_y(u)$ modulo p en remarquant que $A_y(u) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p} y^{p-i} a_y(u,i)$ modulo p. Posons dans $\mathbb{F}_p[u]$:

$$b_y(u,i) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\neq y} x^i(u-x)^{k-2-\ell} = \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} u^{k-2-\ell-j}(-1)^j \sum_{x\neq y} x^{i+j}.$$

Pour $n \ge 0$, on a :

$$\sum_{x\neq y} x^n = \begin{cases} p-1-y^{p-1} & \text{si } n \equiv 0 (p-1) \\ p-y^n & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où, comme $1 \le i+j \le 2p-2$:

$$\begin{aligned} b_y(u,i) &= -\binom{k-2-\ell}{p-1-i} u^{k-\ell-1-p+i}(-1)^i - \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} u^{k-2-\ell-j}(-1)^j y^{i+j} \\ &= -y^i(u-y)^{k-2-\ell} - \binom{k-2-\ell}{p-1-i} u^{k-\ell-1-p+i}(-1)^i. \end{aligned}$$

On en déduit $B_y(u) \equiv \sum_{i=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{i} u^{k-2-\ell-i} \frac{\binom{p}{p-1-i}}{p} y^{i+1} + (u-y)^{k/2-1} *$ modulo p où $* \in \mathbb{Z}_p[u]$. En posant $j = k-2-\ell-i$, on a donc modulo p (avec $* \in \mathbb{Z}_p[u]$) :

$$B_y(u) = \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} y^{k-1-\ell-j} u^j + (u-y)^{k/2-1} * .$$

En développant $u^j = (u-y+y)^j$, on obtient finalement modulo p :

$$\begin{aligned} B_y(u) &= \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} y^{k-1-\ell-j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (u-y)^i y^{j-i} + (u-y)^{k/2-1} * \\ &= \sum_{i=0}^{k/2-2} (u-y)^i y^{k-1-\ell-i} \sum_{j=i}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} \binom{j}{i} + (u-y)^{k/2-1} * . \quad \square \end{aligned}$$

Les lemmes A.3.5 à A.3.8 interviennent dans les preuves des lemmes 5.3.1 et 5.4.1.

Lemme A.3.5. — *Soit* $0 \leq i < n$ *et* $\gamma(n,i) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^n \sum_{i \leq j \leq n-1} \frac{(-1)^j}{n-j} \binom{n-1}{j} \binom{j}{i}$. *On a :*

$$\gamma(n,i) = -\frac{1}{n} \binom{n}{i}.$$

Démonstration. — En inversant l'ordre de sommation, on a :

$$\gamma(n,i) = \sum_{j=1}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{n-j} \binom{n-j}{i}.$$

Or, on a $\frac{n}{j} \binom{n-1}{n-j} \binom{n-j}{i} = \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!}$ et :

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n-i}} \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!} x^i y^j z^{n-i-j}.$$

Le coefficient de x^i dans le développement de $(x+y+1)^n$ est donc d'une part $\binom{n}{i}(y+1)^{n-i}$, d'autre part $\sum_{0 \leq j \leq n-i} y^j \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!}$. En particulier, lorsque $y=-1$, on obtient pour $i < n$:

$$\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!} = 0$$

d'où $\sum_{1 \leq j \leq n-i} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{n-j} \binom{n-j}{i} = \frac{-n!}{i!(n-i)!} \frac{1}{n}$ soit $\gamma(n,i) = -\frac{1}{n} \binom{n}{i}$. $\square$

Lemme A.3.6. — *Soit* $0 \leq r < \ell \leq n$ *et* $\beta(n,r) \overset{\text{déf}}{=} \frac{n}{n-r} \sum_{1 \leq j \leq r} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{r-j}$. *Posons :*

$$\alpha(n,\ell,r) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^r \sum_{r \leq i \leq \ell} \binom{i}{r} (-1)^i (\beta(n,i) + \gamma(n,i))$$

avec $\gamma(n,i)$ comme au lemme A.3.5. On a :

$$\alpha(n,\ell,r)=\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{\ell-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_{n-1-r-i}-H_n).$$

Démonstration. — Puisque, pour $i\geq r$, $\binom{i}{r}\binom{n}{i}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{i-r}$, on a d'après les lemmes A.1.2 et A.3.5 :

$$\alpha(n,\ell,r)=\binom{n}{r}\sum_{r\leq i\leq \ell}(-1)^{i-r}\binom{n-r}{i-r}(H_{n-1-i}-H_n)$$

d'où le résultat en changeant i en $i-r$. □

Lemme A.3.7. — *Soit n, ℓ et s des entiers positifs ou nuls tels que $\ell\leq s<n$. Posons :*

$$\begin{aligned}A(n,\ell,s)&\overset{\text{déf}}{=}\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=r}^{\ell}\binom{i}{r}(-1)^i\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{n}{i-j}\\ B(n,\ell,s)&\overset{\text{déf}}{=}\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\alpha(n,\ell,r).\end{aligned}$$

Alors, on a :

$$A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\sum_{r=0}^{s}\binom{n}{r}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=0}^{s-r}\frac{(-1)^{i+1}}{n-r-i}\binom{n-r}{i}.$$

Démonstration. — Par le lemme A.1.2, on a :

$$\begin{aligned}A(n,\ell,s)&=\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=r}^{\ell}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\binom{n}{i}(H_n-H_{n-i})\\&=\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{s-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_n-H_{n-r-i}).\end{aligned}$$

Par le lemme A.3.6, on a :

$$B(n,\ell,s)=\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{s-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_{n-1-r-i}-H_n).$$

En sommant les deux nouvelles expressions de $A(n,\ell,s)$ et $B(n,\ell,s)$, on obtient le résultat. □

Lemme A.3.8. — *Soit n, ℓ et s des entiers positifs ou nuls tels que $\ell\leq s<n$. On a avec les notations du lemme A.3.7 :*

$$A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\frac{(-1)^{\ell+1}}{n-\ell}\binom{n}{\ell}^{-1}.$$

En particulier, pour $\ell = k/2-2-j$, $s = k/2-2$ et $n = k/2+j$, on obtient :

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2-j}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i = \frac{(-1)^{k/2-1-j}}{2j+2}\binom{k/2+j}{k/2-2-j}^{-1}$$

où $\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{n}{n-i}(-1)^{n+i}\sum_{m=1}^{i}\frac{\binom{n-1}{i-m}}{m}(-1)^{i-m+n} + \sum_{m=i}^{n-1}\binom{n-1}{m}\frac{(-1)^{n+m}}{n-m}\binom{m}{i} + \sum_{m=1}^{i}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\binom{n}{i-m}$.

Démonstration. — Posons :

$$S(n,\ell,s) \overset{\text{déf}}{=} A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s) = \sum_{\substack{0\le i+r\le s\\ 0\le i,r}}\binom{n}{r}\binom{n-r}{i}\binom{n+\ell-r}{\ell}\frac{(-1)^{i+1}}{n-r-i}$$

(la deuxième égalité résulte du lemme A.3.7). Comme $\binom{n}{r}\binom{n-r}{i} = \binom{n}{r+i}\binom{r+i}{i}$, on a :

$$S(n,\ell,s) = \sum_{j=0}^{s}\frac{1}{n-j}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{n+\ell-j+i}{\ell}\binom{j}{i}.$$

Or on a l'égalité $\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{n+\ell-j+i}{\ell}\binom{j}{i} = (-1)^{j+1}\binom{n+\ell-j}{\ell-j}$ car c'est le coefficient de x^ℓ dans $(-1)^{j+1}x^j(1+x)^{n+\ell-j} = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{j}{i}(1+x)^i(1+x)^{n+\ell-j}$, d'où :

$$S(n,\ell,s) = \sum_{j=0}^{s}\frac{(-1)^{j+1}}{n-j}\binom{n}{j}\binom{n+\ell-j}{n}.$$

Ainsi $S(n,\ell,s)$ s'identifie au coefficient de degré s de :

$$(1+x)^n G(x) \overset{\text{déf}}{=} (1+x)^n\sum_{i\ge 0}\binom{n+\ell-s+i}{n}\frac{(-1)^{s+1+i}}{n-s+i}x^i.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
G(x) &= x^{-n+s}\int_0^x\sum_{i\ge 0}\binom{n+\ell-s+i}{n}(-1)^{s+1+i}t^{n-s-1+i}dt\\
&= x^{-n+s}\int_0^x\sum_{i\ge n+\ell-s}\binom{i}{n}(-1)^{n+\ell+1+i}t^{-1-\ell+i}dt\\
&= x^{-n+s}\int_0^x t^{n-\ell-1}(-1)^{\ell+1}\sum_{i\ge n}\binom{i}{n}(-1)^{n+i}t^{i-n}dt\\
&= x^{-n+s}\int_0^x\frac{t^{n-\ell-1}(-1)^{\ell+1}}{(1+t)^{n+1}}dt.
\end{aligned}$$

Le coefficient de degré s de $(1+x)^nG(x)$ s'obtient donc par intégrations par parties successives et donne l'énoncé cherché. □

Appendice B

Calculs de Čech

B.1. Calculs de résidus. — On reprend les notations du début du §5.1 et on note $\Omega^1 \simeq \mathscr{O}_C(-2)$ le faisceau des différentielles de Kähler sur la courbe $C \simeq \mathbb{P}^1$. L'isomorphisme $\check{H}^1(C,\Omega^1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}$ qui est à la base de la dualité de Serre est induit par l'application :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tr}: & \displaystyle\prod_{\substack{y<z \\ y,z\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)^2}} \Omega^1(U) & \to & \mathbb{F} \\ & (s_{y,z})_{y<z} & \mapsto & \displaystyle\sum_{y<z} \big(\mathrm{res}_z(s_{y,z}) - \mathrm{res}_y(s_{y,z})\big) \end{array}$$

où res_x est le résidu au point fermé x de la forme différentielle rationnelle $s_{y,z} \in \Omega^1(U) = \Omega^1(W_y \cap W_z)$. En effet, on vérifie que l'application tr est nulle sur le sous-espace engendré par $\big(s_z|_U - s_y|_U\big)_{y<z}$ où $(s_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ est tel que $s_y \in H^0(W_y,\Omega^1)$ (voir e.g. [**11**, §III.7]).

Lemme B.1.1. — *Soient r,l,i des entiers positifs ou nuls.*
(i) *On a* $\mathrm{res}_x\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big) = \binom{r}{l-1} x^{r-l+1}$.
(ii) *On a :*

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p} \Big(\mathrm{res}_\infty\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big) = \begin{cases} \binom{r}{l-1} & si\ r-l+1 \equiv 0\ (p-1) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

(iii) *On a :*

$$\sum_{\substack{x<y \\ x,y\in\mathbb{F}_p}} (y^i - x^i)\Big(\mathrm{res}_y\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big)$$
$$- \sum_{x\in\mathbb{F}_p} x^i\Big(\mathrm{res}_\infty\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big) =$$
$$\begin{cases} -\binom{r}{l-1} & si\ i+r-l+1 \equiv 0\ (p-1) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. — Pour (i), on a :

$$\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) = \mathrm{res}_0\Big(\frac{(u+x)^r du}{(u-u^p)^l}\Big) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} x^{r-j} \mathrm{res}_0\Big(\frac{u^{j-l} du}{(1-u^{p-1})^l}\Big) = \binom{r}{l-1} x^{r-l+1}.$$

Comme $\mathrm{res}_\infty\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big)$ ne dépend pas de x, on a $\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_\infty\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big)=0$ et on obtient alors (ii) en appliquant (i). Pour (iii), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x<y\\ x,y\in\mathbb{F}_p}}(y^i-x^i)\Big(\mathrm{res}_y\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)-\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big)&=\sum_{\substack{x<y\\ x,y\in\mathbb{F}_p}}(y^i-x^i)(y^{r-l+1}-x^{r-l+1})\binom{r}{l-1}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{F}_p}(y^i-x^i)(y^{r-l+1}-x^{r-l+1})\binom{r}{l-1}\\ &=0\end{aligned}$$

et on obtient (iii) en appliquant (ii). □

On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement donné par la dualité de Serre :

$$\check{H}^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\times H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)\to\check{H}^1(C,\Omega^1)\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}. \tag{14}$$

En appliquant le lemme B.1.1, on obtient alors :

Lemme B.1.2. — *Soit $i\le n$ des entiers positifs ou nuls et α, r des entiers tels que $1\le\alpha\le k/2-1$ et $0\le r\le(p+1)\alpha-k$. On a :*

$$\Big\langle\Big(\big((z^{n-i}-y^{n-i})\frac{u^i}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_z}\big)_{\substack{y<z\\ z\neq\infty}},\big(-y^{n-i}\frac{u^i}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big),\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}\Big\rangle=\begin{cases}-\binom{r+i}{\alpha-1} & si\ n+r-\alpha+1\equiv 0\ (p-1)\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

B.2. Calculs de classes de cohomologie

Lemme B.2.1. — *Pour tout $n\ge 1$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+j}{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{i}=-2H_n.$$

Démonstration. — Posons :

$$S_n\overset{\text{déf}}{=}\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+j}{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{i}.$$

Comme $\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}\frac{1}{i}=\sum_{i=j}^{n}\binom{i-1}{j-1}\frac{1}{j}=\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{j-1}=\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+1}{j}-\binom{i}{j}=\frac{1}{j}\binom{n}{n-j}$, on a :

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n+j}{j}\binom{n}{n-j}\frac{1}{j}.$$

Or $(-1)^j\binom{n+j}{j} = \frac{(-n-1)\cdots(-n-j)}{j!} = \binom{-n-1}{j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^n \binom{-n-1}{j}\binom{n}{n-j}\frac{1}{j}$ est le coefficient de degré n dans le développement limité à l'ordre n en $x=0$ de la fonction :

$$f(x) \overset{\text{déf}}{=} (1+x)^n \int_0^x \frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t}dt.$$

Comme $\frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t} = -\sum_{i=0}^n (1+t)^{i-n-1}$, on a :

$$\int_0^x \frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t}dt = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{-1}{i-n}\big((1+x)^{i-n}-1\big) - \ln(1+x)$$

et $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n-i}\big((1+x)^i-(1+x)^n\big) - (1+x)^n\ln(1+x)$. Le coefficient de degré n du développement limité de $f(x)$ donne donc :

$$S_n = -H_n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i}\frac{(-1)^i}{i} = -2H_n$$

en utilisant le lemme A.1.2. □

Dans l'énoncé qui suit, on reprend les notations du §5.3.

Lemme B.2.2. — (i) *On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ *:*

$$\Big(\big(((-y)^{p-1-j}-(-z)^{p-1-j})\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_z}\big)_{y<z,z\neq\infty}, \big((-y)^{p-1-j}\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big) =$$
$$(-1)^{j+1}\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big).$$

(ii) *On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ *:*

$$\Big(\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big) =$$
$$H_{k/2-2}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big).$$

(iii) *On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ *:*

$$\Big(\big((z^{k/2-i}-y^{k/2-i})\frac{u^i}{du^{k/2-1}}\big)|_{W_y\cap W_z}\big)_{y<z,z\neq\infty}, \big(-y^{k/2-i}\frac{u^i}{du^{k/2-1}}\big)|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big) =$$
$$-\binom{k-i-2}{k/2-2}\Big(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\Big).$$

Démonstration. — (i) D'après le corollaire 4.3.5, il suffit de montrer que les deux éléments de Čech considérés accouplés contre les sections de $H\subseteq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$

par la dualité de Serre (14) donnent la même valeur. Par le lemme 4.1.4 (ou plutôt sa preuve), il est facile de voir qu'une section $h \in H$ s'écrit sous la forme :

$$h = \sum_{\substack{(b,d)\in\mathbb{F}_p^2 \\ 1\le\alpha\le k/2-1}} a_{b,d,\alpha} \frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

avec $a_{b,d,\alpha} \in \mathbb{F}$ et il suffit donc de vérifier que les deux accouplements contre les sections $\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$ coïncident. Par le lemme B.1.2, on a (avec r et α comme au lemme B.1.2) :

$$\left\langle \left(\left(((-y)^{p-1-j} - (-z)^{p-1-j}) \frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_z} \right)_{y<z,z\neq\infty}, \left((-y)^{p-1-j} \frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty} \right)_{y\in\mathbb{F}_p} \right), \right.$$
$$\left. \frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \right\rangle = \begin{cases} (-1)^j \binom{k/2-2+j+r}{\alpha-1} & \text{si } r \equiv -k/2+1+\alpha \mod (p-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et par un calcul de résidus :

$$\left\langle \left(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0 \right), \frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \right\rangle =$$
$$\begin{cases} -\binom{r+k/2-2}{\alpha-1} & \text{si } r \equiv -k/2+1+\alpha \mod (p-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $(bu+d)^{\alpha(p+1)-k} = \sum_{r=0}^{\alpha(p+1)-k} \binom{\alpha(p+1)-k}{r} b^r d^{\alpha(p+1)-k-r} u^r$, l'accouplement du premier élément de Čech contre $\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$ donne la somme :

$$\sum_{m=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha(p+1)-k}{m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha} \binom{\frac{k}{2}-2+j+m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha}{\alpha-1} (-1)^j b^{m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha} d^{\alpha(p+1)-k-m(p-1)+\frac{k}{2}-1-\alpha}$$

qui vaut :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < k/2-1 \\ (-1)^j \binom{k/2-2-j}{k/2-2} d^{(k/2-1)(p+1)-k} & \text{si} \quad \alpha = k/2-1 \end{cases}$$

car, pour $1 \le \alpha \le k/2-1$ et $0 \le m < \alpha$, on a modulo p :

$$\binom{\alpha(p+1)-k}{m(p-1)-k/2+1+\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha,m) = (k/2-1,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même, on trouve :

$$\left\langle \left(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty}, 0, \cdots, 0 \right), \frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \right\rangle =$$
$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < k/2-1 \\ -d^{(k/2-1)(p+1)-k} & \text{si} \quad \alpha = k/2-1 \end{cases}$$

d'où (i). Pour (ii), considérons le $(p+1)$-uplet de sections locales :

$$\Big(0, \Big(\log_{\mathscr{L}}(u_x-(-x)) + \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{u_x^i(-x)^{-i}}{i}\Big)\frac{(u_x-(-x))^{k/2-2}}{du_x^{k/2-1}},$$
$$(-1)^{k/2-1}\Big(-\log_{\mathscr{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{k/2}}{du_\infty^{k/2-1}} + \Big(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i}\Big)\frac{u_\infty^{k/2}}{du_\infty^{k/2-1}}\Big)\Big)$$

où la section 0 de gauche est vue dans $H^0(W_0, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$, les sections avec u_x dans $H^0(W_x, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$ et la dernière section dans $H^0(W_\infty, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$. Les intersection deux à deux de ces sections (comme au §5.1) donnent un élément de Čech qui est nul par définition. Cette nullité donne (par un calcul simple et en utilisant (i)) l'égalité dans $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$:

$$\Big(\log_{\mathscr{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0\cap W_z \\ z\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i}\Big)\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0\cap W_z \\ z\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big) =$$
$$\sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^{j+1}\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\sum_{i=j}^{k/2-2}\frac{\binom{i}{j}}{i}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0\cap W_z \\ z\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big).$$

Or $\sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\sum_{i=j}^{k/2-2}\frac{\binom{i}{j}}{i} = -2H_{k/2-2}$ par le lemme B.2.1, d'où (ii) puisque $H_{k/2-2} = \sum_{i=1}^{k/2-2} 1/i$. Le (iii) se démontre de manière analogue au (i). □

On a aussi un énoncé strictement analogue à celui du lemme B.2.2 en remplaçant $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k,\mathscr{L})|_C)$ par $\check{H}^1(C, (\omega(k,\mathscr{L})\otimes_{\mathfrak{O}}\mathfrak{O}/p)|_C)$ (voir le début du §5.3). La preuve est la même en utilisant la dualité :

$$\check{H}^1(C, (\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes_{\mathfrak{O}}\mathfrak{O}/p)|_C) \times H^0(C, (\omega^{k/2}(1)\otimes_{\mathfrak{O}}\mathfrak{O}/p)|_C) \to \mathfrak{O}/p.$$

Références

[1] L. Barthel & R. Livné – Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[2] L. Berger – Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, *Astérisque* **330** (2010), p. 263–279.

[3] C. Breuil – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[4] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[5] ———, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[6] C. Breuil & A. Mézard – Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $l=p$, *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 205–310.

[7] P. Colmez – Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf`.

[8] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[9] D. J. Glover – A study of certain modular representations, *J. Algebra* **51** (1978), p. 425–475.

[10] E. Grosse-Klönne – Integral structures in automorphic line bundles on the p-adic upper half plane, *Math. Ann.* **329** (2004), p. 463–493.

[11] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer, 1977.

[12] P. Schneider & J. T. Teitelbaum – Banach space representations and Iwasawa theory, *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[13] J. T. Teitelbaum – On Drinfel′d's universal formal group over the p-adic upper half plane, *Math. Ann.* **284** (1989), p. 647–674.

[14] ———, Modular representations of PGL_2 and automorphic forms for Shimura curves, *Invent. Math.* **113** (1993), p. 561–580.

C. Breuil, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `breuil@ihes.fr`
Url : `www.ihes.fr/~breuil/`

A. Mézard, LMV, Université Versailles Saint-Quentin, 78035 Versailles, France
E-mail : `ariane.mezard@math.uvsq.fr` • *Url :* `www.math.uvsq.fr/~mezard/`

Astérisque
331, 2010, p. 179–254

HIDDEN STRUCTURES ON SEMISTABLE CURVES

by

Robert Coleman & Adrian Iovita

Abstract. — Let V be the ring of integers of a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and let X be a proper curve over V with semistable special fiber and smooth generic fiber. In this article we explicitly describe the Frobenius and monodromy operators on the log crystalline cohomology of X with values in a regular log F-isocrystal in terms of p-adic integration. We have a version for open curves and as an application we prove that two differently defined $\mathscr{L}$-invariants, attached to a split multiplicative at p new elliptic eigenform, are equal.

***Résumé* (Structures cachées sur les courbes semi-stables).** — Soit V l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et soit X une courbe propre sur V à fibre spéciale semistable et à fibre générique lisse. Dans cet article nous décrivons explicitement les opérateurs de Frobenius et de monodromie sur la cohomologie log cristalline de X à valeurs dans un log F-isocristal régulier, en termes d'intégration p-adique. Nous proposons une version pour les courbes ouvertes et en guise d'application nous prouvons que deux $\mathscr{L}$-invariants définis de façon différente, attachés à une forme modulaire nouvelle multiplicative en p, sont égaux.

1. Introduction

Let K be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and X an algebraic variety over K. As Illusie remarked in *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique* [I], "le groupe $H^1_{dR}(X/K)$ se trouve muni d'une structure plus riche qu'il n'y paraît de prime abord." This "hidden structure" has been discussed by many people including Berthelot and Ogus [BO] when X is proper with good reduction and more generally by Hyodo and Kato [HK]. In this paper, we expose it in the relative situation over a curve with semistable reduction using residues and p-adic integration. More precisely we study de Rham cohomology of a semi-stable curve with coefficients in the relative cohomology of a smooth proper family over that curve. The information on crystalline and de

2010 Mathematics Subject Classification. — 11G20 ; 11G25, 11F11.
Key words and phrases. — Crystalline cohomology, log structures, de Rham cohomology, Frobenius operator, monodromy operator, modular forms, $\mathscr{L}$-invariants.

© Astérisque 331, SMF 2010

Rham cohomology of a curve with semi-stable reduction supplied by this article is similar to that of the theory of vanishing cycles for ℓ-adic cohomology.

Suppose K has residue field k and ring of integers V. Let $W := W(k)$ denote the ring of Witt-vectors with coefficients in k, K_0 its fraction field and we denote by σ the Frobenius automorphism of K_0. Let C_K be a smooth projective curve over K with a semi-stable model C over V. By this we mean that locally C is smooth over $\mathrm{Spec}(V)$ or étale over $\mathrm{Spec}\,(V[X,Y]/(XY-\pi))$, where π is a uniformizer of V. Denote by $\overline{C} := C \times_{\mathrm{Spec(V)}} \mathrm{Spec}(k)$, its special fiber and by Sing, the singular sub-scheme of $\overline{C}$.

Then the vector space $H^1_{dR}(C_K)$ has enough hidden structure so that one can recover the corresponding representation of $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ on the étale cohomology of $C_{\overline{K}}$, à la Fontaine. I.e. besides the Hodge filtration it has a K_0-lattice (the log-crystalline cohomology of $\overline{C}$ with $\mathbb{Q}_p$-coefficients) with linear monodromy and σ-semi-linear Frobenius operators. One can use this to describe the representation. This is true much more generally (see for example **[18]** and **[39]**.)

Let $g\colon Z \longrightarrow C$ be a flat proper morphism. Suppose P is a sub-scheme of C, finite and étale over V whose reduction is disjoint from Sing. Let $C^\times$ be the log formal scheme over V associated to the pair (C,P) (i.e. the formal completion of C along its special fiber together with the log-structure associated to P). Denote $g^{-1}(P)$ by D_P and let $Z^\times$ be the log formal scheme over V associated to the pair (Z,D_P). We'll abuse notation and also let $g\colon Z^\times \longrightarrow C^\times$ denote the morphism of log formal schemes induced by g. Then D_P is a divisor of Z and we will suppose from now on that $D_P \cup \overline{Z}$ is a reduced divisor with normal crossings. Here $\overline{Z}$ is the special fiber of Z. Suppose that the restriction of g induces a smooth proper map $(Z \backslash D_P) \longrightarrow (C \backslash P)$. Then, under all of the assumptions above $g\colon Z^\times \to C^\times$ is log smooth.

For example, if $C = X(N,p) := X_1(N) \times_{X(1)} X_0(p)$ where $(N,p) = 1$ and $N > 4$, $Z = E(N,p)$, the universal generalized elliptic curve over C with level structure and $f : Z \longrightarrow C$ is the natural map, then if one takes P to be the divisor of cusps on C, the quadruple (C,Z,f,P) satisfies the above conditions.

If $h,i,j \geq 0$, $S^{h\,i\,j}(Z/C,P)$ will denote the h-th hypercohomology group of the complex of sheaves, $\mathrm{Sym}^j G^i(Z/C,P) \stackrel{\mathrm{Sym}^j D}{\longrightarrow} \mathrm{Sym}^j G^i(Z/C,P) \otimes \Omega^1_{C_K/K}(\log(P_K))$, where

$$G^i(Z/C,P) = K \otimes_V \mathbb{R}^i g_* \Omega^\bullet_{Z^\times/C^\times} = K \otimes_V H^i_{dR}(Z^\times/C^\times)$$

and D is the Gauss-Manin connection.

The group $S^{h\,i\,j}(Z/C,P)$ naturally has a Hodge filtration which we call $\mathscr{F}^{h\,i\,j,\bullet}(Z/C,P)$. After choosing a branch of the p-adic logarithm on $K^\times$, we will use the rigid geometry of Z/C and p-adic integration to produce a K_0-lattice $S^{h\,i\,j}_{int}(Z/C,P)$ in $S^{h\,i\,j}(Z/C,P)$, a linear operator N_h^{int} on this lattice and make a σ-semi-linear operator Φ_h^{int} on $S^{h\,i\,j}(Z/C,P)$ such that $N_h^{\mathrm{int}}\Phi_h^{\mathrm{int}} = p\Phi_h^{\mathrm{int}}N_h^{\mathrm{int}}$.

A four-tuple $(M,F,N,\mathscr{F}^\bullet)$ where M is a finite dimensional vector space over K_0, F and N are σ-semi-linear and respectively linear operators on M such that $NF = pFN$ and $\mathscr{F}^\bullet$ is a decreasing exhaustive filtration of $M_K := M \otimes_{K_0} K$ by K-vector subspaces is called a filtered, Frobenius, monodromy (FFM) module over K (see **[19]**). The

category of FFM-modules is an additive, tensor category with kernels, cokernels and a notion of short exact sequences but it is not abelian. Its subcategory of weakly admissible modules (which are now known to be admissible by [**13**]) is abelian, see also [**19**]. To a $\mathbb{Q}_p$-representation of G_K, Fontaine associated an FFM-module and if this representation "comes from geometry" one can recover it from the FFM-module.

In particular, if $g\colon Z \to C$ is as above then

$$M_{int}^{h\,i\,j}(Z/C,P) := (S_{\text{int}}^{h\,i\,j}(Z/C,P), \Phi_h^{\text{int}}, N_h^{\text{int}}, \mathscr{F}^{h\,i\,j,\bullet}(C,P))$$

is an FFM-module over K.

We will prove,

Theorem 1.1. — *The FFM-module $M_{int}^{h\,i\,j}(Z/C,P)$ is the one associated to*

$$\mathscr{V}^{h\,i\,j}(Z/C,P) := H^h_{\acute{e}t}((C-P)_{\overline{K}}, \text{Sym}^j(R^i g_{*,\acute{e}t}\mathbb{Q}_p))$$

via Fontaine theory. In particular,

$$\mathscr{V}^{h\,i\,j}(Z/C,P) \cong \left(B_{\text{st}} \otimes (M_{\text{int}}^{h\,i\,j}(Z/C,P))\right)^{\Phi=Id, N=0} \cap \text{Fil}^0\left(B_{\text{dR}} \otimes_K M_{\text{int}}^{h,i,j}(Z/C,P)_K\right).$$

We obtain our theorem from results of Faltings [**17**], which we now describe.

Let us denote by $\overline{C}^{\times}$ the scheme $\overline{C}$ with the inverse image log structure from $C^{\times}$. Suppose $\mathscr{E}$ is a filtered logarithmic F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$. Such an object associates to the "enlargements" (thickenings) of $\overline{C}^{\times}$ (see [**32**] for the non-logarithmic case and [**16**], [**34**],[**35**] in general) coherent sheaves in a compatible way. We will recall the precise definitions in Sections 3.3 and 6. The notion of an F-isocrystal and it's initial development is due to Berthelot and Ogus [**2**], [**32**]. The notion of a filtered logarithmic F-isocrystal was defined by Faltings in [**16**] and developed by Shiho in [**34**] and [**35**]. In particular, one gets from $\mathscr{E}$ a coherent sheaf $\mathscr{E}_{C^{\times}}$ on C_K with an integrable connection D with logarithmic singularities at P. Therefore, if g, Z, C and P are as above, there is a filtered log-F isocrystal $\mathscr{E}_{Z/C}^{i\,j}$ on $\overline{C}^{\times}$ which associates to the enlargement $C^{\times}$, $\text{Sym}^j G^i(Z/C,P)$.

In [**17**], Faltings associated étale local systems on C, $\mathbb{L}(\mathscr{E})$ to certain (very special) filtered log-F isocrystals, $\mathscr{E}$, and made families of FFM-modules, $(H^h_{\text{deg}}(\mathscr{E}), \Phi_h^{\text{deg}}, N_h^{\text{deg}}, \mathscr{F}^{h,\bullet}_{\text{deg}})$ (see Section 2.1 for more details). Let us very briefly describe $H^h_{\text{deg}}(\mathscr{E})$. It is the log crystalline cohomology on $\overline{C}$, with a certain log structure $\overline{C}^{\times\times}$, with values in $\mathscr{E}$. As $\overline{C}$ is a reduced divisor with normal crossings in C, let $C^{\times\times}$ be C with the log-structure induced by $\overline{C} \cup P$. Let $\overline{C}^{\times\times}$ be $\overline{C}$ with the pull back log structure. Similarly, let $\text{Spec}(V)^{\times}$ be $\text{Spec}(V)$ with the log structure given by the closed point, let $\text{Spec}(k)^{\times}$ be $\text{Spec}(k)$ with the pull-back log structure and let $\text{Spec}(W)^{\times}$ be $\text{Spec}(W)$ with the Teichmüller lift of the log structure on $\text{Spec}(k)^{\times}$. Then $\mathscr{E}$ is a filtered log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times\times}$ over $\text{Spec}(W)^{\times}$ and we set $H^h_{\text{deg}}(\mathscr{E}) := H^h_{\text{cris}}(\overline{C}^{\times\times}/\text{Spec}(W)^{\times}, \mathscr{E})$ for $h \geq 0$. It is proved in [**17**] that the étale cohomology $H^h_{\text{et}}((C-P)_{\overline{K}}, \mathbb{L}(\mathscr{E}))$ and these FFM-modules are associated to each other via Fontaine's theory. In the case, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{Z/C}^{i\,j}$, $H^h_{\text{deg}}(\mathscr{E}) \otimes_{K_0} K = S^{h\,i\,j}(Z/C,P)$,

$\mathscr{F}^{h,\bullet}_{\deg}$ is the Hodge filtration and $H^h_{\text{et}}((C-P)_{\overline{K}},\mathbb{L}(\mathscr{E})) = \mathscr{V}^{h\,i\,j}(Z/C,P)$. In this paper, we will extend the definitions in [C1] of FFM-modules $H^h_{int}(\mathscr{E})$ to regular (see Section 6) logarithmic F-isocrystals $\mathscr{E}$ on $\overline{C}^{\times}$ over $\mathrm{Spec}(W)$ and prove

$$H^h_{\deg}(\mathscr{E}) = H^h_{\text{int}}(\mathscr{E})$$

for all $h \geq 0$, when all the irreducible components of $\overline{C}$ are absolutely irreducible.

We have several applications of our theorem. We first point out that our descriptions of the operators Φ^{int}_h, N^{int}_h are more explicit than those of the corresponding operators defined by Hyodo-Kato in ([**23**]) and Faltings in ([**17**]). If $C = X(N,p)$, with $(N,p) = 1$ and $N > 4$ (see the notations above) and $\mathscr{E} = \mathrm{Sym}^j G^1(E/C,P)$ then we prove that the rank of $N_1^{\deg}$ on $H^1_{\text{cris}}(\overline{C}^{\times,\times}/\mathrm{Spec}(W)^{\times},\mathscr{E})^{p-new}$ is exactly half the dimension over K_0 of this vector space (see Corollary 7.4.) As a consequence we derive that if f is a p-new cuspidal eigenform of weight $k = j+2$ on $X(N,p)$ and V_f denotes the p-adic G_K-representation attached to f, then V_f is semi-stable but *not* crystalline (Corollary 7.5). This was proved in [**33**] in a very indirect way, using the local Langlands correspondence and results of Carayol on the rank of the monodromy operator on the ℓ-adic ($\ell \neq p$) Weil-Deligne representation attached to f.

Our main result is also used in [**24**] in order to give an explicit description of the image of the p-adic Abel-Jacobi map applied to Heegner cycles on certain Shimura curves in terms of extension classes in the category of FFM-modules. In particular a p-adic Gross-Zagier formula for higher weight modular forms is proved in that paper.

Finally, another application of our results is to get an explicit description of the Mazur-Tate-Teitelbaum $\mathscr{L}$-invariants which we now describe.

Suppose now that $k \geq 0$ is an integer and $(M,F,N,\mathscr{F}^{\bullet})$ is a FFM-module over K such that $\mathscr{F}^i M$ is M_K for $i \leq k$ and it is 0 for $i \geq k+2$. Suppose $\mathscr{H}$ is a commutative $\mathbb{Z}_p$-algebra free of finite rank which acts on M such that $\mathscr{F}^{k+1}M$ is a rank 1 $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}_p} := \mathscr{H} \otimes \mathbb{Q}_p$-submodule,

$$M_K = \mathscr{F}^{k+1}M \oplus (N \otimes 1_K)M_K$$

and $N \otimes 1_K \colon \mathscr{F}^{k+1}M \longrightarrow (N \otimes 1_K)M_K$ is a non-zero $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}_p}$-isomorphism. Then, if $v \in M$ is an eigenvector for F such that $(N \otimes 1_K)M_K = \mathscr{H}_{\mathbb{Q}_p} \cdot Nv$, the $\mathscr{L}$-invariant $\mathscr{L}(M)$ of $(M,F,N,\mathscr{F}(D)^{\bullet})$ is the unique element in $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}_p}$ such that

$$v - \mathscr{L}(M)Nv \in \mathscr{F}^{k+1}M.$$

The general definition of an $\mathscr{L}$-invariant becomes arithmetically significant when we attach it to a cuspidal newform on $X(N,p)$ of weight $k+2$ (as above), with $k \geq 0$ even, which is split multiplicative at p. This means precisely that $a_p = p^{k/2}$ (see [**29**].) The quest for an $\mathscr{L}$-invariant which is intimately connected to the relationship between complex and p-adic L-functions was initiated by Mazur-Tate-Teitelbaum (86) in [**30**]. There, a definition in the weight 2 case was offered. Its relationship with values of L-functions was established by Greenberg and Stevens using Hida theory (91) in [**20**]. Teitelbaum proposed the first definition in the higher weight case under some restrictions on the level using the uniformization of Shimura curves by the p-adic

upper half plane (90) in [**38**] (his definition does not involve a FFM-module but see [**24**]), the first author of the present paper offered a definition using the FFM-module $M_{int}^{1\,i\,j}(E(N,p)/X(N,p),\mathrm{Cusps})$ and $\mathscr{H}$ is the Hecke-algebra acting on $X(N,p)$, in [**8**]. Finally, Fontaine-Mazur defined an $\mathscr{L}$-invariant associated to a cusp form as above using the FFM-module $D_{st}(V)$, where V is the local Galois representation attached to the cusp form and D_{st} is Fontaine's functor (see [**19**]) in [**29**]. The algebra $\mathscr{H}$ is again the Hecke algebra acting on $X(N,p)$. K. Kato, M. Kurihara and T. Tsuji established the connection between the $\mathscr{L}$-invariant of Fontaine and Mazur and special values of the complex and p-adic L-functions while G. Stevens has established the connection between the $\mathscr{L}$-invariant defined in [**8**] and special values of the complex and p-adic L-functions using p-adic families of modular forms, see [**37**]. The result of Kato, Kurihara and Tsuji has not yet been published. The present paper together with the results in [**24**] establishes the equality of all the $\mathscr{L}$-invariants (whenever they are defined). Of course, the results of Kato-Kurihara-Tsuji and Stevens togeher also imply (indirectly) the equality of the $\mathscr{L}$-invariants defined in [**8**] and the corresponding Fontaine-Mazur $\mathscr{L}$-invariants.

We mention that P. Colmez also proved (in [**12**]) a formula giving the $\mathscr{L}$-invariant of Fontaine-Mazur as derivative of a family of eigenvalues of Frobenius. Together with the result of Stevens mentioned above involving the $\mathscr{L}$-invariant defined in [**8**], this gives another local proof of the equality of the two $\mathscr{L}$-invariants we consider.

In [**21**] Grosse-Klönne extended the Hyodo-Kato theory and showed that there are natural Frobenius and monodromy operators on the de Rham cohomology of a quite general rigid space. He has been able to explicitly compute these when the space is a quotient of a p-adic symmetric domain.

Writing this paper we had two options, namely to present the definitions, statements and proofs in the most general case (the logarithmic case), which would have made the notations very complicated and would have obscured the ideas of the proofs or, to first present some of the definitions, statements and proofs in the non-logarithmic case, then to give the definitions and make the precise statements in general and leave it to the reader to check that the same proofs go through with the obvious adjustments. We choose to do the latter.

Acknowledgements. — We would like to use this opportunity to thank the referee of the first draft of this paper for the careful proofreading of the text and the lengthy report which pointed out a few serious mistakes and many small ones. In some cases solutions were offered to overcome the problems and many suggestions were made for the improvement of the presentation. We re-wrote the paper largely following the referee's suggestions.

Thus, it should be understood that the paper owes much to this report and we are very grateful to its author for his/her help.

Some of the re-writing of the paper was done while the second author was a visitor of the École polytechnique, Paris and of Université Paris 13, Paris. He is very grateful

to these institutions and to his hosts Pierre Colmez and Jacques Tilouine for their kind hospitality and encouragements.

We thank Christophe Breuil and the editors of Astérisque for gracefully extending submission deadlines.

2. Definitions of the operators

Let $K, V, k, W, K_0, C_K, C, P, \overline{C}, \overline{P}$ be as in Section 1. Let us recall that we suppose that the reduction of P, $\overline{P}$ does not meet the singular divisor of $\overline{C}$. We endow the formal completion of C along its special fiber with the natural log structure defined by the divisor P and denote the resulting formal log scheme by $C^{\times}$. We let $\overline{C}^{\times}$ denote the log scheme $\overline{C}$ with the inverse image log structure. We also denote by $C^{\times\times}$ the formal completion of C along its special fiber with log structure given by the divisor with normal crossings $P \cup \overline{C}$. We denote $\overline{C}^{\times\times}$ the scheme $\overline{C}$ with the inverse image log structure. Let $\mathscr{E}$ be a filtered log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$. We fix a uniformizer π of K and fix the branch, log, of the p-adic logarithm in $K^{\times}$ such that $\log(\pi) = 0$. Then, if $\mathscr{E}$ is regular (see below) there are two ways to attach a family of FFM-modules to $\mathscr{E}$, as we shall explain below.

2.1. The definition via degeneration. — We first briefly review the definition given by G. Faltings in **[17]**. We give more details in later sections. By deformation theory, the pair (C, P) can be regarded as the fiber at the point π of $\mathscr{S} := \mathrm{Spf}(W[[t]])$ over W, of a pair $(\mathfrak{X}, \mathscr{P})$ consisting of a family of curves $\mathfrak{X}$ defined over $\mathscr{S}$ and a smooth divisor $\mathscr{P}$ of $\mathfrak{X}$ over $\mathscr{S}$. Let $\mathfrak{X}^{\times}$ denote the log formal scheme $\mathfrak{X}$ with the log structure given by the divisor $\mathscr{P}$. Let $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathscr{S}$ denote the structure morphism. Let $\mathscr{Y}$ denote the fiber of this morphism at $t = 0$. Then $\mathscr{P}$ and $\mathscr{Y}$ are disjoint and $\mathscr{Y}$ is a divisor of $\mathfrak{X}$ with normal crossings. We denote by $\mathfrak{X}^{\times\times}$ the formal scheme $\mathfrak{X}$ with the log structure associated to the divisor $\mathscr{P} \cup \mathscr{Y}$. If we let $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, $S = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$ and $\mathscr{P}^{\mathrm{rig}} := P_X$ denote the rigid analytic spaces over K_0 associated to $\mathfrak{X}$, $\mathscr{S}$ and $\mathscr{P}$ respectively and if $f\colon X \longrightarrow S$ is the induced morphism then we have

i) $X \longrightarrow \mathrm{Spec}(K_0)$ is smooth
ii) $Y := f^{-1}(0) = \mathscr{Y}^{\mathrm{rig}}$ is a semi-stable curve over K_0
iii) $P_0 := P_X \cap Y$ is disjoint from the singular divisor of Y
iv) $f|_{X^*}\colon X^* = (X - Y) \longrightarrow S^* = (S - \{0\})$ is smooth.

The evaluation of $\mathscr{E}$ on $\mathfrak{X}^{\times}$ is a coherent $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^{\times}}$, with a relative, logarithmic, integrable connection $D_{\mathrm{X/S}}$. Let us denote by $K^{\bullet}_{\mathrm{X/S}}$ the complex of sheaves on X

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^{\times}} \overset{\mathrm{D_{X/S}}}{\longrightarrow} \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^{\times}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/S}(\log(Y \cup P_X)).$$

The relative connection $D_{\mathrm{X/S}}$ is induced from the absolute connection:

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^{\times}} \overset{\mathrm{D_{X/K_0}}}{\longrightarrow} \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^{\times}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/K_0}(\log(P_X))$$

by composing with the natural map: $\Omega^1_{X/K_0}(\log(P_X)) \longrightarrow \Omega^1_{X/S}(\log(Y \cup P_X))$.

See Section 3.3 and Section 6. We denote by $\mathbb{H}^i$ the i-th logarithmic relative de Rham cohomology group of X/S with coefficients in $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}$, i.e. the sheaf $\mathbb{R}^i f_*(K^\bullet_{\mathrm{X/S}})$ for $i = 0, 1, 2$. For every i, $\mathbb{H}^i$ is a free $\mathscr{O}_S$-module with an integrable, regular-singular connection

$$\nabla_i \colon \mathbb{H}^i \longrightarrow \mathbb{H}^i \otimes_{\mathscr{O}_S} \Omega^1_{S/K_0}(\log 0).$$

Fix a parameter t on S, with $t(0) = 0$. The Frobenius on $\mathscr{E}$ together with the Frobenius φ on S which sends t to t^p and acts on the coefficients as the absolute Frobenius on K_0, endow $\mathbb{H}^i$ with a φ-semi-linear, horizontal (with respect to ∇_i) Frobenius operator

$$\Phi_i \colon \varphi^* \mathbb{H}^i \longrightarrow \mathbb{H}^i.$$

If s is a point of S, let $\mathbb{H}^i_s$ denote the fiber of $\mathbb{H}^i$ at s. The i-th logarithmic de Rham cohomology of C_K, with coefficients in $\mathscr{E}_{C^\times}$, $H^i_{dR}\big(C_K, \mathscr{E}_{C^\times}\big)$ is canonically isomorphic to $\mathbb{H}^i_\pi$. (Recall, P is the fiber of P_X at $s = \pi$.) We denote these groups by $H^i(C, P, \mathscr{E})$. On the other hand, $\mathbb{H}^i_0$ is canonically isomorphic to the logarithmic de Rham cohomology of Y with coefficients in $\mathscr{E}_{\mathscr{Y}^\times}$, i.e. the i-th hypercohomology on Y of the complex of sheaves

$$\mathscr{E}_{\mathscr{Y}^\times} \overset{D_{\mathscr{Y}/W}}{\longrightarrow} \mathscr{E}_{\mathscr{Y}^\times} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{Y}}} \Omega^1_{\mathscr{Y}^{\times\times}/\mathrm{Spf}(W)^\times},$$

where $\mathscr{Y}^{\times\times}$ is the formal scheme $\mathscr{Y}$ with the inverse image log structure from $\mathfrak{X}^{\times\times}$. We denote this group by $H^i(Y, P_0, \mathscr{E})$.

Now let $H^i_{\mathrm{deg}}(\mathscr{E})$ denote the FFM-module $(H^i(Y, P_0, \mathscr{E}), \Phi_i^{\mathrm{deg}}, N_i^{\mathrm{deg}}, \mathscr{F}^\bullet_{\mathrm{deg}})$, where the operators are defined as follows

the monodromy operator: $N_i^{\mathrm{deg}} := \mathrm{Res}_0(\nabla_i) \colon H^i(Y, P_0, \mathscr{E}) \longrightarrow H^i(Y, P_0, \mathscr{E})$,
and

the Frobenius operator: $\Phi_i^{\mathrm{deg}} := \Phi_i|_{H^i(Y, P_0, \mathscr{E})} \colon H^i(Y, P_0, \mathscr{E}) \longrightarrow H^i(Y, P_0, \mathscr{E})$.

These operators satisfy $N_i^{\mathrm{deg}} \Phi_i^{\mathrm{deg}} = p \Phi_i^{\mathrm{deg}} N_i^{\mathrm{deg}}$.

We still have to define the filtration on $(H^i_{\mathrm{deg}}(\mathscr{E}))_K := H^i(Y, P_0, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} K$. For this let us recall from **[4]** (this was also proved in **[17]**) that the triple $(\mathbb{H}^i, \nabla_i, \Phi_i)$ is determined by the triple $(H^i(Y, P_0, \mathscr{E}), N_i^{\mathrm{deg}}, \Phi_i^{\mathrm{deg}})$. More precisely we have a natural, horizontal, Frobenius-equivariant isomorphism of $\mathscr{O}_S$-modules

$$(\mathbb{H}^i, \nabla_i, \Phi_i) \cong (H^i(Y, P_0, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} \mathscr{O}_S, (\nabla_i)', \Phi_i^{\mathrm{deg}} \otimes \varphi),$$

where the connection $(\nabla_i)'$ is defined by,

$$(\nabla_i)'(h \otimes x) = N_i^{\mathrm{deg}}(h) \otimes x \frac{dt}{t} + h dx, \quad \text{for all} \quad h \in H^i(Y, P_0, \mathscr{E}), x \text{ section of } \mathscr{O}_S.$$

Here a few comments are in order. For $i = 0, 2$ the pair $(\mathbb{H}^i, \nabla_i)$ is very simple. Namely, let $i = 0$. Then $\mathbb{H}^0 = (\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}(X))^{\mathrm{D}_{X/S}} =: E_{X/S}$ and the connection ∇_0 is the

composition

$$E_{X/S} \overset{\mathrm{D}_{X/K_0}}{\longrightarrow} E_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_S} \Omega^1_S \longrightarrow E_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_S} \Omega^1_S(\log(0)),$$

where D_{X/K_0} is the absolute connection mentioned at the beginning of this section. Therefore $N_0^{deg} = \mathrm{Res}_0(\nabla_0) = 0$ and so applying the above we get that $\mathbb{H}^0 \cong H^0(Y, P_0, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} \mathscr{O}_S$ and $(\nabla_0)'$ (therefore also ∇_0) is the trivial connection. The same happens for $i = 2$ by Poincaré duality (see **[17]**).

∇_1 is not trivial in general so let us define $\mathbb{H}^1_{\log} = \mathbb{H}^1 \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_S[\ell(t)]$, where $\ell(t)$ is a variable. We endow $\mathbb{H}^1_{\log}$ with the connection $\nabla_1(\log) := \nabla_1 \otimes 1 + 1 \otimes d$ where $d : \mathscr{O}_S[\ell(t)] \longrightarrow \mathscr{O}_S[\ell(t)] \otimes_{\mathscr{O}_S} \Omega^1_{S/K_0}(\log(0))$ is defined by $d(\ell(t)) = 1 \otimes \dfrac{dt}{t}$.

For all $h \in H^1(Y, P_0, \mathscr{E})$ the sections of $\mathbb{H}^1_{\log}$

$$h \otimes 1 - N_1^{\deg}(h) \otimes \ell(t)$$

are horizontal for $\nabla_1(\log)$ hence the connection $\nabla_1(\log)$ is trivial.

Therefore, letting $\mathbb{H}^i_{\log} = \mathbb{H}^i$ if $i = 0, 2$ we have for $i = 0, 1, 2$ and every K-point $s \neq 0$ of S natural identifications (by parallel transport, see **[14]**)

$$\left(H^i_{\deg}(\mathscr{E})\right)_K = H^i(Y, P_0, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} K \cong (\mathbb{H}^i_{\log})_s$$

where by $(\mathbb{H}^i_{\log})_s$ we denote the pull back of $\mathbb{H}^i_{\log}$ by the map $\mathscr{O}_S[\ell(t)] \longrightarrow K$ sending $t \to s$ and $\ell(t) \to \log(s)$, where let us recall that the branch of the logarithm chosen at the beginning of this section is such that $\log(\pi) = 0$. In particular, for $s = \pi$ we have $(\mathbb{H}^i_{\log})_\pi = \mathbb{H}^i_\pi = H^i_{dR}(C_K, \mathscr{E}_{C^\times}(\log(P))$ and we define the filtration on $\left(H^i_{\deg}(\mathscr{E})\right)_K$ to be the inverse image under this isomorphism of the Hodge filtration on $H^i_{dR}(C_K, \mathscr{E}_{C^\times}(\log(P))$.

Remark 2.1. — *Actually Faltings does not mention the basis of horizontal sections defined above in* **[17]** *and it seems to us that he does not identify fibers of* $\mathbb{H}^i_{\log}$ *(see also the remark before Lemma 2.1 in* **[17]***).*

2.2. The definition via p-adic integration. — We generalize the definition given in **[8]** when $\mathscr{E}$ is regular. As pointed out above, the evaluation of $\mathscr{E}$ on $C^\times$ is a coherent $\mathscr{O}_{C_K}$-module with a regular singular (at P) integrable connection $D\colon \mathscr{E}_{C^\times} \longrightarrow \mathscr{E}_{C^\times} \otimes_{\mathscr{O}_{C_K}} \Omega^1_{C_K/K}(\log(P))$. Recall that we have denoted by $H^i(C, P, \mathscr{E})$ the K-vector spaces $H^i_{dR}(C_K, \mathscr{E}_{C^\times}(\log(P))$, for $i = 0, 1, 2$.. The following lemma will be proved in Section 3.3

Lemma 2.2. — *The connection D has a basis of horizontal sections on every residue class of C_K.*

We'll assume that the components of $\overline{C}$ are smooth, absolutely irreducible and there are at least two of them. Also suppose that the singular points of the reduction are defined over k.

For $i = 0, 2$ we have the K_0-lattices in $H^i(C, P, \mathscr{E})$, $H^i_{\text{int}}(\mathscr{E}) := H^i_{\text{cris}}(\overline{C}^{\times\times}, \mathscr{E})$ with the respective Frobenii and zero monodromies. The filtrations on $H^i(C, P, \mathscr{E})$ are the respective Hodge filtrations.

For $i = 1$ the situation is more complicated. For an admissible covering $\mathscr{D}$ of a rigid space let $G := G(\mathscr{D})$ be the graph whose vertices $v(G)$ are the elements of $\mathscr{D}$ and whose oriented edges $\epsilon(G)$ correspond to ordered triples $e := (U, V, W)$ where $U \neq V \in \mathscr{D}$ and $A_e := W$ is a connected component of $U \cap V$. Also, if e is such an edge then its *origin* $a(e)$ is U and its *end* $b(e)$ is V. We set $\tau(e) = (V, U, W)$. If $v \in v(G(\mathscr{D}))$ we will denote by U_v the element of $\mathscr{D}$ corresponding to it. We choose and fix a system of representatives $e(G)$ of the quotient set $\epsilon(G)/\tau$.

Consider

$$\mathscr{C} = \{\text{red}^{-1} Z \colon Z \text{ is a component of } \overline{C}\},$$

where $\text{red}\colon C_K = C^{\text{rig}} \longrightarrow \overline{C}$ is the reduction map. Then $\mathscr{C}$ is an admissible open cover of C_K by wide opens (see [**7**]). Let $G = G(\mathscr{C})$, $v(G)$ be the vertices of G and $\epsilon(G)$, the edges of G. If $v \in v(G)$, C_v will denote the corresponding component of $\overline{C}$. We also set $C_v^0 = C_v - \bigcup_{w \neq v} C_w$. In this situation, for each $e \in e(G)$, A_e is an oriented wide open annulus. Given Lemma 2.2, there is a natural residue map

$$\text{Res}_e\colon H^1_{dR}(A_e, \mathscr{E}_{C^\times}) \cong H^0_{dR}(A_e, \mathscr{E}_{C^\times}) = (\mathscr{E}_{C^\times}|_{A_e})^D.$$

We will sometimes abuse notation and allow Res_e to denote the composition of Res_e with the natural map from $H^1(C, P, \mathscr{E})$ to $H^1_{dR}(A_e, \mathscr{E}_{C^\times})$.

Elements of $H^1(C, P, \mathscr{E})$ are represented by pairs of collections

$$(\{\omega_v\}_{v \in v(G)}, \{f_e\}_{e \in e(G)})$$

where $\omega_v \in (\mathscr{E}_C \otimes \Omega^1_{U_v})(\log P_v))(U_v)$ and $f_e \in \mathscr{E}(A_e)$ are such that

$$\omega_{a(e)}|_{A_e} - \omega_{b(e)}|_{A_e} = Df_e$$

for all $e \in e(G)$. We denote $P \cap U_v$ by P_v. From the Mayer-Vietoris exact sequence corresponding to the covering $\mathscr{C}$ we get a short exact sequence

(1)

$$0 \to (\oplus_{e \in e(G)} H^0_{dR}(A_e, \mathscr{E}_{C^\times}))/(\oplus_{v \in v(G)} H^0_{dR}(U_v, \mathscr{E}_{C^\times}(\log(P_v)))) \xrightarrow{\iota} H^1(C, P, \mathscr{E})$$
$$\xrightarrow{\gamma} \text{Ker}(\oplus_{v \in v(G)} H^1_{dR}(U_v, \mathscr{E}_{C^\times}(\log(P_v))) \to \oplus_{e \in e(G)} H^1_{dR}(A_e, \mathscr{E}_{C^\times})) \to 0.$$

First, let us observe that the left and right terms in the exact sequence (1) have natural K_0-lattices, with Frobenii. To see this, note that $H^0_{dR}(A_e, \mathscr{E}_{C^\times})$ contains a natural K_0-lattice, namely $H^0_{\text{cris}}(x_e, \mathscr{E})$, where x_e is the point of $\overline{C}$ corresponding to the edge e, and it has a natural Frobenius. Therefore we get a natural K_0-lattice with a Frobenius on the left module of the exact sequence (1) which will be denoted $H^{0,1}(C)$ and $F_{0,\text{cris}}$ respectively. Moreover, for $v \in v(G)$, $H^1_{dR}(U_v, \mathscr{E}_{C^\times}(\log(P_v)))$ contains a natural K_0-lattice with a Frobenius, namely the first log crystalline cohomology with coefficients in $\mathscr{E}$ of the component corresponding to the vertex v, $C_v^{\times\times}$ where the log structure is the one induced by the log structure on $\overline{C}^{\times\times}$. See [**16**]. Therefore, the

right module of the exact sequence (1) has a natural K_0-lattice, denoted $H^{1,0}(C)$, with a Frobenius denoted $F_{1,\mathrm{cris}}$. To define a K_0-lattice, $H^1_{\mathrm{int}}(\mathscr{E})$ of $H^1(C,P,\mathscr{E})$, together with a Frobenius operator Φ_1^{int} and a monodromy operator N_1^{int} we'll first split the exact sequence (1) by defining a section s of ι. This can be done if the log F-isocrystal $\mathscr{E}$ is regular.

Definition 2.3. — *We say that the log F-isocrystal $\mathscr{E}$ on $\overline{C}^{\times}$ is* regular *if for every $v \in v(G)$ and x closed point of $C_v - \overline{P}$ the characteristic polynomials of Frobenius on $H^0_{\mathrm{cris}}(x,\mathscr{E})$ and $H^1_{\mathrm{cris}}(C_v^{\times\times},\mathscr{E}))$ are relatively prime.*

Remark 2.4. — *It will be proved in Section 6 that the definition (2.3) is satisfied by all log F-isocrystals on $\overline{C}^{\times}$ coming from a family of schemes $Z \longrightarrow C$ as in the Section 1.*

For the rest of the section we'll assume that $\mathscr{E}$ is regular. Let $\omega \in H^1(C,P,\mathscr{E}_{C^\times})$ be represented by the hypercocycle $(\{\omega_v\}_v,\{f_e\}_e)$ as above. If $v \in v(G)$ one can define a p-adic integral of ω_v, λ_v, on $U_v - P_v$, which depends on our choice of the logarithm and is well defined up to a rigid horizontal section of $\mathscr{E}_{C^\times}|_{U_v}$ (see Section 5.2). Then $s(\omega)$ will be represented by the cocycle $(\{g_e\}_e)$, where

$$g_e = f_e - (\lambda_{a(e)}|_{A_e} - \lambda_{b(e)}|_{A_e}).$$

Let u be the corresponding section of γ. Then define $H^1_{\mathrm{int}}(\mathscr{E})$ to be the FFM-module, where the underlying K_0-vector space is $\iota(H^{0,1}(C)) + u(H^{1,0}(C))$ and the Frobenius operator, $\Phi_1^{\mathrm{int}}(\omega)$, is

$$\iota(F_{0,\mathrm{cris}}(s(\omega)) + u(F_{1,\mathrm{cris}}(\gamma(\omega)).$$

Moreover, the monodromy operator, N_1^{int}, is defined to be the composition

$$\iota \circ \oplus_{e\in e(G)}\mathrm{Res}_e.$$

The operators satisfy the relation,

$$N_1^{\mathrm{int}}\Phi_1^{\mathrm{int}} = p\Phi_1^{\mathrm{int}}N_1^{\mathrm{int}}.$$

Finally the filtration on $(\iota(H^{0,1}(C)) + u(H^{1,0}(C))) \otimes_{K_0} K = H^1(C,P,\mathscr{E})$ is the Hodge filtration.

Remark 2.5. — *The same construction can be performed for every fiber X_s where $s \in S^* = S - \{0\}$, i.e., we have residue maps $\mathrm{Res}^{(s)}$, monodromy operators $N^{\mathrm{int}}_{(i,s)}$ and Frobenii $\Phi^{\mathrm{int}}_{(i,s)}$, for $i = 0,1,2$.*

The main result of this paper is

Theorem 2.6. — *Suppose that $\mathscr{E}$ is a regular filtered log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$. Then the isomorphism $H^i(Y,P_0,\mathscr{E}) \otimes_{K_0} K \cong (\mathbb{H}^i_{\log})_\pi$ obtained by parallel transport yields an isomorphism of FFM-modules $H^i_{\mathrm{deg}}(\mathscr{E}) \cong H^i_{\mathrm{int}}(\mathscr{E})$.*

Remark 2.7. — *Actually regularity is only needed in order to compare the K_0-lattices and the Frobenii. We shall prove the equality of the monodromy operators (tensored with the identity of K) without any restriction.*

Theorem 2.6 is an easy consequence of the definitions for $i = 0, 2$. The next sections of the paper will be devoted to the proof of this theorem for $i = 1$. We'll first prove the theorem (2.6) in the non-logarithmic case (i.e. $\overline{P}$ is the void set) and then we'll provide all the necessary definitions and results so that the reader should be able to fill in the details of the proof in the logarithmic case.

3. F-Isocrystals

3.1. Formal schemes, rigid analytic spaces and weak completions. — In this section we review some constructions and results on formal schemes, rigid analytic spaces and weak completions which will be used later in the paper.

3.1.1. *The functor* rig. — We recall a standard construction in rigid analytic geometry, the functor "rig" (for more details see Section 02 of [**1**] or [**25**]). This is a functor from the category of locally noetherian formal V-schemes (or formal W-schemes) to the category of rigid analytic spaces over K (respectively K_0).

Let $\mathfrak{X}$ be a locally noetherian formal scheme over $\mathrm{Spf}(V)$ (the case where V is replaced by W is treated in the same way) having the property that the scheme $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})_{\mathrm{red}}$ is locally of finite type, where $\mathscr{I}$ is an ideal of definition of $\mathfrak{X}$. To the formal scheme $\mathfrak{X}$ we attach a rigid analytic space $X := \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ over K as follows.

We first suppose that $\mathfrak{X}$ is affine, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, let $I = H^0(\mathfrak{X}, \mathscr{I})$ and fix $f_1, f_2, \ldots, f_r$ a set of generators of the ideal I. For every $n \geq 1$ define the V-algebra

$$B_n := A\langle T_1, T_2, \ldots, T_r\rangle/(f_1^n - \pi T_1, f_2^n - \pi T_2, \ldots, f_r^n - \pi T_r),$$

where π is a uniformizer of V, and as usual, $A\langle T_1, T_2, \ldots, T_r\rangle$ denotes the p-adic (or π-adic) completion of the polynomial ring $A[T_1, T_2, \ldots, T_r]$. The conditions on $\mathfrak{X}$ imply that the k-algebra

$$B_n/\pi B_n \cong A/(\pi, f_1^n, f_2^n, \ldots, f_r^n)[T_1, T_2, \ldots, T_r]$$

is of finite type which implies that B_n itself is topologically of finite type. Therefore $B_n \otimes_V K$ is a Tate-algebra over K. For $m > n \geq 1$ we have canonical V-algebra homomorphisms $B_m \longrightarrow B_n$ sending $T_i \to f_i^{m-n} T_i$ for all $1 \leq i \leq r$. The induced morphism of affinoids $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K) \longrightarrow \mathrm{Spm}(B_m \otimes K)$ identifies the source with the affinoid sub-domain of the target given by $|f_i| \leq |\pi|^{1/n}$, $1 \leq i \leq r$. We define $X := \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ to be the inductive limit of $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$, where these affinoids form, by definition, an admissible covering of X. In fact one can prove that $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ is independent of the ideal of definition $\mathscr{I}$ and of the choice of generators $f_1, f_2, \ldots, f_r$ and that it is functorial in $\mathfrak{X}$.

If the ideal of definition of $\mathfrak{X}$ is $\pi\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, i.e. $\mathfrak{X}$ is a p-adic formal V-scheme topologically of finite type, then $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ is the usual "generic fiber of $\mathfrak{X}$" à la Raynaud.

Let $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ be as above. Then one can define a reduction (or specialization) map $\mathrm{red} : \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ as follows. For $m > n \geq 1$ the natural V-algebra homomorphisms

$A \longrightarrow B_m \longrightarrow B_n$ induce the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spm}(B_m \otimes K) & \xrightarrow{\mathrm{red}} & \mathrm{Spf}(B_m) & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ \mathrm{Spm}(B_n \otimes K) & \xrightarrow{\mathrm{red}} & \mathrm{Spf}(B_n) & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

Here the morphisms $\mathrm{red} : \mathrm{Spm}(B_n \otimes K) \longrightarrow \mathrm{Spf}(B_n)$ are the usual reduction maps for p-adic formal schemes and their generic fibers, i.e. defined as follows. Let $x \in \mathrm{Spm}(B_n \otimes K)$ be a point and let m_x be the respective maximal ideal. Then $K(x) := (B_n \otimes K)/m_x$ is a finite extension of K and we have V-algebra morphisms: $B_n \longrightarrow B_n \otimes K \longrightarrow K(x)$. We define $\mathrm{red}(x)$ to be the point of $\mathrm{Spf}(B_n)$ corresponding to the unique closed point of the finite, local V-algebra which is the image of B_n in $K(x)$.

The morphism $\mathrm{red} : \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ is obtained by gluing the morphisms $\mathrm{Spm}(B_n \otimes K) \longrightarrow \mathfrak{X}$ in the above diagram.

For a general $\mathfrak{X}$, we obtain $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ and the morphism $\mathrm{red} : \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \mathfrak{X}$ by taking an affine cover $\{\mathscr{U}_i\}_i$ of $\mathfrak{X}$ and gluing $\mathscr{U}_i^{\mathrm{rig}}$ and $\mathrm{red}_{\mathscr{U}_i^{\mathrm{rig}}}$.

Under the notations and hypothesis at the beginning of the section, let Z be a closed sub-scheme of $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I})$. We denote by $\mathfrak{X}_{/Z}$ the formal completion of $\mathfrak{X}$ along Z. We have canonical morphisms $\mathfrak{X}_{/Z} \longrightarrow \mathfrak{X}$ and $(\mathfrak{X}_{/Z})^{\mathrm{rig}} \longrightarrow \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$. The image of the latter morphism is an admissible open subset of $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ which may be canonically identified with $\mathrm{red}^{-1}(Z) :=]Z[_{\mathfrak{X}}$ (see Proposition 0.2.7 of [**1**]).

3.1.2. *Formal models.* — Let $\mathfrak{X}$ be a p-adic formal V-scheme (or W-scheme), separated and topologically of finite type and let $X := \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$. Assume that X is reduced and let U be an admissible affinoid open of X.

Lemma 3.1. — *There is a canonical p-adic formal scheme $\mathfrak{U}$ over V (respectively over W), depending on $\mathfrak{X}$, with a morphism $\mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{X}$ whose generic fiber is the inclusion $U \subset X$.*

Proof. — Let, as usual $\mathfrak{X}_1$ denote the special fiber of $\mathfrak{X}$ and consider an affine open covering of $\mathfrak{X}_1$, $\{V_i\}_i$. Let $U_i := \mathrm{red}^{-1}(V_i) \cap U \subset U$, the family $\{U_i\}_i$ is an admissible covering of U and let us denote by $\mathfrak{U}_i := \mathrm{Spf}(A_i)$ where A_i is the sub-ring of functions of $\mathscr{O}_U(U_i)$ bounded by 1 (we say that $\mathfrak{U}_i$ is "the canonical formal model" of U_i). Let V_{ij} be the inverse image of $V_i \cap V_j$ under the map of special fibers $(\mathfrak{U}_i)_1 \longrightarrow \mathfrak{X}_1$. Then $U_i \cap U_j = \mathrm{red}_i^{-1}(V_{ij})$, where $\mathrm{red}_i : U_i \longrightarrow \mathfrak{U}_i$ is the reduction map and the canonical model of $U_i \cap U_j$ is the formal open sub-scheme of $\mathfrak{U}_i$ whose support is V_{ij} Therefore, one can glue the formal schemes $\mathfrak{U}_i$ along the canonical formal models of $U_i \cap U_j$ and obtain the required formal model of U. This is independent of the covering $\{V_i\}_i$, as one may take the covering of $\mathfrak{X}_1$ consisting of all the affine open sub-schemes. □

These formal models of affinoid opens of X have the following functorial property.

Let $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ be p-adic formal schemes, separated, topologically of finite type over V (or W) and let $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, X' = \mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}$ and assume that X, X' are reduced. Let

U, U' be admissible affinoid opens of X respectively X' and assume that we are given morphisms $f : U' \longrightarrow U$ and $g : (\mathfrak{X}')_1 \longrightarrow (\mathfrak{X})_1$ such that the following diagram commutes.

$$\begin{array}{ccccc} U' & \subset & X' & \stackrel{\mathrm{red}}{\longrightarrow} & (\mathfrak{X}')_1 \\ f \downarrow & & & & g \downarrow \\ U & \subset & X & \stackrel{\mathrm{red}}{\longrightarrow} & (\mathfrak{X})_1 \end{array}$$

Then there exists a canonical morphism $h : \mathfrak{U}' \longrightarrow \mathfrak{U}$ inducing f on generic fibers and such that $h_1 : (\mathfrak{U}')_1 \longrightarrow (\mathfrak{U})_1$ is compatible with g.

3.1.2.1. *Logarithmic structures.* — In this section we'd like to recall some basic notions in the theory of log schemes from **[26]**, **[23]**, Sections 2.8, 2.9 and **[34]**.

Suppose A is a scheme (or a formal scheme or a rigid space). A morphism of sheaves of monoids on the Zariski site of A, $\alpha\colon M \to \mathscr{O}_A$, will be called a pre log structure on A. Call the pair (A, α) a pre log scheme (or formal pre log scheme) and denote it $A^\times$ and denote M, $M_{A^\times}$. A pre log scheme (A, α) is called a log scheme if α induces an isomorphism $\alpha^{-1}(\mathscr{O}_A^*) \cong \mathscr{O}_A^*$. The sheaf of log one forms $\omega_{A^\times}$ on A associated to α is the quasi-coherent sheaf $\Omega^1_A \oplus \mathscr{O}_A \otimes_{\mathscr{O}_A^*} M_{A^\times}$ subject to the relations $\alpha(m) \otimes m = \mathrm{d}\alpha(m)$, for $m \in M_{A^\times}$. One has a natural derivation on the exterior algebra of $\omega_{A^\times}$ over $\mathscr{O}_A$ such that $\mathrm{d}(1 \otimes m) = 0$, for $m \in M_{A^\times}$.

If P is a divisor on A, M_P is the sheaf $M_P(U) = \mathscr{O}_A(U) \cap \mathscr{O}_A^*(U - P)$ and $\alpha_P\colon M_P \to \mathscr{O}_A$ is the inclusion, then $A_P^\times =: (A, \alpha_P)$ is a log-scheme which is fine ("coherent" and "integral"). If A is noetherian and reduced and if A is a variety $\omega_{A_P^\times}$ is naturally isomorphic to $\Omega^1_A(\log P)$. If $P = \varnothing$, α_P is called the a trivial log structure on A.

G. Faltings defines and uses a more restricted notion of log-structures in **[16]** and **[17]** (see the appendix of **[26]** for the precise relationship between the two notions.)

Henceforth, all log structures will be fine.

Let $T^\times$ be a formal log scheme. Let us denote by T_0 the reduced sub-scheme of the closed sub-scheme of T corresponding to the ideal sheaf $p\mathscr{O}_T$. We have a closed immersion

$$\iota : T_0 \longrightarrow T$$

and we'll let $T_0^\times$ be the log scheme corresponding to the log structure on T_0

$$\iota^{-1}(M_{T^\times}) \longrightarrow \iota^{-1}(\mathscr{O}_T) \longrightarrow \mathscr{O}_{T_0}.$$

We use, as in **[26]** the notation ι^{-1} for the inverse image of a sheaf and ι^* for the inverse image of a log structure.

Let now $g\colon U^\times \to T^\times$ be a morphism of formal log schemes, $g = (f, h) : (U, M_{U^\times}) \to (T, M_{T^\times})$. Here $f : U \to T$ is a morphism of formal W-schemes and we

have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}M_{T^\times} & \xrightarrow{h} & M_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}\mathscr{O}_T & \longrightarrow & \mathscr{O}_U \end{array} \quad \text{and also} \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & T \\ \iota' \uparrow & & \uparrow \iota \\ U_0 & \xrightarrow{f_0} & T_0 \end{array}$$

Therefore, we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} f_0^{-1}(\iota^{-1}M_{T^\times}) & = & (\iota')^{-1}f^{-1}M_{T^\times} & \longrightarrow & (\iota')^{-1}M_{U^\times} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f_0^{-1}(\iota^{-1}\mathscr{O}_T) & = & (\iota')^{-1}f^{-1}\mathscr{O}_T & \longrightarrow & (\iota')^{-1}\mathscr{O}_U \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f_0^{-1}(\mathscr{O}_{T_0}) & & \longrightarrow & & \mathscr{O}_{U_0} \end{array}$$

which defines a morphism $g_0 \colon U_0^\times \to T_0^\times$.

Definition 3.2. — *Let $X^\times, Y^\times$ be schemes or formal schemes with fine log structures and let $M \longrightarrow \mathscr{O}_X$ (respectively $N \longrightarrow \mathscr{O}_Y$) denote the morphisms of monoids on X (respectively on Y) giving the log structures. Let $f : X^\times \longrightarrow Y^\times$ be a morphism.*

i) We say that f is a closed immersion if the underlying morphism of schemes $X \longrightarrow Y$ is a closed immersion and the map $f^*N \longrightarrow M$ is surjective.

ii) We say that f is an exact closed immersion if f is a closed immersion and the map $f^*N \longrightarrow M$ is a bijection.

Definition 3.3. — *Let as above $X^\times, Y^\times$ be schemes or formal schemes with fine log structures given by the sheaves of monoids M respectively N and let $f : X^\times \longrightarrow Y^\times$ be a morphism. We say that f is smooth (respectively étale) if the underlying morphism of schemes $X \longrightarrow Y$ is locally of finite presentation and for any commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} T'^\times & \xrightarrow{s} & X^\times \\ \downarrow \iota & & \downarrow f \\ T^\times & \xrightarrow{t} & Y^\times \end{array}$$

where ι is an exact closed immersion such that the ideal of T' in T is nilpotent, there exists locally on T a morphism (respectively there exists a unique morphism) $g : T^\times \longrightarrow X^\times$ such that $g\iota = s$ and $fg = t$.

See [**23**] 2.9 for other equivalent formulations of Definition 3.3.

Moreover we have the following result from [**26**] 4.10:

Lemma 3.4. — *If $f : X^\times \longrightarrow Y^\times$ is a closed immersion, then there exists locally on X a factorization of f as: $X^\times \xrightarrow{\iota} T^\times \xrightarrow{g} Y^\times$ where $T^\times$ is a fine log scheme, ι is an exact closed immersion and g is an étale morphism.*

3.1.3. *Fibrations and rigid analytic Poincaré lemmas*

3.1.3.1. — Let us first consider a smooth affine scheme Z of finite type over k and let $\iota : Z \longrightarrow \mathscr{T}$ and $\iota : Z \longrightarrow \mathscr{T}'$ be closed immersions of Z into smooth p-adic formal affine schemes over W. Let us assume that we have a smooth morphism of formal schemes $u : \mathscr{T}' \longrightarrow \mathscr{T}$ such that $u \circ \iota' = \iota$. Let $\mathscr{T}'_{/Z}, \mathscr{T}_{/Z}$ denote the formal completions of $\mathscr{T}'$ respectively $\mathscr{T}$ along Z and let $T' := (\mathscr{T}'_{/Z})^{\mathrm{rig}}$ and $T := (\mathscr{T}_{/Z})^{\mathrm{rig}}$. Then locally on T' we have integers d and natural isomorphisms $T' \cong T \times_{K_0} S^d$, where let us recall that S is the open unit disk over K_0, such that the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} T' & \longrightarrow & T \times_{K_0} S^d \\ u \downarrow & & \downarrow \\ T & = & T \end{array}$$

In the above diagram the right vertical map is the natural projection. For a proof of the result see **[1]** Theorem 1.3.2. An easy consequence of this result on "fibrations" is the following

***Lemma 3.5* (Smooth Poincaré lemma).** — *Let the notations be as at the beginning of this section. Let $\mathscr{E}$ denote an isocrystal on Z/W (see Section 3.3) and let us consider the de Rham complexes of sheaves on T' and T denoted $DR(T', \mathscr{E})^\bullet$ and $DR(T, \mathscr{E})^\bullet$ obtained by evaluating $\mathscr{E}$ at the enlargements $\mathscr{T}_{/Z}$ and $\mathscr{T}_{/Z}$. The morphism $u : \mathscr{T}' \longrightarrow \mathscr{T}$ induces a morphism of complexes $DR(T, \mathscr{E})^\bullet \longrightarrow u_* DR(T', \mathscr{E})^\bullet$ which is a quasi-isomorphism.*

We'd like to recall the similar result in the relative situation and with log structures from **[34]**,**[35]** and **[36]**.

Let us now recall that we have denoted $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(W[[t]])$. Let us endow this formal scheme with the fine log structure given by the divisor $t = 0$ and denote this log formal scheme by $\mathscr{S}^\times$. The closed immersion $\mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathscr{S}$ given by $t \to 0$ endows $\mathrm{Spec}(k)$ with the pull-back log structure. Let $Z^\times$ be a fine, smooth, affine log scheme over $\mathrm{Spec}(k)^\times$ and let $\iota : Z^\times \longrightarrow \mathscr{T}^\times$ and $\iota' : Z^\times \longrightarrow \mathscr{T}'^\times$ denote exact closed immersions over $\mathscr{S}^\times$ into smooth, affine log formal schemes (we assume that $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ are endowed with the (t,p)-topology). Suppose that $u : \mathscr{T}'^\times \longrightarrow \mathscr{T}^\times$ is a morphism of log formal schemes over $\mathscr{S}^\times$ such that $u \circ \iota' = \iota$. Let $\mathscr{T}'_{/Z}, \mathscr{T}_{/Z}$ denote the completions of $\mathscr{T}'$ respectively $\mathscr{T}$ along Z and let $]Z^\times[_{T'} := (\mathscr{T}'_{/Z})^{\mathrm{rig}},]Z^\times[_T := (\mathscr{T}_{/Z})^{\mathrm{rig}}$ denote the tubes of $Z^\times$ relative to $T'^\times$ and T respectively. We denote by $\omega^1_{]Z^\times[_{T'}}$ the sheaf on $]Z^\times[_{T'}$ given by: $\Omega^1_{(\mathscr{T}'_{/Z})^\times/\mathscr{S}^\times} \otimes_W K_0$ and similarly for $\omega^1_{]Z^\times[_T}$. Then we have the following log Poincaré lemma.

***Proposition 3.6* (Lemma 2.2.15, [34]).** — *Let $\mathscr{E}$ be an isocrystal (without log structures) on Z. If u is a smooth morphism of log formal schemes then the natural morphism of de Rham complexes*

$$DR(T, \mathscr{E})^\bullet := \mathscr{E}_{\mathscr{T}_{/Z}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{T}_{/Z}}} \omega^\bullet_{]Z^\times[_T} \longrightarrow u_*\big(DR(T', \mathscr{E})^\bullet := \mathscr{E}_{\mathscr{T}_{/Z}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{T}'_{/Z}}} \omega^\bullet_{]Z^\times[_{T'}}\big).$$

is a quasi-isomorphism.

3.1.4. *Weakly Complete Algebras*

3.1.4.1. *Weakly complete liftings.* — In this and the next sections we prove an important generalization of the "weak lifting theorem" (theorem A.1 of [**5**]) and give a geometric interpretation of it (in §3.1.5).

We start with some notations which will be used as such only in this section. Let R be a complete local ring of characteristic $(0,p)$ with maximal ideal $\mathfrak{p}$. If n is a non-negative integer set $R_n := R\langle T_1, T_2, \dots, T_n\rangle$. Fix now k a non-negative integer. For an R_k-algebra A, the *weak completion* $A^\dagger$ of A is the smallest sub-algebra of the $\mathfrak{p}$-adic completion of A which is $\mathfrak{p}$-adically saturated and contains the elements

$$\sum_{(I_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} r_{i_1,\dots,i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n},$$

for any $a_j \in \mathfrak{p}A$, $1 \leq j \leq n$ and $r_{i_1,\dots,i_n} \in R_k$. (When R is discretely valued this is equivalent to the notion of weak completion of A over $(R,\mathfrak{p})$ in [**31**], §1.) The algebra A is weakly complete over R_k if $A = A^\dagger$. Let $A_m := A[x_1, x_2, \dots, x_m]$ and $R_{k,n} = (R_k)_n^\dagger$. A quotient of $R_{k,n}$ for some n by a finitely generated ideal is a *semi-dagger algebra* over R_k, [**10**]. Such algebras are weakly complete. Denote $\overline{A} := A/\mathfrak{p}A$. If $f : A \longrightarrow B$ is a homomorphism of semi-dagger R_k-algebras, we say B is formally smooth over A if $\overline{B}$ is smooth over $\overline{A}$ and

$$\mathrm{Ann}_B(\rho) = \mathrm{Ann}_A(\rho)B,$$

for all $\rho \in R$.

Theorem 3.7. — *Suppose A, B, C and D are flat semi-dagger algebras over R_k and we have a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{array}$$

Suppose, in addition, $C \longrightarrow D$ is surjective, B is formally smooth over A and there exists an R_k-algebra homomorphism $\overline{s} : \overline{B} \longrightarrow \overline{C}$ which commutes with the reduction of the above diagram. Then there exists an R_k-algebra homomorphism $s : B \longrightarrow C$ which lifts $\overline{s}$ and commutes with this diagram.

Sketch of proof. The proof of the less general result Theorem A.1 of [**5**] translates easily. We first outline the proof.

There exists an integer n and $G_1, \dots, G_m \in A_n^\dagger$ so that we can take $B = A_n^\dagger/(G_1, \dots, G_m)$. Let g and $\overline{V}$ be the compositions $A_n^\dagger \longrightarrow B \longrightarrow D$ and $\overline{A}_n \longrightarrow \overline{B} \longrightarrow \overline{C}$ respectively. Let I be the kernel of $C \longrightarrow D$. Let $X := (x_1, \dots, x_n) \in A_n^n$ and $G = (G_1, \dots, G_m)$. First one shows there exists an R_k-algebra homomorphism $V_0 : A_n^\dagger \longrightarrow C$ over R_k which lifts $\overline{V}$ such that $V_0 = g(\mathrm{mod} I)$. Now one shows there

exists an $n \times m$ matrix N an $m \times m$ matrix Q and an m-tuple of $m \times m$ matrices M with coefficients in $A_n^\dagger$ such that

$$G(X + GN) = GMG^t + GQ$$

where G^t is the transpose of G and the coordinates of Q are in $\mathfrak{p}A^\dagger$. Now for a non-negative integer s set

$$V_{s+1} = V_s(X) + G(V_s(X))N(V_s(X)).$$

The V_s converge to the required V as s goes to infinity. The proof of which we now explain:

Lemma 3.8. — *Suppose $f : A \longrightarrow B$ is a surjective map of R_k-semi-dagger algebras. The kernel of f is a finitely generated ideal.*

Proof. — Without loss of generality may suppose that $A = R_{k,a}$ and $B = R_{k,b}/J$, where J is a finitely generated ideal of $R_{k,b}$. Let us denote by $g : R_{k,b} \longrightarrow B$ the natural map (in particular J is the kernel of g) and call the "weak" variables in $R_{k,a}$ and $R_{k,b}$ by $x_1, \ldots, x_a$ and respectively $y_1, \ldots, y_b$. Let $h : R_{k,b} \longrightarrow R_{k,a}$ so that $f(h(x)) = g(x)$, $h(y_i) \in f^{-1}(g(y_i)), 1 \leq i \leq b$. Let $x'i \in g^{-1}(f(x_i))$. The kernel of f is generated by $h(J)$ and the finite set $\{x_i - h(x_i')\}_{i=1,a}$. □

In the notations of Theorem 3.7, because B is formally smooth over A, we may write $B = A_n^\dagger/(G_1, \ldots, G_m)$. Let g and $\overline{V}$ be the compositions $A_n^\dagger \longrightarrow B \longrightarrow D$ and $\overline{A}_n \longrightarrow \overline{B} \xrightarrow{\overline{s}} \overline{C}$ respectively. Let I be the kernel of the homomorphism $C \longrightarrow D$ and let $X = (x_1, \ldots, x_n) \in A_n^n$.

Lemma 3.9. — *There exists $V_0 : A_n^\dagger \longrightarrow C$ over R_k which lifts $\overline{V}$ such that $V_0 = g(\mathrm{mod} I)$.*

Proof. — Let $g'(X)$ be an element of C^n such that

$$g'(X) = g(X)\mathrm{mod} I$$

and define a homomorphism $V' : A_n^\dagger \longrightarrow C$ in the natural way. Similarly there is a homomorphism $V' : A_n^\dagger \longrightarrow C$ which lifts $\overline{V}$,

$$V' = g'\mathrm{mod}(\mathfrak{p}, I)C^n.$$

We can write

$$V'(X) - g'(X) = a - b,$$

where $a \in \mathfrak{p}C^n$ and $b \in IC^n$. Let $V_0 : A_n^\dagger \longrightarrow C$ such that $V_0(X) = V'(X) - a$. □

Let $G = (G_1, \ldots, G_m)$ and $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Formal smoothness implies

Lemma 3.10. — *There exists a $n \times m$ matrix N an $m \times m$ matrix Q and an m-tuple of $m \times m$-matrices M over $A_n^\dagger$ such that*

$$G(X + GN) = GMG^t + GQ$$

where G^t is the transpose of G and the coordinates of Q are in $\mathfrak{p}A_n^\dagger$. Here we think of each G as a row vector of functions of X and by the notation $G(X+GN)$ we mean the composition of functions .

For an integer $s \geq 0$ set

$$V_{s+1}(X) := V_s(X) + G(V_s(X))N(V_s(X).$$

Suppose $Q, V_0(G) = 0 \mathrm{mod} q$, for $q \in \mathfrak{p}R$. Then for $s \geq 1$,

$$V_{s+1}(X) - V_s(X) = ((GMG^t + GQ)(V_{s-1}(X)))N(V_s(X)) = 0 \bmod q^{s+1}.$$

This is enough to show that the sequence V_s converges p-adically. We will now give some idea about why it "weakly converges".

If $r \in p^{\mathbb{Q}}$, $r > 1$, let $R_{k,n}(r)$ denote the sub-ring of $R_{k,n}$ consisting of series which converge on $B_k[1] \times B_n[r]$. If $f : R_{k,n} \longrightarrow A$ is a surjection and $r > 1$, let $A(f,r)$ denote the subring $f(R_{k,n}(r))$ and for $F \in A(f,r)$ set

$$||F||_{f,r} = \max\{||G||_r \mid G \in R_{k,n}(r), f(G) = F\}.$$

Choose once and for all surjective homomorphisms

$$R_{k,a} \longrightarrow A, \text{ and } R_{k,b} \longrightarrow C.$$

Let $R_{k,a+n} \longrightarrow A_n^\dagger$ be the induced surjection. If $e : R_{k,c} \longrightarrow E$ is one of these homomorphisms, let

$$E(r) = E(e,r) \text{ and } ||\ ||_r = ||\ ||_{e,r}.$$

We can show there exist real numbers $u > 1, d > 0$, and $L < 1$ such that for $1 \leq t \leq u$ the entries of N and G lie in $A_n^\dagger(u)$ and

(i) $V_s(A_n^\dagger(t^d)) \subset C(t)$,
(ii) $||V_s(X) - V_0(X)||_t < 1$,
(iii) $||G(V_s(X))||_t \leq L^s ||G(V_0(X))||_t$,
(iv) $L \geq ||N(V_s(X))||_t ||G(V_0(X))||_t$,
(v) $V_s = V_0 (\mathrm{mod} I)$.

Now, (iii) and (iv) imply the sequences $V_s|_{A_n^\dagger(t^d)}$ converge to continuous homomorphisms $V_t : A_n^\dagger(t^d) \longrightarrow C(t)$, for $1 \leq t \leq u$, compatible with decreasing t. Let $V : A_n^\dagger \longrightarrow C$ be the direct limit of these V_t. Condition (ii) implies that V lifts $\overline{V}$, (iii) implies $G(V(X)) = 0$, so V factors through a a morphism $B \longrightarrow C$ which lifts $\overline{B} \longrightarrow \overline{C}$ and finally (v) implies this morphism commutes with the diagram.

Remark 3.11. — *A statement needed to prove (iv) which is analogous to a result used but not stated explicitly in* **[5]** *is, with notation as in the proof of lemma A-8 of* **[5]**,

$$||h(F)||_{g,t} \leq ||F||_{f,t^d}.$$

Corollary 3.12. — *Suppose R is discretely valued and B is a flat, formally smooth semi-dagger algebra over R_k. Then B is very smooth over $(R_k, \mathfrak{p}R_k)$ in the sense of* **[31]**, *Definition 2.5.*

Corollary 3.13. — *Suppose R is discretely valued and B and C are flat R_k semi-dagger algebras, formally smooth over R_k and there exists an R_k-algebra isomorphism $\overline{s} : \overline{B} \longrightarrow \overline{C}$. Then there exists an R_k-algebra isomorphism $s : B \longrightarrow C$ lifting $\overline{s}$.*

Proof. — This follows from the previous corollary and the proof of Theorem 3.3 of **[31]**. □

3.1.4.2. *Weak completions.* — Let the notations be as in §3.1.4.1. In this section, given a finitely generated R_k-algebra A, we give a geometric interpretation of the ring $A^\dagger \otimes_R K$, which will be used later in the article.

Suppose R is discretely valued.

Proposition 3.14. — *Let A be a finitely generated flat R_k-algebra. Set $\overline{A} = A/\mathfrak{p}A$, $\hat{A} = \lim\limits_{\leftarrow,n} A/\mathfrak{p}^n A$, $U = \mathrm{Spec}(A)$, $\hat{U} = \mathrm{Spf}(\hat{A})$ and $\overline{U} = \mathrm{Spec}(\overline{A})$. Let $g : U \longrightarrow X$ be an open immersion of U into a scheme X proper and flat over R_k. Let $\hat{X}$ be the formal completion of X along its special fiber and $\hat{U}_K =]\overline{U}[_{\hat{X}}$. Then $A^\dagger \otimes_R K \cong \lim\limits_{\rightarrow,V} A(V)$, where V ranges over all affinoid strict neighborhoods of $\hat{U}_K$ in $\hat{X}_K$ and $A(V)$ denotes the affinoid algebra of V.*

Proof. — Let Z be the complement of U in X with the reduced closed sub-scheme structure and let $\overline{Z}$ be its reduction modulo $\mathfrak{p}$. Let π be a uniformizer of R. Suppose $\{W_i\}_i$ is an affine cover of $\overline{X}$ and suppose that $f_{i1}, \ldots, f_{in_i} \in \mathscr{O}_{\hat{X}_K}(]W_i[)$ are such that $\overline{f}_{i1}, \ldots, \overline{f}_{in_i}$ generate the ideal in $\mathscr{O}_{W_i}$ defining $\overline{Z} \cap W_i$. For $\lambda \in p^{\mathbb{Q}}$, $|\lambda| \geq |\pi|$, let V_λ be the union over all i of

$$\{x \in]W_i[\text{ there exists } j, 1 \leq j \leq n_i \text{ such that } |f_j(x)| \geq \lambda\}.$$

As in **[1]** §1.2, the V_λ's are independent of the choices and form a co-final system of strict neighborhoods of $\hat{U}_K$ in X_K^{rig}. Then we see that V_λ is contained in $U_K^{\mathrm{rig}} (\subset X_K^{\mathrm{rig}})$. This implies that the inductive limit we consider does not depend on the choice of the embedding $U \longrightarrow X$. Choose a presentation $A = R_k[T_1, \ldots, T_n]/I$, which gives a closed immersion $U \longrightarrow \mathbb{A}^n_{R_k}$ and let X be the closure of U in $\mathbb{P}^n_{R_k}$. Then we see that $A(V_\lambda)$ is isomorphic to $(R_k\langle T_1, \ldots, T_n\rangle_\lambda / I) \otimes_R K$, where $R_k\langle T_1, \ldots, T_n\rangle_\lambda$ denotes the ring of power series over R_k converging on the closed disk $\{(y, x) \in \overline{K}^{k+n} \mid |y| \leq 1, |x| \leq 1/\lambda\}$. Hence its inductive limit coincides with $(R_k[T_1, \ldots, T_n]^\dagger / I) \otimes_R K \cong A^\dagger \otimes_R K$. □

Remark 3.15. — *It is possible to improve this result. If $Z \subset X$ are affinoids, set $|g|_Z = \sup\{|g(x)| \quad : \quad x \in Z\}$ and*

$$A_Z(X) = \{f \in A(X) \quad : |f|_Z \leq 1\}.$$

Then we can show, in the above notation, $A^\dagger \cong \lim\limits_{\rightarrow,V} A_{\hat{U}_K}(V)$, where as before V ranges over all strict affinoid neighborhoods of $\hat{U}_K$ in $\hat{X}_K$ if $\overline{A}, A$ are normal, X is reduced and $\overline{U}$ is irreducible.

3.2. The geometry of the family. — Let us resume the notations of the introduction. We'll briefly recall from [**17**] how the family of curves $X \longrightarrow S$ in Section 2 is constructed. In this section we assume that P is empty.

As C is regular, $\overline{C}$ is a reduced divisor with simple normal crossings and each singular point is k-rational we may find a deformation of $\overline{C}$, $\mathfrak{X} \to \mathscr{S} := \mathrm{Spf}(W[[t]])$ with the following properties

- $\mathfrak{X}$ is defined over W
- the curve C is the base change of $\mathfrak{X}$ by the map $W[[t]] \to V$ sending t to π.
- Zariski locally $\mathfrak{X}$ is smooth over $W[[t]]$ or isomorphic to $W[[t]]\langle x, z\rangle/(xz - t)$.

Let $X := \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \longrightarrow S := \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$ as defined in Section 3.1. In this particular case the general construction gives the following. Let $\mathscr{R}_0 := W[[t]]$ and for each integer $n \geq 1$ let $\mathscr{R}_n := W[[t]]\langle T\rangle/(t^n - pT)$; it turns out that R_n is the p-adic completion of $W[t, T]/(t^n - pT)$ and that we have natural maps

- $\mathscr{R}_n \to V$ defined by $t \to \pi, T \to \pi^n/p$ for all $n >[K : K_0]$

and

- $\mathscr{R}_{n+1} \to \mathscr{R}_n$ over $W[[t]]$ defined by $T \to tT$. Denote by $\mathfrak{X}_n$, $\mathfrak{X}_0 \times_{\mathrm{Spf}\mathscr{R}_0} \mathrm{Spf}\mathscr{R}_n$.

Let, for $n \geq 1$, X_n and S_n denote the generic fibers of the p-adic formal schemes $\mathfrak{X}_n$ and $\mathrm{Spf}(\mathscr{R}_n)$ and let

$$X := \varinjlim_{\to,n} X_n \text{ and } S := \varinjlim_{\to,n} S_n$$

The rest of this section will be devoted to understanding the rigid analytic structure of the family X/S. As $S_n := \mathrm{Spm}(\mathscr{R}_n \otimes K_0)$ is defined by $|t| \leq |p|^{1/n}$, it follows that S_n is the affinoid disk centered at 0 of radius $|p|^{1/n}$ and therefore S is isomorphic to the open disk of radius 1 centered at 0.

In [**7**] (see also [**9**]) a one-dimensional wide open was defined to be a rigid space which is isomorphic to the complement in a proper curve of a "discoid subdomain." We now define a wide open, in general, to be the rigid space associated to a complete, flat, topologically finitely generated, semi-local ring over W (or over V) (see §7 of [**25**]). Residue classes of affinoids are wide opens. One can show ([**11**]) that such spaces have a finite number of irreducible components. We suspect, when they are smooth, that they have finite dimensional de Rham cohomology.

First, as $\mathfrak{X}$ is a deformation of $\overline{C}$, the ideal $t\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} + p\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ of $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ is an ideal of definition for this formal scheme and the closed sub-scheme of $\mathfrak{X}$ defined by this ideal is isomorphic to $\overline{C}$ as schemes over k. Therefore, by Section 3.1 we have a reduction map $\mathrm{red}\colon X \to \overline{C}$, and we define the covering of X:

$$\mathscr{C} := \{\mathrm{red}^{-1}Z \colon Z \text{ is an irreducible component of } \overline{C}\}.$$

This is an admissible open cover of X. If v is an irreducible component of $\overline{C}$, we denote by $U_v \in \mathscr{C}$ the corresponding open and if e is a singular point of $\overline{C}$ we let $A_e = \mathrm{red}^{-1}(e)$. We'll see in Section 3.5 an interpretation of these notions in terms of graphs.

Moreover, if $s \in S^*$, then the restriction (i.e. base change) of $\mathscr{C}$ to the fiber X_s is an admissible covering $\mathscr{C}_s$ of X_s described in Section 2.2 for $s = \pi$. For every v irreducible component of $\overline{C}$ let us denote by

$$Z_v := U_v - \bigcup_{\substack{w \\ w \neq v}} U_w.$$

Then Z_v is a rigid space over S such that all of its fibers are affinoids for all v. Let e be a fixed singular point of $\overline{C}$. Then we have

Lemma 3.16. — *There are functions x_e and $x_{\tau(e)}$ on $A_e = A_{\tau(e)}$ such that $x_e x_{\tau(e)} = t$, $|x_e(u)| \to 1$ as u approaches $Z_{a(e)}$. Moreover, the map $\alpha \to (x_e(\alpha), x_{\tau(e)}(\alpha))$ maps A_e isomorphically to the open unit ball in $\mathbb{A}^2_{K_0}$, i.e. the rigid subspace of $\mathbb{A}^2_{K_0}$ defined by*

$$\{(x,z)\colon |x| < 1 \text{ and } |z| < 1\}.$$

Proof. — This follows easily from the fact that the singularities of X/S are given by local equations of the form $xz = t$. □

Let us recall that Y is the fiber of X/S above $0 \in S$. Let L be a finite, non-trivial, totally ramified extension of K_0 and π_L a uniformizer of L. Let also $\mathscr{B} := \mathrm{Spf}(\mathscr{O}_L\langle y\rangle)$ denote the formal scheme whose generic fiber is the closed disk centered at 0 of radius $|\pi_L|$. If $n > [L : K_0]$ we have a natural morphism $\phi : \mathscr{B} \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathscr{R}_n) \longrightarrow \mathscr{S}$ induced by the morphisms $\mathscr{R}_0 \longrightarrow \mathscr{R}_n \longrightarrow \mathscr{O}_L\langle y\rangle$ given by $t \to \pi_L y$ and $T \to (\pi_L^n/p)y^n$, whose generic fiber induces $B := B_L \subset S$. We denote by $\mathfrak{X}_{\mathscr{B}} := \mathfrak{X}_n \times_{\mathrm{Spf}(\mathscr{R}_n)} \mathscr{B}$, which is independent of $n > [L : K_0]$. Let us remark that by **[25]** 7.2.4, we have $(\mathfrak{X}_{\mathscr{B}})^{\mathrm{rig}} = X \times_S B$ which will be denoted X_B.

Lemma 3.17. — *In the notations above there is a natural isomorphism*

$$\xi_L : \overline{C} \times \mathbb{A}^1_k \longrightarrow (\mathfrak{X}_{\mathscr{B}})_1 \quad \text{as schemes over } \mathbb{A}^1_k$$

where let us recall, k is the residue field of K and if Z is a formal scheme over $\mathscr{O}_L$, Z_1 denotes the closed formal sub-scheme of Z of ideal $\pi_L \mathscr{O}_Z$.

Proof. — The special fiber of the map ϕ defined above, $\phi_1\colon \mathscr{B}_1 = \mathbb{A}^1_k \longrightarrow \mathscr{S}_1 = \mathrm{Spf}(k[[t]])$ is the constant map, induced by the map sending t to 0.

Then $(\mathfrak{X}_{\mathscr{B}})_1 = (\mathscr{Y})_1 \times \mathbb{A}^1_k = \overline{C} \times \mathbb{A}^1_k$, where let us recall $\mathscr{Y}$ is the fiber at 0 of $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathscr{S}$. □

Proposition 3.18. — *Let L, π_L, $\mathscr{B}$, B be as in Lemma 3.17. Then, for every vertex v of G there is an admissible wide-open strict neighborhood W_v of $Z_{v,B} := Z_v \times_S B$ in $U_{v,B} := U_v \times_S B$, and for every $s \in B$ an isomorphism*

$$\alpha_{v,s} := \alpha_{L,v,s}\colon W_{v,s} \times B \cong W_v \quad \text{over} \quad B,$$

lifting the isomorphism

$$\xi_L : \overline{C}^0_v \times \mathbb{A}^1_k \cong (Z_v)_1$$

given by Lemma 3.17. We have denoted by $W_{v,s}$ the fiber of W_v at s and by $\overline{C}_v^0$ the complement of singular points of $\overline{C}$ in the component $\overline{C}_v$ corresponding to v.

Proof. — Let $\mathscr{Z}_{\mathscr{B},v}$ denote the formal model of $Z_{B,v}$ in $\mathfrak{X}_{\mathscr{B}}$, which is the formal spectrum of the ring of integral valued rigid functions on $Z_{B,v}$. As the special fiber of $Z_{v,B}$ with respect to the ideal generated by (t,π_L) is the affine scheme $\overline{C}_v^0$ of finite type over k, $Z_{v,B}$ is an affinoid over B. By Lemma 3.17 we have $(\mathscr{Z}_{\mathscr{B},v})_1 \cong \overline{C}_v^0 \times \mathbb{A}^1_k$. We also have an isomorphism $\beta_{v,s} : (\mathscr{Z}_{v,s}\times\mathscr{B})_1 \cong \overline{C}_v^0 \times \mathbb{A}^1_k$, where $\mathscr{Z}_{v,s}$ is the fiber of $\mathscr{Z}_{\mathscr{B},v}$ at $s \in B$. Now using Theorem 3.7 the isomorphism between $(\mathscr{Z}_{\mathscr{B},v})_1$ and $(\mathscr{Z}_{v,s}\times\mathscr{B})_1$ lifts to an isomorphism over B of $\mathscr{Z}^{\dagger}_{\mathscr{B},v}$ and $(\mathscr{Z}_{v,s}\times\mathscr{B})^{\dagger}$. From Proposition 3.14 and Theorem 3.3 of **[31]** we deduce $\beta_{v,s}$ lifts to an isomorphism over B of strict affinoid neighborhoods T of $Z_{B,v}$ in $U_{B,v}$ and $T_s\times B$ of $Z_{v,s}\times B$ in $U_{v,s}\times B$, over B, where T_s denotes as usual the fiber of T at s. By Lemma 3.1, T_s has a canonical, p-adic formal model $\mathscr{T}_s$ over $\mathscr{O}_F$ (F being the residue field of s) with a morphism $\mathscr{T}_s \longrightarrow \mathfrak{X}_s$ which induces the inclusion $T_s \subset U_{v,s} \subset X_s$. This morphism induces a morphism between the special fiber $\overline{T}$ of $\mathscr{T}_s$ and $\overline{C}$. (In fact this morphism identifies $\overline{T}$ with a certain blow-up of the component $\overline{C}_v$ of $\overline{C}$ corresponding to v.) Let $\overline{T}_v$ denote the component of $\overline{T}$ isomorphic to $\overline{C}_v$ under this morphism.

Now, let $\mathscr{T} := \mathscr{T}_s\hat{\times}\mathscr{B}$, then $\mathscr{T}^{\mathrm{rig}} \cong T_s\times B \cong T$. We define W_v to be the inverse image under the reduction $T \xrightarrow{\mathrm{red}} \overline{T}$ of the component $\overline{T}_v$ of $\overline{T}$, i.e. $W_v :=]\overline{T}_v[_{\mathscr{T}}$. Similarly, let $W_{v,s}$ be the inverse image under the reduction $T_s \xrightarrow{\mathrm{red}} \overline{T}$ of $\overline{T}_v$, i.e. $W_{v,s} :=]\overline{T}_v[_{\mathscr{T}_s}$. Then both W_v and $W_{v,s}\times B$ are wide open spaces over B containing $Z_{v,B}$ and contained in $T \subset U_{v,B}$, respectively $T_s\times B \subset U_{v,s}\times B$, which are isomorphic under the restriction of the above isomorphism between T and $T_s\times B$. □

We have the following very easy consequence of the proof of Proposition 3.18, which we record for later use.

Lemma 3.19. — *There are canonical, isomorphic formal models $\mathscr{W}_v, \mathscr{W}_{v,s}\times\mathscr{B}$ of the wide opens W_v, $W_{v,s}\times B$ in Proposition 3.18, which are wide open enlargements of $\overline{C}_v$ (and so of $\overline{C}$). Moreover, there is a (non canonical) morphism of formal schemes $\mathscr{W}_v \longrightarrow \mathfrak{X}_{\mathscr{B}}$ over $\mathscr{B}$ whose generic fiber is the inclusion $W_v \subset X_B$ and whose special fiber is the morphism $\overline{C}_v \subset \overline{C}$.*

Proof. — Let us consider the formal scheme $\mathscr{W}_v := \mathscr{T}_{/\overline{T}_v}$ i.e. the formal completion of the formal scheme $\mathscr{T}$ defined in the proof of Proposition 3.18 along the closed sub-scheme $\overline{T}_v$. Then $\mathscr{W}_v^{\mathrm{rig}} \cong W_v$ as rigid spaces over B. Let us remark that $\mathscr{W}_v \cong \mathscr{W}_{v,s}\times\mathscr{B}$, where $\mathscr{W}_{v,s} := \mathscr{T}_{s/\overline{T}_v}$ is the formal completion of $\mathscr{T}_s$ along $\overline{T}_v$. The composition $\overline{T}_v \cong \overline{C}_v \longrightarrow \overline{C}$ makes the formal schemes $\mathscr{W}_v$ and $\mathscr{W}_{v,s}$ wide open enlargements of $\overline{C}_v$ and of $\overline{C}$ such that $\mathscr{W}_v \cong \mathscr{W}_{v,s}\times\mathscr{B}$ as formal schemes over $\mathscr{B}$. □

Remark 3.20. — *In the notations of Proposition 3.18 where now $s = 0$, the following diagram commutes*

$$\begin{array}{ccccc} W_v & \longrightarrow & X_B & \overset{\mathrm{mod}\pi_L}{\longrightarrow} & \overline{C} \times \mathbb{A}^1_k \\ \beta \downarrow & & & & \downarrow \\ W_{v,0} & \longrightarrow & Y_L & \overset{\mathrm{mod}\pi_L}{\longrightarrow} & \overline{C}. \end{array}$$

Proof. — The commutativity of the diagram follows from the fact that if we denote by $\iota_0 : Y_L \longrightarrow X_B$ the map induced by the the embedding of Y into X as its fiber at 0, the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} X_B & \longrightarrow & \overline{C} \times \mathbb{A}^1_k \\ \iota_0 \uparrow & & \downarrow \\ Y_L & \longrightarrow & \overline{C}. \end{array}$$

□

Remark 3.21. — *Let B be as in Proposition 3.18. Then we have,*

$$\mathbb{H}_B \cong H^1_{dR}(X_B/B, (\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}|_{X_B})(\log Y)).$$

3.3. Isocrystals. — Our main references for F-isocrystals are **[32]**, **[17]**, **[16]**, **[1]** and **[34]**. Let us briefly recall the definitions, in the cases in which we need them. Suppose that Z is a scheme over k and fix L a finite, totally ramified (possibly trivial) extension of K_0 and let $\mathscr{O}_L$ denote its ring of integers. Let us recall that if $L = K_0$, $\mathscr{O}_L = W$ and if $L = K$ then $\mathscr{O}_L = V$.

We begin by recalling the category of $\mathscr{O}_L$-enlargements of Z, on which the F-isocrystals take their values. First if $\mathscr{T}$ is a p-adic formal scheme over $\mathscr{O}_L$ we denote by $\mathscr{T}_0$ the reduced closed sub-scheme of the closed sub-scheme of $\mathscr{T}$ defined by the ideal $p\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$.

Definition 3.22. — *A* $\mathscr{O}_L$-enlargement *of Z is a pair $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ consisting of a flat p-adic formal $\mathscr{O}_L$-scheme $\mathscr{T}$ (i.e., each open affine is isomorphic to $SpfR$ where R is a quotient of $\mathscr{O}_L\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ for some n) together with a $\mathscr{O}_L$-morphism $z_{\mathscr{T}} \colon \mathscr{T}_0 \longrightarrow Z$. A morphism of $\mathscr{O}_L$-enlargements $(\mathscr{T}', z_{\mathscr{T}'}) \longrightarrow (\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ is an $\mathscr{O}_L$-morphism $g \colon \mathscr{T}' \longrightarrow \mathscr{T}$ such that $z_{\mathscr{T}} \circ g_0 = z_{\mathscr{T}'}$.*

Let, more generally, $\mathscr{T}$ be a locally noethering formal scheme over $\mathscr{O}_L$. We denote by $\mathscr{T}_0$ the reduced sub-scheme of the closed sub-scheme defined by an ideal of definition of $\mathscr{T}$. Let as above Z be a scheme over k.

Definition 3.23. — *By a* **wide open $\mathscr{O}_L$-enlargement** *of Z, we mean a pair $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ where $\mathscr{T}$ is a formal scheme such that the affine open sets are isomorphic to $SpfR$ where R is a quotient of $\mathscr{O}_L\langle X_1, \ldots, X_m\rangle[[V_1, \ldots, V_n]]$ for some m and n and z_Y : $\mathscr{T}_0 \longrightarrow Z$ is a morphism of $\mathscr{O}_L$-schemes. The morphism of wide open enlargements is defined as in Definition 3.22.*

As in Section 3.1 one can attach a rigid analytic space over L, $\mathscr{T}^{\mathrm{rig}}$, to a formal $\mathscr{O}_L$-scheme as in the Definition 3.23. It satisfies the following universal property: if $\mathscr{T}$ is an affine formal scheme, say $\mathscr{T} = \mathrm{Spf}\, R$, there is a unique pair $(\iota_{\mathscr{T}}, \mathscr{T}^{\mathrm{rig}})$ which is the final element in the category of pairs (h, X) where X is rigid space over $\mathscr{O}_L$ and h is a continuous $\mathscr{O}_L$-homomorphism from R into $H^0(X, \mathscr{O}_X)$. A morphism in this category $(X, h) \to (Y, g)$ is a morphism $f\colon X \to Y$ such that $h = f^* \circ g$. See Proposition 0.2.3 of [**1**] for a discussion of this when $n = 0$. The tubes of Berthelot (see ibid.) are examples of these spaces.

Examples i) Let $\mathfrak{X}, \mathscr{S}, \mathfrak{X}_n$ be as in Section 3.2. Fix $n \geq 1$. As t generates the nilradical of $\mathscr{R}_n/p\mathscr{R}_n$, we have that $(\mathfrak{X}_n)_0$ is the closed sub-scheme of $\mathfrak{X}_n$ defined by the ideal generated by p and t. As a consequence we have a natural W-morphism $z_n\colon (\mathfrak{X}_n)_0 \longrightarrow \overline{C}$. Therefore the pairs $(\mathfrak{X}_n, z_n)$ are W-enlargements of $\overline{C}$ for all $n \geq 1$ and the morphisms $\mathfrak{X}_{n+1} \longrightarrow \mathfrak{X}_n$ induce morphisms of W-enlargements of $\overline{C}$.

ii) On the other hand $(\mathscr{S}, z_{\mathscr{S}})$ is a wide open enlargement of $\mathrm{Spec}(k)$, where $z_{\mathscr{S}} : \mathscr{S}_0 = \mathrm{Spec}(W[[t]]/tW[[t]]) \cong \mathrm{Spec}(k)$.

iii) As π generates the nilradical of V/pV, C_0 is the closed sub-scheme of C corresponding to the ideal $\pi\mathscr{O}_C$. As a consequence we have a natural isomorphism $z_C\colon C_0 \cong \overline{C}$, which makes (C, z_C) into a W-enlargement of $\overline{C}$.

iv) We can make the fibered product of two wide open enlargements $(\mathscr{S}, s)$ and $(\mathscr{T}, t)$ of Z, $\mathscr{S} \hat{\times} \mathscr{T}$. It equals (U, u) where U is the completion of $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ along $(s, t)^*\Delta(Z)$ and u is the composition

$$U_0 = (s, t)^*\Delta(Z) \to \mathscr{S}_0 \times \mathscr{T}_0 \xrightarrow{\pi_1} S_0 \xrightarrow{s} Z.$$

The existence of this fibered product is the main reason we consider wide open enlargements.

Definition 3.24. — *An* isocrystal $\mathscr{E}$ *on* $Z/\mathscr{O}_L$ *is the following set of data:*

(i) For every $\mathscr{O}_L$*-enlargement* $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ *of* Z *a coherent sheaf of* $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathscr{T}}$*-modules* $\mathscr{E}_{(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})}$*. In general and if there is no ambiguity this module will be denoted by* $\mathscr{E}_{\mathscr{T}}$*.*

(ii) For every $\mathscr{O}_L$*-morphism of enlargements of* Z*,* $g\colon (\mathscr{T}', z_{\mathscr{T}'}) \longrightarrow (\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ *an isomorphism of* $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_{\mathscr{T}}$*-modules:* $\theta_g\colon g^*\mathscr{E}_{\mathscr{T}} \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathscr{T}'}$*. The collection of isomorphisms* $\{\theta_g\}$ *is required to satisfy the cocycle condition.*

A morphism of isocrystals $\alpha\colon \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}$ *is a collection of homomorphisms* $\alpha_{\mathscr{T}}\colon \mathscr{E}'_{\mathscr{T}} \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathscr{T}}$ *compatible with the isomorphisms* θ_g*, for all* g*.*

For example, there is a natural isocrystal on Z/W denoted $\mathscr{O}_{Z/K_0}$ whose value on an enlargement $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ is $\mathscr{O}_{\mathscr{T}} \otimes_W K_0$. We call a direct sum of such isocrystals a *free isocrystal* on Z/W. Because every enlargement of $\mathrm{Spec}\, k$ factors through $\mathrm{Spf} W$, every isocrystal on a point is free.

Because the rigid space attached to a wide open enlargement may be admissibly covered by the rigid spaces attached to enlargements, the cocycle condition allows us to evaluate an isocrystal on a wide open enlargements $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ to get a coherent

sheaf $\mathscr{E}_{(\mathscr{T},z_{\mathscr{T}})}$ on $\mathscr{T}^{\mathrm{rig}}$. (See Remark 2.3.4 of [**1**] for a discussion of this in the case of tubes.)

We'll now define F-isocrystals.

Definition 3.25. — *An* F-isocrystal *on Z/W is an isocrystal $\mathscr{E}$ on Z/W together with an isomorphism of isocrystals $F\colon \overline{F}^*\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$.*

Let us recall what $\overline{F}^*$ means (see [**32**]). First we will recall a familiar notation, if $M \longrightarrow \mathrm{Spf}(W)$ is a formal scheme and $\tau\colon W \longrightarrow W$ is an automorphism we define $\alpha(\tau)\colon M^\tau \longrightarrow M$ by the Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} M^\tau & \xrightarrow{\alpha(\tau)} & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spf}(W) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Spf}(W). \end{array}$$

where we also use τ to denote the corresponding endomorphism of $\operatorname{Spec} W$. If $f : M \longrightarrow M'$ is a morphism of formal schemes over $\mathrm{Spf}(W)$ we also define $f^\tau : M^\tau \longrightarrow (M')^\tau$ by functoriality.

Let now $\sigma : W \longrightarrow W$ be the Frobenius automorphism and $\overline{F} : Z \longrightarrow Z^\sigma$ be the absolute Frobenius. For every enlargement $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ of Z, $(\mathscr{T}, \overline{F}\circ z_{\mathscr{T}})$ is an enlargement of Z^σ and $(\mathscr{T}^{\sigma^{-1}}, (\overline{F} \circ z_{\mathscr{T}})^{\sigma^{-1}})$ is again an enlargement of Z. Then $\overline{F}^*(\mathscr{E})$ is the isocrystal on Z whose value on $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ is $\alpha(\sigma)_*\mathscr{E}_{(\mathscr{T}^{\sigma^{-1}},(\overline{F}\circ z_{\mathscr{T}})^{\sigma^{-1}})}$.

Remark 3.26. — (a) *Clearly the map of sections, $a\otimes\alpha \to a\alpha^\sigma$, defines an F-isocrystal structure on $\mathscr{O}_{Z/K_0}$.*

(b) *If $f\colon U \to Z$ is a morphism of schemes over k and $\mathscr{E}$ is an F-isocrystal on Z/W, there is a natural F-isocrystal on U/W, $f^*\mathscr{E}$, whose value on an enlargement $(\mathscr{T}, z_{\mathscr{T}})$ is $\mathscr{E}_{(\mathscr{T}, f\circ z_{\mathscr{T}})}$.*

(c) *In* [**32**] *and* [**17**] *the object defined in Definition 5.4 is called "convergent isocrystal" and the object defined in Definition 3.25 is called "convergent F-isocrystal".*

(d) *In Section 2.1 we have used a filtered F-isocrystal $\mathscr{E}$ on Z. As we don't need to prove anything about the filtration in this paper we will not define this notion here. For the appropriate definition see* [**17**] *or* [**24**].

(e) *Let $\mathscr{E}$ be an F-isocrystal on $\overline{C}/W$. For each $n \geq 0$, $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}_n}$ can be seen as a sheaf on the nilpotent site of $\mathfrak{X}_n$, or what is the same thing, as a $K_0 \otimes_W \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module with an integrable, convergent connection D_n. The F-structure gives, for each open affine formal sub-scheme $\mathfrak{U}$ of $\mathfrak{X}_n$ with a lift of Frobenius $\phi_{\mathfrak{U}}$, a horizontal Frobenius $\Phi_n(\phi_{\mathfrak{U}})\colon \phi^*D_n \to D_n$ on $\mathfrak{U}^{\mathrm{rig}}$. Moreover the morphisms of W-enlargements $(\mathfrak{X}_{n+1}, z_{n+1}) \longrightarrow (\mathfrak{X}_n, z_n)$ induce isomorphisms $\theta_n\colon (\mathscr{E}_{\mathfrak{X}_{n+1}}, D_{n+1}) \cong (\mathscr{E}_n, D_n)$, therefore we obtain in the limit a coherent sheaf of $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$, together with an integrable connection $D_{X/K_0}\colon \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes \Omega^1_{X/K_0}$, which is compatible with Frobenii associated to local lifts of Frobenius. We will denote by the same symbol the composition*

$$\mathrm{D}_{X/K_0}\colon \mathscr{E}_X \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes \Omega^1_{X/K_0} \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes \Omega^1_{X/K_0}(\log Y).$$

We also get a relative connection by composing

$$\mathrm{D}_{X/S}\colon \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \overset{\mathrm{D}_{X/K_0}}{\longrightarrow} \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes \Omega^1_{X/K_0}(\log Y) \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log Y).$$

If $\mathscr{E} = \mathscr{O}_{Z/K_0}$, we will denote D_{X/K_0} and $\mathrm{D}_{X/S}$ by d_{X/K_0} and $\mathrm{d}_{X/S}$ respectively.

(f) *$\mathscr{E}_C$, by the same arguments as above can be thought of as a coherent sheaf of $\mathscr{O}_{C_K}$-modules with a convergent, in the sense of* **[32]**, *integrable connection D. Moreover, the closed immersion $g\colon C \longrightarrow \mathfrak{X}$ identifying C with the fiber at π of $\mathfrak{X}$ and which is a morphism of enlargements, induces an isomorphism $\theta_g\colon g^*\mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \cong \mathscr{E}_C$. 2.2.)*

Because every isocrystal on a point is free we have,

Proposition 3.27. — *Let $\mathscr{E}$ be an isocrystal on $\overline{C}$. Then $(\mathscr{E}_X, \mathrm{D}_{X/K_0})$ has the property that for every residue class $M = \mathrm{red}_{\mathfrak{X}}^{-1}(x)$, with $x \in \overline{C}$, of X, the $\mathscr{O}_M$-module with connection $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_M, \mathrm{D}_{X/K_0})$ has a basis of horizontal sections.*

Lemma 2.2 of Section 2.2 follows.

3.4. Cohomology of an F-isocrystal. — We will recall here some constructions from **[1]** and **[34]**,**[35]** and **[36]** which will be used later.

3.4.1. — Let Z be a smooth, proper scheme of finite type over k and $\mathscr{E}$ an isocrystal on Z/W. We will recall the definition of $H^i_{\mathrm{cris}}(Z/W, \mathscr{E})$, for $i \geq 0$.

We choose an affine open covering $\{U_i\}_{1 \leq i \leq s}$ of Z, and for each U_i a closed immersion into a smooth affine formal W-scheme T_i. For each subset J of $\{1, 2, \ldots, s\}$ we denote by T_J the completion of the fiber product of the T_j's for $j \in J$ along $\cap_{j \in J} U_j$. For each J consider the de Rham complex $H^0(T_J^{\mathrm{rig}}, \mathscr{E}_{T_J} \otimes \Omega^{\bullet}_{T_J^{\mathrm{rig}}/K_0})$ and connect them by the Čech differentials to make a double complex. We define $H^i_{\mathrm{cris}}(Z/W, \mathscr{E})$ to be the i-th cohomology group of this double complex. To show that this is independent of the choices of a covering $\{U_i\}_i$ and the formal schemes $\{T_i\}_i$, we take another pair of such $\{U'_k\}_{1 \leq k \leq t}$ and closed immersions of the U'_k into smooth, affine formal W-schemes T'_k. To compare the constructions for the two choices consider the third, $\{U''_{i,k} := U_i \times_Z U'_k\}_{i,k}$ and $T''_{i,k} := T_i \times T'_k$. If, say $J \subset \{1, 2, \ldots, s\}$ and $K \subset \{1, 2, \ldots, t\}$ we have smooth morphisms of formal W-schemes $u : T''_{J \times K} \longrightarrow T_J$ and $v : T''_{J \times K} \longrightarrow T'_K$ and by the Poincaré lemma recorded in Section 3.1, the pairs of de Rham complexes of sheaves $DR(T_J, \mathscr{E})^{\bullet} := \mathscr{E}_{T_J} \otimes \Omega^{\bullet}_{T^{\mathrm{rig}}/K_0}$, and $u_*^{\mathrm{rig}} DR(T''_{J \times K}, \mathscr{E})^{\bullet}$ and $DR(T'_K, \mathscr{E})^{\bullet} := \mathscr{E}_{T'_K} \otimes \Omega^{\bullet}_{(T'_K)^{\mathrm{rig}}/K_0}$ and $v_*^{\mathrm{rig}} DR(T''_{J \times K}, \mathscr{E})^{\bullet}$ are quasi-isomorphic and so finally the cohomology of the double complexes constructed from them are all quasi-isomorphic.

3.4.2. — We will now recall the definition of log crystalline cohomology over a (certain) base. Let $\mathscr{S}^{\times}$ denote the formal scheme $\mathrm{Spf}(W[[t]])$ with the log structure given by the smooth divisor $t = 0$. Let $\mathrm{Spec}(k)^{\times}$ be the scheme $\mathrm{Spec}(k)$ with the inverse image log structure under the map induced by the natural morphism $W[[t]] \longrightarrow k$ sending t to 0. Let $Z^{\times}$ be a fine, log smooth, log proper scheme over $\mathrm{Spec}(k)^{\times}$, which

we'll regard as a log smooth scheme over $\mathscr{S}^\times$. Let $\mathscr{E}$ be an F-isocrystal on Z/W (without log structure). We'll recall the definition of $H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})$. It is a sheaf of $\mathscr{O}_S$-modules on S, where let us recall $S=\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. In fact $H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathrm{Spec}(k)^\times,\mathscr{E})$ is an F-isocrystal on $\mathrm{Spec}(k)$ and $H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})$ is its evaluation on the wide open enlargement $\mathscr{S}$ of $\mathrm{Spec}(k)$.

Let now $\{U_i\}_{1\leq i\leq s}$ be an affine covering of Z such that $U_i^\times$ is a log smooth, fine, log affine scheme over $\mathrm{Spec}(k)^\times$, where the log-structures are the induced ones. For each $1\leq i\leq s$ choose closed $\mathscr{S}^\times$-immersions $U_i^\times\longrightarrow T_i$ into log smooth, fine, log affine formal schemes over $\mathscr{S}^\times$. For each $J\subset\{1,2,\ldots,s\}$ let T_J denote the log-formal scheme which is the log-completion along $U_J:=\cap_{j\in J}U_j^\times$ of the fibered product over $\mathscr{S}^\times$ of the $T_j^\times$'s, $j\in J$. For every admissible affinoid $B\subset S$, let $DR(T_J^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E})^\bullet$ denote the relative (to $S^\times$) log-de Rham complex of sheaves on $T_J^{\mathrm{rig}}\times_S B$ with coefficients in $\mathscr{E}_{T_J}$. We define the log rigid (or analytic) cohomology $H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})$ to be the sheaf on S associated to the pre-sheaf $B\longrightarrow H^i((U_\bullet)_{\mathrm{Zar}},\mathrm{red}_*DR(T_\bullet^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E})^\bullet)$.

It is shown in **[34]** and **[35]** (using Proposition 3.6) that the definition is independent of choices.

Let us now assume that $Z^\times$ has a log smooth, exact global lifting $\mathfrak{X}^\times$ over $\mathscr{S}^\times$ and we write as usually $X:=\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, S:=\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$.

Lemma 3.28. — *We have a natural isomorphism of sheaves on S, $H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})\cong H^i_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})$. Here $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ is the evaluation of $\mathscr{E}$ at the enlargement $\mathfrak{X}$ of Z, seen as a coherent sheaf on $X:=\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ with an integrable connection.*

Proof. — Let $\{U_i\}_{1\leq i\leq s}$ be an affine open covering of Z, let T_i be the open log-formal sub-schemes of $\mathfrak{X}^\times$ whose underlying topological space is the same as U_i. For each $J\subset\{1,2,\ldots,s\}$ define U_J and T_J as above. We also define T'_J to be the open log formal sub-scheme of $\mathfrak{X}^\times$ with underlying topological space U_J. The diagonal induces a log-smooth morphism $\Delta_J:T'_J\longrightarrow T_J$ compatible with the embeddings of U_J and for each admissible affinoid open $B\subset S$, we get quasi-isomorphisms for the relative, log de Rham complexes of sheaves

$$\mathrm{red}_*DR(T_J^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E})\longrightarrow\mathrm{red}_*DR((T'_J)^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E}).$$

The Čech complex of the latter complex computes $H^i_{\mathrm{dR}}(X^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})(B)$, as $H^i_{\mathrm{dR}}(X/S,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})$ is a coherent sheaf and B is affinoid. Therefore the association

$$B\longrightarrow H^i((U_\bullet)_{\mathrm{Zar}},\mathrm{red}_*DR(T_J^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E}))$$

is already a coherent sheaf and we have an isomorphism $H^i_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})\cong H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})$. □

3.4.3. — In the assumptions of Lemma 3.28 and for $i=1$ let us give an explicit description of the inverse of the isomorphism $\alpha:H^1_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})\cong H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})$ in that lemma in terms of hyper-cocycles. Let, as in the proof of Lemma 3.28,

$\{U_i\}_{1\leq i\leq s}$ be an affine cover of Z and let $B\subset S$ be an admissible affinoid open. An element x of $H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times,\mathscr{E})(B)$ is then represented by a 1-hypercocycle (ω_i,f_{ij}) where $\omega_i\in H^0((T_i')^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E}_{T_i'}\otimes\Omega^1_{(T_i')^{\mathrm{rig}}/S^\times})$ for $1\leq i\leq s$ and $f_{ij}\in H^0((T_{ij}')^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})$ for $1\leq i<j\leq s$ such that $\nabla(\omega_i)=0$ for all $1\leq i\leq s$, $\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}}-\omega_j|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}}=\nabla(f_{ij})$ and for all $1\leq i<j<k\leq s$ we have $f_{ij}|_{(T_{ijk}')^{rig}}+f_{jk}|_{(T_{ijk}')^{rig}}-f_{ik}|_{(T_{ijk}')^{rig}}=0$.

Let as in the proof of Lemma 3.28, for every $1\leq i\leq s$, $T_i=T_i'$ and $T_{ij}:=(T_i'\times_{\mathscr{S}^\times}T_j')_{/U_{ij}}$ i.e. T_{ij} is the formal completion of $T_i'\times_{S^\times}T_j'$ along U_{ij}.

We have a natural commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}(T_{ij}')^{\mathrm{rig}} & \xrightarrow{\Delta} & T_{ij}^{\mathrm{rig}}\\ \downarrow & & \pi_i\downarrow\\ (T_i')^{\mathrm{rig}} & = & T_i^{\mathrm{rig}}\end{array}$$

and a similar one replacing i by j. Here π_i is induced by the natural projection $T_i'\times_{\mathscr{S}^\times}T_j'\longrightarrow T_i'=T_i$ which factors naturally through the formal completion of $T_i'\times_{\mathscr{S}^\times}T_j'$ along U_{ij}.

Lemma 3.29. — *In the notations above, for each $1\leq i<j\leq s$ there is a unique $h_{ij}\in H^0(T_{ij}^{\mathrm{rig}}\times_S B,\mathscr{E}_{T_{ij}})$ such that*

a) $\Delta^*(h_{ij})=0$

and

b) $\pi_i^*(\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}})-\pi_j^*(\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}})=\nabla_{ij}(h_{ij})$. *Here ∇_{ij} is the connection on $\mathscr{E}_{T_{ij}}$.*

Proof. — As Δ is log-smooth we may apply Proposition 3.6. Namely, let $\eta:=\pi_i^*(\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}})-\pi_j^*(\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}})$. Then $\nabla_{ij}(\eta)=0$ and moreover the above commutative diagram implies that $\Delta^*(\eta)=0$. Therefore, locally on T_{ij}^{rig}, there exist a_{ij}'s sections of $\mathscr{E}_{T_{ij}}$ such that $\nabla_{ij}(a_{ij})=\eta$. As $0=\Delta^*(\nabla_{ij}(a_{ij}))=\nabla(\Delta^*(a_{ij}))$, a_{ij} can be chosen such that $\Delta^*(a_{ij})=0$. For example replace a_{ij} by $a_{ij}-\pi_1^*(\Delta^*(a_{ij}))$. The conditions $\nabla_{ij}(a_{ij})=\eta$ and $\Delta^*(a_{ij})=0$ determine the a_{ij}'s uniquely, so they glue to give a section h_{ij} of $\mathscr{E}_{T_{ij}}$ over T_{ij}^{rig} satisfying the right properties. □

Now back to our original problem: to explicitly describe the isomorphism $H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}})\longrightarrow H^1_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})$. We have started with an element x of the first group represented by the 1-hyper-cocycle $(\omega_i,f_{ij})_{(i,i<j)}$. For each $1\leq i<j\leq s$ we determined the sections h_{ij} as in Lemma 3.29. Let us remark that for each $i<j$ we have the following calculation:

$$\pi_i^*(\omega_i)-\pi_j^*(\omega_j)=\pi_i^*(\omega_i)-\pi_j^*(\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}})+\pi_j^*(\omega_i|_{(T_{ij}')^{\mathrm{rig}}})-\pi_j(\omega_j)=\nabla_{ij}(h_{ij})+\pi_j^*(\nabla(f_{ij}).$$

Moreover, for $1\leq i<j<k\leq s$ the section $h_{ijk}\in H^0(T_{ijk}^{\mathrm{rig}},\mathscr{E}_{T_{ijk}})$ defined by $h_{ijk}:=\pi_{ij}^*(h_{ij})+\pi_{jk}^*(h_{jk})-\pi_{ik}^*(h_{ik})$ satisfies: $\Delta^*(h_{ijk})=0$ and $\nabla_{ijk}(h_{ijk})=0$. Therefore $h_{ijk}=0$ and so finally $(\omega_i,h_{ij}+\pi_j(f_{ij}))_{(i,i<j)}$ is a 1-hyper-cocycle for the complex $DR(T_\bullet,\mathscr{E})^\bullet$ whose image in $H^1_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times,\mathscr{E})$ is $\alpha^{-1}(x)$.

3.4.4. — In the notations and assumptions at §3.4.3 above let us assume that for each $1 \leq i \leq s$ we have a lifting of Frobenius on U_i, $F_i : T_i \longrightarrow T_i$ compatible with the lifting of Frobenius $F_{\mathscr{S}} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$. $F_{\mathscr{S}}$ is defined as the arithmetic Frobenius σ on W and by $F_{\mathscr{S}}(t) = t^p$. Since T_i is affine and log smooth such liftings F_i always exist. Let us now assume that $\mathscr{E}$ is an F-isocrystal on Z/W. Then one defines a natural homomorphism, Frobenius,

$$\Phi : F_{\mathscr{S}}^* H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times, \mathscr{E}) \longrightarrow H^i_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times, \mathscr{E}),$$

which is independent of all the choices. Let $i = 1$ and assume that $Z^\times$ has a log-smooth global lifting $\mathfrak{X}^\times/\mathscr{S}^\times$. We'll describe Φ on $H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}})$ under the identification $\alpha : H^1_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times, \mathscr{E}) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}})$. Let $B \subset S$ be the affinoid disk centered at 0 of radius r and let $B' = F_{\mathscr{S}}(B) \subset S$ be the affinoid of radius r^p. $x \in H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}})(B')$, then we'd like to express $\Phi(x) := \alpha(\Phi(\alpha^{-1}(x))) \in H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}})(B)$. Suppose we fix an affine cover $\{U_i\}_{1\leq i\leq s}$ of Z and use all the notations at b) above. If x is represented by the hypercocycle $(\omega_i, f_{ij})_{(i,i<j)}$ corresponding to B' let h_{ij} be as in Lemma 3.29. Then $\Phi(x)$ is represented by the hypercocycle

$$((F_i^{\mathrm{rig}})^*(\omega_i), (F_j^{\mathrm{rig}})^*(f_{ij}) + \Delta^*(F_{ij}^{\mathrm{rig}})^*(h_{ij}))$$

corresponding to B.

3.4.5. — Finally, let us recall the notations of Section 3.2. We have the morphism of formal schemes $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathscr{S}$ and we denote by $\mathscr{Y} = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spf}(W)$, where the map $\mathrm{Spf}(W) \longrightarrow \mathscr{S}$ is induced by the W-algebra homomorphism $W[[t]] \longrightarrow W$ sending t to 0. In other words $\mathscr{Y}$ is the fiber of f at the point "0" of $\mathscr{S}$. Given the description of f in Section 3.2, $\mathscr{Y}$ is a divisor of $\mathfrak{X}$ with normal crossings (the irreducible components of $\mathscr{Y}$ are smooth and the singular points defined over W). Let us fix on $\mathfrak{X}$ the log structure corresponding to the divisor $\mathscr{Y}$ and denote this log formal W-scheme $\mathfrak{X}^\times$. Let us endow $\mathscr{Y}$ with the pull-back log structure and denote it $\mathscr{Y}^\times$. Let us remark that $\overline{C}$ is a divisor with normal crossings of C, endow C with the log structure defined by this divisor and by $\overline{C}^\times$ the log scheme $\overline{C}$ with the inverse image log structure.

Then: f is a log smooth morphism $\mathfrak{X}^\times \longrightarrow \mathscr{S}^\times$, which is a log smooth lifting of $\overline{C}^\times$ over $\mathscr{S}^\times$ as at 2) b) above. Finally $\mathscr{Y}^\times$ is a log smooth lifting of $\overline{C}^\times$ over $\mathrm{Spf}(W)^\times$ (this last log structure is given by the smooth divisor $p = 0$). Therefore, 1) and 2) above imply that if $\mathscr{E}$ is an F-isocrystal on Z then we have natural isomorphisms

$$H^1_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathrm{Spec}(k)^\times, \mathscr{E}) \cong H^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{Y}^\times/\mathrm{Spf}(W)^\times, \mathscr{E}) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(Y^\times/K_0, \mathscr{E}_{\mathscr{Y}}).$$

and

$$H^1_{\mathrm{cris}}(Z^\times/\mathscr{S}^\times, \mathscr{E}) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X^\times/S^\times, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}) = H^1_{dR}(X/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\log(Y)).$$

Moreover if we give ourselves local liftings of Frobenius as in 2) c) above all the isomorphisms are compatible with the Frobenii.

3.5. Hypercocycles and Mayer-Vietoris exact sequences. — In this section we collect a number of technical results showing how to relate Mayer-Vietoris exact sequences and representatives of de Rham cohomology classes for different admissible coverings.

3.5.1. *3.5.1Coverings and Graphs.* — Let T be a rigid analytic space over K and let $\mathscr{D} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ be an admissible covering of T. We will suppose that all our coverings satisfy the assumption:

$$(*) \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \text{ is void for all } \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha \in I.$$

We attach to $\mathscr{D}$ a graph $G = G(\mathscr{D})$ whose vertices $v(G)$ are the elements of $\mathscr{D}$ and whose oriented edges $\epsilon(G)$ correspond to triples $e = (U, V, W)$ where $U \neq V \in \mathscr{D}$ and $A_e := W$ is a connected component of $U \cap V$. If v is a vertex of G we denote U_v the element of $\mathscr{D}$ corresponding to it and also if $e = (U, V, W)$ is an edge then its origin $a(e)$ is U and its end $b(e)$ is V. If $U \cap V$ is connected we denote the edge e by $[a(e), b(e)]$.

We denote $\tau : \epsilon(G) \longrightarrow \epsilon(G)$ by $\tau(e = (U, V, W)) = (V, U, W)$ and we choose once for all a system of representatives $e(G)$ of the quotient set $\epsilon(G)/\tau$.

Let G be a graph. A local system F on G is the following collection of data:

a) for each vertex $v \in v(G)$, an abelian group F_v,

b) for each oriented edge $e \in e(G)$, an abelian group F_e,

c) if $e \in e(G)$, group homomorphisms $\varphi_{a(e)} : F_{a(e)} \longrightarrow F_e$ and $\varphi_{b(e)} : F_{b(e)} \longrightarrow F_e$.

To a local system F on the graph G we associate the complex of abelian groups

$$C^\bullet(G, F) : \quad C^0(G, F) = \oplus_{v \in v(G)} F_v \xrightarrow{d} C^1(G, F) = \oplus_{e \in e(G)} F_e,$$

where $(d(x_v)_{v \in v(G)})_e := \varphi_{a(e)}(x_{a(e)}) - \varphi_{b(e)}(x_{b(e)})$ for $e \in e(G)$. Let $H^i_{\text{Betti}}(G, F) := H^i(C^\bullet(G, F))$ for $i \geq 0$.

Let us now suppose that the graph G is the graph associated to an admissible cover $\mathscr{D}$ of the rigid space T and that $(\mathscr{F}, \nabla)$ is a pair consisting of a coherent sheaf $\mathscr{F}$ of $\mathscr{O}_T$-modules with an integrable connection ∇, then we have a natural family of local systems F_j on G and Betti cohomology groups $H^{i,j}(\mathscr{D}, (\mathscr{F}, \nabla))$, for $i \geq 0, j \geq 0$, as follows:

a) for $v \in v(G)$ set $F_{j,v} := H^j_{dR}(U_v, \mathscr{F}|_{U_v})$,

b) for $e \in e(G)$ set $F_{j,e} := H^j_{dR}(A_e, \mathscr{F}|_{A_e})$,

c) for $e \in e(G)$ $\varphi_{a(e)}, \varphi_{b(e)}$ are pull-backs induced by the open immersions $A_e \subset U_{a(e)}$ and $A_e \subset U_{b(e)}$.

Then $H^{i,j}(\mathscr{D}, (\mathscr{F}, \nabla)) := H^i_{\text{Betti}}(G, F_j)$.

Remark 3.30. — *We have the following variant of the definitions above. Suppose that* $\mathscr{T}^\times := (\mathscr{T}, M)$ *is a log formal scheme over* $\mathrm{Spf}(V)^\times$ *such that* $\mathscr{T}^{\mathrm{rig}} \cong T$ *as rigid spaces over* K. *Suppose that* $(\mathscr{G}, \nabla_{\log})$ *is a pair consisting of a coherent sheaf* $\mathscr{G}$ *of* $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$*-modules and a logarithmic integrable connection* $\nabla_{\log}$ *on it. Then one denotes* $\mathscr{F} = \mathscr{G}^{\mathrm{rig}}, \nabla = (\nabla_{\log})^{\mathrm{rig}}$ *and one has, for each* $i \geq 0$ *the local systems* $F_{i,\log}$ *obtained*

by taking the logarithmic de Rham cohomology with coefficients in $(\mathscr{F},\nabla)$ and the Betti cohomology groups $H^{i,j}(\mathscr{D},\mathscr{F}) := H^i_{\mathrm{Betti}}(G,\mathscr{F}_{i,\log})$.

Remark 3.31. — *If the assumption $(*)$ is not satisfied by the covering $\mathscr{D}$ but the covering is finite (i.e. the index set I is finite) one may attach to it a finite dimensional simplex, local systems on the simplex and the corresponding Betti cohomology groups.*

3.5.2. *Hypercocycles and Mayer-Vietoris exact sequences attached to a covering.* — Let T be a rigid analytic space over K and $\mathscr{D} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ an admissible covering of it which satisfies the assumption $(*)$ above. Let $(\mathscr{F},\nabla)$ be a pair consisting of a coherent sheaf $\mathscr{F}$ of $\mathscr{O}_T$-modules which is locally free and an integrable connection ∇ on it.

Consider the diagram of rigid spaces and maps:

$$T_{v(G)} = \amalg_{v\in v(G)} U_v \xrightarrow{f} T \xleftarrow{g} T_{e(G)} := \amalg_{e\in e(G)} A_e.$$

We have then an exact sequence of sheaves on T:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow f_*f^*\mathscr{F} \longrightarrow g_*g^*\mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

If for $v \in v(G)$ and $e \in e(G)$ we denote by $\mathscr{F}^v := \mathscr{F}|_{U_v}$ respectively $\mathscr{F}^e := \mathscr{F}|_{A_e}$ then the exact sequence above becomes

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow f_*\big(\oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}^v\big) \longrightarrow g_*\big(\oplus_{e\in e(G)}\mathscr{F}^e\big) \longrightarrow 0.$$

This induces an exact sequence of de Rham complexes and therefore an exact sequence of cohomology groups (the Mayer-Vietoris exact sequence):

$$0 \longrightarrow H^0_{dR}(T,\mathscr{F}) \longrightarrow \oplus_{v\in v(G)} H^0_{dR}(U_v,\mathscr{F}) \longrightarrow \oplus_{e\in e(G)} H^0_{dR}(A_e,\mathscr{F}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1_{dR}(T,\mathscr{F}) \longrightarrow \oplus_{v\in v(G)} H^1_{dR}(U_v,\mathscr{F}) \longrightarrow \oplus_{e\in e(G)} H^1_{dR}(A_e,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

Using the graph and Betti cohomology notations in §3.5.1 we can re-write the Mayer-Vietoris exact sequence as the following short exact sequence

$$0 \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{D},\mathscr{F}) \longrightarrow H^1_{dR}(T,\mathscr{F}) \longrightarrow H^{0,1}(\mathscr{D},\mathscr{F}) \longrightarrow 0.$$

Let us keep the notations $T, \mathscr{D}, (\mathscr{F},\nabla)$ as at the beginning of this section. In order to explicitly calculate the cohomology groups $H^i_{dR}(T,\mathscr{F})$ we use the following double complex:

$$C^{\bullet,\bullet}: \quad \begin{array}{ccccccc} \oplus_{e\in e(G)}\mathscr{F}_e & \xrightarrow{\nabla} & \oplus_{e\in e(G)}\mathscr{F}_e\otimes\Omega^1_{A_e} & \xrightarrow{\nabla} & \oplus_{e\in e(G)}\mathscr{F}_e\otimes\Omega^2_{A_e} & \xrightarrow{\nabla} & \\ \uparrow\delta & & \uparrow\delta & & \uparrow\delta & & \\ \oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}_v & \xrightarrow{\nabla} & \oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}_v\otimes\Omega^1_{U_v} & \xrightarrow{\nabla} & \oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}_v\otimes\Omega^2_{U_v} & \xrightarrow{\nabla} & \end{array}$$

where $\mathscr{F}_e$, respectively $\mathscr{F}_v$ denote $H^0(A_e,\mathscr{F})$ respectively $H^0(U_v,\mathscr{F})$ for $e \in e(G)$ and $v \in v(G)$. Moreover the Čech differentials δ are defined by: $\delta((x_v)_{v\in v(G)})_e = x_{a(e)}|_{A_e} - x_{b(e)}|_{A_e}$, for $e \in e(G)$. The single complex

$$K^\bullet(T,(\mathscr{F},\nabla)) : K^0 \xrightarrow{D_0} K^1 \xrightarrow{D_1} K^2 \xrightarrow{D_2} \cdots$$

attached to the double complex $C^{\bullet,\bullet}$ is defined by: $K^0 := \oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}_v$, $K^1 := \big(\oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}_v\otimes\Omega^1_{U_v}\big)\oplus\big(\oplus_{e\in e(G)}\mathscr{F}_e\big)$ and $K^2 := \big(\oplus_{v\in v(G)}\mathscr{F}_v\otimes\Omega^2_{U_v}\big)\oplus\big(\oplus_{e\in e(G)}\mathscr{F}_e\otimes\Omega^1_{A_e}\big)$ etc. and

$$D_0((x_v)_{v\in v(G)}) = \big((\nabla(x_v))_{v\in v(G)}, (x_{a(e)}|_{A_e} - x_{b(e)}|_{A_e})_{e\in e(G)}\big)$$
$$D_1\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}\big) = \big((\nabla(\omega_v))_{v\in v(G)}, (\omega_{a(e)}|_{A_e} - \omega_{b(e)}|_{A_e} - \nabla(f_e))_{e\in e(G)}\big)$$
$$D_2\big((\eta_v)_{v\in v(G)}, (\omega_e)_{e\in e(G)}\big) = \big((\nabla(\eta_v))_{v\in v(G)}, (\eta_{a(e)}|_{A_e} - \eta_{b(e)}|_{A_e} - \nabla(\omega_e))_{e\in e(G)}\big).$$

Then we have $H^i_{dR}(T,\mathscr{F}) = \mathrm{Ker}(D_i)/\mathrm{Im}(D_{i-1})$, for $i \geq 0$, where we set $K^{-1} = 0$, $D_{-1} = 0$. In particular, cohomology classes in $H^1_{dR}(T,\mathscr{F})$ are represented by 1-hypercocycles, i.e. families of elements $\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}\big)$ where $\omega_v \in \mathscr{F}_v\otimes\Omega^1_{U_v}$, $f_v \in \mathscr{F}_e$, for $v \in v(G), e \in e(G)$, which satisfy $\nabla(\omega_v) = 0$ for all v and $\omega_{a(e)}|_{A_e} - \omega_{b(e)}|_{A_e} = \nabla(f_e)$ for all e.

Remark 3.32. — *With the notations above, let us assume that the open sets U_α and A_e are acyclic for coherent sheaf cohomology. Then the maps $f : H^{1,0}(\mathscr{D},\mathscr{F}) \longrightarrow H^1_{dR}(Z,\mathscr{F})$ and $g : H^1_{dR}(Z,\mathscr{F}) \longrightarrow H^{0,1}(\mathscr{D},\mathscr{F})$ defining the Mayer-Vietoris sequence are given in terms of hypercocycles as follows.*

a) *If the cocycle $(x_e)_{e\in e(G)} \in \oplus_{e\in e(G)}H^0_{dR}(A_e,\mathscr{F})$ represents the cohomology class $x \in H^{1,0}(\mathscr{D},\mathscr{F})$, let us remark that by the assumptions above the $x_e \in \mathscr{F}_e$ such that $\nabla(x_e) = 0$. Therefore $f(x)$ is the class of the 1-hypercocycle $\big((0_v)_{v\in v(G)}, (x_e)_{e\in e(G)}\big)$.*

b) *If $\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}\big)$ is a 1-hypercocycle representing the class y in $H^1_{dR}(Z,\mathscr{F})$ then $g(y)$ is the image of $(\omega_v)_{v\in v(G)}$ in the group $\oplus_{v\in v(G)}H^1_{dR}(U_v,\mathscr{F})$, which is actually in $H^{0,1}(\mathscr{D},\mathscr{F})$.*

Remark 3.33. — *We have variants of these constructions for the logarithmic situation described in Remark 3.30. We need only replace the sheaves and modules of differentials $\Omega^i_{U_v}, \Omega^i_{A_e}$ by the sheaves and modules of logarithmic differentials.*

3.5.3. *Examples of coverings in our setting*

3.5.3.1. *First example.* — Let us now recall our geometric situation from §3.2. Let $\mathrm{red} : X \longrightarrow \overline{C}$ and for all $s \in S - \{0\}$, $\mathrm{red}_s : X_s = X \times_S s \longrightarrow \overline{C}$ denote the reduction maps. Let $\mathscr{C}$ (and for every $s \in S - \{0\}$, $\mathscr{C}_s$) denote the admissible covering of X (respectively of X_s) defined by $\mathscr{C} := \{\mathrm{red}^{-1}(Z)$ where Z is an irreducible component of $\overline{C}\}$ (respectively $\mathscr{C}_s := \{\mathrm{red}_s^{-1}(Z)$ where Z is an irreducible component of $\overline{C}\}$). Then we have $G := G(\mathscr{C}) = G(\mathscr{C}_s)$ for all $s \in S - \{0\}$. We fix once for all a choice of a system of representatives $e(G)$ of $\epsilon(G)/\tau$, see §3.5.1. Let us also remark that as $\overline{C}$ is a semistable curve $\mathscr{C}$ and $\mathscr{C}_s$ satisfy the condition $(*)$ of section §3.5.1. We use the following notations: for all $v \in v(G)$ we denote by $U_v \subset X$ the corresponding open set of $\mathscr{C}$ and for every s by $U_{v,s} = U_v \times_S s = U_v \cap X_s \subset X_s$ the respective open set of $\mathscr{C}_s$. Similarly, if $e \in \epsilon(G)$ we denote by $A_e = U_{a(e)} \cap U_{b(e)}$ and for every $s \in S - \{0\}$ we let $A_{e,s} := A_e \times_S s = A_e \cap X_s = U_{a(e),s} \cap U_{b(e),s}$. We'd like to recall that these coverings have already been defined in Section 3.2 and although the language of graphs was not used there, the definitions are the same.

3.5.3.2. *Second example.* — We keep the notations of section §3.5.3.1. For each $v \in v(G)$ let as in section §3.2,

$$Z_v := U_v - \bigcup_{\substack{w \\ w \neq v}} U_w.$$

Now, for each $v \in v(G)$ consider a strict neighborhood T_v of Z_v in U_v, which is wide open and such that $T_v \cap T_w = \phi$ if $v \neq w$. Let us recall that T_v is a "strict neighborhood" of Z_v in U_v means that the pair $\{T_v, U_v - Z_v\}$ is an admissible cover of U_v.

Such T's exist and let $\mathscr{C}' := \{T_v, A_e\}_{v,e}$ where v ranges over $v(G)$ and e over $e(G)$. Then $\mathscr{C}'$ is an admissible covering of X by wide open sets. This cover is a refinement of $\mathscr{C}$ and is appropriate for computing de Rham cohomology as the open sets are acyclic for coherent sheaf cohomology. We denote $G(\mathscr{C}')$ by G' and let us remark that: $v(G') = v(G) \amalg e(G)$ and $\epsilon(G') = \epsilon(G) \amalg \epsilon(G)$. We choose $e(G') = e(G) \amalg e(G)$ as follows. If $e \in e(G)$ then $(a(e), e)$ and $(e, b(e))$ belong to $e(G')$.

Moreover, as in section §3.5.3.1 if $s \in S$ (here s may be 0) we denote by $\mathscr{C}'_s := \{T_{v,s}, A_{e,s}\}_{v,e}$, where $T_{v,s} := T_v \times_S s = T_v \cap X_s$ for all $v \in v(G)$. Then $\mathscr{C}'_s$ is an admissible covering of X_s and $G(\mathscr{C}_s) = G(\mathscr{C}) = G'$.

3.5.3.3. *Third example.* — Let L be a totally ramified, non-trivial extension of K, as in section §3.2 and let $B = B_L \subset S$ denote the affinoid disk of centre 0 and radius $|\pi_L|$ as in Lemma 3.17. By Proposition 3.18, for every $v \in v(G)$ there exists a wide open neighborhood W_v of $Z_{v,B} := Z_v \times_S B$ in $U_{v,B} := U_v \times_S B$ and for all $s \in S$ an isomorphism over B:

$$\alpha_{v,s} : W_v \cong W_{v,s} \times B.$$

Set $\mathscr{C}''_B := \{W_v, A_{e,B}\}_{v,e}$, where v and e run over $v(G)$ and $e(G)$ respectively and $A_{e,B} := A_e \times_S B$. Then $\mathscr{C}''_B$ is an admissible covering of X_B and if $s \in S$, $\mathscr{C}''_s := \{W_{v,s}, A_{e,s}\}_{v,e}$ is an admissible covering of X_s. Then $G(\mathscr{C}''_B) = G(\mathscr{C}''_s) = G'$.

3.5.4. *Changing coverings.* — Let us fix $\mathscr{E}$ a W-isocrystal on $\overline{C}$. Let us also fix a closed point $s \in S - \{0\}$ defined over the finite extension F of K_0. Then one can see s as a W-algebra homomorphism $W[[t]] \longrightarrow \mathscr{O}_F$. If we denote by $X_s := X \times_S s$ and by $\mathfrak{X}_s := \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}(W[[t]]} s$, then X_s is the generic fiber of $\mathfrak{X}_s$. We denote by $(\mathscr{E}_s, D_s)$ the evaluation of $\mathscr{E}$ at the enlargement $\mathfrak{X}_s$ of $\overline{C}$, seen as a coherent sheaf $\mathscr{E}_s$ on X_s with an integrable connection D_s. Fix the coverings $\mathscr{C}_s := \{U_{v,s}\}_v$ as in section §3.5.3.1 and $\mathscr{C}'_s := \{T_{v,s}, A_{e,s}\}_{v,e}$ as in section §3.5.3.2 of graphs G and G' respectively. To simplify, for the next lemma we omit s from the notation i.e. we will use U_v, A_e, T_v to denote $U_{v,s}, A_{e,s}, T_{v,s}$. For $i \geq 0$, let $\mathscr{E}_i, \mathscr{E}'_i$ denote the local systems on G respectively G' associated as in section §3.5.1 to $(\mathscr{E}_s, D_s)$. We define the maps of abelian groups

$$\begin{aligned} f_i^0 : \quad & C^0(G, \mathscr{E}_i) \quad \longrightarrow \quad C^0(G', \mathscr{E}'_i) \\ f_i^1 : \quad & C^1(G, \mathscr{E}_i) \quad \longrightarrow \quad C^1(G', \mathscr{E}'_i) \end{aligned}$$

by $f_i^0(((x_v)_v) = \big((x_v|_{T_v})_v, (\frac{x_{a(e)}|_{A_e} + x_{b(e)}|_{A_e}}{2})_e\big)$ and $f_i^1((y_e)_e) = \big(\frac{y_e|_{T_{a(e)}\cap A_e}}{2}, \frac{y_e|_{T_{b(e)}\cap A_e}}{2}\big)_e$, where everywhere v and e run over $v(G)$ and respectively $e(G)$.

Lemma 3.34. — a) *f_i^0, f_i^1 define morphisms of complexes $f_i^\bullet : C^\bullet(G, \mathscr{E}_i) \longrightarrow C^\bullet(G', \mathscr{E}_i')$.*

b) *For $i = 0,1$ $f_i^\bullet$ induce isomorphisms $H^{1,0}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) \cong H^{1,0}(\mathscr{C}_s', \mathscr{E}_s)$ and $H^{0,1}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) \cong H^{0,1}(\mathscr{C}_s', \mathscr{E}_s)$ (the notations being as in section §3.5.1).*

c) *If $\big((\omega_v)_v, (f_e)_e\big)$ is a 1-hypercocycle for the complex $\mathscr{E}_s \otimes_{\mathscr{O}_{X_s}} \Omega^\bullet_{X_s/F}$ corresponding to the covering $\mathscr{C}_s$, then the co-chain $\big((\omega_v|_{T_v})_v, (\frac{\omega_{a(e)}|_{A_e} + \omega_{b(e)}|_{A_e}}{2})_e, \big(\frac{f_e|_{T_{a(e)}\cap A_e}}{2}, \frac{f_e|_{T_{b(e)}\cap A_e}}{2}\big)_e\big)$ is a 1-hypercocycle for the same complex associated to the covering $\mathscr{C}_s'$, which represents the same cohomology class in $H^1_{dR}(X_s/F, \mathscr{E}_s)$.*

d) *The isomorphisms at* b) *make the following diagram of Mayer-Vietoris sequences commute.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{1,0}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & H^1_{dR}(X_s/F, \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & H^{0,1}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{1,0}(\mathscr{C}_s', \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & H^1_{dR}(X_s/F, \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & H^{0,1}(\mathscr{C}_s', \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proof. — We'll only sketch the prove of the fact that the morphism of complexes $f_1^\bullet$ induces an isomorphism $f : H^{0,1}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) \cong H^{0,1}(\mathscr{C}_s', \mathscr{E}_s)$. The main observation is that as U_v,T_v,A_e are wide opens, they are acyclic for coherent sheaf cohomology and so $H^i_{dR}(U_v, \mathscr{E}_s|_{U_v}), H^i_{dR}(T_v, \mathscr{E}_s|_{T_v}), H^i_{dR}(A_e, \mathscr{E}_s|_{A_e})$ can be calculated as hypercohomology of the de Rham complex relative to the admissible covering $\{U_v\}$ respectively $\{T_v\}$, respectively $\{A_e\}$. Moreover the first groups could also be calculated relative to the admissible covering $\{T_v, U_v - T_v = \amalg_{e\in e(G), v=a(e), v=b(e)} A_e\}$ of U_v.

Let us show the injectivity of f. Suppose that $(x_v)_v \in C^0(G, \mathscr{E}_1) = \oplus_v H^1_{dR}(U_v, \mathscr{E}_s|_{U_v})$ is such that

a) $d((x_v)_v) = 0$

and

b) $f((x_v)_v) = 0$ in $C^0(G', \mathscr{E}_1')$.

Let $\omega_v \in H^0(U_v, \mathscr{E}_s \otimes \Omega^1_{U_v/F})$ be a representative of $x_v \in H^1_{dR}(U_v, \mathscr{E}_s|_{U_v})$. Condition a) implies that for all $e \in e(G)$ there is a section $u_e \in H^0(A_e, \mathscr{E}_s|_{A_e})$ such that $\omega_{a(e)}|_{A_e} - \omega_{b(e)}|_{A_e} = D(u_e)$. From condition b) we deduce there exist sections $u_v \in H^0(T_v, \mathscr{E}_s), w_e \in H^0(A_e, \mathscr{E}_s)$ such that $D_s(u_v) = \omega_v|_{T_v}, D_s(w_e) = \omega_{a(e)}|_{A_e} + \omega_{b(e)}|_{A_e}$, for all $v \in v(G), e \in e(G)$. This implies that the hypercochain

$$\big(D_s(u_v), D_s((w_e + u_e)/2), D_s((u_e - w_e)/2), (u_v|_{A_e\cap T_{a(e)}} - ((w_e + u_e)/2)|_{A_e\cap T_{a(e)}}),$$

$$(u_e - w_e)/2)|_{A_e\cap T_{a(e)}} - u_v|_{A_e\cap T_{a(e)}}\big)_{e\in e(G), e=a(e), e=b(e)}$$

is a hypercocycle for the covering $\{T_v, \amalg_{e\in e(G), v=a(e), v=b(e)} A_e\}$ of U_v representing the class x_v. Therefore $x_v = 0$ for all $v \in v(G)$.

For the surjectivity of f one makes similar calculations which we leave, together with the rest of the proof, to the reader. □

Let us now fix L, B as in section §3.5.3.3. Let us also fix an isocrystal $\mathscr{E}$ on $\overline{C}$ and denote $\mathscr{E}_B$ its evaluation on the enlargement $\mathfrak{X}_{\mathscr{B}}$ (for notations see the section §3.2). Let us recall (see ibid.) that we have an absolute connection, D_B and a relative one $D_{X_B/B}$ on $\mathscr{E}_B$. For $i \geq 0$ let us denote by E^i_{abs} (respectively E^i_{rel}) the local system on G' defined by:

a) if $v \in v(G)$ then $E^i_{\mathrm{abs};v} := H^i_{dR}(W_v/L, \mathscr{E}_B|_{W_v}(\log(Y \cap W_v)))$ and if $e \in e(G)$ then $E^i_{\mathrm{abs};e} := H^i_{dR}(A_{e,B}/L, \mathscr{E}_B|_{A_{e,B}}(\log(Y \cap A_{e,B})))$,

b) if $e \in e(G)$ then $E^i_{\mathrm{abs};a(e),e} := H^i_{dR}(W_{a(e)} \cap A_{e,B}/L, \mathscr{E}_B(\log(Y \cap W_{a(e)} \cap A_{e,B})))$ and $E_{\mathrm{abs};e,b(e)} := H^i_{dR}(W_{b(e)} \cap A_{e,B}/L, \mathscr{E}_B(\log(Y \cap W_{b(e)} \cap A_{e,B})))$.

c) the maps are induced by the obvious restrictions.

We have similar definitions, using relative de Rham cohomology over B, for the local system E^i_{rel}.

We denote the the cohomology groups $H^{j,i}(\mathscr{C}''_B, E_*) := H^j_{\mathrm{Betti}}(G', E^i_*)$, for $* \in \{\mathrm{abs}, \mathrm{rel}\}$ and remark that $H^{i,j}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}})$ are $\mathscr{O}_B$-modules.

Proposition 3.35. — a) *$H^{i,j}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}})$ are free $\mathscr{O}_B$-modules of finite rank for all $0 \leq i, j \leq 1$, $i \neq j$. Moreover if $s \in B$ then we have $H^{i,j}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}}) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}''_s, \mathscr{E}_s) \otimes_L \mathscr{O}_B$ for i, j as above.*

b) *Let us denote by $\nabla^{i,j}$ the natural connection over K_0 of the modules $H^{i,j}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}})$ whose space of horizontal sections is $H^{i,j}(\mathscr{C}''_0, \mathscr{E}_0)$ for $0 \leq i, j \leq 1$, $i \neq j$. Then for every $s \in B - \{0\}$ we have parallel transport isomorphisms $H^{i,j}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}''_s, \mathscr{E}_s) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}''_0, \mathscr{E}_0) \otimes_{K_0} F_s$, where F_s is the residue field of s and i, j are as above.*

c) *The natural morphisms in the "relative Mayer-Vietoris" exact sequence*

$$0 \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}}) \longrightarrow H^1_{dR}(X_B/B, \mathscr{E}_B(\log(Y))) \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}}) \longrightarrow 0$$

are horizontal. Here the connection ∇_B on the $\mathbb{H}_B = H^1_{dR}(X_B/B, \mathscr{E}_B(\log(Y)))$ is the Gauss-Manin connection.

Proof. — a) Fix $s \in B$. Let us recall from Lemma 3.19 that the rigid spaces $W_v, W_{v,s}$ have canonical formal models $\mathscr{W}_v, \mathscr{W}_{v,s}$ with an isomorphism $\mathscr{W}_v \cong \mathscr{W}_{v,s} \times \mathscr{B}$ and natural morphisms

$$\begin{array}{ccccc} \overline{C}_v & \longrightarrow & \mathscr{W}_v & \longrightarrow & \mathfrak{X}_B \\ || & & \cup & & \cup \\ \overline{C}_v & \longrightarrow & \mathscr{W}_{v,s} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_s \end{array}$$

The first vertical maps are closed immersions and the last two vertical maps are the natural inclusions into $\mathscr{W}_v$ and $\mathfrak{X}_{\mathscr{B}}$ of their fibers at s. Thus $\mathscr{W}_v$ and $\mathscr{W}_{v,s}$ are wide open enlargements of $\overline{C}$. As $\mathscr{E}$ is a W-isocrystal on $\overline{C}$, we may evaluate it at $\mathscr{W}_v$ and $\mathscr{W}_{v,s}$ to obtain pairs $(\mathscr{E}_v, D_v)$ and $(\mathscr{E}_s, D_s)$ consisting of coherent sheaves of $\mathscr{O}_{W_v}$-modules, respectively $\mathscr{O}_{W_{v,s}}$-modules, with convergent integrable connections.

From the diagram above and its image under the functor "rig" we obtain: $(\mathscr{E}_v, D_v) \cong (\mathscr{E}_B, D_B)|_{W_v}$ and $(\mathscr{E}_s, D_s) \cong (\mathscr{E}_{\mathfrak{X}_s}, D_{\mathfrak{X}_s})|_{W_{v,s}}$.

Moreover, if we denote by $\beta : \mathscr{W}_v \longrightarrow \mathscr{W}_{v,s}$ the natural projection, the commutative diagram in Remark 3.20 implies that $\beta^*(\mathscr{E}_s, D_s) \cong (\mathscr{E}_v, D_v)$. Thus for all connected affinoid $B' \subset B$ we have $H^i_{dR}(W_v/B, \mathscr{E}_v)(B') \cong H^i_{dR}(W_{v,s}, \mathscr{E}_s) \otimes_L \mathscr{O}_{B'}$ for $i = 0, 1$. Since for all $e \in e(G)$ $A_{e,B}$ is contained in a residue class, $\mathscr{E}_e := \mathscr{E}_B|_{A_{e,B}}$ has a basis of horizontal sections for the absolute connection D_B. Hence similarly, for all connected affinoid $B' \subset B$ we have $H^i_{dR}(A_{e,B}/B, \mathscr{E}_e)(B') \cong H^i_{dR}(A_{e,s}, \mathscr{E}_s) \otimes \mathscr{O}_{B'}$, for $i = 0, 1$. Finally as $A_{e,B} \cap W_{a(e)}$ and $A_{e,B} \cap W_{b(e)}$ are contained in $A_{e,B}$ the same result holds for the cohomology of these spaces with values in $\mathscr{E}_e$. We deduce that $H^{i,j}(\mathscr{C}''_B, E_{\mathrm{rel}}) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}''_s, \mathscr{E}_s) \otimes \mathscr{O}_B$ for $0 \leq i, j \leq 1$, $i \neq j$.

b) is now clear and in order to prove c) let us first recall the definition of the Gauss-Manin connection in our setting.

We have a natural exact sequence of de Rham complexes of sheaves on X_B

$$0 \longrightarrow f^*(\Omega^1_{B/L}(\log 0) \otimes \Omega_{X_B/B}(\log Y)^{\bullet-1} \otimes \mathscr{E}_B \longrightarrow \\ \Omega^\bullet_{X_B/K_0}(\log Y) \otimes \mathscr{E}_B \longrightarrow \Omega^\bullet_{X_B/B}(\log Y) \otimes \mathscr{E}_B \longrightarrow 0$$

where we have denoted $f : X_B \longrightarrow B$ the structure morphism. Then the Gauss-Manin connection

$$\nabla_B : H^1_{dR}(X_B/B, \mathscr{E}_B(\log(Y))) \longrightarrow H^1_{dR}(X_B/B, \mathscr{E}_B(\log(Y))) \otimes \Omega^1_{B/L}(\log 0)$$

is the connecting homomorphism in the long exact sequence for hypercohomology.

Let us calculate the connection explicitly in terms of hypercocycles. For this let t denote a parameter of B at 0 and let $x \in H^1(dR)(X_B/B, \mathscr{E}_B(\log(Y)))(B)$. Let us suppose that x is represented by the following hypercocycle for the covering $\mathscr{C}''_B$: $\big((\omega_v)_v, (\omega_e)_e, (f_e, \overline{f}_e)_e\big)$, where v runs over $v(G)$ and e over $e(G)$. Here $\omega_v \in H^0(W_v, \Omega_{W_v/B}(\log W_{v,0}) \otimes \mathscr{E}_B)$, $\omega_e \in H^0(A_{e,B}, \Omega_{A_{e,B}/B}(\log A_{e,0}) \otimes \mathscr{E}_B)$, $f_e \in H^0(A_{e,B} \cap W_{a(e)}, \mathscr{E}_B)$ and $\overline{f}_e \in H^0(A_{e,B} \cap W_{b(e)}, \mathscr{E}_B)$ satisfying the relations:

a) $D_{X_B/B}(\omega_v) = D_{X_B/B}(\omega_e) = 0$ for all v, e.

b) $\omega_{a(e)}|_{W_{a(e)} \cap A_{e,B}} - \omega_e|_{W_{a(e)} \cap A_{e.B}} = D_{X_B/B}(f_e)$ and $\omega_e|_{W_{b(e)} \cap A_{e,B}} - \omega_{b(e)}|_{W_{b(e)} \cap A_{e.B}} = D_{X_B/B}(\overline{f}_e)$ for all e.

Now we choose lifts of ω_v and ω_e to absolute forms, i.e. we choose $\tilde{\omega}_v \in H^0(W_v, \Omega^1_{W_v/K_0}(\log W_{v,0}) \otimes \mathscr{E}_B)$ and respectively $\tilde{\omega}_e \in H^0(A_{e,B}, \Omega^1_{A_e/K_0}(\log(A_{e,0}) \otimes \mathscr{E}_B)$ which project to ω_v and respectively ω_e and define the sections $\eta_v \in H^0(W_v, \Omega^1_{W_v/B}(\log W_{v,0}) \otimes \mathscr{E}_B), \eta_e \in H^0(A_{e,B}, \Omega^1_{A_{e,B}/B}(\log A_{e,0}) \otimes \mathscr{E}_B)$, $g_e \in H^0(W_{a(e)} \cap A_{e,B}, \mathscr{E}_B), \overline{g}_e \in H^0(W_{b(e)} \cap A_{e,B}, \mathscr{E}_B)$ by the relations.

i) $D_B(\tilde{\omega}_v) = \eta_v \wedge dy/y$, $D_B(\tilde{\omega}_e) = \eta_e \wedge dy/y$ for all v, e. Here y is a parameter at 0 on B.

ii) $\tilde{\omega}_{a(e)}|_{W_{a(e)} \cap A_{e,B}} - \tilde{\omega}_e|_{W_{a(e)} \cap A_{e,B}} - D_B(f_e) = g_e dy/y$ for all e.

iii) $\tilde{\omega}_e|_{W_{b(e)} \cap A_{e,B}} - \tilde{\omega}_{b(e)}|_{W_{b(e)} \cap A_{e,B}} - D_B(\overline{f}_e) = \overline{g}_e dy/y$ for all e.

Then the hyper-cochain $\big((\eta_v)_v, (\eta_e)_e, (g_e, \overline{g}_e)_e\big)$ is a hypercocycle and its cohomology class $\otimes dy/y$ represents $\nabla_B(x)$.

Using this the proof of c) is a simple calculation which we leave to the reader. □

We have the following easy consequence of Proposition 3.35.

Lemma 3.36. — *Suppose we have two choices* $\{W_v\}_{v\in v(G)}$ *and* $\{W'_v\}_{v\in v(G)}$ *as in Proposition 3.18. Let* $\mathscr{C} := \{W_v, A_{e,B}\}_{v,e}$ *and* $\mathscr{C}' := \{W'_v, A_{e,B}\}_{v,e}$, *where* v, e *run over* $v(G)$ *and respectively* $e(G)$, *be the corresponding admissible covers of* X_B. *Then we have natural isomorphisms of* $\mathscr{O}_B$*-modules:*

$$H^{i,j}(\mathscr{C}, E_{\mathrm{rel}}) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}', E_{\mathrm{rel}}) \text{ for } 0 \leq i, j \leq 1, i \neq j.$$

Proof. — Let $0 \neq s \in B$. Then we have natural isomorphisms of $\mathscr{O}_B$-modules.

$$H^{i,j}(\mathscr{C}, E_{\mathrm{rel}}) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s) \otimes \mathscr{O}_B \text{ and } H^{i,j}(\mathscr{C}', E_{\mathrm{rel}}) \cong H^{i,j}(\mathscr{C}'_s, \mathscr{E}_s) \otimes \mathscr{O}_B,$$

for $0 \leq i, j \leq 1$, $i \neq j$.

Therefore it is enough to compare the groups $H^{i,j}(\mathscr{C}_s, \mathscr{E}_s)$ and $H^{i,j}(\mathscr{C}'_s, \mathscr{E}_s)$ and we may suppose that $W'_{v,s} \subset W_{v,s}$ for all v (if not take the intersections).

For the rest of the proof, in order to ease the notations we'll drop s from the notations everywhere, i.e. rename $\mathscr{E} = \mathscr{E}_s, W_v = W_{v,s}, W'_v = W'_{v,s}, A_e = A_{e,s}$, $\mathscr{C} = \mathscr{C}_s, \mathscr{C}' = \mathscr{C}'_s, D = D_s$ etc. The natural inclusions $W'_v \subset W_v$ induce by pull-back maps $H^{i,j}(\mathscr{C}, \mathscr{E}) \longrightarrow H^{i,j}(\mathscr{C}', \mathscr{E})$ which make the following diagram commutative.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{1,0}(\mathscr{C}, \mathscr{E}) & \longrightarrow & H^1_{dR}(X_s, \mathscr{E}) & \longrightarrow & H^{0,1}(\mathscr{C}, \mathscr{E}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & || & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{1,0}(\mathscr{C}', \mathscr{E}) & \longrightarrow & H^1_{dR}(X_s, \mathscr{E}) & \longrightarrow & H^{0,1}(\mathscr{C}', \mathscr{E}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

So it is enough to prove that α is an isomorphism. Let us remark that as W'_v is a strict neighborhood of Z_v in U_v (recall that we suppressed "s" from the notation), the set $\{W'_v, \amalg_{v=a(e),v=b(e)} A_e\}$ is an admissible covering of U_v. As W_v is an admissible open of U_v, the set $\{W'_v, \amalg_{v=a(e),v=b(e)} A_e \cap W_v\}$ is an admissible covering of W_v. But $\mathscr{E}$ has a basis of horizontal sections on $A_e \cap W_v$ for all $e \in e(G)$, therefore the restriction $H^0(W_v, \mathscr{E})^D \longrightarrow H^0(W'_v, \mathscr{E})^D$ is an isomorphism for all $v \in v(G)$. It follows that α is an isomorphism. □

Let us fix a collection $\{W_v\}_{v\in v(G)}$ as in Proposition 3.18 and let $s \in B$ (s may be 0). We consider again the admissible coverings $\mathscr{C}''_B$ of X_B and $\mathscr{C}''_s$ and the respective Mayer-Vietoris exact sequences. Pull back by the closed immersion $X_s \longrightarrow X_B$ provide vertical maps in the following diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{1,0}(\mathscr{C}''_B/B, \mathscr{E}) & \longrightarrow & H^1_{dR}(X_B/B, \mathscr{E}_B(\log(Y))) & \longrightarrow & H^{0,1}(\mathscr{C}''_B/B, \mathscr{E}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^{1,0}(\mathscr{C}''_s, \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & H^1_{dR}(X_s, \mathscr{E}_s(\log(Y \cap X_s))) & \longrightarrow & H^{0,1}(\mathscr{C}''_s, \mathscr{E}_s) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

If $s \neq 0$ the log structure on X_s is trivial.

Lemma 3.37. — *The above diagram of Mayer-Vietoris exact sequences is commutative.*

Proof. — The proof follows immediately from the definitions and we leave it to the reader. □

4. The Monodromy Operators

4.1. The global residue. — Let us fix the covering $\mathscr{C}' = \{T_v, A_e\}_{v\in v(G(X)),e\in e(G(X))}$ as in section §3.5.3.2, G' denote the graph of this cover and assume that $\mathscr{E}$ is an isocrystal on $\overline{C}$ i.e we assume that P and hence the log structure induced by it is trivial in this chapter (notations as in section §1.) We denote $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}, D_{X/K_0})$ its evaluation on the wide open enlargement $\mathfrak{X}$ and by $D_{X/S}$ the associated relative connection. Let us also recall that we defined on $\mathfrak{X}$ the log structure given by the normal crossing divisor $\mathscr{Y} := \mathfrak{X}_0$, on $\mathscr{Y}$ itself the inverse image log structure defined by the closed immersion $\mathscr{Y} = \mathfrak{X}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}$, and on $\mathscr{S}$ the log structure given by the divisor $t = 0$. The log schemes thus defined are denoted $\mathfrak{X}^{\times\times}, \mathscr{Y}^{\times\times}, \mathscr{S}^{\times}$. We denote $\Omega^i_{X^{\times\times}/S^{\times}} := (\Omega^i_{\mathfrak{X}^{\times\times}/\mathscr{S}^{\times}})^{\mathrm{rig}} = \Omega^i_{X/S}(\log(Y))$ and $\Omega^i_{Y^{\times\times}/K_0} := (\Omega^i_{\mathscr{Y}^{\times\times}/W^{\times}})^{\mathrm{rig}} = \Omega^i_{\mathscr{Y}^{\times\times}/W^{\times}} \otimes_W K_0$, for $i \geq 0$.

Let us first fix $e \in e(G)$ and recall that the sheaf $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{A_e}$ has a basis of horizontal sections for $D_{X/S}$. We denote such a basis by $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\alpha\}$. Then using Lemma 3.16 every element $\omega \in H^0(A_e, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes \Omega^1_{X/S}(\log(Y)))$ can be written

$$\omega = \Big(\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes \sum_{n,m\geq 0} a_{i,n,m} x_e^n x_{\tau(e)}^m\Big) \frac{d_{\mathrm{X/S}} x_e}{x_e},$$

where $a_{i,n,m} \in K_0$ are such that the power series converge on A_e. We recall that the variables $x_e, x_{\tau(e)}$, defined in Lemma 3.16 satisfy $x_e x_{\tau(e)} = t$. Thus we define

$$\mathrm{Res}_e(\omega_e) := \Big(\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{T_{a(e)}\cap A_e} \sum_{n\geq 0} a_{i,n,n} t^n\Big), \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{T_{b(e)}\cap A_e} \sum_{n\geq 0} a_{i,n,n} t^n\Big)\Big)$$

$$\in H^0_{dR}((T_{a(e)} \cap A_e)/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}) \oplus H^0_{dR}((T_{b(e)} \cap A_e)/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}).$$

Therefore, for every $e \in e(G)$, Res_e can be seen as an $\mathscr{O}_S$-linear homomorphism

$$H^1_{dR}(A_e/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\log(Y))) \longrightarrow H^0_{dR}((A_e \cap T_{a(e)})/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}) \oplus H^0_{dR}(A_e \cap T_{b(e)}/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}).$$

Similarly, let $\mathscr{C}'_0 = \{T_{v,0}, A_{e,0}\}$ be the intersection of the covering $\mathscr{C}'$ with Y. It is an admissible cover of Y by acyclic wide opens. Let us fix $e \in e(G)$ and x, y be the restrictions of x_e and $x_{\tau(e)}$ to $A_{e,0}$ respectively. Denote by $\mathscr{E}_0$ the evaluation of $\mathscr{E}$ at $\mathscr{Y}$ and let $\omega \in H^0(A_{e,0}, \mathscr{E}_0 \otimes \Omega^1_{Y^{\times\times}/K_0})$. Then

$$\omega = \sum_{a=1}^{\alpha} \epsilon_a^0 \otimes \Big(\Big(\sum_{n\geq 0} \alpha_{a,n} x^n\Big)\frac{dx}{x} + \Big(\sum_{n\geq 0} \beta_{a,n} y^n\Big)\frac{dy}{y}\Big),$$

where $\{\epsilon_a^0\}_{1\leq a\leq s}$ is a basis of horizontal sections of $\mathscr{E}_0|_{A_{e,0}}$. As $xy=0$ on $A_{e,0}$, $dx/x=-dy/y$ and we define

$$\mathrm{Res}_e(\omega)=\big(\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{s}\epsilon_a^0(\alpha_{a,0}-\beta_{a,0})|_{A_{e,0}\cap T_{a(e),0}},\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{s}\epsilon_a^0(\alpha_{a,0}-\beta_{a,0})|_{A_{e,0}\cap T_{b(e),0}}\big)$$

$$\in H^0_{dR}(A_{e,0}\cap T_{a(e),0}/K_0,\mathscr{E}_0)\oplus H^0_{dR}(A_{e,0}\cap T_{b(e),0}/K_0,\mathscr{E}_0).$$

Thus we defined a K_0-linear homomorphism

$$\mathrm{Res}_e : H^1_{dR}(A_{e,0}^{\times\times}/K_0,\mathscr{E}_0)\longrightarrow H^0_{dR}(A_{e,0}\cap T_{a(e)}/K_0,\mathscr{E}_0)\oplus H^0_{dR}(A_{e,0}\cap T_{b(e),0}/K_0,\mathscr{E}_0)$$

for every $e\in e(G)$.

Now we define residue maps Res and respectively $\mathrm{Res}^{(0)}$ by the compositions:

$$\mathbb{H}=H^1_{dR}(X/S,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\log(Y)))\longrightarrow\oplus_{e\in e(G)}\big(H^1_{dR}(A_e/S,\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\log(Y\cap A_e)))\overset{\oplus_e\mathrm{Res}_e}{\longrightarrow}H^{1,0}(\mathscr{C}',E_{\mathrm{rel}}),$$

and

$$H^1(Y,\mathscr{E}):=H^1_{dR}(Y^{\times\times}/K_0,\mathscr{E}_0)\longrightarrow\oplus_{e\in e(G)}H^1_{dR}(A_{e,0}^{\times\times}/K_0,\mathscr{E}_0)\overset{\oplus_e\mathrm{Res}_e}{\longrightarrow}H^{1,0}(\mathscr{C}'_0,\mathscr{E}_0).$$

In the above sequences, the first arrows are restrictions.

Remark 4.1. — *Let L,B be as in section §3.2. Then we immediately obtain an $\mathscr{O}_B$-linear residue map* $\mathrm{Res}_B:=\mathrm{Res}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{O}_B:\mathbb{H}_B\longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}''_B,E_{\mathrm{rel}})$.

Remark 4.2. — *Let*

$$\big((\omega_v)_v,(\omega_e)_e,(f_e,\overline{f}_e)_e\big)\tag{2}$$

be a hypercocycle for the complex of sheaves $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}\otimes\Omega^{\bullet}_{X/S}(\log(Y))$ with respect to the covering $\mathscr{C}'$, representing a cohomology class $x\in\mathbb{H}$. Here $\omega_v\in\mathscr{E}_X(T_v)\otimes\Omega^1_{T_v/S}$, $\omega_e\in\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(A_e)\otimes\Omega^1_{A_e/S}(\log Y)$, $f_e\in\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(T_{a(e)}\cap A_e)$ and $\overline{f}_e\in\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(T_{b(e)}\cap A_e)$ and they satisfy the cocycle conditions.

We may express Res *defined above explicitly in terms of cocycles as follows:* $\mathrm{Res}(x)$ *is the image in $H^{1,0}(\mathscr{C}',E_{\mathrm{rel}})$ of the cocycle* $(\mathrm{Res}_e(\omega_e))_{e\in e(G)}$.

Next we would like to describe the fibers of Res. Let $s\in S-\{0\}$ and $\mathscr{C}'_s$ the covering of the fiber X_s obtained by intersecting the open sets of $\mathscr{C}'$ with X_s. Let also $\mathscr{C}_s$ be the intersection of the covering $\mathscr{C}$ (defined in Section 3.5.3.1) with X_s. Both $\mathscr{C}'_s,\mathscr{C}_s$ are admissible covers of X_s by acyclic wide open subsets and $\mathscr{C}'_s$ is a refinement of $\mathscr{C}_s$. Let us consider the graphs associated to these covers, i.e., G' and G respectively. We have (see Remark 2.5)

Lemma 4.3. — *Let $s\in S-\{0\}$. Then under the identification between $H^{1,0}(\mathscr{C}_s,\mathscr{E}_s)$ and $H^{1,0}(\mathscr{C}'_s,\mathscr{E}_s)$ in Lemma 3.34* $(\mathrm{Res})_s=\mathrm{Res}^{(s)}$, *where* $(\mathrm{Res})_s$ *is the fiber of* Res *at s and for the notation* $\mathrm{Res}^{(s)}$ *see Remark 2.5.*

Proof. — This follows from the definitions and the explicit description of the isomorphism in Lemma 3.34 and we leave the details to the reader. □

Now let us concentrate on describing the fiber $(\mathrm{Res})_0$ of Res at $s = 0$. Let us first remark that from the definition of an isocrystal and the definitions of the log structures on $\mathfrak{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{S}$ we have natural isomorphisms

$$\big(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^i_{X^{\times\times}/S^{\times}}\big) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \cong \mathscr{E}_0 \otimes_{\mathscr{O}_Y} \Omega^i_{Y^{\times\times}/K_0},$$

for $i \geq 0$. Let $j : Y \subset X$ be the natural inclusion.

Lemma 4.4. — $(\mathrm{Res})_0(x) = \mathrm{Res}^{(0)}(j^*x)$ *for all* x *section of* $\mathbb{H}$.

Proof. — The inclusion j induces an isomorphism $\mathbb{H}/t\mathbb{H} \overset{j^*}{\cong} H^1(Y, \mathscr{E})$ therefore it is enough to prove: if $x \in \mathbb{H}$ then we have $j^*(\mathrm{Res}(x)) = \mathrm{Res}^{(0)}(j^*x)$. Let x be represented by a hypercocycle as in formula (2) above. Then for each $e \in e(G)$ we have

$$\omega_e = \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i^{(e)} \otimes \Big(\sum_{n,m \geq 0} a^{(e)}_{i,n,m} x_e^n x_{\tau(e)}^m \Big) \frac{d_{\mathrm{X/S}}(x_e)}{x_e},$$

where $\{\epsilon_i^{(e)}\}$ is a basis of horizontal sections of $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{A_e}$ for all e and $a^{(e)}_{i,n,m} \in K_0$ are such that the power series converge on A_e. With these notations we have $\mathrm{Res}_e(\omega_e) = (\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i^{(e)}|_{T_{a(e)} \cap A_e} \sum_{n \geq 0} a_{i,n,n} t^n, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i^{(e)}|_{T_{b(e)} \cap A_e} \sum_{n \geq 0} a_{i,n,n} t^n)$. Now

$$j^*(\mathrm{Res}(\omega)) = \mathrm{Image}(\mathrm{Res}_e(\omega_e))_{e \in e(G(X))} (\mathrm{mod}\ tH^{1,0}(\mathscr{C}', E_{\mathrm{rel}}))$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{\alpha} j^*(\epsilon_i^{(e)})|_{A_{e,0} \cap T_{a(e),0}} a^{(e)}_{i,0,0}, \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{\alpha} j^*(\epsilon_i^{(e)})|_{A_{e,0} \cap T_{b(e),0}} a^{(e)}_{i,0,0}\Big)_e.$$

On the other hand, $j^*(x)$ is represented by the hypercocycle $\{(j^*(\omega_v))_v, (j^*(\omega_e))_e, (j^*(f_e), j^*(\overline{f}_e)_e\}$. In particular, for every $e \in e(G)$ let us denote by $y_e, y_{\tau(e)}$ the images $j^*(x_e)$ and respectively $j^*(x_{\tau(e)})$. With these notations $y_e y_{\tau(e)} = 0$ and we have

$$j^*(\omega_e) = \sum_{i=1}^{\alpha} j^*(\epsilon_i^{(e)}) \otimes \Big(a^{(e)}_{i,0,0} + \sum_{n \geq 1} a^{(e)}_{i,n,0} y_e^n + \sum_{m \geq 1} a^{(e)}_{i,0,m} y_{\tau(e)}^m\Big) \frac{d(y_e)}{y_e},$$

so

$$\mathrm{Res}_e^{(0)}(j^*(x)) = \Big(\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{\alpha} j^*(\epsilon_i^{(e)})|_{A_{e,0} \cap T_{a(e),0}} a^{(e)}_{i,0,0}, \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{\alpha} j^*(\epsilon_i^{(e)})|_{A_{e,0} \cap T_{b(e),0}} a^{(e)}_{i,0,0}\Big) = j^*(\mathrm{Res}_e(\omega_e)).$$

□

Let us define by $N_0 \colon H^1(Y, \mathscr{E}) \longrightarrow H^1(Y, \mathscr{E})$ the composition $(\mathrm{Res})_0 \circ \iota_0$ where

$$\iota_0 \colon H^{1,0}(\mathscr{C}'_0, \mathscr{E}_0) \longrightarrow H^1(Y, \mathscr{E})$$

is the map induced from the Mayer-Vietoris exact sequence for Y and the covering $\mathscr{C}'_0$.

We have the following

Proposition 4.5. — *The* $\mathscr{O}_S$*-linear map* Res *is horizontal with respect to the connections, i.e.* $\mathrm{Res} \colon (\mathbb{H}, \nabla) \longrightarrow (H^{1,0}(\mathscr{C}', E_{\mathrm{rel}})), \nabla^{1,0})$ *satisfies* $\mathrm{Res} \circ \nabla^{1,0} = \nabla \circ \mathrm{Res}$.

Proof. — Let $x \in \mathbb{H}$ be represented by a hypercocycle as in formula (2). We have $\nabla(x) = y \otimes \mathrm{dlog}(t)$, where y is represented by a hypercocycle $\big((\eta_v)_v, (\eta_e)_e, (g_e, \overline{g}_e)_e\big)$ as in the proof of Proposition 3.35. To calculate $\mathrm{Res}(y)$ we only need to look at the η_e's. To start with, we may write

$$\omega_e = \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes r_i(t) \frac{d_{\mathrm{X/S}}(x_e)}{x_e} + D_{\mathrm{X/S}}(G_e),$$

where $\{\epsilon_i\}_{i=1,\alpha}$ is as before a basis of horizontal sections of $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ over A_e, $r_i(t) \in \mathscr{O}_S(S)$ and $G_e \in \mathscr{E}_X(A_e)$. Then, let us denote by

$$\tilde{\omega}_e : = \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes r_i(t) \frac{\mathrm{d}_{X/K_0}(x_e)}{x_e} + D_{\mathrm{X/K_0}}(G_e).$$

It is a lift of ω_e to "absolute differentials", i.e., to $\mathscr{E}_X(A_e) \otimes \Omega^1_{A_e/K_0}(\log Y)$. Then η_e may be chosen such that

$$\eta_e \wedge \mathrm{dlog}(t) = \mathrm{D}_{X/K_0}(\tilde{\omega}_e) = \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes tr_i'(t) \frac{\mathrm{d}_{X/K_0}(x_e)}{x_e} \wedge \mathrm{dlog}(t),$$

therefore

$$\mathrm{Res}_e(\eta_e) = (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{A_e \cap T_{a(e)}} tr_i'(t), \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{A_e \cap T_{b(e)}} tr_i'(t)).$$

On the other hand

$$\nabla(\iota \circ \mathrm{Res}(\omega)) = \nabla[\big((0_v)_v, (0_e)_e, (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{A_e \cap T_{a(e)}} \otimes r_i(t), \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{A_e \cap T_{b(e)}} \otimes r_i(t))_e\big)]$$

$$= [\big((0_v)_v, (0_e)_e, (\frac{1}{2} \sum_{1}^{\alpha} \epsilon_i|_{A_e \cap T_{a(e)}} \otimes tr_i'(t), \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i|_{A_e \cap T_{b(e)}} \otimes tr_i'(t))_e\big)] \otimes \mathrm{dlog}(t).$$

This proves the proposition. □

Proposition 4.6. — *Under the parallel transport isomorphism of Theorem 2.6,* $N_0 \otimes \mathrm{id}_K$ *is identified with* N_{int}.

Proof. — Let $N : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ be the composition $\mathbb{H} \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^{1,0}(\mathscr{C}', E_{\mathrm{rel}}) \longrightarrow \mathbb{H}$ where the second morphism is the one coming from the Mayer-Vietoris sequence (see section §3.5.2). Then by Proposition 4.5 N is horizontal and hence it induces a homomorphism $N : (\mathbb{H}_{\log})^{\nabla} \longrightarrow (\mathbb{H}_{\log})^{\nabla}$. By Lemma 4.3 and Lemma 4.4 the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccccc} H^1(Y, \mathscr{E}) & \cong & (\mathbb{H}_{\log})^{\nabla} & \longrightarrow & H^1(C_K, \mathscr{E}_\pi) \\ N_0 \downarrow & & N \downarrow & & N_{\mathrm{int}} \downarrow \\ H^1(Y, \mathscr{E}) & \cong & (\mathbb{H}_{\log})^{\nabla} & \longrightarrow & H^1(C_K, \mathscr{E}_\pi). \end{array}$$

□

4.2. The proof of the equality of the monodromy operators. — The main result of this section is

Theorem 4.7. — *Under the notations of section §4.1 we have* $N_0 = N_{\mathrm{deg}}$.

Proof. — We will extend scalars to a finite, non-trivial, totally ramified extension L of K_0 and let $B = B_L \subset S$ be the affinoid disk as in Lemma 3.17. Recall Proposition 3.18 i.e., for all $v \in v(G)$ there is a wide open neighborhood W_v of $Z_{v,B}$ in $U_{v,B}$ and an isomorphism over B

$$\alpha_v = \alpha_{v,0} \colon W_v \cong B \times W_{v,0},$$

where $W_{v,0} = W_v \cap Y$. Let pr_i, $i = 1, 2$ be the i-th projection composed with α_v, i.e., $\mathrm{pr}_1 \colon W_v \to B$, $\mathrm{pr}_2 \colon W_v \to W_{v,0}$. As α_v is an isomorphism over B, pr_1 is the structure morphism of W_v over B.

Let us now fix v and let $U = \alpha_v^{-1}(U_0 \times B)$ where $U_0 \subset W_v \cap Y$ is any admissible open subset. We have

Lemma 4.8. — a) *The canonical isomorphism*

$$\Omega^1_{U^*/L} \cong \mathrm{pr}_1^* \Omega^1_{B^*/L} \oplus \mathrm{pr}_2^* \Omega^1_{U_0/L},$$

where $U^* = U - U_0$ *and* $B^* = B - 0$, *induces an isomorphism of sheaves on* U*:*

$$\Omega^1_{U/L}(\log Y) \cong \mathrm{pr}_1^* \Omega^1_{B/L}(\log 0) \oplus \mathrm{pr}_2^* \Omega^1_{U_0/L}.$$

b) *The isomorphism at a) induces an isomorphism of sheaves:*

$$\Omega^1_{U/B}(\log Y) \cong \mathrm{pr}_2^* \Omega^1_{U_0/L},$$

and an isomorphism of $\mathscr{O}_B(B)$*-modules*

$$\Omega^1_{U/B}(\log Y)(U) \cong \mathscr{O}_B(B) \hat{\otimes} \Omega^1_{U_0/L}(U_0)$$

where $\hat{\otimes}$ *denotes completed tensor product.*

Proof. — For a) it is enough to see that we have an isomorphism of "pairs"

$$(U, U_0) \cong (B, \{0\}) \times (U_0, \phi),$$

where ϕ is the void set, i.e., that $U \cong B \times U_0$ and under the above isomorphism $U_0 \cong (\{0\} \times U_0) \cup (B \times \phi)$.

For b) let us notice that we have an isomorphism of sheaves on U:

$$\Omega^1_{U/B}(\log Y) \cong \Omega^1_{U/L}(\log Y) / \mathrm{pr}_1^* \Omega^1_B(\log 0) \cong \mathrm{pr}_2^* \Omega_{U_0/L}(\log Y).$$

Now the lemma follows easily. □

Let us recall from section §3.5.3.3 that the set $\mathscr{C}''_B := \{W_v, A_{e,B}\}_{v \in v(G), e \in e(G)}$ is an admissible cover of $X_B := X \times_S B$. From Lemma 4.8 it follows that for all $v \in v(G)$ and $U \subset W_v$ as above, the canonical projection:

$$\Omega^1_{W_v/L}(\log Y)(U) \longrightarrow \Omega^1_{W_v/B}(\log Y)(U)$$

has a natural section, call it s_v with the property that its image is a submodule of $\Omega^1_{W_v/L}(U)$. Therefore for every section ω of $\Omega^1_{W_v/B}(\log Y)$ we have a lift of it $s_v(\omega)$ to absolute 1-forms, which is a regular absolute one-form by the remark above.

Moreover, if say $e \in e(G)$ then we also have a natural choice of a lift to absolute forms as follows. Let us recall that we have $\mathscr{O}_B(B) = L\langle y\rangle$ with the restriction $\mathscr{O}_S(S) \longrightarrow \mathscr{O}_B(B)$ given by: $t \longrightarrow \pi_L y$. Let $c := |\pi_L| < 1$.

Lemma 4.9. — *Let $\omega \in \Omega^1_{A_{e,B}/B}(\log Y)(A_{e,B})$, then we can write $\omega = r(y)\dfrac{d_{\mathrm{X/S}}(x_e)}{x_e} + d_{\mathrm{X/S}}(u_e)$ where $r(y)$ is a global section of $\mathscr{O}_B$ and $u_e \in \mathscr{O}_{X_B}(A_{e,B})$.*

Proof. — For this proof let us denote $U := A_{e,B}$ and $A(U) := \mathscr{O}_{X_B}(U)$, $x = x_e$ and $z = x_{\tau(e)}$. By Lemma 3.16, the natural functions $x, z \in A(U)$ satisfy $xz = \pi_L y$ and if $f \in A(U)$ then f may be written

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m z^m,$$

with $a_n, b_m \in \mathscr{O}_B(B)$ and such that, for every r such that $c < r < 1$ the sequences $|a_n|_B r^n \longrightarrow 0$ and $|b_n|_B (c/r)^n \longrightarrow 0$ as $n \longrightarrow \infty$.

Therefore $\omega = f d_{\mathrm{U/B}}(x)/x = d_{\mathrm{U/B}}(g) + a_0 d_{\mathrm{U/B}}(x)/x$, where

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m} z^m \in A(U).$$

This proves the lemma. □

A lift to absolute 1-forms of ω as in Lemma 4.9 is then defined by:

$$\tilde{\omega}_e : = r(y)\frac{d_{\mathrm{X/K_0}}(x_e)}{x_e} + d_{\mathrm{X/K_0}}(u_e).$$

Proof of Theorem 4.7. Let $x \in \mathbb{H}_B$ be represented by the hypercocycle $\big((\omega_v)_v, (\omega_e)_e, (f_e, \overline{f})_e\big)$ with respect to $\mathscr{C}''_B$ (as in in Formula 3.3.2). Let us recall that v runs over $v(G)$ and e over $e(G)$. Then ω_e can be written as

$$\omega_e = \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes (r_{e,i}(y))\frac{d_{\mathrm{X/S}}(x_e)}{x_e} + D_{\mathrm{X/S}}(E_i)) = -\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes (r_{e,i}(y))\frac{d_{\mathrm{X/S}}(x_{\tau(e)}}{x_{\tau(e)}} + D_{\mathrm{X/S}}(E_i)),$$

where $\{\epsilon_i\}_{1\leq i\leq \alpha}$ is a horizontal basis of $\mathscr{E}_B|_{A_{e,B}}$, $E_i \in \mathscr{E}_B(A_{e,B})$ for all i and $r_{e,i}(y)$ are global sections of $\mathscr{O}_B$. The variables x_e and $x_{\tau(e)}$ have been defined in Lemma 3.16 and their restrictions to $A_{e,B}$ satisfy $x_e x_{\tau(e)} = \pi_L y$.

We want to calculate $\nabla(x)$ and its residue. $\nabla(x)$ is represented by the hypercocycle $\big((\eta_v)_v, (\eta_e)_e, (g_e, \overline{g}_e)_e\big)$, where

$$D_{\mathrm{X/K_0}}(s_v(\omega)_v) = \eta_v \wedge \mathrm{dlog}(y) \quad \text{and} \quad D_{\mathrm{X/S}}(\tilde{\omega}_e) = \eta_e \wedge \mathrm{dlog}(y),$$

for $v \in v(G)$ and $e \in e(G)$. Also

$$s_{a(e)}(\omega_{a(e)})|_{A_{e,B}\cap W_{a(e)}} - \tilde{\omega}_e|_{A_{e,B}\cap W_{a(e)}} - D_{\mathrm{X/S}}(f_e) = g_e \mathrm{dlog}(y),$$

and

$$\tilde{\omega}_e|_{A_{e,B}\cap W_{b(e)}} - s_{b(e)}(\omega_{b(e)})|_{A_{e,B}\cap W_{b(e)}} - D_{\mathrm{X/S}}(\overline{f}_e) = \overline{g}_e \mathrm{dlog}(y).$$

Let us recall that $s_v(\omega_v)$ is always a regular 1-form. Also,

$$\tilde{\omega}_e|_{A_{e,B}\cap W_{a(e)}} := r(y)\frac{d_{\mathrm{X/K_0}}(x_e)}{x_e} + d_{\mathrm{X/K_0}}(u_e)$$

is also regular as x_e is invertible on $A_{e,B}\cap W_{a(e)}$. On the other hand we have

$$\tilde{\omega}_e|_{A_{e,B}\cap W_{b(e)}} = r(y)\frac{d_{\mathrm{X/K_0}}(x_e)}{x_e} + d_{\mathrm{X/K_0}}(u_e) = r(y)\frac{d(y)}{y} - r(y)\frac{d_{\mathrm{X/K_0}}(x_{\tau(e)})}{x_{\tau(e)}} + d_{\mathrm{X/K_0}}(u_e),$$

and the form $-r(y)\frac{d_{\mathrm{X/K_0}}(x_{\tau(e)})}{x_{\tau(e)}} + d_{\mathrm{X/K_0}}(u_e)$ is regular on $W_{b(e)}\cap A_{e,B}$ because the function $x_{\tau(e)}$ is invertible on this open set.

Therefore we have: $\mathrm{Res}_{y=0}(\eta_v) = \mathrm{Res}_{y=0}(\eta_e) = 0$ for all $v \in v(G), e \in e(G)$, $\mathrm{Res}_{y=0}(g_e) = 0$ and $\mathrm{Res}_{y=0}(\overline{g}_e) = \sum_{i=1}^{\alpha} r_{e,i}(0)\epsilon_i|_{A_{e,B}\cap W_{b(e)}}$ for $e \in e(G)$. Thus, we have that $\mathrm{Res}_{y=0}(\nabla(x))$ is represented by the hypercocycle

$$\big((0_v)_v, (0_e)_e, (0_e, \sum_{i=1}^{\alpha} r_{e,i}(0)\epsilon_i|_{A_{e,B}\cap W_{b(e)}})_e\big)$$

whose cohomology class in $H^1(Y,\mathscr{E})\otimes_{K_0} L$ is the same as the class of

$$\big((0_v)_v, (0_e)_e, (\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha} r_{e,i}(0)\epsilon_i|_{A_{e,B}\cap W_{a(e)}}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\alpha} r_{e,i}(0)\epsilon_i|_{A_{e,B}\cap W_{b(e)}})_e\big)$$

which is

$$\mathrm{Res}(x) \pmod{y\mathbb{H}_B}.$$

This proves that $N_{\mathrm{deg}}\otimes_{K_0}\mathrm{id}_L = N_0\otimes_{K_0}\mathrm{id}_L$. As N_{deg} and N_0 are both endomorphisms over K_0 of the finite dimensional K_0 vector space $H^1(Y,\mathscr{E})$, and as they become equal after base change to the extension L of K_0, they are equal. This ends the proof of Theorem 4.7. □

5. Frobenii

5.1. Frobenius and K_0-structures on $H^{i,j}(\mathscr{C}_s,\mathscr{E}_s)$. — In this section we supply a number of details needed in section §2.2. Namely let us resume the notations of section §3.2. Let $X \longrightarrow S$ be our family of curves, $\mathscr{C} = \{U_v\}_{v\in v(G)}$ be the admissible covering of X defined there. Fix $s \in S$ a point such that $s \neq 0$ and for an object M over S M_s will be the fiber of M over s. Let $\mathscr{C}_s := \{U_{v,s}\}_{v\in v(G)}$ and if $e = [u,v] \in e(G)$ then $A_{e,s} = A_e \times_S s = U_{u,s}\cap U_{v,s}$. Let us also denote by $\overline{s}$ the image under red : $S \longrightarrow \mathscr{S} = \mathrm{Spf}(W[[t]])$ of the point $s \in S$ and by $\mathfrak{X}_s := \mathfrak{X}\otimes_{\mathscr{S}}\overline{s}$. In particular if $s = \pi$, then $X_s = C_K$ and $\mathfrak{X}_s = C$ in section §2.2. Let $\mathscr{E}$ denote an F-isocrystal on $\overline{C}$ and let $\mathscr{E}_s$ denote the evaluation of $\mathscr{E}$ on the enlargement $\mathfrak{X}_s$.

We will define the canonical K_0-structures and Frobenii on $H^{1,0}(\mathscr{C}_s,\mathscr{E}_s)$ and $H^{1,0}(\mathscr{C}_s,\mathscr{E}_s)$ needed in section §2.2.

For the rest of this section we fix s and denote $U_{v,s}, A_{e,s}$ simply by U_v, A_e.

Lemma 5.1. — *Suppose that the residue field of s is L. For every $e \in e(G)$ we have a canonical isomorphism of L-vector spaces*

$$H^0_{\mathrm{cris}}(e/W, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} L \cong H^0_{dR}(A_e, \mathscr{E}_s|_{A_e}),$$

where above e denotes the singular point of $\overline{C}$ corresponding to the edge e.

Proof. — As mentioned before, A_e is a wide open enlargement of $e \in \overline{C}$, i.e. let us consider the formal completion of $\mathfrak{X}_s$ along e, $(\mathfrak{X}_s)_{/e}$. It is a formal scheme such that $(\mathfrak{X}_s)^{\mathrm{rig}}_{/e} \cong A_e$. Therefore $\mathscr{E}_s|_{A_e} \cong \mathscr{E}_{(\mathfrak{X}_s)_{/e}}$ and $H^0_{\mathrm{cris}}(e/W, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} L \cong H^0_{dR}(A_e, \mathscr{E}_s|_{A_e})$. □

Let us remark that the isomorphism of lemma 5.1 endows $H^0_{dR}(A_e, \mathscr{E}_s|_{A_e})$ with a canonical K_0-structure and a Frobenius, namely $H^0_{\mathrm{cris}}(e/W, \mathscr{E})$ with its Frobenius, ϕ^0_e.

Let us fix $v \in v(G)$ and $\overline{C}_v$ the component of $\overline{C}$ corresponding to v. Let is denote by $\overline{C}_v^{\times\times}$ the log scheme $\overline{C}_v$ with log structure given by the smooth divisor of the singular points in $\overline{C}$ belonging to $\overline{C}_v$.

Lemma 5.2. — *In this lemma s may be 0. For $i = 0, 1$ we have natural isomorphisms of L-vector spaces*

$$H^i_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} L \cong H^i_{dR}(U_v, \mathscr{E}_s|_{U_v}).$$

Proof. — Let $\mathrm{red} : X_s \longrightarrow \overline{C}$ denote the reduction map and let $Z_v = \mathrm{red}^{-1}(\overline{C}^0_v)$, where $\overline{C}^0_v$ is the complement in $\overline{C}_v$ of the singular points in $\overline{C}$. Then Z_v is an underlying affinoid of U_v with good reduction (its reduction is $\overline{C}^0_v$). Let us denote by $\mathrm{Sing}_v := \overline{C}_v - \overline{C}^0_v$. As $\overline{C}_v$ is a smooth proper curve over k, there exists a pair (C', Q) consisting of a smooth proper curve C' over $\mathscr{O}_L$ and an étale divisor Q on C' such the special fiber of (C', Q) is $(\overline{C}_v, \mathrm{Sing}_v)$. Let us denote $\widehat{C}' := C'_{/\overline{C}_v}$ the formal completion of C' along its special fiber, let $C'_L := (\widehat{C}')^{\mathrm{rig}}$ and $\mathrm{red} : C'_L \longrightarrow \overline{C}_v$ be the reduction map. If we denote $Z'_v := \mathrm{red}^{-1}(\overline{C}^0_v)$ then $Z_v \cong Z'_v$ and we'll identify the two. We claim that we may choose the pair (C', Q) such that the isomorphism $Z_v \cong Z'_v$ extends to an open immersion $U_v \hookrightarrow C'_L$. This can be seen as follows: let us "add the affinoid disks to U_v to close the holes". We obtain a smooth proper rigid curve with a smooth proper formal model whose special fiber is $\overline{C}_v$. This formal model is algebrizable, i.e. it is the formal completion along reduction of a smooth proper curve over $\mathscr{O}_L$, which may be taken to be C'. In any case, the open immersion $U_v \hookrightarrow C'_L$ has the property that its complement is a disjoint union of affinoid disks, containing Q and each contained in the residue class of the points $e \in \mathrm{Sing}_v$.

We have the natural morphisms of formal schemes over $\mathscr{O}_L$:

$$\overline{C} \hookleftarrow \overline{C}_v \hookrightarrow \widehat{C}',$$

which make $\widehat{C}'$ an enlargement of $\overline{C}$. Let us denote by $\mathscr{E}_{C'}$ the evaluation of $\mathscr{E}$ on this enlargement. It is a coherent sheaf with connection on C'_L.

Claim 1. — $\mathscr{E}_{C'}|_{U_v}$ is isomorphic to $\mathscr{E}_s|_{U_v}$ as coherent sheaves with connections.

To see this let us first recall that we have open immersions $U_v \hookrightarrow X_s$ and $U_v \hookrightarrow C'_L$ and X_s, C'_L have formal models $\mathfrak{X}_s, \widehat{C'}$ respectively. Moreover, by the description of the embedding $U_v \hookrightarrow C'_L$ given above the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccccc} U_v & \hookrightarrow & X_s & \xrightarrow{\text{red}} & \overline{C} \\ || & & & & \cup \\ U_v & \hookrightarrow & C'_L & \xrightarrow{\text{red}} & \overline{C}_v \end{array}$$

Let now $V \subset U_v$ be an admissible open. By applying lemma 3.1 we obtain canonical formal models $\mathscr{V}' \longrightarrow \widehat{C'}$ and $\mathscr{V} \longrightarrow \mathfrak{X}_s$ and by the diagram above and section 3.1.2 we obtain a natural morphism $\mathscr{V}' \longrightarrow \mathscr{V}$ inducing the identity on generic fibers and such that the following diagram of special fibers commutes

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathscr{V}}' & \longrightarrow & \overline{\mathscr{V}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{C}_v & \hookrightarrow & \overline{C} \end{array}$$

Thus we obtain a diagram of enlargements

$$\begin{array}{ccc} (\overline{\mathscr{V}}' \hookrightarrow \mathscr{V}') & \longrightarrow & (\overline{\mathscr{V}} \hookrightarrow \mathscr{V}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\overline{C}_v \hookrightarrow \widehat{C'}) & & (\overline{C} \hookrightarrow \mathfrak{X}_s) \end{array}$$

which shows that $\mathscr{E}_{C'}$ and $\mathscr{E}_s$ coincide on V. This proves the claim.

Let $\overline{C}_v^{\times\times}$ and $\widehat{C'}^{\times\times}$ denote the scheme $\overline{C}_v$, respectively formal scheme $\widehat{C'}$ with log structures given by the divisor Sing_v, respectively by the divisor Q. Now let us see that we have natural morphisms

$$H^i_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} L \cong H^i_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/\mathscr{O}_L, \mathscr{E}) \cong H^i_{dR}(C'_L, \mathscr{E}_{C'}(\log(Q)) \longrightarrow H^i_{dR}(U_v, \mathscr{E}_s|_{U_v}),$$

the first two being naturally isomorphisms.

In order to prove the lemma let us remark that we have natural isomorphisms of L-vector spaces $H^i_{dR}(C'_L - Q, \mathscr{E}_{C'}|_{C'_L - Q}) \cong H^i_{dR}(C'_L, \mathscr{E}_{C'}(\log(Q)))$ for $i = 0, 1$. We will prove

Claim 2. — Restrictions induce isomorphisms between $H^i_{dR}(C'_L - Q, \mathscr{E}_{C'}|_{C'_L - Q}) \cong H^i_{dR}(U_v, \mathscr{E}_s|_{U_v})$ for all $i \geq 0$.

For $i = 0$ the statement of the claim is clear. The proof of the claim for $i = 1$ is by an excision argument presented in theorem 4.2 of **[7]** for the case of trivial $\mathscr{E}$. The main idea is for a rigid analytic space M to find good definitions of "closed subsets" and their "admissible open neighbourhoods" and to use the Gysin long exact sequence as in **[22]**.

We say that a subset Z of M is closed if it is the complement in M of an admissible open subset. Given such a Z, we say that U is an admissible neighbourhood of Z if

U is a strict neighbourhood of Z in M. Let us recall that this means $Z \subset U$, U is an admissible open of M and the family $\{U, M - Z\}$ is an admissible covering of M.

Now if $\mathscr{F}$ is a sheaf of abelian groups on M we define $\Gamma_Z(M, \mathscr{F})$ to be the sections $s \in \mathscr{F}(U)$ supported in Z for any strict neighbourhood U of Z. The functor $\mathscr{F} \longrightarrow \Gamma_Z(M, \mathscr{F})$ is left exact and therefore if $\mathscr{F}^\bullet$ is a complex of sheaves on M we define the hypercohomology groups with supports, $\mathbb{H}^i_Z(M, \mathscr{F}^\bullet)$ to be the hyper-right derived functors of $\Gamma_Z(M, -)$. By corollary 1.9 of **[22]** if $\mathscr{F}^\bullet$ is a complex of sheaves on M we have a long exact sequence (the Gysin sequence):

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}^0_Z(M, \mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^0(M, \mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^0(X - Z, \mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^1_Z(M, \mathscr{F}^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Moreover, if U is a strict neighbourhood of Z in M we have excision, i.e. canonical isomorphisms

$$\mathbb{H}^i_Z(M, \mathscr{F}^\bullet) \cong \mathbb{H}^i_Z(U, \mathscr{F}^\bullet) \text{ for all } i \geq 0.$$

Let us now apply this theory to: $M = C'_L - Q$, $Z = (C'_L - U_v) - Q$. Let us remark that $C'_L - U_v$ is a disjoint union of closed disks contained each in the residue class of one point of Sing_v and containing exactly one point of Q. So in fact $Z = M - U_v$ is closed in M. Let us denote by $(E, D) = (\mathscr{E}_{C'}|_M, D|_M)$ the restriction to M of the coherent sheaf with connection $(\mathscr{E}_{C'}, D)$ and let $\mathscr{F}^\bullet := E \otimes_{\mathscr{O}_M} \Omega^\bullet_{M/L}$. The interesting part of the Gysin sequence reads:

$$\mathbb{H}^1_Z(M, R \otimes_{\mathscr{O}_M} \Omega^\bullet_{M/L}) \longrightarrow H^1_{dR}(C'_L - Q, E) \longrightarrow H^1_{dR}(U_v, E|_{U_v}) \longrightarrow \mathbb{H}^2_Z(M, E \otimes_{\mathscr{O}_M} \Omega^\bullet_{M/L}).$$

Let us now explicitly calculate $\mathbb{H}^i_Z(M, E \otimes_{\mathscr{O}_M} \Omega^\bullet_{M/L})$. Let U' denote a disjoint union of wide open disks in C'_L containing $C'_L - U_v$ and contained in the union of the residue disks of the points of Sing_v. Then $U' - Q$ is a strict neighbourhood of Z in M and excision implies

$$\mathbb{H}^i_Z(M, E \otimes_{\mathscr{O}_M} \Omega^\bullet_{M/L}) \cong \mathbb{H}^i_Z(U' - Q, E|_{U'-Q} \otimes_{\mathscr{O}_{U'-Q}} \Omega^\bullet_{(U'-Q)/L}) \text{ for all } i \geq 0.$$

The Gysin sequence for the pair $(U' - Q, Z)$ and the restriction of E to $U' - Q$ which we denote by E' gives

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}^0_Z(U' - Q, E' \otimes \Omega^\bullet_{(U'-Q)/L}) \longrightarrow H^0_{dR}(U' - Q, E') \longrightarrow H^0_{dR}(U' - Z, E') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathbb{H}^1_Z(U' - Q, E' \otimes \Omega^\bullet_{(U'-Q)/L}) \longrightarrow H^1_{dR}(U' - Q, E') \longrightarrow H^1_{dR}(U' - Z, E') \ldots$$

First let us remark that as U' is contained in a union of residue classes, $(E|_{U'}, D|_{U'})$ has a basis of horizontal sections. Let us denote by $E^D := H^0_{dR}(U', E_{U'})$. Second let is remark that $U' - Q$ is a disjoint union of punctured disks containing the disjoint union of wide open annuli $U' - Z$. Therefore we have the following commutative diagram where the horizontal arrows are induced by restrictions and the last vertical ones are

residue maps.

$$\begin{array}{ccc} H^1_{dR}(U'-Q,E') & \longrightarrow & H^1_{dR}(U'-Z,E') \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ H^1_{dR}(U'-Q)\otimes_L E^D & \longrightarrow & H^1_{dR}(U'-Z)\otimes_L E^D \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0_{dR}(U'-Q,E') & = E^D = & H^0_{dR}(U'-Z,E') \end{array}$$

As the residue maps for punctured disks and annuli are isomorphisms the first horizontal arrow is an isomorphism and the Gysin sequence for $(U'-Q,Z)$ above implies that $\mathbb{H}^i_Z(M,E\otimes_{\mathscr{O}_M}\Omega^\bullet_{M/L})=0$ for all $i\geq 0$. This proves the claim.

Claim 3. — We claim that for $i=0,1$ the composed isomorphism

$$H^i_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/\mathscr{O}_L,\mathscr{E})\cong H^1_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v})$$

is independent of the choice of C' and the choice of embedding $U_v\hookrightarrow C'_L$.

The proof of this claim is standard: suppose (C'',Q'') is another such pair defined over $\mathscr{O}_L$, with an embedding $U_v\hookrightarrow C''_L$. We let $\widehat{C}_1$ to be the formal completion along $\overline{C}_v$ of the fiber product $C'\times C''$. By the Poincaré lemma we have isomorphisms

$$H^i_{dR}(C'_L,\mathscr{E}_{C'}\log(Q))\longrightarrow H^i_{dR}((C_1)^{\mathrm{rig}},\mathscr{E}_{C_1}(\log(Q\cup Q''))\longleftarrow H^i_{dR}(C''_L,\mathscr{E}_{C''}(\log(Q'')),$$

compatible with the homomorphisms from $H^i_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v})$ induced by the immersions $U_v\hookrightarrow C'_L$, $U_v\hookrightarrow C''_L$ and the diagonal immersion $U_v\hookrightarrow(C_1)^{\mathrm{rig}}$. □

As before the isomorphisms in lemma 5.2 endow the L-vector spaces $H^i_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v})$ with natural K_0-structures with Frobenii, namely $H^i_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times},\mathscr{E})$ for $i=0,1$ with their Frobenii.

For $e\in e(G)$ let us denote by $\mathscr{E}_e:=\mathscr{E}_s|_{A_e}$ and let us now concentrate on the L-vector space $H^1_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e)$. These spaces do not have an interpretation as crystalline cohomology groups, nevertheless we have residue isomorphisms

$$\mathrm{Res}_e: H^1_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e)\cong H^0(A_e,\mathscr{E}_e),$$

and may define the K_0-structure of the domain to be the inverse image of the K_0-structure of the target, i.e. to be $\mathrm{Res}^{-1}(H^0_{\mathrm{cris}}(e/W,\mathscr{E}))$. Moreover let us endow this K_0-structure with a Frobenius ϕ^1_e defined by $\phi^1_e=p\mathrm{Res}_e^{-1}\circ\phi^0_e\circ\mathrm{Res}_e$. We have

Lemma 5.3. — *Let $e\in e(G)$ and suppose the vertex $v\in v(G)$ is the origin or the end of e. Then, for $i=0,1$ the natural restriction maps: $H^i_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v})\longrightarrow H^i_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e)$ respect the K_0-structures and the Frobenii.*

Proof. — For $i=0$ this follows from the commutativity of the diagram

$$\begin{array}{ccc} H^0_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v}) & \longrightarrow & H^0_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ H^0_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W,\mathscr{E})\otimes_{K_0}L & \longrightarrow & H^0_{\mathrm{cris}}(e/W,\mathscr{E})\otimes_{K_0}L \end{array}$$

where the lower horizontal map is the restriction $H^0_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W,\mathscr{E}) \longrightarrow H^0_{\mathrm{cris}}(e/W,\mathscr{E})$ tensored with L over K_0.

For $i=1$ we'll use residues. First we have a natural residue map Res which makes the following sequence exact:

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v/W,\mathscr{E}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W,\mathscr{E}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \oplus_{\mathrm{e}\in\mathrm{Sing_v}} H^0_{\mathrm{cris}}(e/W,\mathscr{E})(1).$$

Here the twist by 1 refers to a twist as filtered, Frobenius modules. Moreover, the following diagram of L-vector spaces with exact rows is commutative

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v/\mathscr{O}_L,\mathscr{E}) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/\mathscr{O}_L,\mathscr{E}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \oplus_{\mathrm{e}\in\mathrm{Sing_v}} H^0_{\mathrm{cris}}(e/\mathscr{O}_L,\mathscr{E}) \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
0 & \longrightarrow & H^1_{dR}(C'_L,\mathscr{E}_{C'}) & \longrightarrow & H^1_{dR}(C'_L,\mathscr{E}_{C'}(\log(Q))) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \oplus_{\mathrm{P}\in\mathrm{Q}}(\mathscr{E}_{C'})_P \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\
0 & \longrightarrow & H^1_{dR}(\overline{C}_v/\mathscr{O}_L,\mathscr{E}_{C'}) & \longrightarrow & H^1_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \oplus_{\mathrm{e}\in\mathrm{Sing_v}} H^0_{dR}(A_e,\mathscr{E}_s|_{A_e})
\end{array}$$

where:

• The map Res : $H^1_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v}) \longrightarrow \oplus_{e\in\mathrm{Sing}_v} H^0_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e)$ in that diagram is the composition of the restriction $H^1_{dR}(U_v,\mathscr{E}_s|_{U_v}) \longrightarrow \oplus_{e\in\mathrm{Sing}_v} H^1_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e)$ and the direct sum of the residue maps $\mathrm{Res}_e : H^1_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e) \longrightarrow H^0_{dR}(A_e,\mathscr{E}_e)$.

and

• If we denote by ϕ^0,ϕ^1 the natural Frobenii on $H^0_{\mathrm{cris}}(e/W,\mathscr{E})$ and $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W,\mathscr{E})$ respectively and by $\mathrm{Res}_e : H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}/W,\mathscr{E}) \longrightarrow H^0_{\mathrm{cris}}(e/W,\mathscr{E})$ then we have: $\mathrm{Res}_e\phi^1 = p\phi^0\mathrm{Res}_e$.

These facts prove the lemma for $i=1$. □

5.2. F-isocrystals. — Let us go back to our notations of section 5.1: $X \longrightarrow S$ is our family of curves over the wide open unit disk, $s \in S-\{0\}$ is a point defined over L, X_s the fiber of X over s, $\mathfrak{X}_s$ the canonical formal model of X_s over $\mathscr{O}_L$ (defined in section 5.1) and $\overline{C}$ the special fiber of $\mathfrak{X}_s$. For $v \in v(G)$ let $\overline{C}_v$ denote the component of $\overline{C}$ corresponding to v and $\overline{C}_v^0$ the complement in $\overline{C}_v$ of the singular points of $\overline{C}$.

Then the composition $\overline{C}_v \hookrightarrow \overline{C} \hookrightarrow \mathfrak{X}_s$ is a closed immersion of formal schemes over $\mathscr{O}_L$ and $\overline{C}_v^0 \hookrightarrow \overline{C}_v$ is an affine open, therefore we denote $U = U_v = \mathrm{red}^{-1}(\overline{C}_v) = \left(\mathfrak{X}_s\right)_{/\overline{C}_v}^{\mathrm{rig}}$ and $Z = Z_v = \mathrm{red}^{-1}(\overline{C}_v^0)$. Then U is a one-dimensional wide open of X_s and $Z \subset U$ is a an underlying affinoid with good reduction.

Let $U \longrightarrow U \times_{\mathrm{Spm(L)}} U$ be the diagonal embedding. It is locally a closed immersion so let us denote by Δ_U the formal neighbourhood of the diagonal i.e. the completion of $U \times_{\mathrm{Spm(L)}} U$ along the diagonal morphism. Let $\pi_1,\pi_2 : U \times_{\mathrm{Spm(L)}} U \longrightarrow U$ denote the two projections.

If M is a locally free, coherent sheaf of $\mathscr{O}_U$-modules on U with an integrable connection D there is a unique horizontal isomorphism

$$h\colon \pi_1^*M|_{\Delta_U} \to \pi_2^*M_{\Delta_U}$$

which restricts to the identity on U. Locally on U we may assume that $\Omega^1_{U/L}$ is a free $\mathscr{O}_U$-module generated by dt, let ∂ denote the derivation dual to dt and also by $\partial = D_\partial : M \longrightarrow M$ the induced morphism. Let us denote by $u = \pi_1^*(t) - \pi_2^*(t)$ seen as a rigid function on Δ_U. With these notations, h is given (locally) by formulae

$$h(\pi_1^* m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \pi_2^*(\partial^n m),$$

for m (local) section of M.

Now let us look at the sequence of morphisms:

$$\overline{C}_v \xrightarrow{\Delta} \overline{C}_v \times_{\mathrm{Spec(k)}} \overline{C}_v \hookrightarrow \mathfrak{X}_s^2 := \mathfrak{X}_s \times_{\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_L)} \mathfrak{X}_s.$$

The composition is a closed immersion so let us define

$$\widetilde{\Delta}_U :=]\overline{C}_v[_{\mathfrak{X}_s^2} = \left((\mathfrak{X}_s^2)_{/\overline{C}_v}\right)^{\mathrm{rig}}.$$

Let us remark that $\widetilde{\Delta}_U$ is a tubular neighbourhood of the image under diagonal of U in $X_s \times_{\mathrm{Spm(L)}} X_s$.

Definition 5.4. — *We say the pair (M, D) is a* **convergent isocrystal** *on (U, Z) if h extends to $\widetilde{\Delta}_U$ (the extension is unique if it exists).*

Here are a few easy but very useful consequences of the definition. Suppose that (M, D) is a convergent isocrystal on (U, Z). If $f, g \colon T \to U$ are two morphisms from a rigid space T into U such that $(f, g)(T \times T) \subseteq \widetilde{\Delta}_U$, let $\chi_{f,g} = (f, g)^* h \colon f^* M \to g^* M$. As h is an isomorphism $\chi_{f,g}$ is an isomorphism of sheaves.

Lemma 5.5. — *The restriction of (M, D) to any residue class of (W, X) is trivial.*

Proof. — Let U be a residue class of (W, X). If there exists a point $P \in U(K)$, let $f, g \colon U \to W$ be the morphisms, the identity and $x \to P$, respectively. Then $f^* M = M|_U$, $g^* M$ is trivial and $\chi_{f\,g}$ is an isomorphism.

In general, base change to a Galois extension L of K such that $U(L) \neq \varnothing$, proceed as above for each irreducible component of U_L and then take invariants. □

Let us recall that $\overline{C}_v^0$ is a smooth affine curve over k contained in the smooth projective curve $\overline{C}_v$; therefore there is a smooth affine scheme of finite type over $\mathscr{O}_L$, $\mathrm{Spec}(A)$ lifting $\overline{C}_v^0$. The π_L-adic completion of A is isomorphic (non-canonically) to the ring of rigid functions on Z bounded by 1. Fix such an isomorphism and identify the two. Via this identification, proposition 3.14 (where R_k is been replaced by $\mathscr{O}_L$) gives

$$\mathrm{Spm}(A^\dagger \otimes_{\mathscr{O}_L} L) = \varinjlim_{,T} H^0(T, \mathscr{O}_U)$$

where T ranges over all strict affinoid neighbourhoods of Z in U. We have natural restriction maps $\mathscr{O}_U(U) \longrightarrow H^0(T, \mathscr{O}_U)$ which induce an $\mathscr{O}_L$-algebra homomorphism $\mathscr{O}_U(U) \longrightarrow A^\dagger \otimes_{\mathscr{O}_L} L$.

Therefore if (M, D) is a locally free coherent sheaf of $\mathscr{O}_U$-modules on U with an integrable connection we denote

$$M^\dagger := H^0(U, M) \otimes_{\mathscr{O}_U} (A^\dagger \otimes L).$$

It is a projective $A^\dagger \otimes L$-module with an integrable connection

$$D^\dagger : M^\dagger \longrightarrow M^\dagger \otimes_{A^\dagger \otimes L} \Omega^1_{(A^\dagger \otimes L)/L},$$

induced by D. We have a description of $\Omega^1_{(A^\dagger \otimes L)/L}$ as $\varinjlim_{T} H^0(T, \Omega^1_{T/L})$, where T runs over the strict affinoid neighbourhoods of Z in U (see [**1**], section §2.5.)

Let $u_0 : \overline{C}_v^0 \longrightarrow \overline{C}_v^0$ be a morphism of schemes over k, let A, A' be smooth $\mathscr{O}_L$-algebras of finite type such that $\mathrm{Spec}(A)$ and $\mathrm{Spec}(A')$ lift $\overline{C}_v^0$ and let $u : A^\dagger \longrightarrow A'^\dagger$ be a $\mathscr{O}_L$-algebra homomorphism lifting the k-algebra homomorphism corresponding to u_0 (see for example theorem 3.7.)

Define the category $\mathrm{Mic}_{A^\dagger \otimes L}$ to be the category of finitely generated projective $A^\dagger \otimes L$-modules with integrable convergent connections. Then the $\mathscr{O}_L$-algebra morphism u defines a functor which preserves convergence $u^* : \mathrm{Mic}_{A'^\dagger \otimes L} \longrightarrow \mathrm{Mic}_{A^\dagger \otimes L}$ and which is an equivalence of categories if u_0 is a isomorphism.

In particular for $u_0 = id_{\overline{C}_v^0}$, we see that $(M^\dagger, D^\dagger)$ is independent of the choice of the lifting A.

Also, let us first fix $\sigma : \mathscr{O}_L \longrightarrow \mathscr{O}_L$ an automorphism which lifts Frobenius of k. Let $f := [k : \mathbb{F}_p]$ and denote by $\overline{F} = \mathrm{Frob}^f : \overline{C}_v \longrightarrow \overline{C}_v$. Then $\overline{F}(\overline{C}_v^0) \subset \overline{C}_v^0$ and let $\phi : A^\dagger \longrightarrow A^\dagger$ be a lift of $\overline{F}$ over σ.

Definition 5.6. — *A convergent F-isocrystal on (U, Z) is the following family of data*

- *A convergent isocrystal (M, D) on (U, Z)*

and

- *a horizontal isomorphism $F_\phi : \phi^*(M^\dagger, D^\dagger) \longrightarrow (M^\dagger, D^\dagger)$ for every morphism $\phi : A^\dagger \longrightarrow A^\dagger$ which is a lifting of $\overline{F}$.*

Let us remark that if ϕ_1, ϕ_2 are two liftings as in definition 5.6 we have $F_{\phi_2} = F_{\phi_1} \circ \chi_{\phi_1, \phi_2}$.

Let now $\mathscr{E}$ be an F-isocrystal on $\overline{C}$. Let us recall that the formal completion of $\mathfrak{X}_s$ along the closed sub-scheme $\overline{C}_v$, $\mathfrak{U}_v := (\mathfrak{X}_s)_{/\overline{C}_v}$ is a smooth formal scheme over $\mathscr{O}_L$ such that $\mathfrak{U}_v^{\mathrm{rig}} = U_v = U$. Let us denote by $(\mathscr{E}_v, D_v)$ the evaluation of $\mathscr{E}$ on $\mathfrak{U}_v$, which is a wide open enlargement of $\overline{C}$. Here $(\mathscr{E}_v, D_v)$ is a pair consisting of a locally free, coherent $\mathscr{O}_U$-module with integral convergent connection D_v (convergence follows from [**1**] 2.2.2 and 2.3.4.) Moreover by definition 3.4 it follows that if $\phi_v : \mathfrak{U}_v \longrightarrow \mathfrak{U}_v$ is a lifting of $\overline{F}$ then we have an isomorphism $F_{\phi_v} : \phi_v^*(\mathscr{E}_v, D_v) \longrightarrow (\mathscr{E}_v, D_v)$.

We therefore clearly have

Lemma 5.7. — *The pair $(\mathscr{E}_v, D_v)$ is a convergent F-isocrystal on (U, Z).*

In fact by [**1**] corollary 2.5.8 the data of the F-isocrystal $(\mathscr{E}_v, D_v)$ is equivalent to the data: (M, D) where M is a finitely generated projective $A^\dagger \otimes L$-module, D :

$M \longrightarrow M \otimes_{A^\dagger \otimes L} \Omega^1_{(A^\dagger \otimes L)/L}$ is an integrable connection such that if $\phi : A^\dagger \longrightarrow A^\dagger$ is a lifting of $\overline{F}$, there is a horizontal isomorphism $\Phi : \phi^* M \longrightarrow M$. The convergence of the connection is a consequence of the existence of Φ.

We need to consider one example of a relative convergent isocrystal. Let as above Z be our affinoid over L and $f \in \mathscr{O}_Z(Z)^*$, $|f| < 1$. Let An be the rigid analytic space over L in $Z \times \mathbb{B}^1_L$ whose $\mathbb{C}_p$-points are $\{(z,b) \colon |f(z)| < |b| < 1\}$. This is a family of annuli over Z. Let T be the rigid function on An defined by $T(z,b) = b$ and $\tilde{\Delta}_{An/Z}$ be the neighbourhood of the relative diagonal $\Delta_{An/Z}$ in $An \times_Z An$ over Z whose points are

$$\{(x,y) \in An \times_Z An : |\frac{T(x)}{T(y)} - 1| < 1\}.$$

The diagonal morphism $An \longrightarrow An \times_Z An$ is a closed immersion. We denote by $\widehat{\Delta}_{An/Z}$ the formal completion of $An \times_Z An$ along its image. Let π_1, π_2 denote the natural projection from $An \times_Z An$ to An. Suppose M is a coherent sheaf of $\mathscr{O}_{An}$-modules, $D : M \longrightarrow M \otimes_{\mathscr{O}_{An}} \Omega^1_{An/Z}$ a (relative) integrable connection over Z and such that the formal horizontal isomorphism $h \colon \pi_1^* M|_{\widehat{\Delta}_{An/Z}} \to \pi_2^* M|_{\widehat{\Delta}_{An/Z}}$ which is the identity when restricted to $\Delta_{An/Z}$ extends to $\tilde{\Delta}_{An/Z}$ (i.e. (M,D) is a convergent isocrystal.)

Then we have

Lemma 5.8. — *Suppose that (M,D) is a locally free sheaf of $\mathscr{O}_{An}$-modules on An with a relative, integrable convergent connection D as above. We use h to identify $\pi_1^* M$ and $\pi_2^* M$ on $\tilde{\Delta}_{An/Z}$. Let ω be a section of $M \otimes_{\mathscr{O}_{An}} \Omega^1_{An/Z}$. Then there is a unique section ϵ of $\pi_1^*(M)$ on $\tilde{\Delta}_{An/Z}$ such that*

$$\pi_1^* D(\epsilon) = \pi_1^*(\omega)|_{\tilde{\Delta}_{An/Z}} - \pi_2^*(\omega)|_{\tilde{\Delta}_{An/Z}},$$

and such that $\epsilon|_{\Delta_{An/Z}} = 0$.

Proof. — For simplicity let us denote for this proof $U := \tilde{\Delta}_{An/Z}$. We claim that we have a natural isomorphism $\phi : U \cong An \times_{\mathrm{Sp(L)}} S_L$ as rigid spaces over Z, where let us recall S_L is the wide open unit disk over L. The isomorphism and its inverse $\psi : An \times_{\mathrm{Sp(L)}} S_L \longrightarrow U$ are defined as follows

$$\phi\big((z,b),(z,b')\big) := \big((z,b), b'b^{-1}\big) \text{ and } \psi\big((z,b),a\big) = \big(z,b),(z,(1+a)b\big).$$

This implies (see lemma 3.5 in section §3.1.3) that for any admissible affinoid open V of An the morphism of complexes

$$(M \otimes \Omega^\bullet_{An/Z})(V) \longrightarrow (\pi_1^*(M) \otimes \Omega^\bullet_{U/Z})(\pi_1^{-1}(V) \cap U)$$

is a quasi isomorphism and hence pull-back by the diagonal immersion

$$\Delta^* : (\pi_1^*(M) \otimes \Omega^\bullet_{U/Z})(\pi_1^{-1}(V) \cap U) \longrightarrow (M \otimes \Omega^1_{An/Z})(V)$$

is a quasi-isomorphism. In degree $0,1$ this implies that for any section $\eta \in (\pi_1^*(M) \otimes \Omega^1_{U/Z})(\pi_1^{-1}(V) \cap U)$ such that $D(\eta) = 0$ and $\Delta^*(\eta) = 0$, there exists a unique section

$\epsilon \in \pi_1^*(M)(\pi_1^{-1}(V) \cap U)$ such that $D(\epsilon) = \eta$ and $\Delta^*(\epsilon) = 0$. Now we apply this to the case $\pi_1^{-1}(V) \cap U = \pi_2^{-1}(V) \cap U$ and $\eta = \pi_1^*(\omega) - \pi_2^*(\omega)$ for a section $\omega \in (M \otimes \Omega^1_{An/Z})(V)$. □

Remark 5.9. — *In the notations of lemma 5.8 M has a basis of horizontal sections on An.*

Proof. — Let L' be a finite Galois extension of L such there exists a section $s : Z_{L'} \longrightarrow An_{L'}$ of the structure morphism $g : An_{L'} \longrightarrow Z_{L'}$ (the subscript L' denotes extension of scalars to L'). For example, suppose there is a $b_0 \in \mathbb{B}^1_L(L')$ such that $|f| < |b_0| < 1$. We may define s by $s(z) = (z, b_0)$ and thus we have a morphism $u =: (id_{An}, s) : An = An \times_Z Z \longrightarrow U$. Then u^*h gives a horizontal isomorphism of $M_{L'}$ to the module with trivial relative connection $g^*s^*M_{L'}$, defined over L'. Now take $\mathrm{Gal}(L'/L)$ invariants to get a basis of horizontal sections of M. □

Let us also notice that remark 5.9 implies that in lemma 5.8 one could reduced to the case where (M, D) is trivial and then prove the lemma by elementary calculations.

5.3. Lifts of Frobenius. — Recall $X \longrightarrow S$ is a family of curves over the wide open unit disk and $\mathscr{E}$ is an F-isocrystal on $\overline{C}$. We have defined a Frobenius $\varphi : S \longrightarrow S$ over the absolute Frobenius σ on $\mathrm{Spec}(K_0)$ in section 2.1 and $\mathscr{E}$ comes equipped with an isomorphism of isocrystals on $\overline{C}$

$$F : \overline{F}^*(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{E}$$

where $\overline{F}$ is the Frobenius on $\overline{C}$ over the absolute Frobenius σ on $\mathrm{Spf}(W)$.

Using F we have defined a Frobenius operator $\Phi_1 \colon \varphi^*\mathbb{H}^1 \longrightarrow \mathbb{H}^1$ in section 2.1. Let $f := [k : \mathbb{F}_p]$. We will give an explicit description of the "linearized Frobenius", Φ_1^f using "local lifts of Frobenius" to X.

Recall, from section 3.2, the admissible cover of X, $\mathscr{C}' = \{T_v, A_e\}_{v \in v(G), e \in e(G)}$. We intend to construct local lifts of F, so we will need to refine this cover in two ways. First let L be a finite, non-trivial, totally ramified extension of K_0 and $B^1 = B_L$ the affinoid disk around 0 of radius $|\pi_L|$, where π_L is some uniformizer of L. Let B^2 be the affinoid disk around 0 of radius $|\pi_L^{p^f}|$, where $f = [k : \mathbb{F}]$. Then $\psi = \varphi^f \otimes_{K_0} \mathrm{id}_L$, maps B^1 to B^2. Similarly, let $\overline{F}_k^*(\mathscr{E})$ denote the isocrystal on $\overline{C}$ defined by: $\overline{F}_k^*(\mathscr{E})_{(T, z_T)} = \mathscr{E}_{(T, \overline{F}_k \circ z_T)}$, where let us recall that $\overline{F}_k = \overline{F}^f$ is the Frobenius endomorphism over k of $\overline{C}$, and by $F_k : (\overline{F}_k)^*(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{E}$ the f-iterate of F.

For the rest of this chapter we use the following notations: for every $v \in v(G), i = 1, 2$ let $Z_v^i := Z_v \times_S B^i$, $U_{B^i, v} := U_v \times_S B^i$, $A_e^i := A_e \times_S B^i$.

We have

Proposition 5.10. — a) *For every $v \in v(G)$ there exist wide open strict neighbourhoods $U_v^i \subset U_{B^i, v}$ of Z_v^i over B^i and a rigid morphism $\phi_v : U_v^1 \longrightarrow U_v^2$ over ψ, i.e. such*

that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} U_v^1 & \xrightarrow{\phi_v} & U_v^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^1 & \xrightarrow{\psi} & B^2 \end{array}$$

b) *The morphism* ϕ_v *at* a) *is a lift of Frobenius i.e. the following diagram commutes*

$$\begin{array}{ccccc} U_v^1 & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{\text{red}} & \overline{C} \\ \phi_v \downarrow & & & & \overline{F}^f \downarrow \\ U_v^2 & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{\text{red}} & \overline{C} \end{array}$$

Proof. — For $i = 1, 2$ let W_v^i denote wide open strict neighbourhoods of Z_v^i in $U_{B^i,v}$ such that there exist isomorphisms of rigid spaces over B^i (see proposition 3.18)

$$\alpha_v^i : W_v^i \cong W_{v,0}^i \times B^i,$$

where $W_{v,0}^i$ is the fiber at $s = 0 \in B^i$ of W_v^i. Then $W_{v,0}^i$ is a wide open strict neighbourhood of $Z_{v,0}$ in $U_{v,0}$. As $Z_{v,0} =]\overline{C}_v^0[_{\mathfrak{x}_0}$, as in the discussion after the proof of lemma 5.5 let A be a smooth $\mathscr{O}_L$-algebra of finite type such that $\mathrm{Spec}(A)$ is a lifting of $\overline{C}_v^0$. We identify $A^\dagger$ with a sub $\mathscr{O}_L$-algebra of the ring of rigid functions on $Z_{v,0}$ and let $\Phi_v : A^\dagger \longrightarrow A^\dagger$ be a lifting of $\overline{F}^f : \overline{C}_v \longrightarrow \overline{C}_v$. We may choose strict affinoid neighbourhoods T^i of $Z_{v,0}$ in $W_{v,0}^i$ such that $\Phi_v(T^1) \subset T_v^2$. As in the proof of proposition 3.18 define wide open neighbourhoods $U_{v,0}^i$ of $Z_{v,0}^i$ in $W_{v,0}^i$ over B^i such that $\Phi_v(U_{v,0}^1) \subset U_{v,0}^2$. For later use let us remark that we may choose $U_{v,0}^2$ such that $U_{v,0}^2 - Z_{v,0}$ is a disjoint union of wide open annuli. Let now $U_v^i := (\alpha_v^i)^{-1}(U_{v,0}^i \times B^i)$ and $\phi_v : U_v^1 \longrightarrow U_v^2$ the morphism $\phi_v = \alpha_v^2 \circ (\Phi_v, \psi) \circ (\alpha_v^1)^{-1}$. By definition we have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} U_v^1 & \xrightarrow{\phi_v} & U_v^2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ U_{v,0}^1 \times B^1 & \xrightarrow{(\Phi_v, \psi)} & U_{v,0}^2 \times B^2 \end{array}$$

compatible with the projections to B^1 respectively B^2. The conclusion follows. □

We now give a general definition of a "lifting of Frobenius" and some of its properties.

(1) For two admissible opens $U^i \subset X_{B^i}$, $i = 1, 2$, we say that an L-morphism $\phi : U^1 \longrightarrow U^2$ is a lifting of Frobenius over $\psi : B^1 \longrightarrow B^2$ if the following two natural diagrams commute

$$\begin{array}{ccc} U^1 & \xrightarrow{\phi} & U^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^1 & \xrightarrow{\psi} & B^2 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccc} U^1 & \hookrightarrow & X_{B^1} & \xrightarrow{\text{red}} & (\mathfrak{X}_{\mathscr{B}^1})_1 & = & \overline{C} \times \mathbb{A}^1_k \\ \phi \downarrow & & & & & & F^f \downarrow \\ U^2 & \hookrightarrow & X_{B^2} & \xrightarrow{\text{red}} & (\mathfrak{X}_{\mathscr{B}^2})_1 & = & \overline{C} \times \mathbb{A}^1_k \end{array}$$

Let us recall that in the second diagram $\mathscr{B}^i$ denote the natural formal models of B^i defined in section 3.2 and $(\mathfrak{X}_{\mathscr{B}^i})_1$ the closed sub-schemes of $\mathfrak{X}_{\mathscr{B}^i}$ defined by the ideals $\pi_L \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_{\mathscr{B}^i}}$, for $i = 1, 2$. F denotes the absolute Frobenius of $\overline{C} \times \mathbb{A}^1_k$.

The commutativity of the above two diagrams is equivalent to the commutativity of the diagram:

$$\begin{array}{ccccc} U^1 & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{\text{red}} & \overline{C} \\ \phi \downarrow & & & & \overline{F}^f \downarrow \\ U^2 & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{\text{red}} & \overline{C} \end{array}$$

(2) For any lifting of Frobenius $\phi : U^1 \longrightarrow U^2$, we have a canonical horizontal isomorphism $F_\phi : \phi^*(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^1}) \cong \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^2}$. Here $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ denotes the evaluation of the F-isocrystal $\mathscr{E}$ on the (wide open) enlargement $\mathfrak{X}$ of $\overline{C}$.

Proof. — First let us assume that U^1, U^2 are affinoids. Let $\mathscr{U}^1, \mathscr{U}^2$ be the canonical formal models of of U^1, U^2 constructed as in lemma 3.1 using the p-adic formal models $\mathfrak{X}_{\mathscr{B}^1}, \mathfrak{X}_{\mathscr{B}^2}$ over $\mathscr{O}_L$. Moreover the commutative diagram in (1) above and the remarks after the proof of lemma 3.1 provide a morphism $\varphi : \mathscr{U}^1 \longrightarrow \mathscr{U}^2$ whose generic fiber is ϕ and which induces $\overline{F}^f$ in the special fiber. Now $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^1}, \phi^*(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^2})$ are in fact isomorphic to the evaluations of $\mathscr{E}$, respectively of $(\overline{F}^f)^*(\mathscr{E})$ on the enlargement $\mathscr{U}^1$. Now the definition of the F-isocrystal $\mathscr{E}$ provides the F_ϕ.

In general, choose an admissible affinoid covering of U^2 and an admissible affinoid covering of U^1 which refines the inverse image under ϕ of the covering of U^2. The functorially of the construction in lemma 3.1 imply that the local F_ϕ's glue. □

(3) If $\phi, \phi' : U^1 \longrightarrow U^2$ are two liftings of Frobenius there is a canonical horizontal isomorphism $\chi_{\phi,\phi'} : \phi^*(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^2}) \longrightarrow \phi'^*(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^2})$ compatible with $F_\phi, F_{\phi'}$. For three liftings, they satisfy the cocycle condition.

Proof. — This follows from the fact that $\phi^*(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{U^2})$ is canonically isomorphic to the evaluation of $(\overline{F}^f)^*(\mathscr{E})$ on the enlargement $\mathscr{U}^1$ defined in the proof of (2) above and again from the properties of F-isocrystals. □

Let U^i_v, $i = 1, 2$, $v \in v(G)$ denote admissible open subsets of X_{B^i} over B^i whose properties were proved in proposition 5.10. In fact we will choose the U^i_v's as in the proof of proposition 5.10 i.e. such that for every $v \in v(G)$, $i = 1, 2$ there are isomorphisms of rigid spaces over B^i: $\alpha^i_v : U^i_v \cong U^i_{v,0} \times B^i$ where $U^i_{v,0}$ are the fibers of U^i_v at $s = 0$ and they are wide open strict neighbourhoods of $Z_{v,0}$ in $W^i_{v,0}$. Moreover, $U^2_{v,0} - Z_{v,0}$ is a disjoint union of wide open annuli.

Let us note that $\mathscr{C}^i = \{U^i_v, A^i_e\}_{v\in v(G), e\in e(G)}$ where $i = 1, 2$ are admissible covers of X_{B^i} by acyclic, admissible open subsets. For every $e \in e(G)$ we have morphisms $\phi_e : A^1_e \longrightarrow A^2_e$, over $\psi : B^1 \longrightarrow B^2$ defined by $\phi_e(x_e) = x_e^{p^f}$ and $\phi_e(x_{\tau(e)}) = x^{p^f}_{\tau(e)}$.

Let F_v, F_e denote the Frobenii provided by (2) above.

$$F_v : \phi_v^*(\mathscr{E}_X|_{U^2_v}) \longrightarrow \mathscr{E}_X|_{U^1_v} \quad \text{for all v}$$

and respectively

$$F_e : \phi_e^*(\mathscr{E}_X|_{A^2_e}) \longrightarrow \mathscr{E}_X|_{A^1_e} \quad \text{for all e.}$$

The description of the Frobenius $\Phi_1^f : \psi^*\mathbb{H}_{B^2} \longrightarrow \mathbb{H}_{B^1}$. — We can now give the description of the Frobenius operator. Let $\mathscr{C}^i = \{U^i_v, A^i_e\}_{v\in v(G), e\in e(G)}$ be the respective open covers of X_{B^i}.

Recall, $\mathscr{E}$ is an F-isocrystal on $\overline{C}$ and let F_v, F_e be as above. Let $\omega \in \mathbb{H}_{B^2} = H^1_{dR}(X_{B^2}/B^2, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\log(Y)))$ be represented by the hypercocycle with respect to $\mathscr{C}^2$:

$$\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (\omega_e)_{e\in e(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}, (\overline{f}_e)_{e\in e(G)}\big).$$

Now we define a hypercocycle of the relative de Rham complex of $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ with respect to $\mathscr{C}^1$ whose cohomology class in $\mathbb{H}_{B^1}$ represents $\Phi_1^f(\psi^*\omega)$.

Let us remark that for $e \in e(G)$ we have (see the proof of proposition 5.10)

$$U^2_{a(e)} \cap A^2_e = (U^2_{v,0} \cap A^2_{e,0}) \times B^2 = \{|a| < |x_{e,0}| < 1\} \times B^2,$$

where $x_{e,0}$ is the restriction of x_e to $A_{e,0}$ and $a \in L$ is such that $|\pi_L^{p^f}| < |a| < 1$. Thus the rigid space $An := U^2_{a(e)} \cap A^2_e$ is a family of annuli over the affinoid $Z = B^2$ and we may apply lemma 5.8 to the sheaf with relative connection $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}|_{An}, D_{\mathrm{X_{B^2}/B^2}})$. We let $\tilde{\Delta}_{(U^2_{a(e)}\cap A^2_e)/B^2}$ denote the neighbourhood of the relative diagonal in $An \times_{B^2} An$ defined in that lemma. There exists a unique section $\epsilon_e \in \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\tilde{\Delta}_{(U^2_{a(e)}\cap A^2_e)/B^2})$ such that

$$\pi_1^* D_{X_{B^2}/B^2}(\epsilon_e) = \pi_1^*(\omega_{a(e)}|_{\tilde{\Delta}_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e/B^2}}) - \pi_2^*(\omega_{a(e)}|_{\tilde{\Delta}_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e/B^2}}),$$

and whose restriction to the diagonal vanishes.

Let us define

$$\nu_v = F_v(\phi_v^*(\omega_v)), \quad \nu_e = F_e(\phi_e^*(\omega_e)) \quad h_e = \Delta^*(F_{a(e)} \circ \phi^*_{a(e)}, F_e \circ \phi_e^*)(\epsilon_e) + F_e(\phi_e^*(f_e)),$$

$$\overline{h}_e := \Delta^*(F_{b(e)} \circ \phi^*_{\underline{(e)}}, F_e \circ \phi_e^*)(\epsilon_e) + F_e(\phi_e^*(\overline{f}_e)).$$

Then the collection $\big((\nu_v)_{v\in v(G)}, (\nu_e)_{e\in e(G)}, (h_e)_{e\in e(G)}, (\overline{h}_e)_{e\in e(G)}\big)$ is a hypercocycle for the relative logarithmic de Rham complex of $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ on X_{B^1}/B^1 with respect to the covering $\mathscr{C}^1$. Its cohomology class depends only on ω and is equal to $\Phi_1^f(\omega)$.

To see this let us recall the notations and results of section 3.4.3. Namely let us recall that we denoted $\mathfrak{X}^{\times\times}$ the formal scheme $\mathfrak{X}$ with log structures on $\mathscr{Y}$, let $\mathscr{S}^{\times}$ denote the formal scheme $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(W[[t]])$ with log structures at $t = 0$ and let $\overline{C}^{\times\times}$

denote the scheme $\overline{C}$ with inverse image log structure from $\mathfrak{X}^{\times\times}$. If for $e \in e(G)$ we denote also by e the singular point of $\overline{C}$ corresponding to the edge e we have $\left((\mathfrak{X}^{\times\times})_{/e}\right)^{\mathrm{rig}} = A_e$ and

$$\left((\mathfrak{X}^{\times\times} \times_{\mathscr{S}^\times} \mathfrak{X}^{\times\times})_{/e}\right)^{\mathrm{rig}} \times_S B^2 \cong \tilde{\Delta}_{(U^2_{a(e)} \cap A^2_e)/B^2}.$$

Clearly, under the identification of

$$H^1_{dR}(X/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}}(\log(Y)) \cong H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}^{\times\times}/S^\times, \mathscr{E}),$$

in section 3.4.3, after restricting to B^1, B^2 respectively, the image of the linearized crystalline Frobenius Φ^f is exactly the one defined above in terms of hypercocycles.

Remark 5.11. — *Let us recall from section 2.1 that* Φ *induces* Φ_{deg} *on* $H^1(Y, \mathscr{E})$ *and that it is horizontal with respect to the connection, i.e. we have*

$$(\Phi \circ \varphi^*) \circ \nabla = \nabla \circ \Phi.$$

Here we have dropped the index (respectively upper index) 1 *from the notation. Therefore we also have*

$$(\Phi^f \circ \phi^*) \circ \nabla = \nabla \circ \Phi^f.$$

5.4. Integration. — The theory of p-adic integration of convergent F-isocrystals on curves is the generalization of that developed by the first author in [**8**] (see also [**6**].) For the convenience of the reader we will briefly review the theory in what follows and prove the necessary generalizations.

Let us go back to the notations of section §5.2, i.e. let $s \in S$, X_s is the fiber of X over s defined over L and let us fix $v \in v(G)$. Let us consider the pair (U, Z), where $U = U_{v,s}, Z = Z_{v,s}$. Let us recall that Z is an affinoid over L with good reduction and U is a wide open neighbourhood of Z in X_s such that $U - Z$ is a disjoint union of wide open annuli.

Let (M, D) be a convergent F-isocrystal on (U, Z). An admissible open subset T of U will be called a residue class of (U, Z) if T is a residue class of Z or a connected component of $U - Z$. Lemma 5.5 implies that the restriction of (M, D) to every residue class of (U, Z) is trivial. We now define the sheaf M^{flog} with connection D^{flog} on U, as follows: we choose a branch log of the p-adic logarithm on L^* and define for an admissible open V of U

$$M^{\mathrm{flog}}(V) = \prod_T M(V_T) \otimes_{\mathscr{O}_{V_T}} \mathscr{O}_U(V_T)[\log(f)]_{f \in \mathscr{O}_U(V_T)^\times}$$

where T runs over the residue classes of (U, Z) and $V_T = V \cap T$. Here, for every V and T as above $\mathscr{O}_U(V_T)[\log(f)]_{f \in \mathscr{O}_U(V_T)^\times}$ is the sub-ring of the ring of locally analytic functions on V_T generated by $\mathscr{O}_U(V_T)$ and the functions $\log(f)$ for $f \in \mathscr{O}_U(V)^\times$. The connection extends naturally to this sheaf. Let $\Omega^\bullet_U(M^\circ)$ be the naturally induced de Rham complex of sheaves on U, where $\circ$ = nothing or flog. Here we have denoted by $\Omega^i_U(M^\circ) := \Omega^i_U \otimes_{\mathscr{O}_U} M^\circ$ for $i = 0, 1$. Let $(M^\circ)^\dagger$ denote the pullback of M° to

$Z^\dagger$ and let $H^i(M^\circ, D) := \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_U((M^\circ)^\dagger))$. Suppose ϕ is a lifting of Frobenius to $Z^\dagger$ as in section 5.2. Then as explained in [C1, §7] ϕ induces endomorphisms $(\varphi^i)^\circ$ of $H^i(M^\circ, D)$ (morally, $(\phi^i)^\circ = F_\phi \circ \phi^*$).

Note that $H^1(M^{\mathrm{flog}}, D^{\mathrm{flog}}) = 0$. We have

Theorem 5.12. — *Let $\omega \in \Omega^1_U(M)(U)$. We denote by $[\omega]$ its image in $H^1(M, D)$. Suppose that there is a polynomial $G(t)$ with coefficients in L such that*
(a) $G(\phi^1)([\omega]) = 0$ *and* (b) $G((\phi^0)^{\mathrm{flog}})$ *is an isomorphism.*
Then there exists a section u of $M^{\mathrm{flog}}(U)$, unique up to a horizontal section of M on U such that
i) $D(u) = \omega$
ii) $G(F_\phi \circ \phi^*)(u|_{X^\dagger})$ *is overconvergent on X.*
Moreover, u does not depend on the choice of ϕ or $G(t)$.

The existence and uniqueness is, up to notation, Theorem 7.4 of [C1] (the notion of regular singular annuli is subsumed by Lemma 5.1). The independence follows from the fact that the map $(\phi^i)^\circ$ does not depend on the choice of ϕ and we may choose for $G(t)$ the minimal polynomial of ϕ^1 acting on the finite dimensional space spanned by the classes of the images of $\omega, F_\phi \circ \phi^*\omega, (F_\phi \circ \phi^*)^2\omega, \dots$ in $H^1(M, D)$.

5.5. The Frobenius Operators

Definition 5.13. — *We say that the F-isocrystal $\mathscr{E}$ on $\overline{C}$ is* **regular** *if for every vertex $v \in v(G)$ the characteristic polynomials of Frobenius on $H^0_{\mathrm{cris}}(x, \mathscr{E})$ and $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}, \mathscr{E})$ are relatively prime for all closed points $i_x : x \longrightarrow \overline{C}_v$. We have denoted, as in section §5.1 by $\overline{C}_v$ the irreducible component of $\overline{C}$ corresponding to v and by $\overline{C}_v^{\times\times}$ the log scheme $\overline{C}_v$ with log structures given by the divisor* Sing_v

We have

Lemma 5.14. — *Let C be the curve over V with semi-stable reduction introduced in the introduction, let $g : \mathscr{T} \longrightarrow C$ be a smooth proper morphism and let us consider the F-isocrystal on $\overline{C}$, $\mathscr{H}^i := R^i g_{*,cris}(\mathscr{O}_{\mathscr{T}})$. Then $\mathrm{Sym}^j(\mathscr{H}^i)$ is a regular F-isocrystal for $i, j \geq 0$.*

Proof. — Let $\bar{\mathscr{T}}$ denote the special fiber of $\mathscr{T}$, $\bar{\mathscr{T}}_v$ the pull back of $\bar{\mathscr{T}} \longrightarrow \overline{C}$ by $\overline{C}_v \subset \overline{C}$

The Leray spectral sequence for log crystalline cohomology in the relative situation $g_v : \bar{\mathscr{T}}_v \longrightarrow \overline{C}_v$ for log structures on $\overline{C}_v$ given by Sing_v and on $\bar{\mathscr{T}}_v$ given by the fiber above Sing_v, reads

$$E_2^{i,j} = H^i(\overline{C}^{\times\times}, R^j g_{\mathrm{v,cris},*}(\mathscr{O}_{\bar{\mathscr{T}}_v})) \Rightarrow H^{i+j}_{\mathrm{cris}}(\bar{\mathscr{T}}_v^{\times\times}, \mathbb{Q}_p).$$

Let us first remark that $\mathscr{H}^j_v = R^j g_{\mathrm{v,cris},*}(\mathscr{O}_{\bar{\mathscr{T}}_v})$ is the pull back of $\mathscr{H}^j$ by the inclusion $\overline{C}_v \hookrightarrow \overline{C}$.

As $\overline{C}_v$ is a smooth proper curve over k let us also remark that $E_2^{i,j} = 0$ unless $0 \leq i \leq 2$. This implies that the differential $d_2 : E_2^{1,j} \longrightarrow E_2^{3,j-1}$ vanishes as well as

the differential d_2 whose target is $E_2^{1,j}$ for all $j \geq 0$. Therefore $E_3^{1,j} = E_2^{1,j}$ for all $j \geq 0$ and the spectral sequence collapses at E_3. Therefore, for $n \geq 0$ the K_0-vector space with Frobenius $H^{n+1} = H^{n+1}_{\mathrm{cris}}(\bar{\mathscr{T}}_v^{\times\times}, \mathbb{Q}_p)$ has a filtration $0 \subset F^1 \subset F^2 \subset H^{n+1}$ where F_1, F^2 have the property that $F^2/F^1 \cong E_3^{1,n}$. By the comment above it follows that $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}, \mathscr{H}^n)$ is a quotient, as K_0-vector space with Frobenius, of a subspace, F_2 of H^{n+1}.

By the main result of **[28]** $H^{n+1}_{\mathrm{cris}}(\overline{Z}_v^{\times\times}, \mathbb{Q}_p) \cong H^{n+1}_{\mathrm{rig}}(\overline{Z}_v - \mathrm{Sing}_v, \mathbb{Q}_p)$ and by **[3]** the weights of Frobenius on the last K_0-vector space are larger or equal to $(n+1)/2$. It follows that the weights of Frobenius on $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}, \mathscr{H}^n))$ are also larger or equal to $(n+1)/2$. On the other hand, since $\overline{Z}_x$ is smooth and $H^0(\mathscr{H}_x^n) \cong K \otimes H^i_{\mathrm{cris}}(\overline{Z}_x)$ for any point x of $\overline{C}_v$, using the Riemann hypothesis, the weights of Frobenius on $H^0(\mathscr{H}_x^n) \cong H^0_{\mathrm{cris}}(x, i_x^* \mathscr{H}^n)$ are all equal to $n/2$. Thus the characteristic polynomials of Frobenius on $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}, \mathscr{H}^n))$ and $H^0(x, \mathscr{H}^n)$ are relatively prime for all closed points x of $\overline{C}$. The statement for $\mathrm{Sym}^j(\mathscr{H}^i)$ follows by the same type of arguments. □

For the rest of this chapter we assume $\mathscr{E}$ is regular. Let us now, as in the previous section, extend scalars to a finite, non-trivial, totally ramified extension L of K and let $B = B_L \subset S$ be the affinoid disk of lemma 3.17. Let us recall proposition 3.18 which asserts that for all $v \in v(G)$ there is a wide open neighbourhood W_v of $Z_{v,B}$ in $U_{v,B}$ over B and an isomorphism over B

$$\alpha_{v,0} : W_v \longrightarrow B \times W_{v,0},$$

where $W_{v,0}$ is the fiber of W_v at $0 \in B$. Let us denote by $f_B : X_B \longrightarrow B$ the restriction of our family of curves to B. Let us now fix v and denote $\alpha := \alpha_{v,0}$, $W_0 := W_{v,0}$. Let $\beta : W_v \longrightarrow W_0$ be $\pi_2 \circ \alpha$ and $j : W_0 \longrightarrow W_v$ be defined by $j(w) = \alpha^{-1}(0, w)$. Let $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ and $\mathscr{E}_{\mathscr{Y}}$,denote the evaluations of $\mathscr{E}$ on $\mathfrak{X}$ and $\mathscr{Y}$, where let us recall that $\mathscr{Y} := \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathrm{Spf}(W)$ where the morphism $\mathrm{Spf}(W) \longrightarrow \mathscr{S}$ is given by $t \longrightarrow 0$. $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ and $\mathscr{E}_{\mathscr{Y}}$ are coherent sheaves with connections on $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ and respectively $Y = \mathscr{Y}^{\mathrm{rig}}$. Denote also by $(\mathscr{E}_v, D_v), (\mathscr{E}_0, D_0)$ the restrictions of the sheaves with connections $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}, D_{X/S})$ and $(\mathscr{E}_{\mathscr{Y}}, D_Y)$ to W_v and respectively W_0. The isomorphism α induces the vertical isomorphisms in the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E}_v & \xrightarrow{D_v} & \mathscr{E}_v \otimes_{\mathscr{O}_{W_v}} \Omega^1_{W_v/B} \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \mathscr{E}_0 \otimes_L \mathscr{O}_B & \xrightarrow{D_0 \otimes \mathrm{id}_B} & \mathscr{E}_0 \otimes_{\mathscr{O}_{W_0}} \Omega^1_{W_0/L} \end{array}$$

This implies

Lemma 5.15. — a) *The L-vector space $H^1_{dR}(W_0/L, \mathscr{E}_0)$ is finitely generated.*

b) *We have a natural isomorphism of sheaves on B induced by α: $H^1_{dR}(W_v/B, \mathscr{E}_v) \cong H^1_{dR}(W_0/L, \mathscr{E}_0) \otimes_L \mathscr{O}_B$.*

Proof. — a) is a consequence of lemma 5.2 and b) follows from the above commutative diagram. □

Let us fix $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ global sections of $\mathscr{E}_0 \otimes_{\mathscr{O}_{W_0}} \Omega^1_{W_0/L}$ whose cohomology classes $[\omega_1], \dots, [\omega_n]$ form an L-basis of $H^1_{dR}(W_0/L, \mathscr{E}_0)$. Let now ω be a global section of $\mathscr{E}_v \otimes_{\mathscr{O}_{W_v}} \Omega^1_{W_v/B}$ and denote by $[\omega] \in H^1_{dR}(W_v/B, \mathscr{E}_v)(B)$ its cohomology class. Then $[\omega] = \sum_{i=1}^n a_i[\omega_i]$ for $a_i \in \mathscr{O}_B(B)$, $i = 1, n$ and therefore we have

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i\omega_i + D_v(f) \text{ for some } f \in \mathscr{E}_v(W_v).$$

Let us fix $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathscr{E}_0^{\mathrm{flog}}(W_0)$ p-adic integrals of $\omega_1, \dots, \omega_n$ (see section 5.4.)

We denote by $\lambda_\omega := \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i + f \in (\mathscr{E}_0^{\mathrm{flog}} \otimes_L \mathscr{O}_B)(W_v)$ and call it a p-adic integral of ω. It is well defined up to an element of $\mathscr{E}_v(W_v)^{D_v}$.

We have the following,

Lemma 5.16. — a) *With the notations above, λ_ω is a family of p-adic integrals of ω, i.e.*

i) $D_v(\lambda_\omega) = \omega$

and

ii) *for every $s \in B$, $\lambda_\omega|_{W_{v,s}}$ is a p-adic integral of $\omega|_{W_{v,s}}$.*

b) *If $\overline{\omega}$ is the natural lift of ω to $\mathscr{E}_v \otimes_{\mathscr{O}_{W_v}} \Omega^1_{W_v/L}(\log(W_0))$ defined in section 4.2, and η is defined by the equality $D_{\mathrm{W_v/L}}(\overline{\omega}) = \eta \wedge dy$, then*

$$\overline{\omega} - D_{\mathrm{W_v/L}}(\lambda_\omega) = \lambda_\eta dy.$$

Proof. — a) is clear and for b) let us write

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(y)\omega_i + D_v(f),$$

where $a_i(y) \in \mathscr{O}_B(B)$, $f \in \mathscr{E}_v(W_v)$ and the ω_i's have been defined above. Then we have

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^n a_i(y)\omega_i + D_{\mathrm{W_v/L}}(f)$$

and therefore $\eta = -\sum_{i=1}^n a_i'(y)\omega_i$ and

$$\overline{\omega} - D_{\mathrm{W_v/L}}(\lambda_\omega) = -(\sum_{i=1}^n a_i'(y)\lambda_i)dy = \lambda_\eta dy.$$ □

Let us choose now for the rest of this section the branch of the logarithm on $\mathbb{C}_p^\times$ such that $\log(\pi_L) = 0$.

We will give a general definition: let Z be a rigid space over L and let $\alpha : M \longrightarrow \mathscr{O}_Z$ be an integral log structure, where M is a sheaf of monoids.

Then if $W \subset Z$ is a admissible open subspace which is Stein we define $\mathscr{O}_Z(W)_{\log}$ to be the polynomial ring $\mathscr{O}_Z(W)[\ell(m)]_{m \in M(W)}$, where $\ell(m)$ are independent variables,

divided by the relations: $\ell(m_1m_2) = \ell(m_1) + \ell(m_2)$ and $\ell(m) = \log(\alpha(m))$ if $\alpha(m) \in \mathscr{O}_Z(W)^\times$.

The natural derivation $d : \mathscr{O}_Z(W) \longrightarrow \Omega^1_{W/L}$ extends canonically to a derivation $d : \mathscr{O}_Z(W)_{\log} \longrightarrow \Omega^1_{W/L}(\log(M))$ by defining $d(\ell(m)) = d(\alpha(m))/\alpha(m)$ for $m \in M(W)$.

In particular, let us consider the log structure on B given by the divisor $0 \in B$ and choose a parameter $y \in \mathscr{O}_B(B)$ at 0. Then it is easy to see that $\mathscr{O}_B(B)_{\log} = \mathscr{O}_B(B)[\ell(y)]$ and we have $d(\ell(y)) = dy/y$.

Let $e \in e(G)$ and we denote in this section by $A_e := A_{e,B}$ and by $A_0 := A_{e,0}$ the fiber of A_e at $0 \in B$. If we consider on A_e the log structure given by the divisor over B with normal crossings A_0, we see that $\mathscr{O}_{A_e}(A_e)_{\log} = \mathscr{O}_{A_e}(A_e)[\ell(x_e), \ell(x_{\tau(e)})]$ with unique relation $\ell(x_e) + \ell(x_{\tau(e)}) = \ell(y)$. We have $d_{A_e/B}(\ell(x_e)) = d_{A_e/B}(x_e)/x_e$ and $d_{A_e/B}(\ell(x_{\tau(e)})) = d_{A_e/B}(x_{\tau(e)})/x_{\tau(e)}$.

We also denote by $(\mathscr{E}_e, D_e)$ the restriction of the sheaf with connection $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}, D_{\mathrm{X/S}})$ to A_e. Let ω be a global section of the sheaf $\mathscr{E}_e \otimes_{\mathscr{O}_{A_e}} \Omega^1_{A_e/B}(\log A_0))$ and denote by $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\alpha$ a basis of horizontal sections of $(\mathscr{E}_e, D_e)$. Then using lemma 4.8 we can write

$$(*) \quad \omega = \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes r_i(y) \frac{d_{\mathrm{A_e/B}}(x_e)}{x_e} + D_e(u_e),$$

where $r_i(y) \in \mathscr{O}_B(B)$ and $u_e \in \mathscr{E}_e(A_e)$.

We set

$$\lambda_\omega := \sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes r_i(y)\ell(x_e) + u_e \in \mathscr{E}_{\mathrm{e,log}} := \mathscr{E}_e(A_e) \otimes_{\mathscr{O}_{A_e}(A_e)} \mathscr{O}_{A_e}(A_e)_{\log}.$$

Lemma 5.17. — *We have,*

a) *With the notations above λ_ω is a family of p-adic integrals of ω in the sense that*

i) $D_e(\lambda_\omega) = \omega$

and

ii) *λ_ω is an element of $\mathscr{E}_{\mathrm{e,log}}$ well defined up to an element of of $\mathscr{E}_e(A_e)^{\mathrm{D_e}}[\ell(y)] := \mathscr{E}(A_e)^{\mathrm{D_e}} \otimes_{\mathscr{O}_B(B)} \mathscr{O}_B(B)[\ell(y)]$.*

b) *Let $\widetilde{\omega}$ denote the lift of ω to absolute one-forms as in section 4.2 and let η be defined by the equality $D_{\mathrm{A_e/L}}(\tilde{\omega}) = \eta \wedge dy$. Then $\widetilde{\omega} - D_{\mathrm{A_e/L}}(\lambda_\omega) = \lambda_\eta dy$.*

Proof. — Part i) of a) is clear and for part ii) let us remark that $(\mathscr{E}_{\mathrm{e,log}})^{\mathrm{D_e}} = \mathscr{E}(A_e)^{\mathrm{D_e}}[\ell(y)]$. For b) let us notice that

$$D_{\mathrm{A_e/L}}(\widetilde{\omega}) = -\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes r_i'(y) \frac{d_{\mathrm{A_e/L}}(x_e)}{x_e} \wedge dy,$$

and clearly

$$\widetilde{\omega} - D_{\mathrm{A_e/L}}(\lambda_\omega) = -(\sum_{i=1}^{\alpha} \epsilon_i \otimes r'(y)\ell(x_e))dy = \lambda_\eta dy. \qquad \square$$

Now we will use the p-adic integration discussed above in order to describe the Frobenius operator on $\mathbb{H}_B$. Let us remark that the collection $\mathscr{C}''_B = \{W_v, A_e\}_{v\in v(G), e\in e(G)}$ is an admissible cover of X_B by admissible, acyclic, wide open subsets over B. We will define an $\mathscr{O}_B$-linear map,

$$s_B : \mathbb{H}_B \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E})_{\log} := H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_B(B)} \mathscr{O}_B(B)[\ell(y)]$$

as follows: let $\omega \in \mathbb{H}_B$ be represented by the hypercocycle with respect to the covering $\mathscr{C}''_B$

$$\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (\omega_e)_{e\in e(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}, (\overline{f}_e)_{e\in e(G)}\big).$$

where let us recall: $\omega_v \in (\mathscr{E}_v \otimes_{\mathscr{O}_{W_v}} \Omega^1_{W_v/B})(W_v)$, $\omega_e \in (\mathscr{E}_e \otimes_{\mathscr{O}_{A_e}} \Omega^1_{A_e/B}(\log(A_0))(A_e)$, $f_e \in \mathscr{E}_e(W_{a(e)} \cap A_e)$ and $\overline{f}_e \in \mathscr{E}_e(W_{b(e)} \cap A_e)$ satisfying the usual cocycle conditions.

For every $e \in e(G)$, let $s_B(\omega)_e$ be the section:

$$f_e - (\lambda_{\omega_{a(e)}}|_{W_{a(e)}\cap A_e} - \lambda_{\omega_e}|_{W_{a(e)}\cap A_e}),$$

and similarly let $(\overline{s}_B(\omega))_e$ be the section

$$\overline{f}_e - (\lambda_{\omega_{b(e)}}|_{W_{b(e)}\cap A_e} - \lambda_{\omega_e}|_{W_{b(e)}\cap A_e}).$$

Lemma 5.18. — *For every $e \in e(G)$ and $\omega \in \mathbb{H}_B$, $\big(s_B(\omega)_e, (\overline{s}_B(\omega))_e\big) \in \mathscr{E}_e^{\mathrm{D_e}}(W_{a(e)} \cap A_e)[\ell(y)] \oplus \mathscr{E}_e^{\mathrm{D_e}}(W_{b(e)} \cap A_e)[\ell(y)]$.*

Proof. — We will only prove that $s_B(\omega) \in \mathscr{E}^{\mathrm{D_e}}(W_{a(e)} \cap A_e)[\ell(y)]$, and leave the remaining similar argument to the reader. The isomorphism $\alpha_{a(e),0}$ induces an isomorphism

$$\alpha : W_{a(e)} \cap A_e \cong B \times U_0,$$

where U_0 is the annulus $W_{a(e),0} \cap A_{e,0}$. Let π_i for $i = 1, 2$ be the projections of $B \times U_0$ composed with α and denote by $x_0 := \pi_2^*(x_e|_{W_{a(e)}\cap A_e})$. Then x_0 is a parameter of U_0 (see the beginning of section 4.) If we write ω_e as in formula (*) before lemma (5.17) and use the isomorphism α above, we may integrate $\omega_e|_{W_{a(e)}\cap A_e}$ by the recipe outlined in lemma 5.16. Let us denote this integral by λ. We have

$$s_B(\omega)_e = f_e - (\lambda_{\omega_{a(e)}}|_{W_{a(e)}\cap A_e} - \lambda + \lambda - \lambda_{\omega_e}|_{W_{a(e)}\cap A_e}).$$

First let us first remark that $x_0 \in \mathscr{O}_{U_0}(U_0)^\times$ therefore $\ell(x_0) = \log(x_0)$ and that $\mathscr{O}_{U_0}[\log(f)]_{f\in\mathscr{O}_{U_0}^\times} = \mathscr{O}_{U_0}[\log(x_0)]$. Indeed every element $f \in \mathscr{O}_{U_0}(U_0)^\times$ can be written $f = ax_0^n g$, with $a \in L^\times$, $n \in \mathbb{Z}$ and $g \in \mathscr{O}_{U_0}(U_0)$ is such that $|g - 1| < 1$. Therefore $\log(f) = \log(a) + n\log(x_0) + \log(g)$, where $\log(g) \in \mathscr{O}_{U_0}(U_0)$.

As $W_{a(e)} \cap A_e$ is contained in the residue class A_e of X_B, $(\mathscr{E}_e, D_e)$ has a basis of horizontal sections on $W_{a(e)} \cap A_e$ and so we have

$$\big(\mathscr{E}_e((W_{a(e)} \cap A_e))[\log(x_0)]\big)^{\mathrm{D_e}} = \mathscr{E}_e((W_{a(e)} \cap A_e))^{\mathrm{D_e}}.$$

This implies that $f_e - \lambda_{\omega_{a(e)}}|_{W_{a(e)}\cap A_e} + \lambda \in \mathscr{E}_{A_e}(W_{a(e)} \cap A_e)[\ell(y)]$.

Let us remark that $x_0 = ux_e$, where $u \in \mathscr{O}_{A_e}(W_{a(e)} \cap A_e)^*$ such that $\log(u)$ is an analytic function on $W_{a(e)} \cap A_e$. Therefore lemma 5.17 shows that $\lambda - \lambda_{\omega_e}|_{W_{a(e)}\cap A_e} \in \mathscr{E}_e(W_{a(e)} \cap A_e)[\ell(y)]$. Now the fact that $D_e(s_B(\omega)_e) = 0$ implies the lemma. □

For every $\omega \in \mathbb{H}_B$ denote by $s_B(\omega)$ the class of the cocycle $(s_B(\omega)_e, \overline{s}_B(\omega)_e)_{e\in e(G)}$ in $H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E})_{\log}$ and by $s_B : \mathbb{H}_B \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E})_{\log}$ the respective $\mathscr{O}_B$-linear homomorphism. Composing s_B with the inclusion $H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E})_{\log} \longrightarrow \mathbb{H}_{\mathrm{B},\log}$ obtained from (2), we may think of s_B as an $\mathscr{O}_B$-linear map from $\mathbb{H}_B$ to $\mathbb{H}_{\mathrm{B},\log}$. We have,

Theorem 5.19. — a) *$s_B : \mathbb{H}_B \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E})_{\log}$ is a section of the inclusion.*
b) *For every $u \in B^* = B - \{0\}$, the fiber $s_{B,u}$ of s_B at u coincides with the map s_u defined in section 2.2.*
c) *We have $(s_B \otimes 1) \circ \nabla = \nabla \circ s_B$.*
d) *Let B^1 and B^2 as in section 5.3. We have $\Phi^f \circ s_{B^1} = s_{B^2} \circ \Phi^f$.*

Proof. — a) Let $x \in H^{1,0}(\mathscr{C}''_B, \mathscr{E})$ be represented by the cocycle $\big((f_e), (\overline{f}_e)\big)_{e\in e(G)}$. Then the image of x in $\mathbb{H}_B$ is the class of the hypercocycle:
$\big((0_v)_{v\in v(G)}, (0_e)_{e\in e(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}, (\overline{f}_e)_{e\in e(G)}\big)$ and clearly the image of this class under s_B is x.

For b) if $u \in B^*$ we denote $\mathscr{C}''_u = \{W_{v,u}, A_{e,u}\}$ the intersection of the cover $\mathscr{C}''_B$ with the fiber X_u. Let $\mathscr{C}_u = \{U_{v,u}\}_{v\in v(G)}$ denote the wide open cover of X_u described in section 2.2. We denote by $\mathscr{E}_u$ the restriction of $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}}$ to the fiber X_u. We have the following diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1_{dR}(X_u, \mathscr{E}_u) & \xrightarrow{s_{B,u}} & H^{1,0}(\mathscr{C}''_u, \mathscr{E}_u) \\ || & & \downarrow\cong \\ H^1_{dR}(X_u, \mathscr{E}_u) & \xrightarrow{s_u} & H^{1,0}(\mathscr{C}_u, \mathscr{E}_u) \end{array}$$

where the right vertical isomorphism is the one defined in section §3.5.4. Lemma 3.34 implies that the diagram is commutative and this proves b).

Let us now prove c). Let $\omega \in \mathbb{H}_B$ and let

$$\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (\omega_e)_{e\in e(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}, (\overline{f}_e)_{e\in e(G)}\big)$$

be a hypercocycle with respect to the covering $\mathscr{C}''_B$ representing the class ω. Let $\overline{\omega}_v$ and $\widetilde{\omega}_e$ be the lifts of ω_v and ω_e respectively to absolute one-forms defined in section §4.2. Let $D_{\mathrm{X_B/L}}\overline{\omega}_v = \eta_v \wedge dy$, $D_{\mathrm{X_B/L}}\widetilde{\omega}_e = \eta_e \wedge dy$, $\overline{\omega}_{a(e)}|_{W_{a(e)}\cap A_e} - \widetilde{\omega}_e|_{W_{a(e)}\cap A_e} - D_{\mathrm{X_B/L}}(f_e) = g_e dy$ and $\overline{\omega}_{b(e)}|_{W_{b(e)}\cap A_e} - \widetilde{\omega}_e|_{W_{b(e)}-A_e)} - D_{\mathrm{X_B/L}}(\overline{f}_e) = \overline{g}_e dy$ for η_v, η_e, g_e and $\overline{g}_e$ global sections of $\mathscr{E}_v \otimes \Omega^1_{W_v/B}(\log W_0)$, $\mathscr{E}_e \otimes \Omega^1_{A_e/B}(\log A_0)$, $\mathscr{E}_{a(e)}|_{W_{a(e)}\cap A_e}$ $\mathscr{E}_{b(e)}|_{W_{b(e)}\cap A_e}$ respectively. Then $(s_B \otimes 1)(\nabla\omega)$, as an element of $\mathbb{H}_{B,log} \otimes dy$, is represented by the hypercocycle

$$\big((0_v)_{v\in v(G)}, (0_e)_{e\in e(G)}, (g_e - (\lambda_{\eta_{a(e)}}|_{W_{a(e)}\cap A_e} - \lambda_{\eta_e}|_{W_{a(e)}\cap A_e}))_{e\in e(G)},$$
$$(\overline{g}_e - (\lambda_{\eta_{b(e)}}|_{W_{b(e)}\cap A_e} - \lambda_{\eta_e}|_{W_{b(e)}\cap A_e}))_{e\in e(G)}\big) \otimes dy.$$

On the other hand $\nabla(s_B(\omega))$ is represented by the hypercocycle

$$\big((0_v)_{v\in v(G)}, (0_e)_{e\in e(G)}, (-D_{\mathrm{X_B/L}}(f_e) + D_{\mathrm{X_B/L}}\lambda_{\omega_{a(e)}}|_{W_{a(e)}\cap A_e} - D_{\mathrm{X_B/L}}\lambda_{\omega_e}|_{W_{a(e)}\cap A_e})_{e\in e(G)},$$
$$(-D_{\mathrm{X_B/L}}(\overline{f}_e) + D_{\mathrm{X_B/L}}\lambda_{\omega_{b(e)}}|_{W_{b(e)}\cap A_e} - D_{\mathrm{X_B/L}}\lambda_{\omega_e}|_{W_{b(e)}\cap A_e})_{e\in e(G)}\big) \otimes dy.$$

A calculation using the lemmas 5.16 and 5.17 shows that the two hypercocycles are cohomologous.

Now we prove d). For this let us recall the notations B^1, B^2 and the expression of Φ^f at the end of section 5.3. Let U_v^i, $i = 1, 2$ and $v \in v(G)$ denote admissible wide open subsets of X_{B^i} satisfying the properties of proposition 5.10 and the additional property that there are isomorphisms $\alpha_{v,i} : U_v^i \cong U_{v,0}^i \times B^i$. As in section §5.3 we consider the admissible covers $\mathscr{C}^i = \{U_v^i, A_e^i\}$ of X_{B^i}. Let the class $\omega \in \mathbb{H}_{B^2}$ be represented by the hypercocycle for the covering $\mathscr{C}^2$

$$\big((\omega_v)_{v\in v(G)}, (\omega_e)_{e\in e(G)}, (f_e)_{e\in e(G)}, (\overline{f}_e)_{e\in e(G)}\big).$$

Then $s_{B^2}(\omega)$ is represented by the hypercocycle

$$\big((0_v)_{v\in v(G)}, (0_e)_{e\in e(G)}, (g_e)_{e\in e(G)}, (\overline{g}_e)_{e\in e(G)}\big)$$

where $g_e = f_e - (\lambda_{\omega_{a(e)}}|_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e} - \lambda_{\omega_e}|_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e})$ and $\overline{g}_e = \overline{f}_e - (\lambda_{\omega_{b(e)}}|_{U^2_{b(e)}\cap A^2_e} - \lambda_{\omega_e}|_{U^2_{b(e)}\cap A^2_e})$.

Then $\Phi^f(s_{B^2}(\omega))$ is represented by

$$\big((0_v)_{v\in v(G)}, (0_e)_{e\in e(G)}, (F_e(\phi_e^*(g_e)))_{e\in e(G)}, (F_e(\phi_e^*(\overline{g}_e)))_{e\in e(G)}\big).$$

Let us recall from the end of the section §5.3 that $\Phi^f(\omega)$ is represented by the hypercocycle

$$\big((\nu_v)_{v\in v(G)}, (\nu_e)_{e\in e(G)}, (h_e)_{e\in e(G)}, (\overline{h}_e)_{e\in e(G)}\big)$$

where $\nu_v, \nu_e, h_e, \overline{h}_e$ are defined there.

Therefore, $s_{B^1}(\Phi^f(\omega))$ is represented by

$$\big((0_v)_{v\in v(G)}, (0_e)_{e\in e(G)}, (x_e)_{e\in e(G)}, (\overline{x}_e)_{e\in e(G)}\big)$$

with (see the end of section §5.3)

$$x_e = h_e - (\lambda_{\nu_{a(e)}}|_{U^1_{a(e)}\cap A^1_e} - \lambda_{\nu_e}|_{U^1_{a(e)}\cap A^1_e}) =$$

$$= \Delta^*(F_{a(e)}\circ\phi^*_{a(e)}, F_e\circ\phi_e)(\epsilon_e) + F_e(\phi_e^*(f_e)) - (F_{a(e)}(\phi^*_{a(e)}(\lambda_{\omega_{a(e)}}))|_{U^1_{a(e)}\cap A^1_e} - F_e(\phi_e^*(\lambda_{\omega_e}))|_{U^1_{a(e)}\cap A^1_e}).$$

Now we use the fact that $\epsilon_e = \pi_1^*(\lambda_{\omega_{a(e)}}|_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e}) - \pi_2^*(\lambda_{\omega_e}|_{U^2_{a(e)}\cap A_e})$ and obtain

$$x_e = F_e(\phi_e^*(f_e - \lambda_{\omega_{a(e)}}|_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e} + \lambda_{\omega_e}|_{U^2_{a(e)}\cap A^2_e})).$$

Similarly

$$\overline{x}_e = \overline{g}_e - (\lambda_{\nu_{b(e)}}|_{U^1_{b(e)}\cap A^1_e} - \lambda_{\nu_e}|_{U^1_{b(e)}\cap A^1_e}) =$$

$$= F_e(\phi_e^*(\overline{f}_e - \lambda_{\omega_{b(e)}}|_{U^2_{b(e)}\cap A^2_e} + \lambda_{\omega_e}|_{U^2_{b(e)}\cap A^2_e})).$$

This ends the proof of Theorem 5.19. □

Now we can finish the **proof of Theorem 2.6**. To prove that Φ_{deg} and Φ_{int} get identified by parallel transport. We have exact sequences

$$0 \longrightarrow H^{1,0}(C)\otimes_{K_0} L \longrightarrow H^1(C, \mathscr{E})\otimes_K L \longrightarrow H^{0,1}(C)\otimes_{K_0} L \longrightarrow 0$$

and

$$0 \longrightarrow H^{1,0}(\mathscr{C}_0'', \mathscr{E}_0) \longrightarrow H^1(Y, \mathscr{E}_0) \longrightarrow H^{0,1}(\mathscr{C}_0'', \mathscr{E}_0) \longrightarrow 0.$$

Proposition 3.35 implies that under the parallel transport isomorphism $H^1(Y, \mathscr{E}_0) \otimes_{K_0} L \cong H^1(C, \mathscr{E}) \otimes_K L$, $H^{1,0}(C)$ gets identified with $H^{1,0}(\mathscr{C}_0'', \mathscr{E}_0)$ and $H^{0,1}(C)$ gets identified with $H^{0,1}(\mathscr{C}_0'', \mathscr{E}_0)$. Moreover these last two isomorphisms commute with the respective Frobenii. We'll first show that Φ^f_{deg} corresponds to Φ^f_{int}. Let us parallel transport Φ^f_{deg} to $H^1(C, \mathscr{E}) \otimes_{K_0} L$ and let us denote by Φ^π_{deg} this endomorphism, i.e., if $\omega \in (\mathbb{H}_{\log})^\nabla$, we have seen that $(\Phi^f(\omega))_0 = \Phi^f_{\mathrm{deg}}(\omega_0)$ and as $\Phi(\omega) \in (\mathbb{H}_{\log})^\nabla$ we set $\Phi^\pi_{\mathrm{deg}}(\omega_\pi) = (\Phi^f(\omega))_\pi$. We have to show that $\Phi^\pi_{\mathrm{deg}} = \Phi^f_{\mathrm{int}}$ and so far we know that Φ^f_{int} and Φ^π_{deg} coincide both on the image of $H^{1,0}(C)$ and on the quotient $H^{0,1}(C)$ and $s_\pi \circ \Phi^f_{\mathrm{int}} = F^f_{0,\mathrm{cris}} \circ s_\pi$. Using Theorem 5.19 we have

$$s_\pi \circ \Phi^\pi_{\mathrm{deg}} = (s_{B^2} \circ \Phi^f)_\pi = (\Phi^f \circ s_{B^1})_\pi = F^f_{0,\mathrm{cris}} \circ s_\pi.$$

This proves that $\Phi^\pi_{\mathrm{deg}} = \Phi^f_{\mathrm{int}}$. Moreover, since $\mathscr{E}$ is regular it follows that the characteristic polynomials of $F_{0,\mathrm{cris}}$ on $H^{0,1}(C)$ and of $F_{1,\mathrm{cris}}$ on $H^{1,0}(C)$ are relatively prime. Thus both exact sequences above have natural Frobenii equivariant splittings and as $\Phi^\pi_{\mathrm{deg}} = \Phi^f_{\mathrm{int}}$, the splittings coincide under parallel transport. But the splitting produced by Φ^f_{int} is s_π, therefore we immediately deduce that $H^1(C, \mathscr{E})_{\mathrm{int}}$ and $H^1(Y, \mathscr{E}_0)$ become identified by parallel transport and the same is true for Φ_{int} and Φ_{deg}. This completes the proof of Theorem 2.6.

6. Logarithmic F-isocrystals

We start by defining the main objects of this section, the log F-isocrystals.

Let C be our semi-stable curve over V, let P be a finite set of smooth sections of C and $C^\times$ the corresponding log scheme. Let $\overline{P}$ be the special fiber of P. Then $\overline{P}$ is a smooth divisor of $\overline{C}$ and we denote, to the end of this section, by $\overline{C}^\times$ the corresponding log scheme.

Definition 6.1. — *A logarithmic enlargement of $\overline{C}^\times$ is a pair $(T^\times, z_T)$ consisting of a formal log scheme $T^\times$ and a morphism of log schemes $z_T : T_0^\times \to \overline{C}^\times$. If $(U^\times, z_U)$ and $(T^\times, z_T)$ are two log enlargements of $\overline{C}^\times$ then a morphism of log enlargements $g : (U^\times, z_U) \to (T^\times, z_T)$ is a morphism of formal log schemes $g : U^\times \to T^\times$ such that $z_T \circ g_0 = z_U$.*

Definition 6.2. — *A log isocrystal $\mathscr{E}$ on $\overline{C}^\times$ is the following set of data*

i) *for every log enlargement $(T^\times, z_T)$ of $\overline{C}^\times$ a coherent $K_0 \otimes_W \mathscr{O}_T$-module $\mathscr{E}_{(T^\times, z_T)}$ (sometimes in what follows we will use the shorthand notation $\mathscr{E}_{T^\times}$.)*

ii) *for every morphism of enlargements $g = (f, h) : (U^\times, z_U) \longrightarrow (T^\times, z_T)$ an isomorphism of $K_0 \otimes_U \mathscr{O}_W$-modules $\theta_g : f^{-1}\mathscr{E}_T \longrightarrow \mathscr{E}_U$. The collection $\{\theta_g\}$ is required to satisfy the cocycle condition.*

Remark 6.3. — *If $\mathscr{E}$ is a log isocrystal on $\overline{C}^{\times}$ and $(T^{\times}, z_T)$ is a log enlargement of $\overline{C}^{\times}$ such that the formal scheme T is locally Noetherian then one may interpret $\mathscr{E}_{T^{\times}}$ as a coherent sheaf on T^{rig}, the rigid analytic space associated to T. Moreover, applying the results in §6 of* **[26]** *one sees that $\mathscr{E}_T$ is endowed with an integrable connection*

$$D_T : \mathscr{E}_{T^{\times}} \longrightarrow \mathscr{E}_{\times} T \otimes_{\mathscr{O}_T} \omega_{T^{\times}/W^{\times}},$$

where $T^{\times} = (T, M_{T^{\times}})$ and $W^{\times}$ is the formal scheme $\mathrm{Spf}(W)$ *with the trivial log structure.*

Let now $k^{\times}$ denote the scheme $\mathrm{Spec}(k)$ with trivial log-structure and let $W^{\times}$ be the formal log scheme $\mathrm{Spf}(W)$ with trivial log structure. We denote by σ be the absolute Frobenius on $k^{\times}$ and on $W^{\times}$, respectively. Let us recall that σ is the absolute Frobenius on the respective schemes and multiplication by p on the respective monoids. Let now $f : A^{\times} \longrightarrow B^{\times}$ be a morphism of fine log schemes (or fine formal log schemes), where $B^{\times}$ is either $k^{\times}$ or $W^{\times}$. We'll denote by $(A^{\times})^{\sigma}$ the fiber product in the category of log schemes of the diagram

$$\begin{array}{ccc} & & A^{\times} \\ & & \downarrow \\ B^{\times} & \xrightarrow{\sigma} & B^{\times}. \end{array}$$

Let now $B^{\times}$ be $k^{\times}$, then we denote by $\overline{F} = F_{(A^{\times}, k^{\times})} \colon A^{\times} \longrightarrow (A^{\times})^{\sigma}$ the morphism induced by the pair of maps: $f : A^{\times} \longrightarrow k^{\times}$ and the map form $A^{\times}$ to itself which is the identity on the underlying topological space, is $s \to s^p$ on $\mathscr{O}_A$ and is multiplication by p on M_A. If now, $(T^{\times}, z_T)$ is a log enlargement of $\overline{C}^{\times}$ then $(T^{\times}, \overline{F} \circ z_T)$ is a log enlargement of $(\overline{C}^{\times})^{\sigma}$ and $((T^{\times})^{\sigma^{-1}}, (\overline{F} \circ z_T)^{\sigma^{-1}})$ is again a log enlargement of $\overline{C}^{\times}$. If $\mathscr{E}$ is a log isocrystal on $\overline{C}^{\times}$ then we will denote by $\overline{F}^{*}\mathscr{E}$ the log isocrystal on $\overline{C}^{\times}$ such that

$$\overline{F}^{*}\mathscr{E}_{(T^{\times}, z_T)} = \mathscr{E}_{((T^{\times})^{\sigma^{-1}}, (\overline{F} \circ z_T)^{\sigma^{-1}})}.$$

Definition 6.4. — *A log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$ is a log isocrystal on $\overline{C}^{\times}$, $\mathscr{E}$, together with an isomorphism of log isocrystals*

$$F : \overline{F}^{*}\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}.$$

Let C be a curve over V as in Section 2.1 and let P denote a finite collection of smooth sections of C over V, such that their image in $\overline{C}$ is the collection $\overline{P}$. By deformation theory the pair (C, P) may be regarded as the fiber at the point π of the formal model of the open unit disk $\mathscr{S}$ over W, of a pair $(\mathfrak{X}, \mathscr{P})$ consisting of a family of curves $\mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ as in Section 2.1 and a smooth divisor $\mathscr{P}$ of $\mathfrak{X}$. We have a natural morphism of log schemes $z_{\mathfrak{X}} : (\mathfrak{X}^{\times}_{\mathscr{P}})_0 \to (C^{\times}_P)_0 = \overline{C}^{\times}$ so may regard $(\mathfrak{X}^{\times}, z_{\mathfrak{X}})$ (and any of its fibers above points of $\mathscr{S}$) as a log enlargement of $\overline{C}^{\times}$. Let now $\mathscr{E}$ be a log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$. Denote by $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ the rigid analytic space attached to $\mathfrak{X}$ and by P_X the intersection of the divisor $\mathscr{P}$ with X. Let us denote by $\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^{\times}}$ the evaluation

of the log F-isocrystal $\mathscr{E}$ on $(\mathfrak{X}^{\times}_{\mathscr{P}_X}, z_{\mathfrak{X}})$. It is a coherent sheaf of $\mathscr{O}_X$-modules with an integrable connection

$$\mathrm{D}_{X/K_0} : \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/K_0}(\log P_X).$$

Composing D_{X/K_0} with the natural projections

$$\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/K_0}(\log P_X) \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/K_0}(\log(P_X \cup Y)) \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/S}(\log(P_X \cup Y))$$

we get a relative integrable connection over S

$$\mathrm{D}_{X/S} : \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \longrightarrow \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^1_{X/S}(\log(P_X \cup Y)).$$

Remark 6.5. — *$P_X \cup Y$ is a divisor of X with normal crossings and $P_X \cap Y$ is a finite set of smooth points of Y.*

Let us consider now, as in Section 2.1, $\mathbb{H}^i_P = H^i_{dR}(X/S, \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}(\log(P_X \cup Y)))$, for $i = 0, 1, 2$ with its logarithmic connection

$$\nabla^i \colon \mathbb{H}^i_P \longrightarrow \mathbb{H}^i_P \otimes_{\mathscr{O}_S} \Omega^1_S(\log 0),$$

and its Frobenius $\Phi_i \colon \varphi^* \mathbb{H}^i_P \to \mathbb{H}^i_P$. For every point $s \in S$ let us denote by P_s the fiber of P_X above s and by $\mathscr{E}_s = \mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}|_{X_s}$. Then we have

a) if $s \in S - \{0\}$ then $H^i(C_s, P_s, \mathscr{E}) := \mathbb{H}^i_{P,s} \cong H^i_{dR}(X_s, \mathscr{E}_s(\log(P_s)))$

b) if $s = 0$ then $H^i(Y, P_0, \mathscr{E}) := \mathbb{H}^i_{P,0} \cong H^i_{dR}(Y^{\times\times}/K_0, \mathscr{E}_0)$, where let us recall $Y^{\times\times}$ is the log rigid space Y with inverse image log structure from the one on X induced by the divisor $P_X \cup Y$.

Lemma 6.6. — *Let $\mathscr{E}$ be a log isocrystal on $\overline{C}^{\times}$. Then $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}, \mathrm{D}_{X/K_0})$ has the property that for every residue class $M = red^{-1}(x)$, with $x \in \overline{C} - \overline{P}$, of X, the $\mathscr{O}_M$-module with connection $(\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times}|_M, \mathrm{D}_{X/K_0})$ has a basis of horizontal sections.*

Definition 6.7. — *Let $\mathscr{E}$ be a log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$, and $\overline{P}$ a smooth divisor on $\overline{C}$. We say $\mathscr{E}$ is* regular outside of $\overline{P}$ *if for every vertex $v \in v(G)$ and for every closed point $x \in \overline{C}_v - \overline{P}$ the characteristic polynomials of Frobenii on $H^0_{\mathrm{cris}}(x, \mathscr{E})$ and $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v^{\times\times}, \mathscr{E})$ are relatively prime. Here $\overline{C}_v$ is the irreducible component of $\overline{C}$ corresponding to v and the log structure on $\overline{C}_v^{\times\times}$ is the one induced by the divisor $(\overline{P} \cap \overline{C}_v) \cup \mathrm{Sing}_v$.*

We have, similarly to Lemma 5.14,

Lemma 6.8. — *Let $g : Z^{\times} \longrightarrow C^{\times}$ be a log smooth, flat and proper morphism, where the log structure on $Z^{\times}$ is given by the fibers of g at the points in P. If $\mathscr{H}^i := R^i g_{*,\log-\mathrm{cris}}(\mathscr{O}_{Z^\times})$, the log F-isocrystal $\mathrm{Sym}^j(\mathscr{H}^i)$ is regular outside of $\overline{P}$, for $i, j \geq 0$.*

Proof. — The proof is very similar to the proof of Lemma 5.14. □

6.1. Convergent log F-isocrystals. — Fix a smooth divisor $\overline{P}$ of $\overline{C}$. Suppose from now on that the log F-isocrystal $\mathscr{E}$ on $\overline{C}^{\times}$ is regular outside of $\overline{P}$. We define FFM-modules $H^i_{\mathrm{deg}}(\mathscr{E})$ via degeneration, as in Section 2.1 and $H^i_{\mathrm{int}}(\mathscr{E})$ via integration as in Section 2.2, for $i = 0, 1, 2$. We only need to explain how the "integration splitting" $s : H^1(C, P, \mathscr{E}) \longrightarrow H^1(C, P, \mathscr{E})$ is defined. Recall that this splitting is defined in Section 2.2 in the case $\overline{P}$ is the void set.

We first need the notion of a convergent log F-isocrystal on a pair (U, Z) consisting of a one dimensional wide open rigid space and an underlying affinoid with good reduction. We fix $s \in S - \{0\}$ with residue field L as in section §5.1 and 5.2, and let $U = U_{v,s}, Z = Z_{v,s}$ be the admissible open subsets of X_s defined in those sections for some $v \in v(G)$. Let $U^{\times}, Z^{\times}$ denote the log rigid spaces with log structures induced by $\mathscr{P}_s \cap U$ and respectively $\mathscr{P}_s \cap Z$. Let us denote by $\Delta_{U^{\times}} = U^{\times} \times_{\mathrm{Spm(L)}} U^{\times}$ the product in the category of log spaces and let $\pi_i : \Delta_{U^{\times}} \longrightarrow U^{\times}$, $i = 1, 2$ be the natural projections. Let (M, D) be a pair consisting of a coherent sheaf of $\mathscr{O}_U$-modules M and an integrable connection $D : M \longrightarrow M \otimes_{\mathscr{O}_U} \Omega^1_{U^{\times}/L}$.

We say that (M, D) is a *convergent log isocrystal* on $U^{\times}$ if the natural isomorphism $\pi_1^*(M) \cong \pi_2^*(M)$ over the diagonal of $U^{\times}$ extends to an isomorphism over a tube of the diagonal of the reduction of $U^{\times}$ in $\Delta_{U^{\times}}$ (see Definition 5.4 for the case when $\mathscr{P}$ is void.)

A *convergent log F isocrystal* on $(U^{\times}, Z^{\times})$ is a convergent log isocrystal (M, D) on $U^{\times}$ with the assignment of a horizontal isomorphism $F_{\phi} : \phi^*(M|_{Z^{\dagger}}) \longrightarrow M|_{Z^{\dagger}}$ for every morphism of log spaces $\phi : Z^{\times,\dagger} \longrightarrow X^{\times,\dagger}$ which is a lift of Frobenius over k (see also Definition 5.6 for the case when $\mathscr{P}$ is void.) For two such lifts the respective isomorphisms should satisfy the cocycle relation.

Lemma 6.9. — *Let v be a vertex of G and $(U^{\times}, Z^{\times})$ be the pair fixed above. Then $\mathscr{E}_s|_U$ is a convergent log F-isocrystal on $(U^{\times}, Z^{\times})$.*

Proof. — The proof is similar to the proof of Lemma 5.7. □

Let us denote by $R = \mathrm{red_s}^{-1}(\overline{P}) \cap U$.

Lemma 6.10. — *Let the notations be as in Lemma 6.9 and denote by (E, D) the convergent log F-isocrystal on $(U^{\times}, Z^{\times})$ defined there. Then the restriction of (E, D) to $(U - R, Z - R)$ is a convergent F-isocrystal in the usual sense.*

Proof. — Let us first notice that $U - R$ and $Z - R$ are admissible open subsets of U and Z respectively. $Z - R$ is actually an affinoid. We may endow both $Z - R$ and $U - R$ with the induced log structures from $U^{\times}$ and denote by $(Z - R)^{\times}$, $(U - R)^{\times}$ the respective log spaces. Then we have

1) The restriction of (E, D) to $((U-R)^{\times}, (Z-R)^{\times})$ is a convergent log F-isocrystal Let us remark that $U-R$ is not a wide-open subset of X_s, but the pair $(U-R, Z-R)$ functions as a wide open and an underlying affinoid, i.e. $(U-R)-(Z-R)$ is a disjoint union of annuli, each contained in a residue class of X_s. Therefore the definition of a

convergent log F-isocrystal given above can be extended to the notion of a convergent log F-isocrystal on $((U-R)^\times,(Z-R)^\times)$.

2) The log structures on $U-R$ and $Z-R$ induced by $U^\times$ are trivial.

3) A convergent log F-isocrystal on a pair $(U^\times,Z^\times)$, where the log structures on $U^\times$ and $Z^\times$ are trivial is a (usual) convergent F-isocrystal on (U,Z).

The combination of 1), 2) and 3) above proves the lemma. □

Let (E,D) be the convergent log F-isocrystal on the pair $(U^\times,Z^\times)$ as in the Lemma 6.10, then the Theorem 5.12 of Section 5.4 applies to the convergent F-isocrystal (E,D) on $(U-R,Z-R)$ (here, as we have mentioned above, $U-R$ is not a wide-open anymore but the theorem works the same way.) More precisely, let $\omega\in\Omega^1_{U^\times/L}(E)(U)$ and denote by $[\omega]$ its image in $H^1(E,D)$. Using the notations of Theorem 5.12 we have:

There exists a section α of $E^{\mathrm{flog}}(U-R)$, unique up to a global section of $(E|_{U-R})^D$, such that

i) $D(\alpha)=\omega$
ii) $G(\varphi)(\alpha)\in E(U-R)$.

Having said this let us go back to the splitting $s: H^1(C,P,\mathscr{E})\longrightarrow H^1(C,P,\mathscr{E})$ and let us recall how it is defined: we take a cohomology class in $H^1(C,P,\mathscr{E})$ and a hypercocycle representing it $((\omega_v)_v,(f_e)_e)$ as in Section 2.2. Then the image of this class under s is obtained by integrating the differential forms ω_v on U_v-R_v, for every $v\in v(G)$, and taking differences on their restrictions to A_e's for $e\in e(G)$. Such integrals by the above are defined *a priori* up to horizontal sections of $\mathscr{E}_\pi$ on U_v-R_v (recall that C is the fiber of the family $\mathfrak{X}\longrightarrow\mathscr{S}$ at the point $s=\pi$ and $\mathscr{E}_\pi=\mathscr{E}_{C^\times}=\mathscr{E}_{\mathfrak{X}^\times|_{C_K}}$.) According to the definition in Section 2.2 we need to show that such a section extends to a horizontal section of $\mathscr{E}_\pi$ on U_v. In other words, we need

Proposition 6.11. — *Let $\mathscr{E}$ be a log F-isocrystal on $\overline{C}^\times$ and fix a vertex $v\in v(G)$. Then the natural map (restriction) $H^0_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v,\mathscr{E})\longrightarrow H^0_{\mathrm{cris}}(\overline{C}_v-\overline{P},\mathscr{E})$ is surjective.*

Proof. — Now let again for this proof denote $U=U_v$ and $Z=Z_v$ and let $(E^\dagger,D^\dagger)$ be the overconvergent F-isocrystal on $U-R$ defined by $\mathscr{E}_\pi|_U$. Let (E,D) be the underlying convergent F-isocrystal. It follows that E^D is finite dimensional and preserved by F_ϕ for any lifting ϕ of Frobenius. Let

$$M=(E^D\otimes_L\mathscr{O}_{U-R},1\otimes d)\text{ and }M^\dagger=(E^D\otimes_L\mathscr{O}^\dagger_{U-R},1\otimes d).$$

Then $M^\dagger$ has a natural structure of an overconvergent F-isocrystal on $U-R$ and M is its associated convergent F-isocrystal. It follows from the main theorem of **[27]** that the natural map $\mathrm{Hom}_{\mathrm{F-iso}}(M^\dagger,E^\dagger)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{F-iso}}(M,E)$ is a bijection. Therefore the natural inclusion $M\hookrightarrow E$ extends uniquely to a morphism $M^\dagger\longrightarrow E^\dagger$, i.e. every section of E^D is overconvergent.

Suppose $\overline{Q}$ is an absolutely irreducible point of $\overline{P}$. Let T be the corresponding residue disk and $Q=T\cap P$. Then Q is a regular singular point for the connection

D and is the unique singular point for D in T. In fact, the log-monodromy matrix for $(E|_T, D)$ at Q is nilpotent. Moreover $(E|_T, D)$ has a Frobenius structure. Let t be a parameter on T which vanishes at Q. The main result of [**4**] implies that $(E|_T, D)$ has a basis B_T of horizontal sections over $\mathscr{O}_U(T)_{\log} = \mathscr{O}_U(T)[\ell(t)]$ (for the notations see section §5.5, the discussion after the proof of Lemma 5.16.)

Lemma 6.12. — *Let W be any annulus in T centered at Q. As the restriction of t to W is a unit of $\mathscr{O}_U(W)$, the restriction of $\ell(t)$ to W is $\log(t|_W)$. Then $\log(t|_W)$ is transcendental over $\mathscr{O}_U(W)$.*

Proof. — Let $u = t|_W$. Suppose $F(X) = \sum_{i=1}^n a_i(u)X^i$ is a polynomial of minimal degree over $\mathscr{O}_U(W)$ so that $F(\log(u)) = 0$. We may suppose $n > 0$ and $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$. We use the equation $F(\log(u)) = 0$ and

$$\sum_{i=1}^{n} a_i'(u)\log(u)^i + \sum_{i=1^n} i a_i(u)\log(u)^{i-1}/u = 0$$

and cancel the terms containing $\log(u)^n$. We must have

$$a_i a_n' - (i+1)a_{i+1}a_n/u - a_i' a_n = 0.$$

It follows that a_n is a unit which may be supposed to be 1. Thus $a_{n-1}' = -n/u$ which is impossible. □

Lemma 6.13. — *Let W be any annulus in T centered at Q. Then if $f(X) \in \mathscr{O}_U(W)[X]$, $f(\log(t|_W))$ does not vanish on any non-empty open set of W unless $f = 0$.*

Corollary 6.14. — *With notations as above $(B_T)|_W$ is a basis for the horizontal sections of $(E|_W, D)$ over $\mathscr{O}_U(W)_{\log}$.*

We can now finish the proof of Proposition 6.11. Suppose g is a horizontal section of (E, D) over $U - R$. We know that g is overconvergent i.e. it extends into U by the above. Thus it restricts to a horizontal section of D on W for an annulus W in T close to the boundary. By the above corollary it must be a linear combination of $B_T|_W$. Since it is analytic on W the above lemma implies it extends to a horizontal section across T. We can base extend and assume that P is a union of such points and see that g extends across U. □

Now we need to compare the FFM-modules $H^i_{\mathrm{deg}}(\mathscr{E})$ and $H^i_{\mathrm{int}}(\mathscr{E})$ for $i = 0, 1, 2$. Let us remark that the same arguments as in Section 2.1 show that ∇^i is the trivial connection on $\mathbb{H}^i_P$, for $i = 0, 2$. For $i = 1$, as $\mathbb{H}^1_P$ is a locally free coherent sheaf of $\mathscr{O}_S$-modules (see [**16**]), with a connection, whose only singularity (at 0) is regular, and a Frobenius endomorphism Φ_1^{deg}, the main result of [**4**] referred to above applies. This, combined with arguments similar to those used in Section 2.1, implies that the connection ∇^1 extended to $(\mathbb{H}^1_P)_{\log}$ is trivial.

Theorem 6.15. — *Suppose the filtered, log F-isocrystal $\mathscr{E}$ on $\overline{C}^{\times}$ is regular then the parallel transport isomorphism between $(\mathbb{H}^i_P)_0 \otimes_{K_0} K$ and $(\mathbb{H}^i_P)_\pi$ yields an isomorphism of FFM-modules*

$$H^i(\mathscr{E})_{\deg} \cong H^i(\mathscr{E})_{\mathrm{int}} \text{ for } i = 0, 1, 2.$$

The proof follows using arguments similar to those in the proof of Theorem 2.6.

7. Applications

7.1. The proof of Theorem 1.1. — We will apply the results of the previous sections to the following situation: Let K, V, k, π, K_0, W be as in Section 1. Let C be a proper curve over V with smooth generic fiber C_K and semi-stable special fiber $\overline{C}$ over k. Let $g : Z \longrightarrow C$ be a flat proper morphism and P a reduced flat sub-scheme of C of dimension 0 over V such that $\bar{P} \cap \mathrm{Sing} = \varnothing$. Let $C^{\times}$ be the log formal scheme over V associated to the pair (C, P) (i.e., the formal completion of C along the special fiber together with the log structure associated to P as in Section 6.) Let $\overline{C}^{\times}$ be the log scheme over k which is the special fiber of $C^{\times}$ and denote by $D_P := g^{-1}(P)$. Then D_P is a divisor of Z and we will suppose from now on that it is a reduced divisor with simple normal crossings and that the restriction of g induces a smooth proper map $(Z - D_P) \longrightarrow (C - P)$. Let $Z^{\times}$ denote the log formal scheme over V associated to the pair (Z, D_P) and we'll denote by $g : Z^{\times} \longrightarrow C^{\times}$ the morphism of log formal schemes induced by g and also by $\overline{g} : \overline{Z}^{\times} \longrightarrow \overline{C}^{\times}$ its special fiber. From the assumptions made it follows that g and $\overline{g}$ are log smooth maps of fine formal log schemes over V (with trivial log structure.)

Some important examples to keep in mind are:

0) $Z = C$, g the identity and $P = \varnothing$.

1) C is the complete modular curve classifying semi-stable elliptic curves with suitable level structure as in Section 1, P is the set of cusps, Z is the generalized universal elliptic curve.

2) C is the Shimura curve classifying abelian surfaces with quaternionic multiplication and full level structure, P is any finite set of sections which reduce to distinct, smooth points of $\overline{C}$ (P may be void), and Z is the universal abelian scheme.

We have the following,

Theorem 7.1. — *For $i \geq 0$ there exists a log F-isocrystal $\mathscr{E}^i := K_0 \otimes_W R^i g_{\mathrm{cris},*} \mathscr{O}_{\overline{Z}^{\times}/\overline{C}^{\times}}$ on $\overline{C}^{\times}$ whose evaluation on $(C^{\times}, z_{can})$, $\mathscr{E}^i_{C^{\times}}$, is*

$$K \otimes_V \mathbb{R}^i g_* \Omega^{\bullet}_{Z^{\times}/C^{\times}} = H^i_{dR}(Z_K/C_K, \Omega^{\bullet}_{Z_K/C_K}(\log D_P)),$$

and the connection is the Gauss-Manin connection. Here z_{can} is the canonical morphism $(C^{\times})_0 \longrightarrow \overline{C}^{\times}$.

In case (0) above, $\mathscr{E}^0_{C^{\times}} \cong \mathscr{O}_C$.

Proof. — The log crystalline site on $\overline{C}^{\times}$, log crystals and the higher direct images of g_{cris} are defined in [**26**], Section 6. These objects satisfy enough of the formal properties of the corresponding classical objects (i.e., without log structures) so that the proof follows the proof in [**32**], Section 3, formally. We will content ourselves to point out the main steps. In order to simplify the notations for the rest of this proof we'll drop the $\times$ from the symbols denoting log schemes.

1) If T is a log formal scheme over $\mathrm{Spf}(W)$ and let us denote by T_1 the closed log sub-schemes of T of ideal $p\mathscr{O}_T$. Let $z'_T : T_1 \longrightarrow \overline{C}$ be a morphism of log schemes then we have the following Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} \overline{Z}_{T_1} & \longrightarrow & \overline{Z} \\ g_T \downarrow & & \overline{g} \downarrow \\ T_1 & \xrightarrow{z'_T} & \overline{C} \end{array}$$

As T_1 and $\overline{C}$ are log schemes in characteristic p and the ideal $p\mathscr{O}_T$ has natural divided powers, we define

$$\mathscr{E}_T := K_0 \otimes_W R^1 g_{\mathrm{T},\mathrm{cris},*}\mathscr{O}_{\overline{Z}_{T_1}/T_1}.$$

2) Now we'll define Frobenius. Let $\overline{F}$ denote the absolute Frobenius of the log-scheme $\overline{C}$ over the absolute Frobenius σ of k, as in Section 6. Consider the Cartesian diagram

$$\begin{array}{ccc} \overline{Z}' & \longrightarrow & \overline{Z} \\ g' \downarrow & & \overline{g} \downarrow \\ \overline{C} & \xrightarrow{F_C} & \overline{C} \end{array}$$

and one can see that the evaluation of the pullback by Frobenius $\overline{F}^*\mathscr{E}$ on (T, z'_T) is given by

$$(\overline{F}^*\mathscr{E})_{(T,z'_T)} := \mathscr{E}_{(T,F_C\circ z'_T)} \cong K_0 \otimes \overline{g}'_{\mathrm{T},\mathrm{cris},*}\mathscr{O}_{\overline{Z}'_{T_1}/T_1}.$$

The relative Frobenius $F_{\overline{Z}/T_1} : \overline{Z} \longrightarrow \overline{Z}'$ induces an isomorphism

$$F_{\overline{Z}/T_1} : (\overline{F}^*\mathscr{E})_{(T,z'_T)} = K_0 \otimes_W R^i g'_{\mathrm{T},\mathrm{cris},*}\mathscr{O}_{\overline{Z}'_{T_1}/T_1} \cong K_0 \otimes_W R^i g_{\mathrm{T},\mathrm{cris},*}\mathscr{O}_{\overline{Z}_{T_1}} = \mathscr{E}_{(T,z'_T)}.$$

3) Now we will use 1) and 2) above to define the evaluation of $\mathscr{E}$ on log enlargements. Let (T, z_T) be a log enlargement of $\overline{C}$, i.e., T is a log formal scheme and $z_T : T_0 \longrightarrow \overline{C}$, where T_0 is the closed reduced sub-scheme of T_1. Let $\iota_T : T_0 \longrightarrow T_1$ be the canonical morphism. For $n >> 0$ we have a natural morphism $\rho^{(n)} : T_1 \longrightarrow T_0$ such that $\iota_T \circ \rho^{(n)} = F^n_{T_1}$ and $\rho^{(n)} \circ \iota_T = F^n_{T_0}$. Then we define

$$\mathscr{E}_{(T,z_T)} := \mathscr{E}_{(T,z_T\circ\rho^{(n)})},$$

where the right-hand side was defined at 1). If $n' > n$, say $n' = n + d$ we have

$$\mathscr{E}_{(T,z_T\circ\rho^{(n')})} = ((F^d_{\overline{Z}/T_1})^*\mathscr{E})_{(T,z_T\circ\rho^{(n)})} \cong \mathscr{E}_{(T,z_T\circ\rho^{(n)})},$$

so the definition is independent of n.

4) Now, if we consider (C, z_{can}) as a log enlargement of $\overline{C}$ as $g : Z \longrightarrow C$ is a lift of $g : \overline{Z} \longrightarrow \overline{C}$, the evaluation of $\mathscr{E}$ on it is the relative de Rham cohomology of Z_K/C_K, with its Gauss-Manin connection.

We will leave it to the reader to check the various compatibilities required in the definition of a log F-isocrystal. □

Now, let $j \geq 0$ be an integer and let $\mathscr{E}_j :=\mathrm{Sym}^j\mathscr{E}$, where $\mathscr{E}$ is the log-F-isocrystal defined in the above mentioned theorem. Let $\mathbb{L}_j := \mathrm{Sym}^j(R^i g_*\mathbb{Q}_p)(j+1)$ be the p-adic étale local system on $C - P$ associated by the theory in [**16**] to $\mathscr{E}_j$.

Then Theorem 3.2 of [**17**] and Theorem 6.15 of the present article imply:

Theorem 7.2. — *Let C, $\mathscr{E}_j$ be as at the beginning of the section. Then we have that the FFM-modules $D_{\mathrm{st}}(H^1_{\mathrm{et}}((C-P)_{\overline{K}}, \mathbb{L}_j))$ and $H^1_{\mathrm{int}}(C, \mathscr{E}_j)$ are naturally isomorphic.*

Applying this to example (0) above gives a new proof of the main result in [CI] and applying it to the example in the introduction (i.e. $C = X(N,p)$ etc.) we get,

Corollary 7.3. — *If f is a weight $j+2$, where $j \geq 0$ is an even integer, cuspidal eigenform for $X(N,p)$ with $(N,p) = 1$ (see Section 1) which is split multiplicative at p then all the $\mathscr{L}$-invariants attached to f are equal whenever they are defined. (See Section 1 for a brief discussion of these $\mathscr{L}$-invariants.)*

Corollary 7.4. — *Let $C = X(N,p)$, with $(N,p) = 1$ and for every $j \geq 0$ let $\mathscr{E}_j$ be the log F-isocrystal on $\overline{C}^{\times}$ as in the introduction. The the rank of $N_1^{\deg}$ acting on $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}^{\times}, \mathscr{E}_j)^{p-new}$ equals $\frac{1}{2}\dim_{K_0} H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}^{\times}, \mathscr{E}_j)^{p-new}$.*

Proof. — It is enough to calculate the rank over K of $N_1^{\mathrm{int}} \otimes 1_K$ on $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{C}^{\times}, \mathscr{E}_j)^{p-new}$ and this follows from the study of the residue map on $H^1_{dR}(C_K, \mathscr{E}_j)^{p-new}$ in [C1]. □

As $H_{\mathrm{int}}(C, \mathscr{E}_j)$ has an explicit description, Theorem 7.2 gives an explicit description of $H^1_{\mathrm{et}}((C-P)_{\overline{K}}, \mathbb{L}_j)$ as a Galois representation. In particular if C is a modular curve or Shimura curve, we get explicit descriptions of the restriction of the Galois representation attached to a weight $j+2$ eigenforms F to a decomposition group at p. Corollary 7.4 implies

Corollary 7.5. — *If f is a cuspidal eigenform of weight $j+2 \geq 2$ on $X(N,p)$ which is p-new, the p-adic local Galois representation V_f attached to it is semi-stable but* not *crystalline.*

7.2. Gysin sequences. — Finally, we have another application to our theory, namely the compatibility of the comparison maps with respect to the p-adic étale, respectively crystalline Gysin sequences. More precisely, let the notations be as at the beginning of this section with the difference that $K = K_0$ is unramified over $\mathbb{Q}_p$. Moreover let $\mathbb{L}$ be an étale local system and $\mathscr{E}$ a regular filtered, F-isocrystal on C, which are associated as in [**16**]. Then we have

Proposition 7.6. — *The comparison isomorphisms determine a commutative diagram of FFM-modules with G_K-action*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{et}}(C_{\overline{K}},\mathbb{L})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & H^1_{\text{et}}((C-P)_{\overline{K}},\mathbb{L})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & \oplus_{x\in P}\mathbb{L}_{\overline{x}}(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{st}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{int}}(\mathscr{E})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & H^1_{\text{int}}(P,\mathscr{E})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & \oplus_{x\in P_K}\mathscr{E}_{C,x}[1]\otimes_K B_{\text{st}} \end{array}$$

Proof. — Let us first notice that we have an exact sequence of FFM-modules

$$0\longrightarrow H^1_{\text{int}}(\mathscr{E})\longrightarrow H^1_{\text{int}}(P,\mathscr{E})\overset{\text{Res}_P}{\longrightarrow}\oplus_{x\in P_K}\mathscr{E}_{C,x}[1],$$

where Res_P is the residue map with respect to the points in P_K (let us recall from the Section 2.2 that $H^1_{\text{int}}(P,\mathscr{E}) = H^1_{dR}(C_K,\mathscr{E}_C(\log(P_K))$ as K-vector spaces.) This follows from the fact that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^{1,0}(G,\mathscr{E}) & = & H^{1,0}(G,\mathscr{E}) & & \\ & & u\uparrow & & v\uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1_{dR}(C_K,\mathscr{E}_C) & \longrightarrow & H^1_{dR}(C_K,\mathscr{E}_C(\log(P_K)) & \overset{\text{Res}_P}{\longrightarrow} & \oplus_{x\in P_K}\mathscr{E}_{C,x}[1] \end{array}$$

where u, v are either the residues with respect to the family of annuli $\{A_e\}_{e\in e(G)}$ or the integration splittings.

The proposition will follow from the following two facts:

a) We have a commutative diagram of FFM-modules with exact rows (notations as in Section 2)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{deg}}(\mathscr{E}) & \longrightarrow & H^1_{\text{deg}}(P,\mathscr{E}) & \longrightarrow & \oplus_{y\in P_0}\mathscr{E}_{Y,y}[1] \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{int}}(\mathscr{E}) & \longrightarrow & H^1_{\text{int}}(P,\mathscr{E}) & \longrightarrow & \oplus_{x\in P}\mathscr{E}_{C,x}[1] \end{array}$$

and

b) We have a commutative diagram of FFM-modules with G_K-action

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{et}}(C_{\overline{K}},\mathbb{L})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & H^1_{\text{et}}((C-P)_{\overline{K}},\mathbb{L})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & \oplus_{x\in P}\mathbb{L}_{\overline{x}}(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{st}} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1_{\text{deg}}(\mathscr{E})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & H^1_{\text{deg}}(P,\mathscr{E})\otimes B_{\text{st}} & \longrightarrow & \oplus_{y\in P_0}\mathscr{E}_{Y,y}[1]\otimes_K B_{\text{st}} \end{array}$$

To prove a) above let us recall the notations of Section 2, i.e. let X be our family of curves over S, $\mathscr{P}_X$ the divisor corresponding to $\overline{P}$ and $\mathbb{H}^1, \mathbb{H}^1_P$ the respective cohomology sheaves. Then we have a horizontal exact sequence of $\mathscr{O}_S$-modules which is Frobenius equivariant:

$$(1)\quad 0\longrightarrow\mathbb{H}^1\longrightarrow\mathbb{H}^1_P\overset{\text{Res}_{\mathscr{P}_X}}{\longrightarrow}\mathscr{E}_{(\mathscr{P}_X,z_{can})}[1],$$

where let us recall z_{can} is the map identifying the reduction of $\mathscr{P}_X$ with $\overline{P}$. As $(\mathscr{P}_X, z_{can})$ is a log-enlargement of $\overline{P}$, the crystal $\mathscr{E}_{(\mathscr{P}_X,z_{can})}$ is trivial. Therefore after adjoining $\ell(t)$, we get parallel isomorphisms between the fibers at 0 and π of the exact sequence (1) (let's recall that $\mathbb{H}^1$ is free over $\mathscr{O}_S$) i.e. we get a).

For b) let us first notice that the left square is commutative as it arises from the embedding $U := C - P \subset C$. Let us prove that the right square is commutative (this is more or less explicitly contained in Faltings' papers [**17**], [**16**], [**15**]). $U = C - P$ is an affine curve over V. Let us fix a geometric generic point $\overline{\eta}$ of C and let $\mathscr{G}$ denote the quotient of the Galois group of the maximal cover of C étale over U_K, for which the inertia at the points in P is p-adic. Let $\Delta \subset \mathscr{G}$ denote the geometric Galois group. Then $H^1_{\text{et}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{L}) \cong H^1(\Delta, \mathbb{L}_{\overline{\eta}})$ and the Gysin map $H^1_{\text{et}}(U_{\overline{K}}, \mathbb{L}) \longrightarrow \oplus_{x \in P} \mathbb{L}_{\overline{x}}(-1)$ is the specialization map:

$$H^1(\Delta, \mathbb{L}_{\overline{\eta}}) \longrightarrow \oplus_{x \in P} H^1(I_x, \mathbb{L}_{\overline{x}}) \cong \oplus_{x \in P} \mathbb{L}_{\overline{x}}(-1),$$

where $I_x \cong \mathbb{Z}_p(1)$ is the inertia at x. Now under the comparison map relating the étale cohomology of $U_{\overline{K}}$ with values in $\mathbb{L}$ to the de Rham cohomology of U_K with values in $\mathscr{E}$, the specialization to inertia at the points in P corresponds to the residue of the logarithmic differentials at the points with the same reduction in P_0 (see [**15**]). □

References

[1] P. Berthelot – "Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie", `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/`.

[2] P. Berthelot & A. Ogus – "F-isocrystals and de Rham cohomology. I", *Invent. Math.* **72** (1983), p. 159–199.

[3] B. Chiarellotto – "Weights in rigid cohomology applications to unipotent F-isocrystals", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **31** (1998), p. 683–715.

[4] G. Christol – "Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers", *Astérisque* **119-120** (1984), p. 5, 151–168.

[5] R. F. Coleman – "Torsion points on curves and p-adic abelian integrals", *Ann. of Math.* **121** (1985), p. 111–168.

[6] ———, "Minnesota notes", notes from a course on p-adic integration, 1989.

[7] ———, "Reciprocity laws on curves", *Compositio Math.* **72** (1989), p. 205–235.

[8] ———, "A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms", in *p-Adic Monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture*, 1991.

[9] ———, "The monodromy pairing", *Asian J. Math.* **4** (2000), p. 315–330.

[10] ———, "Stable maps of curves", *Doc. Math.* extra vol. (2003), p. 217–225.

[11] ———, "Variation of Hodge-Tate-Sen weights".

[12] P. Colmez – "Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius", this volume.

[13] P. Colmez & J.-M. Fontaine – "Construction des représentations p-adiques semi-stables", *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[14] P. Deligne – *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math., vol. 163, Springer, 1970.

[15] G. Faltings – "Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations", in *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25–80.

[16] ———, "F-isocrystals on open varieties: results and conjectures", in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 219–248.

[17] ———, "Crystalline cohomology of semistable curve—the $\mathbf{Q}_p$-theory", *J. Algebraic Geom.* **6** (1997), p. 1–18.

[18] ———, "Almost étale extensions", *Astérisque* **279** (2002), p. 185–270.
[19] J.-M. Fontaine – "Représentations p-adiques semi-stables", *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.
[20] R. Greenberg & G. Stevens – "p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms", *Invent. Math.* **111** (1993), p. 407–447.
[21] E. Grosse-Klönne – "The Čech filtration and monodromy in log crystalline cohomology", *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), p. 2945–2972.
[22] R. Hartshorne – *Local cohomology*, A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, vol. 1961, Springer, 1967.
[23] O. Hyodo & K. Kato – "Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles", *Astérisque* **223** (1994), p. 221–268.
[24] A. Iovita & M. Spiess – "Derivatives of p-adic L-functions, Heegner cycles and monodromy modules attached to modular forms", *Invent. Math.* **154** (2003), p. 333–384.
[25] A. J. de Jong – "Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry", *Publ. Math. I.H.É.S.* **82** (1995), p. 5–96.
[26] K. Kato – "Logarithmic structures of Fontaine-Illusie", in *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*, Johns Hopkins Univ. Press, 1989, p. 191–224.
[27] K. S. Kedlaya – "Full faithfulness for overconvergent F-isocrystals", in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 819–835.
[28] B. Le Stum & F. Trihan – "Log-cristaux et surconvergence", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **51** (2001), p. 1189–1207.
[29] B. Mazur – *On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory*, Contemp. Math., vol. 165, 1991.
[30] B. Mazur, J. Tate & J. T. Teitelbaum – "On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer", *Invent. Math.* **84** (1986), p. 1–48.
[31] P. Monsky & G. Washnitzer – "Formal cohomology. I", *Ann. of Math.* **88** (1968), p. 181–217.
[32] A. Ogus – "F-isocrystals and de Rham cohomology. II. Convergent isocrystals", *Duke Math. J.* **51** (1984), p. 765–850.
[33] T. Saito – "Modular forms and p-adic Hodge theory", *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.
[34] A. Shiho – "Crystalline fundamental groups. II. Log convergent cohomology and rigid cohomology", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **9** (2002), p. 1–163.
[35] ———, "The relative case I", preprint, 2007.
[36] ———, "The relative case II", preprint, 2007.
[37] G. Stevens – "Coleman's L-invariant and families of modular forms", this volume.
[38] J. T. Teitelbaum – "Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel", *Invent. Math.* **101** (1990), p. 395–410.
[39] T. Tsuji – "p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case", *Invent. Math.* **137** (1999), p. 233–411.

R. Coleman, University of California, Department of Mathematics, Berkeley, CA 94720, US
A. Iovita, Concordia University Dept. Mathematics & Statistics, 1455 Maisonneuve West, H3G1M8 Montréal, Canada

Astérisque
331, 2010, p. 255–315

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ORDINAIRES DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

par

Christophe Breuil & Matthew Emerton

Résumé. — On définit les représentations p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ « correspondant » aux représentations potentiellement cristallines réductibles (et éventuellement scindées) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 et on montre qu'elles apparaissent naturellement dans la cohomologie étale complétée de la tour en p des courbes modulaires.

***Abstract* (Ordinary p-adic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and local-global compatibility)**
We define p-adic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ "corresponding" to 2-dimensional reducible (and possibly split) potentially crystalline representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and we show that they naturally arise in the completed étale cohomology of the tower at p of the modular curves.

1. Introduction et notations

1.1. — Soient p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. À la suite des développements récents dans la théorie des représentations p-adiques de groupes p-adiques tels que $\mathrm{GL}_n(K)$ ([**44**], [**43**], [**45**], [**22**], [**25**], [**26**], etc.), la question s'est posée d'« associer » des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_n(K)$ aux représentations p-adiques de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ (par exemple aux représentations potentiellement semi-stables de Fontaine), dans l'esprit d'une éventuelle correspondance locale à la Langlands. Initiée par l'exemple dans [**7**] et [**8**] (mais suggérée depuis longtemps par de nombreux mathématiciens), cette problématique a déjà connu un certain nombre de développements ([**9**], [**18**], [**3**], [**19**]) et a pris le nom générique de « correspondance locale de Langlands p-adique ». Cette nouvelle correspondance s'annonce malheureusement beaucoup plus délicate que sa grande sœur locale ℓ-adique et,

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes ordinaires, correspondance de Langlands p-adique, cohomologie étale complétée.

Le premier auteur remercie A. Abbes, G. Chenevier, A. Iovita, C. Khare, M. Kurihara et A. Pál pour des discussions. Le deuxième auteur a bénéficié d'un soutien partiel de la NSF (grant DMS-0401545).

© Astérisque 331, SMF 2010

pour cette raison, les résultats (ou même les conjectures) non triviaux obtenus pour l'instant se limitent tous à GL_2, et même $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Dans cet article, nous nous proposons modestement d'explorer le cas, laissé jusqu'alors en suspens, des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondant aux représentations potentiellement cristallines de dimension 2 *réductibles* (et éventuellement scindées) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Nous définissons de telles représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour la plupart de ces représentations potentiellement cristallines. Nous montrons ensuite que, lorsque la représentation galoisienne provient d'une forme modulaire, alors la représentation associée de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaît naturellement (avec la représentation galoisienne) dans la cohomologie étale complétée des courbes modulaires. C'est là le résultat de « compatibilité local-global » principal de l'article. Concrètement, il s'agit de montrer que l'on peut détecter côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans la cohomologie si la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à la forme modulaire considérée est scindée ou non en p. Pour cela, nous utilisons deux ingrédients : d'une part les théorèmes de comparaison p-adiques (pour les représentations galoisiennes associées aux formes modulaires) et d'autre part la théorie p-adique du foncteur de Jacquet de l'un d'entre nous.

Décrivons maintenant plus précisément le contenu de l'article.

Soit $\sigma_p \simeq \left(\begin{smallmatrix}\eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ une représentation potentiellement cristalline réductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de poids de Hodge-Tate $(1-k,0)$ pour un entier $k \geq 2$ (i.e. telle que η_1 est de poids 0 et η_2 de poids $2-k$) où ε désigne le caractère cyclotomique p-adique. On suppose de plus $\eta_1 \neq \eta_2$ si $k=2$. L'extension $*$ est alors unique si elle est non-nulle. En voyant les caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ comme des caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ via la réciprocité locale, on associe à σ_p un espace de Banach p-adique $B(\sigma_p)$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ comme suit :

(i) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix}\eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$, alors :

$$B(\sigma_p) = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \oplus \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0},$$

(ii) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix}\eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$ avec $*\neq 0$ alors $B(\sigma_p)$ est une extension non scindée :

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \to B(\sigma_p) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \to 0,$$

où la notation $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta\otimes\eta'\right)^{\mathscr{C}^0}$ désigne les fonctions continues f sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans une extension finie (fixée) de $\mathbb{Q}_p$ telles que $f(bg) = (\eta\otimes\eta')(b)f(g)$ (l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ étant la translation usuelle à droite sur les fonctions). Le Banach $B(\sigma_p)$ dans le cas (ii) est obtenu en prenant l'unique complété p-adique unitaire de l'induite parabolique localement analytique (au sens de [**44**]) $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1 \mid |^{k-1}\right.$ $\left.\varepsilon^{2-k}\otimes\eta_2 \mid |^{1-k}\ \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$ où $|\ |$ désigne le caractère norme (cf. §2.2). La définition de la correspondance ci-dessus peut donc se résumer par la phrase : « c'est scindé côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ si et seulement si c'est scindé côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ».

Considérons maintenant une forme modulaire $f = q + \sum_{n\geq 2} a_n(f)q^n$ parabolique nouvelle normalisée de poids $k \geq 2$, niveau N, caractère χ et vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $(\ell, N) = 1$ et U_ℓ pour $\ell | N$. Notons $\sigma(f)$ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à f et $\sigma_p(f)$ sa restriction à un sous-groupe de décomposition en p. Si M est la partie première à p de N et si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle f est définie, notons $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L \overset{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \big($complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H^1_{\text{ét}}(Y_1(M;p^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p)\big)$ où $Y_1(M;p^r)$ est la courbe modulaire ouverte associée au groupe de congruences $\Gamma_1(M) \cap \Gamma(p^r)$. On définit la composante $\sigma(f)$-isotypique :

$$\Pi_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$$

qui est un espace de Banach p-adique naturellement muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On s'attend à ce que la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\Pi_p(f)$ « contienne » exactement la « même information » que la représentation p-adique $\sigma_p(f)$, c'est-à-dire contienne la théorie de Hodge p-adique de la forme f (cf. e.g. [**9**]). Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ est de la forme précédente (i.e. potentiellement cristalline et réductible). Dans ce cas, notre conjecture de compatibilité local-global est alors précisément :

Conjecture 1.1.1. — *Il y a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant d'espaces de Banach p-adiques* $B(\sigma_p(f)) \simeq \Pi_p(f)$.

Le résultat principal du texte est une version faible de cette conjecture :

Théorème 1.1.2. — *(i) On a toujours une immersion fermée* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante d'espaces de Banach p-adiques :*

$$B(\sigma_p(f)) \hookrightarrow \Pi_p(f).$$

(ii) Si $\sigma_p(f)$ *n'est pas scindée, on a de plus (avec les notations précédentes) :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(\sigma_p(f)), \Pi_p(f)\big) &= L \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}, \Pi_p(f)\Big) &= 0. \end{aligned}$$

Nous mentionnons maintenant les étapes pour démontrer le théorème 1.1.2. Pour simplifier, nous supposons dans la suite de l'introduction que f est telle que $a_p(f)$ est une unité p-adique (pour un plongement fixé $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$). Si N est premier à p, notons α_p et β_p les racines de $X^2 - a_p(f)X + p^{k-1}\chi(p)$ avec β_p unité p-adique et posons $\widetilde{f} = f(z) - \beta_p f(pz)$. Si p^r divise exactement N avec $r > 0$, posons $\widetilde{f} = f\,|_{w_{p^r}}$ où w_{p^r} est l'opérateur d'Atkin (cf. §4.1). Rappelons que l'opérateur θ sur les q-développements désigne qd/dq.

Théorème 1.1.3. — *La représentation* $\sigma_p(f)$ *est scindée si et seulement s'il existe une forme surconvergente g (nécessairement de pente nulle et de poids* $2-k$*) telle que* $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(g)$.

Notons que le sens $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(g) \Rightarrow \sigma_p(f)$ scindée est le plus facile (voir e.g. [**30**, Prop.11]). L'existence de g est plus subtile et est basée sur les théorèmes de comparaison p-adiques usuels combinés avec la théorie des formes modulaires surconvergentes. La forme g (lorsqu'elle existe) mérite le nom de forme compagnon surconvergente de f car le théorème 1.1.3 est un analogue en caractéristique 0 du théorème bien connu de Gross ([**33**]). Notons que les deux cas ($\sigma_p(f)$ scindée ou non) arrivent vraiment en pratique (par exemple, si f est CM, g existe toujours par [**13**, Prop.7.1] et $\sigma_p(f)$ est donc scindée). Certains cas du théorème 1.1.3 étaient déjà connus (par une méthode de relèvement à la caractéristique 0 du résultat de [**33**]) : cf. [**11**] et aussi [**30**, §6].

La preuve du deuxième résultat utilise de façon essentielle une version p-adique du foncteur de Jacquet définie et étudiée dans [**22**] et [**25**]. Disons qu'une forme surconvergente g de poids entier $k \geq 2$ est « mauvaise » si elle n'est pas dans l'image de l'opérateur θ^{k-1} (pour la définition précise de « mauvaise » voir la définition 5.4.1 et la proposition 5.4.4).

Théorème 1.1.4. — *Soit g une forme modulaire surconvergente de poids entier $k \in \mathbb{Z}$, niveau N, caractère χ, vecteur propre des opérateurs de Hecke et telle que $U_p g = \alpha_p g$ avec α_p non-nul. Supposons de plus que g n'est pas « mauvaise » lorsque $k \geq 2$. Alors on a une injection :*

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha_p^{-1})\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_p)\right)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$$

où $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$ est l'espace propre de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ pour l'action des opérateurs de Hecke (hors Np) et pour les valeurs propres de g, χ_p est la composante en p du caractère des adèles finis de $\mathbb{Q}$ déduit de χ, $\mathrm{nr}(x)$ est le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur x et « an » désigne l'induite parabolique localement analytique.

En fait, un résultat plus précis est démontré dans le texte (où l'on utilise plutôt la cohomologie à support compact, cf. §5.5). Notons qu'une injection comme dans le théorème 1.1.4 n'est pas unique à cause de la présence de la représentation galoisienne associée à g (de dimension 2) dans l'espace propre $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$. Le théorème 1.1.4 s'obtient de la manière suivante : à la forme surconvergente g correspond un point de la courbe de Hecke (ou « eigencurve ») de Coleman-Mazur ([**17**]). Par la théorie de [**24**], si $J_B\big(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$ est la représentation du tore de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ obtenue après application du foncteur de Jacquet p-adique J_B à $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$, à ce point est associé un sous-espace propre de $J_B\big(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$ pour l'action du tore et des opérateurs de Hecke (hors Mp) : dans notre cas il s'agit du sous-espace propre pour le caractère $\mathrm{nr}(\alpha_p) \mid \mid \otimes \mathrm{nr}(\alpha_p^{-1})\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k} \mid \mid^{-1}$. On déduit alors grosso-modo le théorème 1.1.4 d'une loi d'adjonction pour le foncteur J_B (sauf dans un cas essentiel qui nécessite plus de travail, cf. ci-dessous).

On démontre alors le théorème 1.1.2 comme suit.
On montre d'abord facilement que le morceau $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$ est toujours contenu dans $\Pi_p(f)$. Supposons que $\sigma_p(f)$ est scindée. En appliquant le théorème 1.1.4 à la forme surconvergente g donnée par le théorème 1.1.3 et en tordant par

ε^{k-1}, on obtient une injection continue $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathrm{an}}\hookrightarrow\Pi_p(f)$ d'où une immersion fermée $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}\hookrightarrow\Pi_p(f)$. Ainsi $\Pi_p(f)$ contient dans ce cas la somme directe des deux induites paraboliques continues, c'est-à-dire $B(\sigma_p(f))$. Notons que l'on ne peut pas appliquer le théorème 1.1.4 à la forme surconvergente $\widetilde{f}$ car $\widetilde{f}$ est alors précisément « mauvaise ».
Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ n'est pas scindée. Alors, $\Pi_p(f)$ ne peut contenir le morceau $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ car en appliquant à l'inverse le raisonnement précédent et en utilisant la description cohomologique des formes surconvergentes ordinaires due à Hida, on aurait $\widetilde{f}$ dans l'image de θ^{k-1} ce qui impliquerait $\sigma_p(f)$ scindée (en fait, on montre une assertion un peu plus faible sur $\widetilde{f}$ qui suffit à entraîner $\sigma_p(f)$ scindée, cf. théorème 5.7.2). Mais le théorème 1.1.4 appliqué cette fois à la forme $\widetilde{f}$ (qui n'est plus « mauvaise ») donne une injection continue :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\mid\mid^{k-1}\varepsilon^{2-k}\otimes\eta_2\mid\mid^{1-k}\varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}\hookrightarrow\Pi_p(f)$$

d'où on déduit une immersion fermée $B(\sigma_p(f))\hookrightarrow\Pi_p(f)$ car, par définition, $B(\sigma_p(f))$ est l'unique complété p-adique unitaire de la représentation localement analytique $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\mid\mid^{k-1}\varepsilon^{2-k}\otimes\eta_2\mid\mid^{1-k}\varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$. Avec un peu plus de travail, on obtient la multiplicité 1 du (ii) du théorème 1.1.2. Notons que le théorème 1.1.4 est dans ce cas particulièrement délicat car on est dans une situation de « pente critique » (i.e. on sort des conditions d'application du théorème d'Amice-Vélu et Vishik) et la démonstration de ce cas prend une bonne place de la partie 5.

Le texte est divisé comme suit : après cette introduction et les notations, la partie 2, purement locale, introduit diverses induites paraboliques pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ainsi que la construction des représentations $B(\sigma_p)$. La partie 3 est consacrée à la définition et aux premières propriétés du $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique $\Pi_p(f)$ (pour une forme modulaire propre f quelconque), puis à l'énoncé de la conjecture 1.1.1. La partie 4 contient la démonstration du théorème 1.1.3. Enfin, la partie 5 est consacrée à la démonstration du théorème 1.1.4, puis à celle du théorème 1.1.2. Un appendice conclut l'article, dans lequel on démontre une proposition technique mais importante pour la preuve du théorème 1.1.4.

1.2. — On fixe p un nombre premier. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On fixe des plongements $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour $z\in\overline{\mathbb{Q}_p}$, $\mathrm{val}(z)\in\mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$ est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p)=1$ et $\mid z\mid\overset{\text{déf}}{=}p^{-\mathrm{val}(z)}\in\mathbb{R}^+$. On note $\mathbb{A}$ les adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_f=\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ les adèles finis. On note aussi $\widehat{\mathbb{Z}}^p\overset{\text{déf}}{=}\prod_{\ell\neq p}\mathbb{Z}_\ell$ et $\mathbb{Z}_{Mp}^\times\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_n(\mathbb{Z}/Mp^n\mathbb{Z})^\times$ pour un entier M tel que $(M,p)=1$.

On normalise l'application de réciprocité du corps de classes local en envoyant les Frobenius arithmétiques sur les inverses des uniformisantes. On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et on remarque que, via la réciprocité locale en

p, $\varepsilon(z) = z\,|z|$ si $z \in \mathbb{Q}_p^\times$. On note $\mathrm{nr}(x)$ le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur x.

On note GL_2 le schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$ usuel des matrices carrées inversibles, B (resp. $\overline{\mathrm{B}}$) le sous-schéma en groupes des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), N (resp. $\overline{\mathrm{N}}$) le sous-schéma en groupes de B (resp. $\overline{\mathrm{B}}$) des matrices unipotentes supérieures (resp. inférieures), P le sous-schéma en groupes de B des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{T} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{B}}$ le sous-schéma en groupes de GL_2 des matrices diagonales. Pour un anneau A (commutatif unitaire), on note $\mathrm{GL}_2(A)$, etc. les groupes correspondants des points à valeurs dans A (nous utiliserons essentiellement $A = \mathbb{Q}_p$ et $A = \mathbb{Z}_p$).

On note $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathfrak{t}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathfrak{n}(\mathbb{Q}_p)$ les algèbres de Lie respectives de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p)$, et $\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p)$ le centre de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. On pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ &\overset{\text{déf}}{=} \left\{ t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p) \;\middle|\; t\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1} \subset \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{Q}_p^\times,\ \frac{a}{d} \in \mathbb{Z}_p \right\}, \\ \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+ &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & z \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{Q}_p^\times,\ \frac{a}{d}, \frac{z}{d} \in \mathbb{Z}_p \right\} \end{aligned}$$

et on note $X_- \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action linéaire de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, si $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ et si $N_t \overset{\text{déf}}{=} \{n \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p) \mid t^{-1}nt \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)\}$, on note $\pi_t : V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)} \to V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ l'opérateur de Hecke défini par :

$$\pi_t v \overset{\text{déf}}{=} \#(\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)/N_t)^{-1} \sum_{n \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)/N_t} nt \cdot v.$$

Si $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)$, on a $\pi_t v = t \cdot v$. Les opérateurs π_t préservent $V^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$.

Si f est une forme modulaire holomorphe (pas nécessairement parabolique) de poids $k \geq 2$ de caractère χ nouvelle pour un groupe de congruence $\Gamma_1(N)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui contient les valeurs propres associées, on note $\sigma(f) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(L)$ la représentation p-adique semi-simple associée à f par Deligne. Si ℓ est un nombre premier, on désigne par Frob_ℓ un Frobenius arithmétique en ℓ. Pour $\ell \nmid Np$, le polynôme caractéristique de $\sigma(f)(\mathrm{Frob}_\ell^{-1})$ est $X^2 - a_\ell X + \ell^{k-1}\chi(\ell)$ si $T_\ell f = a_\ell f$. La représentation $\sigma(f)$ est absolument irréductible si f est parabolique. Si $\pi_{p,u}(f)$ désigne la composante locale en p de la représentation admissible lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ engendrée par f (cf. [**20**, §2.4]), on pose :

$$\pi_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \pi_{p,u}(f) \otimes |\det|^{\frac{2-k}{2}}.$$

C'est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central $|\ |^{2-k}\chi_p^{-1}$ où χ_p est la composante locale en p de χ vu comme caractère de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^\times$. Par exemple, si

$(p,N)=1$, alors $\pi_p(f)$ est l'induite parabolique lisse de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du caractère non ramifié $\mathrm{nr}(p^{-1}\beta_p)\otimes\mathrm{nr}(\alpha_p)$ où α_p,β_p sont les racines de $X^2-a_pX+p^{k-1}\chi(p)$.

Si A est un anneau (commutatif unitaire), on note $\mathrm{Sym}^{k-2}A^2$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(A)$ dont l'espace sous-jacent est le A-module $\oplus_{0\leq j\leq k-2}Az^j$ muni de l'action A-linéaire à gauche $(g(P))(z)\overset{\text{déf}}{=}(-cz+a)^{k-2}P(\frac{dz-b}{-cz+a})$ où $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(A)$ et $P\in\oplus_{0\leq j\leq k-2}Az^j$.

Si M est un entier premier à p, on note $\mathbb{T}(M)$ (ou simplement $\mathbb{T}$ si M est fixé) l'algèbre polynomiale sur $\mathbb{Z}_p$ engendrée par les variables T_ℓ et S_ℓ pour ℓ premier ne divisant pas Mp. On appelle parfois « module de Hecke » un $\mathbb{T}$-module et « système de valeurs propres de Hecke » (defini sur L) un homomorphisme $\lambda:\mathbb{T}\to L$ pour une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Si λ est un système de valeurs propres de Hecke défini sur L et X un module de Hecke, on note X_L^λ le sous-espace de $X\otimes_{\mathbb{Z}_p}L$ sur lequel $\mathbb{T}$ agit via λ. Si λ provient d'une forme modulaire f vecteur propre des T_ℓ et S_ℓ, on note aussi $X_L^f\overset{\text{déf}}{=}X_L^\lambda$. On dit qu'un système de valeurs propres λ défini sur L est Eisenstein s'il existe des caractères continus $\varepsilon_1,\varepsilon_2:\mathbb{Z}_{Mp}^\times\to L^\times$ tels que $\lambda(T_\ell)=\varepsilon_1(\ell)+\varepsilon_2(\ell)$ et $\lambda(\ell S_\ell)=\varepsilon_1(\ell)\varepsilon_2(\ell)$ pour tout $\ell\nmid Mp$. On dit qu'un module de Hecke X est Eisenstein si, pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, tout système de valeurs propres λ défini sur L tel que $X_L^\lambda\neq 0$ est Eisenstein.

Tous les espaces de Banach B de ce texte sont p-adiques et tels que $\|B\|\subseteq|L|$ où $L\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne le corps des coefficients qui est toujours une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On appelle $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire un espace de Banach B muni d'une action à gauche L-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ telle que les applications $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\to B$, $g\mapsto gv$ sont continues pour tout $v\in B$ et telle que, pour un choix de norme $\|\ \|$ sur B, on a $\|gv\|=\|v\|$ pour tout $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tout $v\in B$. Un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire est dit admissible (suivant [**43**, §3]) si le Banach dual est de type fini sur $L\otimes_{\mathscr{O}_L}\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ où $\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_H\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/H]$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes de congruences principaux de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

2. Représentations ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Dans cette partie, après des préliminaires sur les induites paraboliques, nous définissons les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires $B(\sigma_p)$ de l'introduction. On fixe L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

2.1. — On commence par quelques considérations générales sur les induites paraboliques.

On note $\widehat{\mathrm{T}}$ l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ paramétrant les caractères localement analytiques (ou continus, ce qui est équivalent) $\chi_1\otimes\chi_2$ de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$. Cet espace est isomorphe au produit $(\mathscr{W}\times\mathbb{G}_m)^2$ où $\mathscr{W}$ est l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ paramétrant les caractères localement analytiques de $\mathbb{Z}_p^\times$ ([**24**, §4.4]). Un élément de $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ est donc un caractère localement analytique $\chi_1\otimes\chi_2:T(\mathbb{Q}_p)\to L^\times$.

Définition 2.1.1. — *On dit qu'un caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ de $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique k où k est un entier ≥ 2 si le caractère $\chi_2/\chi_1 : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ est produit d'un caractère localement constant par le caractère algébrique $z \mapsto z^{k-2}$. On dit qu'un caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ de $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique s'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $\chi_1 \otimes \chi_2$ est de poids classique k.*

Si d un entier positif ou nul, on note $\mathscr{C}^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{d}}(\mathbb{Z}_p, L)$ (resp. $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, L)$, resp. $\mathscr{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$) le L-espace vectoriel des fonctions localement polynomiales de degré $\leq d$ (resp. localement analytiques, resp. continues) $f : \mathbb{Z}_p \to L$ muni de la topologie localement convexe la plus fine (resp. de type compact définie dans [**44**], resp. associée à la norme Sup $|\, f(z)\,|$). Lorsque $d = 0$, on note aussi $\mathscr{C}^{\mathrm{lc}}(\mathbb{Z}_p, L) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{C}^{\mathrm{lp},\leq 0}(\mathbb{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbb{Z}_p$.

Si $\chi_1 \otimes \chi_2 : T(\mathbb{Q}_p) \to L^\times$ est un caractère de poids classique k (resp. localement analytique, resp. continu), on note :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$$

(resp. $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$, resp. $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathscr{C}^0}$) l'induite parabolique localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique au sens de [**44**, §5,6], resp. continue au sens de [**43**]), c'est-à-dire le L-espace vectoriel V des fonctions $F : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to L$ telles que $g \mapsto \det(g)^{-1} F(g)$ est localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique, resp. continue) et telles que :

$$F\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) g\big) = \chi_1(a)\chi_2(d) F(g)$$

muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ donnée par $(g \cdot F)(g') \overset{\text{déf}}{=} F(g'g)$. Cet espace est naturellement muni d'une topologie localement convexe (la plus fine dans le cas localement algébrique, de type compact dans le cas localement analytique (cf. [**44**] pour une définition précise), associée à la norme $\mathrm{Sup}_{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}\ |\, f(g)\,|$ dans le cas continu) pour laquelle l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times V \to V$, $(g, F) \mapsto g \cdot F$ est continue.

L'application :

$$F \in V \mapsto \Big(z \mapsto F\big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}\big)\Big)$$

identifie V au L-espace vectoriel des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytiques, resp. continues) $f : \mathbb{Q}_p \to L$ telles que $(\chi_2\chi_1^{-1})(z) f(1/z)$ se prolonge au voisinage de $z = 0$ en une fonction polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. analytique, resp. continue). L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'écrit alors :

$$\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f\Big)(z) = \chi_1(ad-bc)(\chi_2\chi_1^{-1})(-cz+a) f\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big) \tag{1}$$

et l'application :

$$f \mapsto \Big(\big(z \mapsto f(pz)\big), \big(z \mapsto (\chi_2\chi_1^{-1})(z) f(1/z)\big)\Big)$$

fournit un isomorphisme topologique avec $\mathscr{C}^{\mathrm{lp},\leq k-2}(\mathbb{Z}_p,L)^2$ (resp. $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,L)^2$, resp. $\mathscr{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)^2$). Si $k=2$, on note aussi $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lc}} \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq 0}$. Il s'agit de l'induite lisse usuelle de $1\otimes\chi_2\chi_1^{-1}$ tordue par χ_1.

Nous aurons besoin de considérer des sous-espaces non préservés par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, mais préservés par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, dans les induites localement analytiques précédentes. Nous les introduisons maintenant.

Pour $\chi_1\otimes\chi_2\in\widehat{\mathrm{T}}(L)$ et d un entier ≥ 0, on note :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$$

le sous-espace de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ des fonctions f ci-dessus à support compact dans $\mathbb{Q}_p$ et localement polynomiales de degré $\leq d$. Si $d=0$, on note aussi $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$. On pose :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}} \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{d\geq 0}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}.$$

On munit ces espaces de la topologie localement convexe la plus fine. Chacun des espaces $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ est $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-invariant et leur réunion est de plus $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-invariante. L'inclusion :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\subset\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

induit donc un morphisme $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\longrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}} \tag{2}$$

où $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$) est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$).

Les deux lemmes qui suivent sont classiques. Pour le confort du lecteur, nous incluons leur preuve.

Lemme 2.1.2. — *Si $\chi_1\otimes\chi_2$ n'est pas de poids classique, alors* (2) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit $w_i\in L$ le poids du caractère χ_i $(i=1,2)$ et notons $w\overset{\text{déf}}{=}w_2-w_1$. Demander que $\chi_1\otimes\chi_2$ ne soit pas de poids classique est équivalent à demander que w ne soit pas un entier positif ou nul. Si $X\overset{\text{déf}}{=}\left(\begin{smallmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $f\in\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ (vu comme fonction sur $\mathbb{Q}_p$ comme précédemment), on obtient en différentiant (1) la formule suivante pour $X\cdot f$:

$$(X\cdot f)(z)=\big(w_1(\alpha+\delta)+w(\alpha-\gamma z)\big)f(z)+\big(-\beta+(\delta-\alpha)z+\gamma z^2\big)f'(z) \tag{3}$$

où $f'(z)$ est la dérivée de f. Soit $L[z]$ le L-espace vectoriel des polynômes en z à coefficients dans L. La formule (3) définit une représentation de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $L[z]$ qui est un exemple de *module de Verma contragrédient* pour $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le sous-espace $L\subset L[z]$ des fonctions constantes est annulé par $\mathfrak{n}(\mathbb{Q}_p)$, et $\mathfrak{t}(\mathbb{Q}_p)$ agit sur L (vu comme

L-espace vectoriel de dimension 1) par la dérivée du caractère $\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}$, c'est-à-dire par $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{smallmatrix}\right) \mapsto w_2\alpha + w_1\delta$. L'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $L[z]$ induit un morphisme de $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-modules :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L \to L[z], \tag{4}$$

et c'est un résultat classique de théorie des modules de Verma (qui se vérifie directement en utilisant (3)) que (4) est un isomorphisme sous l'hypothèse que w n'est pas un entier positif ou nul. Si Ω est un ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$, notons $L[z]_{|\Omega}$ l'espace des fonctions $\mathbb{Q}_p \to L$ qui sont polynomiales sur Ω et nulles sur le complémentaire de Ω. Par (3), on voit que $L[z]_{|\Omega}$ est un sous-espace de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ stable par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si $f \in L[z]$, soit $f_{|\Omega}$ l'élément de $L[z]_{|\Omega}$ défini comme étant le polynôme f sur Ω et 0 sur $\mathbb{Q}_p \setminus \Omega$. L'application $f \mapsto f_{|\Omega}$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-modules $L[z] \xrightarrow{\sim} L[z]_{|\Omega}$. Si $L_{|\Omega}$ désigne le sous-espace de $L[z]_{|\Omega}$ formé des fonctions constantes sur Ω, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L & \longrightarrow & L[z] \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes(f\mapsto f_{|\Omega})} & & \big\downarrow{\scriptstyle f\mapsto f_{|\Omega}} \\ \mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L_{|\Omega} & \longrightarrow & L[z]_{|\Omega} \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure et les deux flèches verticales sont des isomorphismes. Il en est donc de même de la flèche horizontale inférieure. On a par ailleurs des isomorphismes de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-modules (resp. de $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-modules) :

$$\varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L[z]_{|\Omega_i} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

(resp.

$$\varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L_{|\Omega_i} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}})$$

où la limite inductive est prise sur tous les ensembles finis $\{\Omega_i\}$ d'ouverts compacts disjoints de $\mathbb{Q}_p$. Mais par le résultat ci-dessus, la flèche naturelle :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} \varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L_{|\Omega_i} \to \varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L[z]_{|\Omega_i}$$

est un isomorphisme, d'où on déduit le lemme. □

Lemme 2.1.3. — *Si $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique k, alors le sous-espace $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-2}$ de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ est stable par $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$, et l'image de (2) est égale à ce sous-espace, tandis que le noyau de (2) est isomorphe à :*

$$X_-^{k-1}\Big(\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\Big).$$

Démonstration. — On garde les notations de la preuve du lemme précédent mais on suppose cette fois que $w = k-2$ est un entier positif ou nul. Si $L[z]^{\leq w}$ désigne le sous-espace de $L[z]$ des polynômes de degré au plus w, on voit par (3) que $L[z]^{\leq w}$ est stable sous l'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Plus précisément $L[z]^{\leq w}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont le sous-espace de plus haut poids (par rapport à la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$) est précisément le sous-espace L des constantes, sur lequel $\mathfrak{t}(\mathbb{Q}_p)$ agit par le poids dominant $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{smallmatrix}\right) \mapsto w_2\alpha + w_1\delta$ (voir preuve du Lemme 2.1.2). L'annulateur de L dans $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ est donc égal à $X_-^{w+1}\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$, et l'application (4) induit une surjection :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L \to L[z]^{\leq w}$$

de noyau $X_-^{w+1}\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le lemme découle alors du même argument déjà utilisé dans la preuve du lemme 2.1.2, *mutatis mutandis.* □

Le résultat suivant, de type « Amice-Vélu » est un cas particulier du résultat principal de [**25**] :

Proposition 2.1.4. — *Si V est un espace de Banach sur L muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, alors la restriction des homomorphismes induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{an}}, V\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}, V_{\mathrm{an}}\right)$$

*où V_{an} est le sous-espace de V des vecteurs localement analytiques ([**45**, §7]).*

Il s'agit bien sûr ici des homomorphismes continus (notons que, la topologie localement convexe sur $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ étant la plus fine, la continuité des morphismes à droite est automatique). Pour la commodité du lecteur, nous donnons en appendice une preuve complète de cette proposition importante mais technique.

Rappelons enfin qu'aux représentations $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ si $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique k et $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{an}}$ si $\chi_1\otimes\chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$, on peut aussi associer leur complété unitaire universel, c'est-à-dire le complété par rapport à une semi-norme continue invariante sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ aussi « fine » que possible (cf. [**21**, §1]). C'est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire qui peut être nul. Par exemple, dans le cas localement algébrique, il s'agit simplement du complété de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ par rapport à un $\mathscr{O}_L$-réseau de type fini sur $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (lorsqu'un tel réseau existe).

2.2. — On définit les espaces de Banach $B(\sigma_p)$ par complétion unitaire d'induites paraboliques.

On fixe un entier $k \geq 2$ et $\chi_1\otimes\chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ tel que $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique k, χ_2 est localement constant et on a $\mathrm{val}(\chi_2(p)) = k-1$ et $\mathrm{val}(\chi_1(p)) = 1-k$. Si $k=2$, on suppose de plus $\chi_1 \neq \chi_2|\ |^2$ de sorte que la représentation $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lc}}$ est irréductible et isomorphe à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}\right)^{\mathrm{lc}}$.

On pose $\eta_1 \overset{\text{déf}}{=} \chi_1 \mid \mid^{1-k} \varepsilon^{k-2} = \chi_1 \mid \mid^{-1} z^{k-2}$ et $\eta_2 \overset{\text{déf}}{=} \chi_2 \mid \mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} = \chi_2 \mid \mid z^{2-k}$: les caractères η_1 et η_2 sont à valeurs entières.

Proposition 2.2.1. — *Le complété unitaire universel de la représentation localement algébrique* $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ *s'identifie au* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-Banach unitaire admissible et topologiquement irréductible* $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$.

Démonstration. — En utilisant l'entrelacement :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-2}\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lc}} \simeq \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2 \mid \mid \otimes \chi_1 \mid \mid^{-1} z^{k-2}\right)^{\mathrm{lc}}$$

on obtient un isomorphisme $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2} \simeq \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$. Soit I_{k-2} le L-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to L$ nulles en dehors de $\mathbb{Z}_p$ et polynomiales de degré $\leq k-2$ en restriction à $\mathbb{Z}_p$, et choisissons une base $(f_0, \cdots, f_{k-2})$ du $\mathscr{O}_L$-réseau de I_{k-2} des fonctions à valeurs dans $\mathscr{O}_L$. Alors la sous-$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\sum_{0\leq i\leq k-2}\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]f_i \subset \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ s'identifie au réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des fonctions de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ à valeurs dans $\mathscr{O}_L$. On voit donc que ce réseau est de type fini et que le complété unitaire universel de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ (ou de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$), c'est-à-dire le complété de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ par rapport à ce réseau, s'identifie à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$. Ce dernier $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach est admissible car son dual s'identifie à $L\otimes(\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]\otimes_{\mathscr{O}_L[[\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)]]}\mathscr{O}_L)$ qui est de type fini sur $\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ (l'application $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)\to\mathscr{O}_L$ étant $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\mapsto\eta_2(a)\eta_1(d)$). On peut voir l'irréductibilité comme suit : soit $B\subseteq\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$ un sous-espace fermé non-nul stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Par densité des vecteurs localement analytiques d'un Banach p-adique admissible ([**45**, Th.7.1]), B contient une sous-représentation de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{an}}$ dense (dans B), qui contient elle-même nécessairement la représentation $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ (car celle-ci est localement polynomiale, donc *a fortiori* localement analytique). Or on a vu que cette représentation est dense dans $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$ qui est donc aussi B. □

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{Z}_p \to L$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si son développement de Mahler $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\binom{z}{n}$ est tel que $n^{k-1} \mid a_n(f) \mid$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}^+$ quand n tend vers $+\infty$ (où $\binom{z}{0} \overset{\text{déf}}{=} 1$ et $\binom{z}{n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}$ si $n>0$). On note $\mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ le L-espace vectoriel de ces fonctions. C'est un Banach pour la norme $\| f \| \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sup}_n n^{k-1}|a_n(f)|$. On peut aussi décrire cet espace comme les fonctions $k-1$ fois dérivables de $(k-1)$-ième dérivée continue ([**42**, §54]). Les fonctions de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sont stables par somme, produit, composition, etc. (cf. [**42**, Th.77.5]).

Soit V le L-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to L$ telles que les fonctions $f_1 \overset{\text{déf}}{=} (z\mapsto f(pz))$ et $f_2 \overset{\text{déf}}{=} (z\mapsto(\chi_2\chi_1^{-1})(z)f(1/z))$ sont dans $\mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$. C'est un

espace de Banach pour la norme $\mathrm{Sup}(\| f_1 \|, \| f_2 \|)$. On munit V de l'action à gauche (1) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui est une action par automorphismes continus (cf. [**3**, §4.2]). Pour $0 \leq j \leq k-2$ et $a \in \mathbb{Q}_p$, les fonctions $f(z) = z^j$ et $f(z) = (z-a)^{-j}(\chi_2\chi_1^{-1})(z-a)$ sont dans V (la preuve est analogue à [**3**, Lem.4.2.2]). On définit $W \subset V$ comme l'adhérence dans V du sous-L-espace vectoriel engendré par toutes ces fonctions. Il est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 2.2.2. — *Le complété unitaire universel de la représentation localement analytique* $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}}$ *s'identifie au Banach quotient V/W avec son action induite de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *C'est un* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-Banach unitaire admissible de longueur topologique* 2, *extension non triviale de* $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ *par* $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$.

Démonstration. — Posons $\alpha \overset{\text{déf}}{=} \chi_1(p)^{-1}$ et $\beta \overset{\text{déf}}{=} p^{k-1}\chi_2(p)^{-1}$, on a :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}} = \varepsilon^{2-k} \otimes \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{nr}(\alpha^{-1})\psi_1 \otimes \mathrm{nr}(p\beta^{-1})\psi_2 z^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$$

avec $\psi_1 = \chi_1\mathrm{nr}(\chi_1(p))^{-1}\varepsilon^{k-2}$ et $\psi_2 = \chi_2\mathrm{nr}(\chi_2(p))^{-1}$. D'après [**21**, Prop.1.21] (plus précisément la preuve de *loc. cit.*), le complété unitaire universel de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}}$ est le complété par rapport au sous-$\mathscr{O}_L[\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)]$-module engendré par les vecteurs $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z)z^j$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}_p-\mathbb{Z}_p}(z)(\chi_2\chi_1^{-1})(z)z^{-j}$ où $\mathbf{1}_U$ est la fonction caractéristique de l'ouvert U et $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Par le même calcul que dans la preuve de [**3**, Th.4.3.1] (on a multiplié ici les caractères non-ramifiés $\mathrm{nr}(\alpha^{-1})$ et $\mathrm{nr}(p\beta^{-1})$ par les caractères entiers ψ_1 et ψ_2 et tordu la représentation par le caractère entier ε^{2-k} mais cela ne modifie pas l'argument), on trouve alors qu'une boule ouverte (de centre 0) du Banach dual du complété cherché s'identifie aux distributions μ dans le dual fort de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}}$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, tout $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu(z) \quad \in \quad p^{n(j-k+1)}\mathscr{O}_L \tag{5}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p-(a+p^n\mathbb{Z}_p)}(z-a)^{-j}(\chi_2\chi_1^{-1})(z-a)d\mu(z) \quad \in \quad p^{n(k-1-j)}\mathscr{O}_L \tag{6}$$

en se rappelant que $\mathrm{val}(\chi_1(p)) = 1-k$. Un raisonnement analogue à celui de la preuve de [**3**, Th.4.3.1] montre que les conditions (5) et (6) sélectionnent exactement les distributions tempérées d'ordre $\leq k-1$ (c'est-à-dire les distributions de $V^\vee$) annulant les fonctions z^j et $(z-a)^{-j}(\chi_2\chi_1^{-1})(z-a)$ pour $0 \leq j \leq k-2$ (faire $n \mapsto -\infty$ dans (5) et $n \mapsto +\infty$ dans (6)), c'est-à-dire les fonctions de W. On en déduit la première partie de l'énoncé. Un raisonnement similaire (en plus simple) montre que le complété unitaire universel de l'induite $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\right)^{\mathrm{an}} = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathrm{an}}$ s'identifie à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ et la même preuve que pour la proposition 2.2.1 montre que ce dernier est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissible et topologiquement irréductible. Il résulte de la définition du complété unitaire

universel que la surjection $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{an}}\twoheadrightarrow\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\right)^{\mathrm{an}}$ induit une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $V/W\twoheadrightarrow\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$. Par continuité, cette dernière surjection s'identifie encore à $f\mapsto f^{(k-1)}$ et son noyau n'est autre que N/W où $N\subset V$ est le sous-espace fermé des fonctions de dérivée $(k-1)$-ième nulle (notons que $W\subset N$). Par ailleurs, le complété unitaire universel de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ s'envoie par fonctorialité dans N/W et, via la proposition 2.2.1, on voit qu'il s'agit nécessairement d'une immersion fermée (car les caractères η_1 et η_2 étant entiers, il n'y a qu'une norme invariante à équivalence près sur $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq k-2}=\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$, voir e.g. [**3**],Cor.5.4.4). En utilisant le résultat d'analyse p-adique disant que l'adhérence dans $\mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p,L)$ du sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $k-2$ s'identifie exactement aux fonctions de dérivée $(k-1)$-ième nulle (dont on trouvera une preuve pour $k=2$ dans [**42**, §68] et pour k quelconque dans [**41**, §8]), on obtient bien une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$0\to\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}\to V/W\to\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}\to 0$$

qui fait de V/W un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissible de longueur topologique 2 (en utilisant ce qui précède et la proposition 2.2.1). Enfin, cette suite est non scindée, sinon la représentation localement analytique $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{an}}$ serait également scindée ce qui n'est pas le cas (cf. [**44**]). □

2.3. — Soit σ_p une représentation potentiellement cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ réductible et de dimension 2 sur L. On peut écrire :

$$\sigma_p\simeq\begin{pmatrix}\chi_1\,|\,|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2} & *\\ 0 & \chi_2\,|\,|^{k-1}\,\varepsilon^{1-k}\end{pmatrix}\otimes\eta$$

pour un caractère continu $\eta:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)\to L^\times$, un unique entier k supérieur ou égal à 1 et un caractère $\chi_1\otimes\chi_2$ de poids classique k avec χ_2 localement constant tel que $\mathrm{val}(\chi_2(p))=k-1$ et $\mathrm{val}(\chi_1(p))=1-k$ (de sorte que, via la réciprocité locale, $\chi_1\,|\,|^{1-k}$ et $\chi_2\,|\,|^{k-1}$ s'étendent à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$). Notons que, lorsque $k=1$, la terminologie « de poids classique 1 » est un abus de notations et signifie ici que χ_2/χ_1 est le produit d'un caractère localement constant par le caractère $z\mapsto z^{-1}$ (cf. définition 2.1.1). Si l'extension $*$ est non-nulle, alors elle est unique. On pose $\eta_1\overset{\text{déf}}{=}\chi_1\,|\,|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2}$ et $\eta_2\overset{\text{déf}}{=}\chi_2\,|\,|^{k-1}\,\varepsilon^{2-k}$ comme au §2.2. Si $k=2$, on suppose $\eta_1\neq\eta_2$ (voir la remarque 2.3.1 pour le cas $\eta_1=\eta_2$). On « associe » alors à σ_p le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\sigma_p)$ suivant :

(i) si $\sigma_p\simeq\begin{pmatrix}\eta_1 & 0\\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\otimes\eta$, alors :

$$B(\sigma_p)\overset{\text{déf}}{=}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}\otimes\eta\oplus\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}\otimes\eta,$$

(ii) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \otimes \eta$ avec $* \neq 0$ et si $k \geq 2$ (voir la remarque 2.3.2 pour $k = 1$), alors $B(\sigma_p)$ est le tordu par η du complété unitaire universel de l'induite parabolique localement analytique $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}}$. Par le théorème 2.2.2, c'est une extension non scindée :

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta \to B(\sigma_p) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta \to 0.$$

Remarque 2.3.1. — On discute ici le cas $k = 2$ et $\eta_1 = \eta_2$. Notons qu'alors $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{lc}} = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \ | \ | \otimes | \ |^{-1}\right)^{\mathrm{lc}} \otimes \eta_1$ n'est plus isomorphe à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2 \ | \ | \otimes \chi_1 \ | \ |^{-1}\right)^{\mathrm{lc}} = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1 \otimes 1\right)^{\mathrm{lc}} \otimes \eta_1$. Soit $B(2,\infty)$ le complété unitaire universel de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \ | \ | \otimes | \ |^{-1}\right)^{\mathrm{lc}}$ (c'est une extension non-scindée de la représentation triviale par **St** où, comme dans [**8**], on note **St** le complété unitaire universel de la représentation de Steinberg). On est ici tenté de définir le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\sigma_p)$ associé à σ_p comme suit :
(i) si σ_p est scindée :

$$B(\sigma_p) \overset{\text{déf}}{=} B(2,\infty) \otimes \eta_1\eta \oplus \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta_1\eta,$$

(ii) si σ_p est non scindée, $B(\sigma_p)$ est défini comme le complété unitaire universel de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \ | \ | \otimes | \ |^{-1}\right)^{\mathrm{an}} \otimes \eta_1\eta$, et on a une extension non-scindée :

$$0 \to B(2,\infty) \otimes \eta_1\eta \to B(\sigma_p) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta_1\eta \to 0.$$

Bien sûr, ce cas « non générique » n'arrive jamais dans le contexte global des formes modulaires paraboliques, et on ne peut donc le « tester » directement. Cependant, des considérations globales indirectes devraient permettre de tester le cas non scindé, comme nous l'expliquons maintenant.

Supposons que σ_p est non scindée (avec $k = 2$ et $\eta_1 = \eta_2$) et supposons, pour simplifier, que $\eta_1 = \eta_2$ et η sont les caractères triviaux (quitte à tordre). La représentation σ_p peut se voir comme la « limite » (en un sens convenable) lorsque $\mathscr{L} \to \infty$ (i.e. $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \to -\infty$) des représentations semi-stables réductibles $V(2,\mathscr{L})$ de [**8**, Ex.1.3.5] (on peut par exemple considérer cette limite dans l'espace projectif de dimension 1 des classes d'isomorphismes d'extensions non-triviales de ε^{-1} par le caractère trivial). Pour chaque valeur (finie) de $\mathscr{L}$, considérons le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(2,\mathscr{L})$ défini dans [**8**]. Il est alors très facile de prendre la limite lorsque $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \to -\infty$ dans la construction de $B(2,\mathscr{L})$ et de vérifier que l'on obtient le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $B(2,\infty)$ ci-dessus (dans la discussion de [**8**, §4.5], il suffit de remplacer la représentation $\sigma(2,\mathscr{L})$ par la représentation $\sigma(2,\infty)$ obtenue en remplaçant val par $\log_{\mathscr{L}}$ dans la définition de $\sigma(2,\mathscr{L})$). En remplaçant ∞ par une valeur finie de $\mathscr{L}$, on s'attend comme en (ii) ci-dessus à ce que le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(V(2,\mathscr{L}))$ correspondant à $V(2,\mathscr{L})$ donne lieu à une suite exacte courte :

$$0 \to B(2,\mathscr{L}) \to B(V(2,\mathscr{L})) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \to 0$$

(bien qu'il ne soit pas clair, pour l'instant, comment construire une telle suite exacte). Le test global indirect évoqué ci-dessus consiste alors à prendre une forme modulaire nouvelle de niveau N et poids 2 telle que $\sigma_p(f) \xrightarrow{\sim} V(2,\mathscr{L}) \otimes \eta$ et à se demander si $\Pi_p(f)$ (comme défini dans l'introduction) donne bien lieu à une suite exacte courte :

$$0 \to B(2,\mathscr{L}) \otimes \eta \to \Pi_p(f) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta \to 0.$$

Pour le moment, il est seulement connu qu'il existe un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $B(2,\mathscr{L}) \otimes \eta \hookrightarrow \Pi_p(f)$ ([**9**]).

Remarque 2.3.2. — Lorsque $k = 1$ et $* \neq 0$, nous ignorons comment (ou même si l'on peut) construire une extension non scindée de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ par $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$.

Remarque 2.3.3. — De même que l'extension est unique côté Galois (lorsqu'elle est non-nulle), on peut se demander s'il existe d'autres extensions de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ par $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}$ dans la catégorie abélienne des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires admissibles que celle donnée par le complété unitaire universel de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}}$.

Remarque 2.3.4. — Une version des résultats et définitions du §2.2 et du §2.3 se trouve déjà dans [**4**, §7] (qui ne sera pas publié).

3. La conjecture de compatibilité local-global

À toute forme modulaire parabolique propre f de poids $k \geq 2$, on associe un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire admissible $\Pi_p(f)$ construit dans la cohomologie des courbes modulaires. Lorsque la représentation galoisienne p-adique associée à f est potentiellement cristalline réductible en p, on conjecture que $\Pi_p(f)$ est exactement le Banach du §2.3.

3.1. — On commence par quelques rappels et préliminaires sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ et $\widehat{H}^1(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ de [**24**] et [**9**].

Pour tout sous-groupe compact K_f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, on note :

$$Y(K_f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/\mathbb{C}^\times K_f$$

où l'on voit $\mathbb{C}^\times$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par $a+ib \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Pour tout entier positif M premier à p et tout entier positif ou nul r, on pose :

$$K_1^p(M) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p),\ (c,d) \equiv (0,1) \bmod M \right\},$$

$$K_p(r) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod p^r \right\}$$

et $K_1(M;p^r) \overset{\text{déf}}{=} K_1^p(M)K_p(r)$. Il s'agit de sous-groupes ouverts respectivement de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$. On note $Y_1(M;p^r) \overset{\text{déf}}{=} Y(K_1(M;p^r))$ la courbe modulaire (ouverte) classifiant les courbes elliptiques avec structure de niveau $\Gamma_1(M)$ en dehors de p et structure de niveau $\Gamma(p^r)$ en p.

Le complété p-adique d'un $\mathbb{Z}_p$-module X est par définition le $\mathbb{Z}_p$-module :

$$\widehat{X} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n X/p^nX.$$

Pour $i \in \{0,1\}$ (resp. $i \in \{1,2\}$), on note $\widehat{H}^i(K_1^p(M))$ (resp. $\widehat{H}^i_c(K_1^p(M))$) le complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H^i(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$ (resp. du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H^i_c(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$) et, pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, $\widehat{H}^i(K_1^p(M))_L \overset{\text{déf}}{=} \widehat{H}^i(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$ (resp. $\widehat{H}^i_c(K_1^p(M))_L \overset{\text{déf}}{=} \widehat{H}^i_c(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$). Les $\mathbb{Z}_p$-modules $\widehat{H}^i(K_1^p(M))$ et $\widehat{H}^i_c(K_1^p(M))$ sont sans torsion et munis d'actions naturelles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$ induites par leurs actions sur $\varinjlim_r H^i(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$ et $\varinjlim_r H^i_c(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ fait de $\widehat{H}^i(K_1^p(M))_L$ et $\widehat{H}^i_c(K_1^p(M))_L$ des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires qui sont admissibles ([**24**, Th.2.2.13]).

Si $i=1$, par [**9**, Lem.2.2.1] ou [**24**, Prop.4.3.9], l'application naturelle de la cohomologie à support compact vers la cohomologie :

$$\widehat{H}^1_c(K_1^p(M)) \longrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M)) \tag{7}$$

est surjective et on note $\widehat{M}$ son noyau. Il est encore muni des actions induites de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$. Ce noyau admet une description explicite simple que nous donnons maintenant.

Si K_f est un sous-groupe ouvert compact quelconque de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, rappelons que l'ensemble des pointes de la courbe modulaire $Y(K_f)$ admet la description adélique :

$$C(K_f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \times \pi_0 \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f))/K_f \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K_f$$

où $\mathrm{T}(\mathbb{Q})^+$ est le sous-groupe de $\mathrm{T}(\mathbb{Q})$ des matrices diagonales de déterminant positif et π_0 le groupe des composantes connexes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Passant à la limite projective sur K_f, on obtient la description suivante de l'ensembre profini $\widehat{C} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{K_f} C(K_f)$:

$$\widehat{C} \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) \overset{\sim}{\longrightarrow} (\pm\mathrm{N}(\widehat{\mathbb{Z}}))\backslash\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}). \tag{8}$$

L'application « déterminant » induit une surjection :

$$\widehat{C} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}^\times_{>0}\backslash\mathbb{A}_f^\times \overset{\sim}{\longrightarrow} \widehat{\mathbb{Z}}^\times \tag{9}$$

qui s'identifie à la limite projective de la surjection $C(K_f) \to \pi_0(Y(K_f))$ envoyant une pointe vers la composante connexe qui la contient. Comme $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ normalise

$\mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)$, la multiplication à gauche par $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ induit (via (8)) une action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$. On définit un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ par :

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{cyclo}(\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $\mathrm{cyclo} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ est le caractère cyclotomique adélique. Cet homomorphisme et l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$ induisent une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{C}$ qui s'identifie à la limite projective de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $C(K_f)$.

On note $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)$ (resp. $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^\times,\mathbb{Z}_p)$) l'espace des fonctions de $\widehat{C}$ (resp. de $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$) dans $\mathbb{Z}_p$ qui sont continues en les variables p-adiques et localement constantes en les autres. L'action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$ fait de $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)$ une $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$-représentation. Via (9), $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^\times,\mathbb{Z}_p)$ s'identifie à un sous-$\mathbb{Z}_p$-module invariant de $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)$ et on pose :

$$\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)/\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^\times,\mathbb{Z}_p).$$

C'est un $\mathbb{Z}_p$-module sans torsion muni des actions de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ induites par leurs actions sur $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)$ (elles-mêmes déduites de l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$). Ces actions commutent avec celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

Proposition 3.1.1. — *Le $\mathbb{Z}_p$-module $\widehat{M}$ muni des actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et de $\mathbb{T}$ est isomorphe au sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ de $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)$ muni des actions induites ci-dessus de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et où l'action de T_ℓ (resp. S_ℓ) pour $\ell \nmid Mp$ est l'action de la double classe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\left(\begin{smallmatrix}\ell & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ (resp. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\left(\begin{smallmatrix}\ell & 0\\ 0 & \ell\end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$) dans l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$.*

Démonstration. — C'est un résultat bien connu, qui s'obtient par exemple en passant à la limite projective sur n dans la suite exacte (1) de [**9**, §2.1]. Pour la comparaison de l'action classique de $\mathbb{T}$ sur $\widehat{M}$ avec l'action de l'algèbre de Hecke (en les premiers ℓ, $(\ell, M) = 1$) sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$, cf. la preuve de [**24**, Prop.4.4.2]. □

Il va être nécessaire de décrire explicitement l'action de $\mathbb{T}$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$. Si $a \in \mathbb{Z}_{Mp}^\times$, on note $a_p \in \mathbb{Z}_p^\times$ l'image de a par la projection naturelle $\mathbb{Z}_{Mp}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ et $\hat{a} \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ un élément quelconque de $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$ qui s'envoie sur a par la projection naturelle $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{Mp}^\times$. Comme l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)$ commute avec l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, elle préserve le sous-module $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$. Nous allons utiliser cette action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ pour définir deux actions de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$ sur $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{Mp}^\times$, $f \in \mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ et $\hat{c} \in \widehat{C}$, posons :

$$(\langle a\rangle_1 f)(\hat{c}) \overset{\text{déf}}{=} a_p f\Big(\begin{pmatrix}\hat{a}^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\hat{c}\Big)$$

(ici a_p agit simplement par la multiplication par $a_p \in \mathbb{Z}_p^\times$) et :

$$(\langle a\rangle_2 f)(\hat{c}) \overset{\text{déf}}{=} f\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{a}^{-1}\end{pmatrix}\hat{c}\Big).$$

Ces actions sont bien définies indépendamment du choix du relevé $\hat{a}$, ce que l'on peut vérifier en utilisant l'identification :

$$\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)} = \mathscr{C}^0(\widehat{C}/K_1^p(M),\mathbb{Z}_p), \tag{10}$$

où le module de droite est le module des fonctions continues sur $\widehat{C}/K_1^p(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K_1^p(M)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. Chacune de ces actions préserve le sous-module $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^\times,\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ de $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ et induit donc une action (notée de la même manière) de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$.

Lemme 3.1.2. — *Si ℓ ne divise pas Mp, l'action de T_ℓ (resp. de ℓS_ℓ) sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ est donnée par $\langle\ell\rangle_1 + \langle\ell\rangle_2$ (resp. par $\langle\ell\rangle_1\langle\ell\rangle_2$).*

Démonstration. — C'est un calcul facile en utilisant (10) et la description adélique de $\widehat{C}$ donnée par (8). □

Corollaire 3.1.3. — *Le module de Hecke $\widehat{M}$ est Eisenstein.*

Démonstration. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et λ un système de valeurs propres de Hecke tel que $\widehat{M}_L^\lambda \neq 0$. Par la proposition 3.1.1, on peut transférer les deux actions $\langle\,\rangle_1$ et $\langle\,\rangle_2$ de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ en actions sur $\widehat{M}$, et donc sur $\widehat{M}\otimes_{\mathbb{Z}_p} L$. Ces actions préservent $\widehat{M}_L^\lambda \neq 0$ et, par le lemme 3.1.2, vérifient les égalités :

$$\langle\ell\rangle_1 + \langle\ell\rangle_2 = \lambda(T_\ell), \quad \langle\ell\rangle_1\langle\ell\rangle_2 = \ell\lambda(S_\ell). \tag{11}$$

Les automorphismes $\langle\ell\rangle_i$ $(i=1,2)$ de $\widehat{M}_L^\lambda$ satisfont donc $\langle\ell\rangle_i^2 - \lambda(\ell)\langle\ell\rangle_i + \ell\lambda(S_\ell) = 0$. Quitte à agrandir L, on peut factoriser ces équations quadratiques sur L (pour tout ℓ), et conclure que $\widehat{M}_L^\lambda$ contient un sous-espace non-nul sur lequel $\langle\,\rangle_1$ et $\langle\,\rangle_2$ agissent par un caractère de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$. De plus, ces caractères sont forcément continus car tel est le cas des automorphismes $\langle\,\rangle_1$ and $\langle\,\rangle_2$. Par (11), le système de valeurs propres est bien Eisenstein. □

3.2. — On définit le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique $\Pi_p(f)$ associé à une forme modulaire f.

Pour tout $k\geq 2$ et tout (M,r) comme au §3.1, on note $\mathscr{V}_{k-2}$ le système local sur $Y_1(M;p^r)$ associé à la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbb{Q}_p^2$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ et on pose :

$$H^1(K_1^p(M),\mathscr{V}_{k-2}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r H^1(Y_1(M;p^r),\mathscr{V}_{k-2}),$$

$$H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M),\mathscr{V}_{k-2}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^r),\mathscr{V}_{k-2}).$$

Ces espaces sont naturellement munis d'actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$ qui commutent entre elles. De plus, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est lisse. Par [**24**, §4.3], pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, on a une injection commutant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$:

$$(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^1_*(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2}) \hookrightarrow \widehat{H}^1_*(K_1^p(M))_L, \tag{12}$$

(où $* \in \{\varnothing, c\}$) dont l'image est exactement le sous-espace de $\widehat{H}^1_*(K_1^p(M))_L$ des vecteurs $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee$-localement algébriques.

Soit f une forme modulaire parabolique normalisée de poids $k \geq 2$, niveau N et caractère $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid N$ et on note $a_\ell \in L$ la valeur propre associée. Si $N = Mp^r$ ($r \geq 0$, $(M,p)=1$), on a par Eichler-Shimura un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$- et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\sigma(f) \otimes_L \pi_p(f) \otimes_L \pi^p(f)^{K_1^p(M)} \xrightarrow{\sim} H^1_*(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2})^f \tag{13}$$

où $* \in \{\varnothing, c\}$ et où le L-espace vectoriel non-nul $\pi^p(f)^{K_1^p(M)}$ est de dimension 1 exactement lorsque f est nouvelle en M. Combinant (13) et (12), on obtient une injection compatible aux actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\sigma(f) \otimes_L \left((\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f) \otimes_L \pi^p(f)^{K_1^p(M)}\right) \hookrightarrow \widehat{H}^1_*(K_1^p(M))^f. \tag{14}$$

Supposons f nouvelle en M, notons $\widehat{\pi}_p(f)$ l'adhérence dans $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L$ de la représentation localement algébrique $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$ via un plongement issu de (14) (c'est indépendant du plongement) et posons :

$$\Pi_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L\big)$$

que l'on munit de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induite par l'action sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L$. Les deux L-espaces vectoriels $\widehat{\pi}_p(f)$ et $\Pi_p(f)$ sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires admissibles et on a une immersion fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\widehat{\pi}_p(f) \hookrightarrow \Pi_p(f)$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\widehat{\pi}_p(f)$ est aussi l'adhérence de $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ ([**9**, Prop.2.2.3]). Montrer que la composante $\sigma(f)$-isotypique de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ redonne encore $\Pi_p(f)$ requiert quelques préliminaires.

Lemme 3.2.1. — *L'ensemble des nombres premiers ℓ ne divisant pas Mp tels que l'image de* Frob_ℓ *par $\sigma(f)$ est scalaire est de densité nulle.*

Démonstration. — Si $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble de tous les nombres premiers et $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}$ un sous-ensemble quelconque, rappelons que la densité de $\mathscr{S}$ (lorsqu'elle existe) est par définition :

$$d(\mathscr{S}) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} \leq 1.$$

Soit $\sigma(f)^0 : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ un $\mathscr{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\sigma(f)$ et $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_n$ pour $n \in \mathbb{Z}_{>0}$) l'ensemble des nombres premiers ℓ ne divisant pas Mp

tels que l'image de Frob_ℓ par $\sigma(f)$ (resp. $\sigma(f)^0 \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L$) est scalaire. Notons $G_n \subseteq \mathrm{PGL}_2(\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L)$ l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ par la représentation projective :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sigma(f)^0} \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L)$$

et $K_n \subset \overline{\mathbb{Q}}$ l'extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}$ telle que $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} G_n$. Le théorème de Čebotarev (voir e.g. [**46**, §2.1]) appliqué à l'extension $K_n/\mathbb{Q}$ implique que $d(\mathscr{S}_n)$ existe et vaut :

$$d(\mathscr{S}_n) = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})} = \frac{1}{\#G_n}.$$

Or, par [**39**, Th.4.3], l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathscr{O}_L)$ donnée par la représentation $\sigma(f)^0$ « projectivisée » est infinie, donc le cardinal de G_n tend vers $+\infty$ avec n, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} d(\mathscr{S}_n) = 0. \tag{15}$$

Mais pour tout n, on a :

$$0 \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S}_n \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} = d(\mathscr{S}_n)$$

d'où avec (15) en faisant $n \to +\infty$:

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} = d(\mathscr{S})$$

ce qui achève la preuve. □

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de nombres premiers ne divisant pas Mp et X un module de Hecke, on note :

$$X_L^{\mathscr{S},f} \overset{\text{déf}}{=} \{x \in X \otimes_{\mathbb{Z}_p} L \mid \forall\ \ell \in \mathscr{S},\ T_\ell x = a_\ell x,\ S_\ell x = \ell\chi(\ell)x\}.$$

Lemme 3.2.2. — *Soit $\mathscr{S}$ un ensemble de nombres premiers ne divisant pas Mp de densité 1, les injections $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f} \hookrightarrow \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^f$ et $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f} \hookrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^f$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Notons $(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_L)^{\mathscr{S},f} \overset{\text{déf}}{=} (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_L) \cap \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f}$ et soit $x = (x_n) \in (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_L)^{\mathscr{S},f}$ où :

$$x_n \in H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M), \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_m H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m), \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L).$$

Il suffit de montrer que, $\forall\ n$, $T_\ell x_n = a_\ell x_n$ et $S_\ell x_n = \ell\chi(\ell)x_n$ pour *tout* ℓ premier ne divisant pas Mp. Soit m tel que $x_n \in H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m), \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L)$, ℓ un nombre premier ne divisant pas Mp, $\hat{x}_n$ un relevé de x_n dans $H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m), \mathscr{O}_L)$ et $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers dans $\mathscr{S}$ telle que, dans le groupe de Galois de l'extension maximale de $\mathbb{Q}$ non-ramifiée en dehors de Mp, on ait $\mathrm{Frob}_{\ell_i} \to \mathrm{Frob}_\ell$ quand $i \to +\infty$ (notons que cela implique ℓ_i tend vers ℓ dans $\mathbb{Z}_p^\times$). Une telle suite existe par le théorème de Čebotarev puisque $\mathscr{S}$ est de densité 1. Par les relations d'Eichler-Shimura (et la

structure galoisienne connue de $H^1_c(Y_1(M;p^m),\mathscr{O}_L)\otimes L$), on a alors aussi $T_{\ell_i}\to T_\ell$ et $S_{\ell_i}\to S_\ell$ comme endomorphismes de $H^1_c(Y_1(M;p^m),\mathscr{O}_L)$. En particulier, pour $i\gg 0$, on a $T_{\ell_i}x_n=a_{\ell_i}x_n=a_\ell x_n$ et $T_{\ell_i}x_n=T_\ell x_n$ d'où $T_\ell x_n=a_\ell x_n$. De même pour $i\gg 0$, on a $S_{\ell_i}x_n=\ell_i\chi(\ell_i)x_n=\ell\chi(\ell)x_n$ et $S_{\ell_i}x_n=S_\ell x_n$ d'où $S_\ell x_n=\ell\chi(\ell)x_n$. La preuve pour $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ est la même. □

Proposition 3.2.3. — *On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^f_L\big)\xrightarrow{\sim}\Pi_p(f).$$

Démonstration. — Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas Mp tels que Frob_ℓ n'est pas scalaire sur $\sigma(f)$. Par le lemme 3.2.1, $\mathscr{S}$ est de densité 1 et par le lemme 3.2.2, il suffit de montrer l'énoncé avec $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathscr{S},f}_L$ au lieu de $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^f_L$. Munissons $\Pi_p(f)$ de l'action des opérateurs de Hecke induite par leur action sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L$ (qui commute avec celle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$). Il suffit de montrer que, pour tout $x\in\Pi_p(f)$ et tout $\ell\in\mathscr{S}$, on a $T_\ell(x)=a_\ell x$ et $S_\ell(x)=\ell^{k-2}\chi(\ell)x$. On a une injection canonique Galois- et Hecke-équivariante :

$$\begin{array}{ccc}\sigma(f)\otimes_{\mathscr{O}_L}\Pi_p(f) & \hookrightarrow & \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L\\ v\otimes x & \mapsto & x(v)\end{array}$$

(l'injection résultant de l'irréductibilité de $\sigma(f)$). Soit $(v,x)\in\sigma(f)\times\Pi_p(f)$, les relations d'Eichler-Shimura $\mathrm{Frob}_\ell^{-2}-T_\ell\circ\mathrm{Frob}_\ell^{-1}+\ell S_\ell=0$ (encore valables sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ par passage à la limite sur les relations à niveau fini) et les propriétés de $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)}$ impliquent l'égalité :

$$-\mathrm{Frob}_\ell^{-1}(v)\otimes(T_\ell-a_\ell)(x)+v\otimes(\ell S_\ell-\ell^{k-1}\chi(\ell))(x)=0$$

dans $\sigma(f)\otimes_L\Pi_p(f)$ pour tout $v\in\sigma(f)$ et tout $x\in\Pi_p(f)$. Comme Frob_ℓ n'est pas scalaire sur $\sigma(f)$, en fixant x et en faisant varier v dans $\sigma(f)$, on en déduit aisément $(T_\ell-a_\ell)(x)=0$ et $(S_\ell-\ell^{k-2}\chi(\ell))(x)=0$. □

Proposition 3.2.4. — *On a :*

$$\Pi_p(f)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\widehat{H}^1(K_1^p(M))^f_L\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big).$$

Démonstration. — L'isomorphisme de gauche se prouve exactement comme celui de la proposition 3.2.3 grâce aux lemmes 3.2.1 et 3.2.2. Il suffit donc de montrer que l'application naturelle :

(16)
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),(\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L)^f\big)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f\big)$$

est un isomorphisme. Notons $\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}\overset{\text{déf}}{=}\mathbb{T}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_L$ et $I\subset\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}$ l'idéal engendré par $T_\ell-a_\ell$ et $S_\ell-\ell^{k-2}\chi(\ell)$. La surjection (7) induit une suite exacte :

$$0\longrightarrow\widehat{M}_L\longrightarrow\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L\longrightarrow\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\longrightarrow 0.$$

En appliquant le functeur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I,-)$, on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\widehat{M}_L)^f \longrightarrow (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f \longrightarrow (\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L).$$

On a $(\widehat{M}_L)^f = 0$ par le corollaire 3.1.3 car f est parabolique, d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f \longrightarrow (\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L),$$

qui induit une nouvelle suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f\big) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), (\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f\big) \\ \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L)\big). \end{aligned}$$

Par la proposition 3.1.1, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{M}_L$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^{\mathrm{ab}}$ et il en est donc de même de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L)$. Comme $\sigma(f)$ est une $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-représentation absolument irréductible, on en déduit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L)\big) = 0$$

d'où l'isomorphisme recherché. □

3.3. — On énonce la conjecture de compatibilité local-global 1.1.1 de l'introduction.

On fixe une forme modulaire comme au §3.2 avec f nouvelle sur $\Gamma_1(Mp^r)$ et on suppose de plus que $\pi_p(f)$ est une série principale de sorte que l'on peut écrire :

$$(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f) = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$$

où $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique k, χ_2 est localement constant et $\chi_1\chi_2 = \varepsilon^{2-k}\chi_p^{-1}$ (χ_p est la composante locale en p de χ vu comme caractère de $\mathbb{A}_f^\times$). On pose $\sigma_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$. Dans ce cas, par **[40]** $\sigma_p(f)$ devient cristalline sur l'extension abélienne totalement ramifiée $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$. On suppose enfin $\sigma_p(f)$ réductible ou, ce qui est équivalent quitte à modifier χ_1 et χ_2 en utilisant l'entrelacement sur les induites lisses, $\mathrm{val}(\chi_2(p)) = k-1$ et $\mathrm{val}(\chi_1(p)) = 1-k$. On pose $\eta_1 \overset{\text{déf}}{=} \chi_1\,|\,|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2}$, $\eta_2 \overset{\text{déf}}{=} \chi_2\,|\,|^{k-1}\,\varepsilon^{2-k}$ et on a comme au §2.3 :

$$\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \chi_1\,|\,|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2} & * \\ 0 & \chi_2\,|\,|^{k-1}\,\varepsilon^{1-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

La nullité ou non de $*$ (rappelons que si $*$ est non-nul, il n'y a qu'une seule extension possible) est liée au paramètre de la filtration de Hodge sur le φ-module filtré $D_p(f) \overset{\text{déf}}{=}$

$D_{\mathrm{pcris}}(\sigma_p(f))$. On montre en effet facilement (cf. [**31**]) :

$$\begin{aligned} D_p(f) &= Le_1 \oplus Le_2 \\ \varphi(e_1) &= \chi_2(p)e_1 \\ \varphi(e_2) &= p^{k-1}\chi_1(p)e_2 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} &= D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})},\ i \le 0 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} &= \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cdot (e_1 + \delta x e_2),\ 1 \le i \le k-1 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} &= 0,\ i \ge k \end{aligned}$$

où $D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_p(f)$, $x \in (\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^\times$ ne dépend que des caractères $\chi_1 z^{k-2}$ et χ_2 et $\delta \in \{0,1\}$ est le « paramètre » de la filtration de Hodge. Il y a aussi une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})/\mathbb{Q}_p)$ sur $D_p(f)$ préservant $\mathrm{Fil}^{k-1} D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ que l'on ne donne pas ici (voir [**31**]). On voit que $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement si $\delta = 0$.

Proposition 3.3.1. — *On a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant :*

$$\widehat{\pi}_p(f) \simeq \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}.$$

En particulier $\widehat{\pi}_p(f)$ *est topologiquement irréductible et s'identifie au complété de* $(\mathrm{Sym}^{k-2} L^2)^\vee \otimes \pi_p(f)$ *par rapport à un (quelconque)* $\mathscr{O}_L$*-réseau de type fini sur* $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$.

Démonstration. — La deuxième partie de l'énoncé, c'est-à-dire la description et les propriétés du complété de $(\mathrm{Sym}^{k-2} L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$ par rapport à un $\mathscr{O}_L$-réseau de type fini stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, est le contenu de la proposition 2.2.1. La première résulte du fait que tous les $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $(\mathrm{Sym}^{k-2} L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$, et en particulier celui induit par l'intersection avec $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$, induisent des normes équivalentes, ce qui découle facilement de la deuxième partie (voir e.g. [**3**],Cor.5.4.4). □

Par ailleurs, on a associé au §2.3 à la représentation réductible $\sigma_p(f)$ un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\sigma_p(f))$ de longueur 2, extension de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ par $\widehat{\pi}_p(f)$ et scindé (comme représentation topologique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) si et seulement si $\sigma_p(f)$ l'est (comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$).

Conjecture 3.3.2. — *L'immersion fermée* $\widehat{\pi}_p(f) \hookrightarrow \Pi_p(f)$ *se prolonge en un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant :*

$$B(\sigma_p(f)) \xrightarrow{\sim} \Pi_p(f).$$

Cette conjecture, dont nous montrons une version faible dans la suite, doit être vue comme une compatibilité local-global dans le cadre d'une « correspondance de Langlands p-adique ». En effet, elle affirme que la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induite par la théorie globale (la représentation $\Pi_p(f)$) est une représentation locale « au sens de

Fontaine » (la représentation $B(\sigma_p(f))$. Comme dans le cas semi-stable ([**8**],[**9**],[**18**]), la composante $\sigma(f)$-isotypique du Banach $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L$ devrait donc contenir une information exactement « équivalente » à la donnée de $\sigma_p(f)$, ou de son module filtré.

Lorsque $\sigma_p(f)$ est scindée, nous verrons que le deuxième morceau qui apparaît dans $\Pi_p(f)$, à savoir le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$, est une manifestation de l'existence dans ce cas d'une forme modulaire surconvergente *compagnon* de la forme classique f. Sa réduction modulo p est d'ailleurs exactement une forme compagnon de f au sens de Serre ([**33**], [**37**], [**29**]).

4. Formes compagnons surconvergentes

On montre que, lorsque f est une forme ordinaire en p (et donc en particulier comme au §3.3), la représentation $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement si une certaine forme modulaire de pente $k-1$ associée à f est de la forme $\theta^{k-1}(g)$ où g est une forme surconvergente ordinaire de poids $2-k$ (théorème 1.1.3 de l'introduction).

4.1. — On rappelle brièvement l'interprétation en termes de théorie des représentations des notions classiques de « pente finie » et de « valeur propre de U_p ».

Supposons que f est une forme nouvelle comme au §3.3, et donc que $\pi_p(f)$ est une série principale. Avec les notations du §3.3, rappelons que l'on a :

$$\pi_p(f)=\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1z^{k-2}\otimes\chi_2\right)^{\mathrm{lc}}.$$

La forme nouvelle f est de pente finie si et seulement si l'un au moins des caractères χ_1z^{k-2} ou χ_2 est non-ramifié. Si les deux sont non-ramifiés, alors f est de conducteur premier à p et est vecteur propre de T_p de polynôme de Hecke en p $X^2-(\chi_1(p)p^{k-1}+\chi_2(p))X+\chi(p)p^{k-1}$ (utiliser $\chi_1\chi_2=\chi_p^{-1}$ et $\chi_p(p)^{-1}=\chi(p)$). La forme f donne alors lieu à deux formes « p-stabilisées » vieilles en p, de pente finie et vecteurs propres de U_p pour les valeurs propres $\alpha_p\overset{\text{déf}}{=}\chi_2(p)$ et $\beta_p\overset{\text{déf}}{=}p^{k-1}\chi_1(p)$. Par exemple, $f(z)-\beta_pf(pz)$ est la vieille forme de valeur propre α_p (et de pente $k-1$).

Si un seul des deux caractères χ_1z^{k-2} ou χ_2 est non-ramifié, quitte à appliquer un entrelacement comme au §3.3 si nécessaire, on peut supposer que χ_1z^{k-2} est non-ramifié. Dans ce cas, p divise le conducteur de f et f est vecteur propre de U_p, de valeur propre $p^{k-1}\chi_1(p)$.

Soit χ_0 la p-partie de χ (un caractère de $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$) et notons $\widetilde{f}$ la forme nouvelle attachée à la forme modulaire tordue $f\otimes\chi_0^{-1}$ (qui n'est pas nouvelle, cf. ci-dessous). Alors, on a :

$$\pi_p(\widetilde{f})=\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1z^{k-2}\chi_0\otimes\chi_2\chi_0\right)^{\mathrm{lc}}=\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2|\,|\chi_0\otimes\chi_1z^{k-2}|\,|^{-1}\chi_0\right)^{\mathrm{lc}}$$

(où l'on a étendu χ_0 en un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ en posant $\chi_0(p)=1$). Le caractère $\chi_2|\,|\chi_0$ étant non-ramifié, la discussion précédente montre que $\widetilde{f}$ est de pente finie ($=k-1$) pour la valeur propre $\chi_2(p)$ de U_p (il est alors clair que $\widetilde{f}\neq f\otimes\chi_0^{-1}$ puisque cette

dernière forme est annulée par U_p). Dans la suite, nous utiliserons la formule bien connue pour $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(z) = (f|_{w_{p^r}})(z) \overset{\text{déf}}{=} (Ncz + p^r d)^k f\big(\frac{p^r az + b}{Ncz + p^r d}\big)$$

où $w_{p^r} \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} p^r a & b \\ Nc & p^r d \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \equiv 1 \bmod p^r$, $a \equiv 1 \bmod M$ et $p^r ab - Mcd = 1$ (on vérifie cette formule par un calcul adélique, on peut aussi utiliser les formules explicites de [**30**, §6] par exemple).

4.2. — On donne quelques préliminaires sur la connexion de Gauss-Manin pour les courbes modulaires et l'opérateur θ^{k-1} (voir [**13**] et le début de [**12**] par exemple).

Dans tout ce qui suit, on utilise sans commentaire le fait que la cohomologie d'un faisceau cohérent sur un schéma propre X sur $\mathbb{Q}_p$ est la même que celle du faisceau « image inverse » sur la variété rigide analytique déduite de X (GAGA rigide).

On fixe d'abord un entier $N > 4$ et on note $\pi : E \to X_1(N)$ la courbe elliptique généralisée universelle au-dessus de la courbe modulaire usuelle $X_1(N)$ (associée au groupe de congruence $\Gamma_1(N)$) propre sur le corps $\mathbb{Q}_p$, $C \subset X_1(N)$ le sous-schéma fermé des pointes, $\tilde{C} \overset{\text{déf}}{=} \pi^{-1}(C)$, $\omega \overset{\text{déf}}{=} \pi_* \Omega^1_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})$ et :

$$\mathscr{H}_{k-2} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^{k-2}\big(\mathrm{R}^1\pi_* \Omega^{\cdot}_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})\big)$$

(avec $\mathscr{H}_0 = \mathscr{O}_{X_1(N)}$). Rappelons que le faisceau ω est inversible sur $X_1(N)$, le faisceau $\mathrm{R}^1\pi_* \Omega^{\cdot}_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})$ localement libre de rang 2 et le faisceau $\mathscr{H}_{k-2}$ localement libre de rang $k-1$. On a de plus une filtration canonique décroissante $(\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2})_{i \in \mathbb{Z}}$ sur $\mathscr{H}_{k-2}$ par des sous-$\mathscr{O}_{X_1(N)}$-modules $\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2}$ localement facteurs directs (la filtration de Hodge) tels que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2} = \mathscr{H}_{k-2}, \ i \leq 0 \\
&\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2} \text{ localement libre de rang } k-1-i, \ 1 \leq i \leq k-2 \\
&\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2} = 0, \ i \geq k-1.
\end{aligned}$$

Cette filtration se détermine à partir de $\mathrm{Fil}^1 \mathscr{H}_1 = \omega$ et $\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_r \cdot \mathrm{Fil}^j \mathscr{H}_s = \mathrm{Fil}^{i+j} \mathscr{H}_{r+s}$ pour $0 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq s$. On a donc $\mathrm{Fil}^{k-2} \mathscr{H}_{k-2} = \omega^{k-2}$ et, plus généralement, on montre que, pour $0 \leq i \leq k-2$, $\mathrm{gr}^i \mathscr{H}_{k-2} \simeq \omega^{2i-k+2}$. La connexion de Gauss-Manin s'étend en un complexe de de Rham logarithmique :

$$\mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log) : \mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{H}_{k-2} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)$$

et vérifie la transversalité de Griffiths, i.e. définit des sous-complexes pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Fil}^{i-1} \mathscr{H}_{k-2} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C).$$

De plus, elle induit des isomorphismes sur les gradués pour $0 \leq i \leq k-2$:

$$\omega^{2i-k+2} \overset{\nabla}{\xrightarrow{\sim}} \omega^{2i-k} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C) \tag{17}$$

(si $k = 2i$, il s'agit simplement de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer $\omega^2 \simeq \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)$). Si l'on note $\mathrm{Fil}^i\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)$ le groupe de cohomologie :

$$\mathbb{H}^1\Big(X_1(N), \mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2} \overset{\nabla}{\to} \mathrm{Fil}^{i-1}\mathscr{H}_{k-2}\otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}}\Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)\Big),$$

on vérifie par un calcul cohomologique évident à partir de (17) que l'on a une injection $\mathrm{Fil}^1\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big) \hookrightarrow \mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)$, que $\mathrm{Fil}^i\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)$ est constant si $1 \leq i \leq k-1$ et que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Fil}^{k-1}\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big) &\simeq H^0\big(X_1(N), \omega^{k-2}\otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}}\Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)\big)\\ &\simeq H^0(X_1(N), \omega^k)\end{aligned}$$

(via Kodaira-Spencer). Rappelons enfin que l'application composée :

$$\psi \ : \ \mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_{k-2} \hookrightarrow \mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C) \twoheadrightarrow (\mathscr{H}_{k-2}/\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2})\otimes\Omega^1(\log C)$$

est un isomorphisme (utiliser (17)) qui induit un morphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire canonique de faisceaux sur $X_1(N)$:

$$\begin{aligned}\omega^{-k+2} \simeq \mathrm{gr}^0\mathscr{H}_{k-2} &\longrightarrow \mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C) \simeq \omega^k\\ \overline{s} &\longmapsto \nabla\big(s - \psi^{-1}(\overline{\nabla(s)})\big)\end{aligned}$$

où s est un relevé quelconque de $\overline{s}$ dans $\mathscr{H}_{k-2}$ et $\overline{\nabla(s)}$ l'image de $\nabla(s)$ dans $(\mathscr{H}_{k-2}/\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2})\otimes\Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)$. Si $U \subset X_1(N)$ est un ouvert connexe quelconque de la variété rigide associée à $X_1(N)$ et contenant la pointe à l'infini, l'application induite $H^0(U, \omega^{2-k}) \to H^0(U, \omega^k)$ s'identifie à $\frac{(-1)^k}{k!}\theta^{k-1}$ sur les q-développements où θ est l'opérateur $q(d/dq)$ sur $\mathbb{Q}_p[[q]]$ (voir [**12**, §9] pour plus de détails). Par abus de notation, pour tout ouvert rigide $U \subset X_1(N)$ (pas forcément connexe) on note encore $\theta^{k-1} : H^0(U, \omega^{2-k}) \to H^0(U, \omega^k)$ l'application précédente multipliée par $k!(-1)^k$.

Lemme 4.2.1. — *Soit U un ouvert quasi-Stein de $X_1(N)$ vue comme variété rigide sur $\mathbb{Q}_p$. L'injection :*

$$H^0(U, \omega^k) \simeq H^0(U, \omega^{k-2}\otimes\Omega^1(\log C)) \hookrightarrow H^0(U, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C))$$

induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned}\frac{H^0(U, \omega^k)}{\theta^{k-1}\big(H^0(U, \omega^{2-k})\big)} &\xrightarrow{\sim} \frac{H^0\big(U, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C)\big)}{\nabla\big(H^0(U, \mathscr{H}_{k-2})\big)}\\ &\simeq \mathbb{H}^1\big(U, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Le deuxième isomorphisme résulte du fait que $H^q(U, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur U. On a une suite exacte de faisceaux sur

$X_1(N)$ (avec les notations ci-dessus) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^0\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \overline{s} & \mapsto & s-\psi^{-1}(\overline{\nabla(s)}) & & & & \\ & & & & t & \mapsto & \psi^{-1}(\overline{\nabla(t)}) & & \end{array}$$

qui s'inscrit dans une suite exacte de complexes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^0\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \frac{(-1)^k}{k!}\theta^{k-1}\downarrow & & \downarrow\nabla & & \downarrow\psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C) & \longrightarrow & \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C) & \longrightarrow & \frac{\mathscr{H}_{k-2}}{\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}}\otimes\Omega^1(\log C) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le $\mathbb{H}^1$ du complexe de gauche s'identifie à $\frac{H^0(U,\omega^k)}{\theta^{k-1}(H^0(U,\omega^{2-k}))}$ car U est quasi-Stein. La suite exacte longue de cohomologie associée donne alors le résultat puisque la cohomologie du complexe de droite est nulle. □

Soit maintenant un entier N tel que $1 \leq N \leq 4$. La discussion précédente ne s'applique pas telle quel car la courbe $X_1(N)$ n'est plus un espace de modules fin. Nous suivons dans ce cas la méthode décrite dans l'appendice de [**10**]. On choisit un nombre premier $q > 2$, $q \nmid Np$ et on considère la courbe modulaire $X_1(N;q)$ associée au sous-groupe de congruence $\Gamma_1(N) \cap \Gamma(q)$. Le choix de q est tel que cette courbe est maintenant un espace de modules fin pour le problème de modules paramétrant les courbes elliptiques E munies d'un point d'ordre exact N et d'un isomorphisme $\imath : E[q] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des isomorphismes $\imath$ induit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sur $X_1(N;q)$ dont le quotient est $X_1(N)$. Comme $X_1(N;q)$ est un espace de modules fin, la discussion précédente s'applique *mutatis mutandis* à $X_1(N;q)$. De plus, tous les faisceaux et connexions en considération sont naturellement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-équivariants. En particulier, si on suppose dans l'analogue du lemme 4.2.1 pour $X_1(N;q)$ que l'ouvert quasi-Stein U est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-invariant, alors l'isomorphisme de ce lemme est aussi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-équivariant.

4.3. — On montre le théorème 1.1.3 lorsque $(N,p)=1$.

On conserve les notations du §4.2 et on suppose ici de plus $(N,p)=1$. On fixe f une forme modulaire comme au §3.3, de sorte que $\sigma_p(f)$ est en particulier cristalline. Dans ce cas, χ_p est le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur $\chi(p)^{-1}$, χ_2 est non-ramifié et on pose $\alpha_p \overset{\text{déf}}{=} \chi_2(p)$, $\beta_p \overset{\text{déf}}{=} p^{k-1}\chi_1(p)$. On a $\mathrm{val}(\beta_p)=0$, $\alpha_p\beta_p = \chi(p)p^{k-1}$

et, d'après le §3.3 :

$$\begin{aligned} D_p(f) &= Le_1 \oplus Le_2 \\ \varphi(e_1) &= \alpha_p e_1 \\ \varphi(e_2) &= \beta_p e_2 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &= D_p(f),\ i \leq 0 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &= L(e_1 + \delta e_2),\ 1 \leq i \leq k-1 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &= 0,\ i \geq k \end{aligned}$$

avec $\delta = 0$ si et seulement si $\sigma_p(f)$ est scindée.

Supposons d'abord $N > 4$. Le φ-module filtré $D_p(f)$ admet alors la description géométrique suivante (voir e.g. **[29**, §1]) :

$$\begin{aligned} D_p(f) &\simeq \big(\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big)^f \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &\simeq \big(H^0(X_1(N), \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big)^f,\ 1 \leq i \leq k-1 \\ &= L \cdot f \end{aligned}$$

(en se rappelant que f est nouvelle) où le Frobenius φ sur $D_p(f)$ provient du Frobenius cristallin φ sur $\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big)$.

Soit $\mathscr{X}$ le modèle propre et lisse de $X_1(N)$ sur $\mathbb{Z}_p$ et soit $A \in H^0\big(\mathscr{X} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p, \omega^{p-1}\big)$ l'invariant de Hasse. Rappelons que A s'annule à l'ordre 1 en chaque point supersingulier de $\mathscr{X} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ (et ne s'annule pas aux autres points). Si $x \in X_1(N)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, notons $\overline{x}$ la spécialisation de x dans $(\mathscr{X} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)(\overline{\mathbb{F}_p})$. Comme il est expliqué dans l'appendice de **[10]**, pour chaque $\eta \in p^{\mathbb{Q}}$ avec $p^{-1} \leq \eta < 1$, on peut définir un ouvert rigide analytique quasi-Stein $W(\eta)$ de $X_1(N)$ via :

$$x \in W(\eta) \Leftrightarrow |A(\overline{x})| > \eta.$$

Si $p > 3$, alors $W(\eta) \subset X_1(N)$ est l'ouvert rigide analytique des points fermés x de $X_1(N)$ vérifiant :

$$x \in W(\eta) \Leftrightarrow |E_{p-1}(x)| > \eta$$

où $E_{p-1} \in H^0(X_1(N), \omega^{p-1})$ est la série d'Eisenstein de poids $p-1 \geq 4$ et niveau 1 (voir **[13**, §1 et §2]).

Soit $W_1 \overset{\text{déf}}{=} W(p^{-p/(p+1)})$. Comme W_1 est quasi-Stein, on a :

$$\mathbb{H}^1\big(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big) = \frac{H^0\big(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)\big)}{\nabla\big(H^0(W_1, \mathscr{H}_{k-2})\big)}$$

et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(W_1, \omega^k) & \to & \mathbb{H}^1\big(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(X_1(N), \omega^k) & \hookrightarrow & \mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big) \end{array} \tag{18}$$

où les deux flèches verticales sont injectives (pour la deuxième, cela se déduit facilement de [**2**, Th.2.1 et Th.2.4]). Soit $W_2 \overset{\text{déf}}{=} W(p^{-1/(p+1)}) \subset W_1$. Notons E_2 et E_1 les courbes elliptiques généralisées universelles au-dessus de W_2 et W_1, alors on dispose d'un diagramme commutatif (cf. [**13**, §2]) :

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{\Phi} & E_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_2 & \xrightarrow{\phi} & W_1 \end{array} \tag{19}$$

qui induit par fonctorialité des applications « Frobenius » :

$$\begin{aligned} \phi : H^0(W_1, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) &\longrightarrow H^0(W_2, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \\ \Phi : \mathbb{H}^1(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) &\longrightarrow \mathbb{H}^1(W_2, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)). \end{aligned}$$

D'un point de vue « espaces de modules », l'application $\phi : W_2 \to W_1$ envoie (E, P) (où E est une courbe elliptique généralisée au-dessus d'un point de W_2 et P un point rationnel sur E d'ordre « exact » N) sur $(E/\mathrm{can}, \overline{P})$ où $\mathrm{can} \subset E$ est le sous-groupe canonique de E ([**35**, §3]) et $\overline{P}$ l'image de P dans le quotient E/can.

Lemme 4.3.1. — *Le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \hookrightarrow & \mathbb{H}^1(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \leftarrow & H^0(W_1, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \\ \varphi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \hookrightarrow & \mathbb{H}^1(W_2, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \leftarrow & H^0(W_2, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — La commutation du carré de droite est évidente. Donnons l'essentiel des arguments pour montrer celle du carré de gauche. Pour alléger les notations, on note $X \overset{\text{déf}}{=} X_1(N)$, $\mathscr{X}$ le modèle propre et lisse de X sur $\mathbb{Z}_p$, $\widehat{\mathscr{X}}$ son complété p-adique formel, $\overline{X}$ leur fibre spéciale sur $\mathbb{F}_p$, $\overline{Z} \subset \overline{X}$ l'ouvert des points ordinaires et $Z \subset X$ le tube $]\overline{Z}[_{\widehat{\mathscr{X}}}$ de $\overline{Z}$ dans X au sens de [**5**, §1]. C'est un affinoïde de X. En considérant la courbe elliptique (généralisée) universelle au-dessus de $\widehat{\mathscr{X}}$, on voit que le faisceau cohérent $\mathscr{H}_{k-2}$ sur la variété propre X provient d'un faisceau cohérent sur $\widehat{\mathscr{X}}$, évaluation sur l'épaississement $\overline{X} \hookrightarrow \widehat{\mathscr{X}}$ d'un cristal $\mathscr{E}_{k-2}$ sur le site cristallin $(\overline{X}/\mathbb{F}_p)_{\mathrm{cris}}$ (plus précisément, il faut tenir compte de log-structures aux pointes et définir plutôt $\mathscr{E}_{k-2}$ comme un log-cristal sur le site log-cristallin de $\overline{X}/\mathbb{F}_p$ avec log-structure triviale sur $\mathbb{F}_p$, mais pour alléger la rédaction, nous ignorons partout dans cette preuve ce point qui ne pose pas de problèmes). Le groupe $\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ n'est autre que $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{X}, \mathscr{E}_{k-2}) \otimes \mathbb{Q}_p$. En fait, $\mathscr{E}_{k-2}$ est un F-cristal non dégénéré au sens de [**5**, §2.4.1] (utiliser le Frobenius sur la courbe elliptique universelle au-dessus de $\overline{X}$) et induit, par restriction, un F-isocrystal surconvergent le long de $\overline{X} - \overline{Z}$ que l'on note $\mathscr{E}^{\dagger}_{k-2}$ (voir [**5**, §2.3]). Pour $\eta \in p^{\mathbb{Q}}$ tel que $p^{-1/(p+1)} < \eta \leq 1$, soit $Z(\eta) \subset W_2$ l'affinoïde de X dont les points fermés x sont tels que $|A(\overline{x})| \geq \eta$. On a $Z(1) = Z$ et les $(Z(\eta))_{\eta<1}$ forment un système fondamental de voisinages stricts de Z dans X au

sens de [**5**, §1.2]. De plus, on a $\phi(Z(\eta)) \subset Z(\eta^p) \subset W_2$ pour $\eta > p^{-1/p(p+1)}$. Par [**2**, Th.2.4], les restrictions $\mathbb{H}^1(Z(\eta), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)) \to \mathbb{H}^1(Z(\eta'), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ sont des isomorphismes pour $\eta \leq \eta'$. Posons :

$$H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{Z}, \mathscr{E}^\dagger_{k-2}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{\eta<1} \mathbb{H}^1(Z(\eta), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$$

muni de son endomorphisme de Frobenius Φ induit par les Frobenius $\phi : Z(\eta) \to Z(\eta^p)$ (et les Frobenius sur les courbes elliptiques universelles). La commutation du carré de gauche revient donc à montrer que la restriction :

$$H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{X}, \mathscr{E}_{k-2}) \otimes \mathbb{Q}_p \to H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{Z}, \mathscr{E}^\dagger_{k-2})$$

commute aux Frobenius, mais ceci est évident car du côté cristallin comme du côté rigide, l'endomorphisme de Frobenius s'obtient par fonctorialité en calculant les deux cohomologies grâce à un complexe de de Rham double sur un recouvrement ouvert de $\widehat{\mathscr{X}}$ muni de relevés locaux du Frobenius. □

Rappelons que toute section $g \in H^0(W_1, \omega^k)$ admet un q-développement $\sum_{n=0}^\infty a_n(g)(c)q^n \in \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[[q]]$ en chaque pointe c de W_1 donné par l'évaluation de g en la courbe elliptique généralisée universelle au-dessus du complété formel de W_1 en la pointe c.

Lemme 4.3.2. — *Soit $g \in H^0(X_1(N), \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \simeq H^0(X_1(N), \omega^k)$ et notons $\varphi(g) \in \mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big)$ l'image de g par le Frobenius cristallin. Alors, $\varphi(g)$ provient, via le diagramme* (18)*, d'une section dans $H^0(W_1, \omega^k)$ dont le q-développement à l'infini est donné par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\varphi(g))(\infty)q^n = p^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\langle p\rangle g)(\infty)q^{pn}.$$

En particulier, si $\langle p\rangle g = \chi(p)g$, alors $\varphi(g)$ est l'image de $p^{k-1}\chi(p)g(pz)|_{W_1}$.

Démonstration. — Par le lemme 4.3.1, il suffit de vérifier que, si g est une forme dans $H^0(W_1, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C))$ et si l'on note $g(\infty)(q)$ le q-développement de g à l'infini, alors $\phi(g) \in H^0(W_2, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C))$ est tel que :

$$\phi(g)(\infty)(q) = p^{k-1} g(\langle p\rangle \infty)(q^p)$$

(car $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\langle p\rangle g)(\infty)q^{pn} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g)(\langle p\rangle\infty)q^{pn}$). Pour cela, on évalue la section $\phi(g)$ sur la courbe de Tate $(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}, \zeta_N)$ (avec son point d'ordre N) au-dessus du complété en la pointe à l'infini, ce qui donne, avec les notations (standard) de [**29**,

Prop.3.1.3(1)] et sachant que $\mathrm{can}(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}) = \langle\zeta_p\rangle$:

$$\begin{aligned}\phi(g)(\infty)(q)\frac{dq}{q}\otimes\Big(\frac{dt}{t}\Big)^{k-2} &= \phi(g)\big(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}},\zeta_N\big)(q)\frac{dq}{q}\otimes\Big(\frac{dt}{t}\Big)^{k-2}\\ &= g\big(\mathbb{G}_m/\langle\zeta_p,q^{\mathbb{Z}}\rangle,\zeta_N\big)(q)\frac{dq}{q}\otimes\Big(\frac{dt}{t}\Big)^{k-2}\\ &= g\big(\mathbb{G}_m/q^{p\mathbb{Z}},\zeta_N^p\big)(q)\frac{dq^p}{q^p}\otimes\Big(\frac{dt^p}{t^p}\Big)^{k-2}\\ &= p^{k-1}g(\langle p\rangle\infty)(q^p)\frac{dq}{q}\otimes\Big(\frac{dt}{t}\Big)^{k-2}\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Rappelons que l'on a $\theta^{k-1} : H^0(W_1,\omega^{2-k}) \to H^0(W_1,\omega^k)$ (cf. §4.2) et que $f(z)-\beta_p f(pz)$ est de niveau $\Gamma_1(Np)$ et vecteur propre de U_p de valeur propre α_p (cf. §4.1).

Théorème 4.3.3. — *Soit f une forme parabolique propre de poids $k \geq 2$ nouvelle pour le groupe $\Gamma_1(N)$ avec $(N,p)=1$ et telle que la représentation locale $\sigma_p(f)$ est réductible. Si $N>4$, alors $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in H^0(W_1,\omega^{2-k})\otimes L$ tel que $f(z)-\beta_p f(pz) = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1,\omega^k)\otimes L$. Si $N\leq 4$, soit $q \nmid Mp$ un nombre premier suffisamment grand, alors (en travaillant avec $X_1(N;q)$ au lieu de $X_1(N)$, cf. §4.2) $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in H^0(W_1,\omega^{2-k})^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ tel que $f(z)-\beta_p f(pz)=\theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1,\omega^k)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$.*

Démonstration. — La représentation $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement si, dans la description précédente de $D_p(f)$, on a $\mathrm{Fil}^{k-1}D_p(f) = Le_1$ et $\varphi(e_1)=\alpha_p e_1$. Supposons d'abord $N>4$. Dans la réalisation géométrique de $D_p(f)$, cela est équivalent à :

$$\varphi(f)-\alpha_p f = 0$$

dans $\mathbb{H}^1\big(X_1(N),\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)\otimes L$, donc dans $\mathbb{H}^1\big(W_1,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)\otimes L$ (car la restriction est injective). Par le Lemme 4.3.2 et le lemme 4.2.1 appliqué à l'ouvert quasi-Stein W_1, c'est aussi équivalent à :

$$p^{k-1}\chi(p)f(pz)-\alpha_p f(z)=0$$

dans $\big(H^0(W_1,\omega^k)/\theta^{k-1}\big(H^0(W_1,\omega^{2-k})\big)\big)\otimes L$ soit finalement :

$$f(z)-\beta_p f(pz)\in\theta^{k-1}\big(H^0(W_1,\omega^{2-k})\otimes L\big).$$

Supposons maintenant $1\leq N\leq 4$. Comme au §4.2, on fixe un nombre premier auxiliaire $q>2$, $q\nmid Np$ et on travaille avec la courbe $X_1(N;q)$. Le φ-module filtré

$D_p(f)$ admet alors la description géométrique suivante :

$$\begin{aligned} D_p(f) &\simeq \left(\mathbb{H}^1(X_1(N;q), \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log))\otimes_{\mathbb{Q}_p} L\right)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &\simeq \left(H^0(X_1(N;q),\omega^k)\otimes_{\mathbb{Q}_p} L\right)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})},\ 1\leq i\leq k-1 \\ &= L\cdot f \end{aligned}$$

(car le théorème de comparaison de [**29**] est fonctoriel pour l'action des automorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$). En travaillant avec $X_1(N;q)$ au lieu de $X_1(N)$, on montre alors comme précédemment que $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in \left(H^0(W_1,\omega^{2-k})\otimes L\right)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}$ tel que $f(z)-\beta_p f(pz) = \theta^{k-1}(g)$ dans $\left(H^0(W_1,\omega^k)\otimes L\right)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}$. □

4.4. — On montre le théorème 1.1.3 lorsque $(N,p)>1$.

On conserve les notations et hypothèses du §4.3, à ceci près que l'on suppose maintenant $N = Mp^r$ avec $(M,p)=1$ et $r\geq 1$. On fixe f une forme modulaire nouvelle comme au §3.3, de sorte que $\sigma_p(f)$ devient cristalline sur $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$. Comme $r>0$, f est vecteur propre de U_p et on suppose de plus que f est de pente nulle, i.e. que la valuation p-adique de la valeur propre associée est 0. Rappelons que, dans ce cas, $\chi_1 z^{k-2}$ est non-ramifié et $U_p f = p^{k-1}\chi_1(p)f$ (cf. §4.1). Si U est une variété (algébrique ou rigide) définie sur un corps et K une extension finie de ce corps, on note U_K le changement de base à K. On note encore $\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)$ le changement de base à $X_1(N)_K$ du complexe défini au §4.2.

Soit $W_r \subset X_1(M)$ l'ouvert rigide analytique des points fermés x de $X_1(M)$ vérifiant $|A(\overline{x})| > p^{-1/p^{r-2}(p+1)}$ (si $r=1$ ou $r=2$, on retrouve bien W_1 et W_2, cf. §4.3). Si E correspond à un point de W_r (en oubliant la structure de niveau en M), on peut définir par récurrence $E^{(0)} \overset{\text{déf}}{=} E$ et $E^{(i+1)} \overset{\text{déf}}{=} E^{(i)}/\mathrm{can}$ pour $0\leq i\leq r-1$. On définit $W_1(p^r)\subset X_1(Mp^r)$ comme l'ouvert rigide de $X_1(Mp^r)$ des points fermés correspondants aux couples (E,Q_M,P) (où Q_M (resp. P) est un point rationnel sur E d'ordre exact M (resp. p^r)) tels que (E,Q_M) correspond à un point fermé de $X_1(M)$ qui est dans W_r et tels que l'image de $p^{r-1-i}P$ dans $E^{(i)}$ engendre le sous-groupe canonique de $E^{(i)}$ pour $0\leq i\leq r-1$.

Supposons d'abord $M>4$ et notons $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ le modèle propre, plat et régulier de $X_1(Mp^r)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ sur $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ construit dans [**36**] représentant le problème de modules $([\Gamma_1(M)],[\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}])$. Par [**36**, §13.12], la fibre spéciale de $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ est réduite, union disjointe se coupant aux points supersinguliers de courbes d'Igusa sur $\mathbb{F}_p$. Il y a exactement deux composantes irréductibles isomorphes à $\mathrm{Ig}(Mp^r)$ (courbes d'Igusa représentant le problème de modules $([\Gamma_1(M)],[\mathrm{Ig}(p^r)])$ sur $\mathbb{F}_p$ au sens de [**36**, §12]). On vérifie facilement que l'une d'entre elles, que l'on note Ig_∞, contient l'image de $W_1(p^r)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ par la flèche de spécialisation. On note Ig_0 l'autre composante.

Supposons de plus M suffisamment grand pour que $X_1(Mp^r)$ et les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ soient de genre ≥ 2. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$ sur laquelle $X_1(Mp^r)_K$ admet un modèle stable et $\mathbb{F}_K$ son corps

résiduel. On note $X \overset{\text{déf}}{=} X_1(Mp^r)_K$, $\mathscr{X}$ le changement de base de $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ à $\mathscr{O}_K$ de $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ et $\widetilde{\mathscr{X}}$ le modèle régulier minimal (donc stable) de X_K sur $\mathscr{O}_K$. Puisqu'il n'y a pas de contraction possible dans la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, on a un morphisme $\widetilde{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$ qui est une succession d'éclatements sur la fibre spéciale. On note encore Ig_∞ (resp. Ig_0) l'unique composante irréductible de $\widetilde{\mathscr{X}} \times_{\mathscr{O}_K} \mathbb{F}_K$ qui s'envoie bijectivement sur $\mathrm{Ig}_\infty \times \mathbb{F}_K$ (resp. $\mathrm{Ig}_0 \times \mathbb{F}_K$) et $W_\infty \subset X$ (resp. $W_0 \subset X$) l'image inverse (i.e. le tube) de Ig_∞ (resp. Ig_0) par la flèche de spécialisation via $\widetilde{\mathscr{X}}$. On note res_∞ (resp. res_0) la restriction $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big) \to \mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ (resp. avec W_0).

Lemme 4.4.1. — *Les groupes* $\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ *et* $\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ *sont naturellement munis d'une action des opérateurs de Hecke* T_ℓ *et* S_ℓ *pour* $\ell \nmid Mp$ *qui commute avec celle sur* $\mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ *via* res_∞ *et* res_0.

Démonstration. — Par unicité du modèle régulier minimal, les automorphismes $\langle \ell \rangle$ ($\ell \nmid Mp$) de $\mathscr{X}$ s'étendent canoniquement en des automorphismes de $\widetilde{\mathscr{X}}$ et de sa fibre spéciale qui préservent Ig_∞ et Ig_0 (car tel est le cas sur la fibre spéciale de $\mathscr{X}$). Ainsi, l'automorphisme $\langle \ell \rangle$ de X préserve W_∞ et W_0 d'où l'énoncé pour S_ℓ puisque $S_\ell = \ell^{k-2}\langle \ell \rangle$. Notons $\mathscr{X}(\ell)$ le schéma régulier propre et plat sur $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ construit dans **[36]** représentant le problème de module $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}], [\Gamma_0(\ell)])$ des isogénies $E \twoheadrightarrow E'$ de degré ℓ entre courbes elliptiques (généralisées) avec structures de niveau de type $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}])$ sur E. Soit pr_1 (resp. pr_2) la projection $\mathscr{X}(\ell) \to \mathscr{X}$ envoyant $(E \twoheadrightarrow E')$ sur E (resp. sur E' avec structures de niveau $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}])$ induites). On montre comme dans **[40]** que les deux produits fibrés $\mathscr{X}(\ell) \times_{\mathscr{X}} \widetilde{\mathscr{X}}$ (pour pr_1 et pr_2) sont isomorphes, car isomorphes au modèle régulier minimal (et stable) de $\mathscr{X}(\ell)$ sur $\mathscr{O}_K$. Notons $\widetilde{\mathrm{pr}}_1$ et $\widetilde{\mathrm{pr}}_2$ les deux projections $\mathscr{X}(\ell) \times_{\mathscr{X}} \widetilde{\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathscr{X}}$, alors $\widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\mathrm{Ig}_\infty)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\mathrm{Ig}_0)$) est l'unique composante irréductible de la fibre spéciale du modèle stable de $\mathscr{X}(\ell)$ dont l'image dans $\mathscr{X}(\ell)$ est la courbe d'Igusa se projetant sur $\mathrm{Ig}_\infty \times \mathbb{F}_K$ (resp. $\mathrm{Ig}_0 \times \mathbb{F}_K$) dans $\mathscr{X} \times_{\mathscr{O}_K} \mathbb{F}_K$ (par pr_1 ou pr_2). On a donc $\widetilde{\mathrm{pr}}_2(\widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\mathrm{Ig}_\infty)) = \mathrm{Ig}_\infty$ dans $\widetilde{\mathscr{X}} \times_{\mathscr{O}_K} \mathbb{F}_K$, d'où $\mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(W_\infty)) = W_\infty$ dans X (resp. avec Ig_0 et W_0). C'est la condition qu'il faut pour définir par restriction un endomorphisme T_ℓ sur $\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ (resp. avec W_0) de la même manière qu'est défini T_ℓ sur $\mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log))$ (voir **[12**, §8]). □

Comme X a réduction semi-stable sur $\mathscr{O}_K$, le K-espace vectoriel $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big)$ possède une K_0-structure canonique $\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}}$ (où $K_0 \subseteq K$ est le plus grand sous-corps absolument non-ramifié) munie d'un Frobenius semi-linéaire encore noté φ et d'un opérateur de monodromie N satisfaisant $N\varphi = p\varphi N$. Par **[27]** et **[28]** (voir aussi **[16]**), on a un isomorphisme de φ-modules filtrés à coefficients dans L :

$$\big(D_p(f)_{K_0}, \varphi, \mathrm{Fil}^{k-1} D_p(f)_K\big) \simeq \big((\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^f, \varphi \otimes 1, (H^0(X, \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^f\big). \tag{20}$$

Soit $d \overset{\text{déf}}{=} [K_0 : \mathbb{Q}_p]$ et φ^d l'automorphisme K-linéaire de $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big)$ défini par extension des scalaires de K_0 à K de l'automorphisme φ^d sur $\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}}$. Les K-espaces vectoriels $\mathbb{H}^1\big(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big)$ et $\mathbb{H}^1\big(W_0, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^\cdot(\log)\big)$ sont

canoniquement munis d'un Frobenius K-linéaire Φ commutant aux opérateurs T_ℓ et S_ℓ ($\ell \nmid Mp$) et tel que les restrictions res_∞ et res_0 commutent à Φ et φ^d (voir [**16**]).

Lemme 4.4.2. — *Les restrictions* res_∞ *et* res_0 *induisent un isomorphisme :*

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\otimes L\big)^f \quad &\xrightarrow{\sim} \quad \big(\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f \\ &\quad \oplus \big(\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f.\end{aligned}$$

Démonstration. — Sachant que le caractère de f en p est de conducteur exactement p^r, on a une inclusion :

$$\big(\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\otimes L\big)^f \subset H^1(X, \mathrm{Sym}^{k-2})^{\mathrm{prim}}\otimes L$$

où $H^1(X, \mathrm{Sym}^{k-2})^{\mathrm{prim}}$ est le groupe introduit dans [**14**, §2]. L'isomorphisme se déduit alors facilement de l'isomorphisme :

$$H^1(X, \mathrm{Sym}^{k-2})^{\mathrm{prim}}\otimes L \simeq H^1(W_\infty, \mathrm{Sym}^{k-2})^*\otimes L \oplus H^1(W_0, \mathrm{Sym}^{k-2})^*\otimes L$$

de [**14**, Th.2.1] (déduit lui-même d'une suite exacte de Mayer-Vietoris). □

Soit ζ une racine primitive p^r-ième de 1. Rappelons que $\mathscr{X}$ classifie les données $(E, Q_M, \pi, (P, Q))$ où E est une courbe elliptique généralisée sur un $\mathscr{O}_K$-schéma S, Q_M un point de $E(S)$ d'ordre exact M (au sens de [**36**, §1.4]), $\pi : E \twoheadrightarrow E'$ une S-isogénie de degré p^r, $P \in \mathrm{Ker}(\pi)(S)$ un générateur (au sens « Drinfel'd ») de $\mathrm{Ker}(\pi)$ et $Q \in \mathrm{Ker}(\pi^*)(S)$ un générateur de $\mathrm{Ker}(\pi^*)$ (π^* est l'isogénie duale de π) tel que $\langle P, Q\rangle_\pi = \zeta$ où $\langle\cdot\rangle_\pi$ est l'accouplement alterné canonique entre $\mathrm{Ker}(\pi)$ et $\mathrm{Ker}(\pi^*)$ (cf. [**36**, §2.8]). On définit un automorphisme w_ζ de $\mathscr{X}$ (qui préserve X) en envoyant $(E, Q_M, \pi, (P, Q))$ sur $(E', \pi(Q_M), \pi^*, (Q, -P))$.

Lemme 4.4.3. — *L'automorphisme* w_ζ *de* X *induit des isomorphismes* $w_\zeta : W_\infty \xrightarrow{\sim} W_0$ *et* $w_\zeta : W_0 \xrightarrow{\sim} W_\infty$.

Démonstration. — Par unicité du modèle régulier minimal, w_ζ s'étend canoniquement de $\mathscr{X}$ à $\widetilde{\mathscr{X}}$ et on vérifie facilement qu'il échange Ig_∞ et Ig_0 dans $\mathscr{X}\times_{\mathscr{O}_K}\mathbb{F}_K$, d'où le résultat. □

On dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{w_\zeta} & X \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est la composée :

$$E \twoheadrightarrow E/\mathrm{Ker}(\pi) \simeq X \times_{w_\zeta, X} E \to E$$

qui induit un automorphisme encore noté w_ζ sur $\mathbb{H}^1\big(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)$. Par le lemme 4.4.3, on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^1\big(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big) & \xrightarrow{\mathrm{res}_0} & \mathbb{H}^1(W_0,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)) \\ w_\zeta\downarrow\wr & & \wr\downarrow w_\zeta \\ \mathbb{H}^1\big(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big) & \xrightarrow{\mathrm{res}_\infty} & \mathbb{H}^1(W_\infty,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)). \end{array} \tag{21}$$

Lemme 4.4.4. — *Soit* $s\in\mathbb{H}^1\big(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)$ *tel que* $\mathrm{res}_0(s)=0$, *alors* $\mathrm{res}_\infty(w_\zeta(s))=0$.

Démonstration. — Découle immédiatement de (21). □

Soit $\widetilde{W}\overset{\text{déf}}{=}W_1(p^r)_K\cap W_\infty\subset X$, c'est encore un voisinage strict dans X du lieu de spécialisation ordinaire car intersection de deux voisinages stricts. Il existe donc un affinoïde $W\subset\widetilde{W}$ qui est encore voisinage strict de ce lieu ([**5**, §1.2]) et on a un morphisme de restriction :

$$\mathbb{H}^1\big(W_\infty,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\longrightarrow\mathbb{H}^1\big(W,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big). \tag{22}$$

Remarque 4.4.5. — Par le même argument que dans [**13**, §8] utilisant [**2**], on peut montrer que la restriction (22) est en fait un isomorphisme. Nous n'aurons pas besoin de ce fait.

Notons $\mathrm{res}_\infty(f)$ (resp. $\mathrm{res}_0(f)$) l'image de la droite :

$$K\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\cdot f\subset\big(\mathbb{H}^1\big(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\otimes L\big)^f$$

dans $\big(\mathbb{H}^1(W_\infty,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$ (resp. $\big(\mathbb{H}^1(W_0,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$) par l'application res_∞ (resp. res_0).

Proposition 4.4.6. — *Supposons que la représentation* $\sigma_p(f)$ *est scindée, alors* $\mathrm{res}_0(f)=0$.

Démonstration. — On a toujours $\mathrm{res}_\infty(f)\neq0$ car sinon, via la restriction (22) et le lemme 4.2.1 appliqué à l'affinoïde W, f serait dans l'image de θ^{k-1} (agissant sur l'espace des formes surconvergentes de poids $2-k$) ce qui est impossible car f est de pente nulle en p (procéder comme dans [**13**, Lem.6.3]). Supposons $\mathrm{res}_0(f)$ non-nul. Alors les deux $K\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$-modules libres $\big(\mathbb{H}^1(W_\infty,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$ et $\big(\mathbb{H}^1(W_0,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$ sont non-nuls. Comme $\big(\mathbb{H}^1\big(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\otimes L\big)^f$ est libre de rang 2 sur $K\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$ (Eichler-Shimura), ils sont forcément de rang 1 par la proposition 4.4.2. Comme ils sont stables par φ^d, on a forcément par (20) et la description de $D_p(f)$ donnée au §3.3, quitte à inverser peut-être e_1 et e_2 :

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{H}^1(W_\infty,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f &\simeq K\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\cdot e_1\\ \big(\mathbb{H}^1(W_0,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f &\simeq K\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\cdot e_2.\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{res}_0(f)\neq0$ et $\mathrm{res}_\infty(f)\neq0$, on voit bien que $\delta\neq0$ dans la description de $\mathrm{Fil}^{k-1}D_p(f)_K\simeq K\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\cdot f$ (cf. §3.3) ce qui entraîne que $\sigma_p(f)$ est non scindée. □

Rappelons que $f|_{w_{p^r}}$ a été défini au §4.1.

Proposition 4.4.7. — *Si $\sigma_p(f)$ est scindée, il existe $g \in H^0(W,\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ telle que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W,\omega^k)\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$.*

Démonstration. — Par la proposition 4.4.6, on a $\mathrm{res}_0(f) = 0$. Or, on sait que w_{p^r} est induit (à multiplication près par une constante non-nulle) par l'automorphisme w_ζ sur $\mathbb{H}^1(X,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))$ (voir e.g. [**33**, §6] pour le cas $r=1$, $k=2$). Par le lemme 4.4.4, on a donc $\mathrm{res}_\infty(f|_{w_{p^r}}) = 0$, ce qui entraîne $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ par (22) et le lemme 4.2.1 appliqué à W. □

Supposons maintenant M quelconque et fixons comme au §4.2 un nombre premier auxiliaire $q > 2$, $q \nmid Mp$ suffisamment grand pour que le genre de $X_1(M;q)$ et des composantes irréductibles de sa fibre spéciale soit au moins 2. On a un isomorphisme de φ-modules filtrés :

$$\begin{aligned}&\big(D_p(f)_{K_0},\varphi,\mathrm{Fil}^{k-1}D_p(f)_K\big)\\ &\qquad\simeq\big((\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}L)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})},\varphi\otimes 1,(H^0(X,\omega^k)\otimes_{\mathbb{Q}_p}L)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\big).\end{aligned}$$

Les propositions 4.4.2 et 4.4.6 s'étendent alors facilement en remplaçant partout $(\cdot)^f$ par $(\cdot)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}$. On en déduit alors l'analogue de la proposition 4.4.7 : $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W,\omega^{2-k})^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes L$ lorsque $\sigma_p(f)$ est scindée.

Théorème 4.4.8. — *Soit f une forme parabolique propre de poids $k\geq 2$ nouvelle pour le groupe $\Gamma_1(Mp^r)$ avec $(M,p)=1$ et $r>0$. Supposons que f est de pente nulle en p. Si $Mp^r > 4$, alors la représentation $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g\in H^0(W_1(p^r),\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$ tel que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1(p^r),\omega^k)\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$. Si $Mp^r\leq 4$, soit $q\nmid Mp$ un nombre premier suffisamment grand, alors (en travaillant avec $X_1(N;q)$ au lieu de $X_1(N)$) $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g\in H^0(W_1(p^r),\omega^{2-k})^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$ tel que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1(p^r),\omega^k)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$.*

Démonstration. — S'il existe g comme dans l'énoncé, alors il est connu que $\sigma_p(f)$ est scindée (voir e.g. [**30**, Prop.11]).
Supposons que $\sigma_p(f)$ est scindée et supposons d'abord qu'il n'y a pas besoin de nombre premier auxiliaire (i.e. tous les genres sont au moins 2). Alors on a déjà $g\in H^0(W,\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$ tel que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ par la proposition 4.4.7. Il suffit de montrer que g s'étend (de façon nécessairement unique) en une section de $H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$ (qui sera en fait dans $H^0(W_1(p^r),\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L$). Si $k>2$, alors θ^{k-1} est injectif et la relation $p\theta\circ U_p = U_p\circ\theta$ (dans l'espace des formes surconvergentes) entraîne $U_pg = \lambda g$ avec $\mathrm{val}(\lambda) = 0$ puisque $f|_{w_{p^r}}$ est de pente $k-1$. L'injection continue $H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})\otimes L\hookrightarrow H^0(W,\omega^{2-k})\otimes L$ est d'image dense (noter que l'espace de gauche est un Fréchet et celui de droite un Banach). Soit $(g_n)_n\in H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})\otimes L$ tel que $g_n\to g$ dans $H^0(W,\omega^{2-k})\otimes L$ et $e\overset{\text{déf}}{=}\lim U_p^{n!}$ le projecteur de Hida défini sur l'espace des formes surconvergentes. On

a $e(H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})\otimes L)$ fermé dans $H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})\otimes L$ car de dimension finie sur K (car U_p est un opérateur compact sur $H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})$, cf. [**15**]). Or $e(g_n)\to e(g)=g$, donc $g\in H^0(W_1(p^r)_K,\omega^{2-k})\otimes L$. Si $k=2$, on a seulement *a priori* $U_pg=\lambda g+\mathrm{Cste}$ mais le même argument s'applique car on a encore $e(g)=g$. Dans les cas où nous avons introduit un nombre premier auxiliaire q, la même preuve est valable par la discussion précédente en travaillant avec la courbe $X_1(Mp^r;q)$. Supposons finalement $Mp^r>4$, de telle sorte que $X_1(Mp^r)$ est un espace de modules fin et, pour éviter toute confusion, notons $W_1(p^r;q)$ l'ouvert rigide analytique de $X_1(Mp^r;q)$ noté jusqu'alors simplement $W_1(p^r)$. Ce sous-espace est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-invariant et son quotient par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'ouvert $W_1(p^r)$ de $X_1(Mp^r)$. On a de plus des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\big(H^0(W_1(p^r;q),\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\big)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} &\simeq H^0(W_1(p^r),\omega^{2-k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\\ \big(H^0(W_1(p^r;q),\omega^{k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\big)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} &\simeq H^0(W_1(p^r),\omega^{k})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L\end{aligned}$$

(cf. l'appendice de [**10**]). Dans cette situation, on peut donc supprimer toute mention du nombre premier auxiliaire q, comme dans l'énoncé. □

5. Les résultats principaux

On démontre les théorèmes 1.1.4 et 1.1.2 de l'introduction.

5.1. — On commence par des résultats préliminaires sur les espaces $\widehat{H}^1(K_1^p(M))$ et $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ du §3.1.

Soit $M\geq 1$ un entier premier à p et, pour $r\geq 1$, $Y_1(Mp^r)$ la courbe modulaire ouverte correspondant au sous-groupe de congruences $\Gamma_1(Mp^r)$. On note :

$$\widehat{H}_c\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_n\Big(\varinjlim_r H^1_c(Y_1(Mp^r),\mathbb{Z}_p)/p^n\varinjlim_r H^1_c(Y_1(Mp^r),\mathbb{Z}_p)\Big).$$

C'est naturellement un $\mathbb{Z}_p$-module de Hecke qui est aussi muni d'une action de l'opérateur U_p et $\widehat{H}_c\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ est un espace de Banach. La projection $Y_1(M;p^r)\to Y_1(Mp^r)$ induit une application continue $\mathbb{T}$-équivariante :

$$\widehat{H}_c\to\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)} \tag{23}$$

qui entrelace l'action de U_p sur $\widehat{H}_c$ avec l'action de $p\pi_\wp$ sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$ où $\wp\overset{\text{déf}}{=}\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Pour tout $r\geq 1$, on note G_r le noyau de la réduction $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Proposition 5.1.1. — *L'application* (23) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'argument est analogue à la preuve de [**24**, Th.2.1.12]. Soit r_0 suffisamment grand pour que $\Gamma_1(Mp^{r_0})$ soit sans torsion et soit X_{r_0} un sous-complexe

simplicial de dimension 1 de $Y_1(Mp^{r_0})$ qui est un rétract par déformation de $Y_1(Mp^{r_0})$. Posons :

$$G^1_{r_0} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \,|\, (c,d) \equiv (0,1) \bmod p^{r_0} \right\},$$

pour $r > r_0$, $Y_1(M;p^r)$ est un revêtement galoisien de $Y_1(Mp^{r_0})$ de groupe de Galois $G^1_{r_0}/G_r$ (agissant à droite). Soit X_r l'image inverse de X_{r_0} dans $Y_1(M;p^r)$, c'est encore un revêtement galoisien de X_{r_0} de groupe de Galois $G^1_{r_0}/G_r$. On note $T_\bullet(r_0)$ la triangulation de X_{r_0} (où $T_i(r_0)$ est l'ensemble des simplexes de degré i, avec $i \in \{0,1\}$) et $T_\bullet(r)$ la triangulation de X_r image inverse de $T_\bullet(r_0)$. L'action à droite de $G^1_{r_0}/G_r$ sur X_r au-dessus de X_{r_0} induit une action à droite sur $T_\bullet(r_0)$.

Pour $r \geq r_0$, soit $S_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le complexe de chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ associé à la triangulation $T_\bullet(r)$: c'est un complexe de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})[G^1_{r_0}/G_r]$-modules. On a un système inductif de complexes de chaînes $\big(S_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big)_r$ quand r varie et on note :

$$S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r S_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

Passant à la limite projective sur n, on obtient un complexe de $\mathbb{Z}_p[[G^1_{r_0}]]$-modules :

$$\widetilde{S}_\bullet \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

De manière similaire, soit $X_{1,r}$ l'image inverse de X_{r_0} dans $Y_1(Mp^r)$ et $T_\bullet(1,r)$ la triangulation de $X_{1,r}$ image inverse de $T_\bullet(r_0)$. Pour $r \geq r_0$, soit $R_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le complexe de chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ associé à la triangulation $T_\bullet(1,r)$ et posons $R_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r R_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et $\widetilde{R}_\bullet \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n R_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Comme la triangulations $T_\bullet(r)$ ne fait intervenir que des simplexes de dimensions 0 et 1, le complexe $S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ a des termes seulement en degrés 0 et 1, et on a donc une suite exacte :

$$0 \to H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to S_1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to S_0(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

Le foncteur limite projective étant exact à gauche, on en déduit une suite exacte :

$$0 \to \varprojlim_n H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) \to \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_0$$

et donc un isomorphisme :

$$H_1(\widetilde{S}_\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})). \tag{24}$$

Le foncteur limite inductive étant exact, on a :

$$\begin{aligned} H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H_1(Y_1(M;p^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\sim} \big(\varinjlim_r H_1(Y_1(M;p^r), \mathbb{Z}_p)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{25}$$

En combinant (24) et (25), on déduit que $H_1(\widetilde{S}_\bullet)$ est isomorphe au complété p-adique de $\varinjlim_r H_1(Y_1(M;p^r), \mathbb{Z}_p)$, donc à $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))$ par dualité de Poincaré. C'est en fait

un isomorphisme de $G^1_{r_0}$-modules si l'on fait agir $g \in G^1_{r_0}$ à gauche sur $H_1(\widetilde{S}_\bullet)$ par l'action à droite de g^{-1}.

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe ci-dessus, on obtient que $H_1(\widetilde{R}_\bullet)$ est isomorphe à $\widehat{H}_c$. Par ailleurs, il est clair sur les complexes que l'on a un isomorphisme $\widetilde{R}_\bullet \xrightarrow{\sim} (\widetilde{S}_\bullet)^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$, et donc, comme le foncteur des $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)$-invariants est exact à gauche, en prenant les $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)$-invariants sur la suite exacte $0 \to H_1(\widetilde{S}_\bullet) \to \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_0$ on obtient un isomorphisme $H_1(\widetilde{R}_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_1(\widetilde{S}_\bullet)^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$. En combinant les conclusions de ce paragraphe avec celles du précédent, on obtient l'isomorphisme recherché $\widehat{H}_c \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1_c(K^p_1(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$. □

On étudie maintenant les espaces d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ où ψ est un caractère de $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ et où $\widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}$ et $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}$ désignent les vecteurs localement analytiques des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissibles $\widehat{H}^1(K^p_1(M))_L$ et $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_L$ (cf. [**45**, §7]).

Proposition 5.1.2. — *Pour tout caractère ψ comme ci-dessus, on a :*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big) = 0.$$

Démonstration. — L'argument est basé sur les constructions de la preuve de [**24**, Th.2.1.5]. Soit r_0 tel que $\Gamma_1(M) \cap \Gamma(p^{r_0})$ est sans torsion et X_{r_0} un sous-complexe simplicial de dimension 1 de $Y_1(M;p^{r_0})$ qui est un rétract par déformation de $Y_1(M;p^{r_0})$. Si $r \geq r_0$, $Y_1(M;p^r)$ est un revêtement galoisien de $Y_1(M;p^{r_0})$ de groupe de Galois G_{r_0}/G_r (agissant à droite). Soit X_r l'image inverse de X_{r_0} dans $Y_1(M;p^r)$, alors X_r est un revêtement galoisien de X_{r_0} de groupe de Galois G_{r_0}/G_r. On définit alors des triangulations $T_\bullet(r_0)$ et $T_\bullet(r)$ exactement comme dans la preuve du lemme 5.1.1. Pour $r \geq r_0$, soit $S^\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le complexe de cochaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ associé à $T_\bullet(r)$. On définit de manière similaire à la preuve précédente les complexes $S^\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et $\widetilde{S}^\bullet$. En particulier, ce dernier est un complexe de $\mathbb{Z}_p[[G_{r_0}]]$-modules. Par [**24**, Th.2.1.5], chacun des espaces $\widetilde{S}^i$ est isomorphe à un G_{r_0}-module $\mathscr{C}^0(G_{r_0}, \mathbb{Z}_p)^{s_i}$ pour un entier $s_i \geq 0$ et on a des isomorphismes $H^i(\widetilde{S}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^i(K^p_1(M))$ $(i \in \{0,1\})$. Comme le foncteur « vecteurs localement analytiques » est exact ([**45**, Th.7.1]), on obtient donc une suite exacte :

$$0 \to \widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}} \to \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G_{r_0}, L)^{s_0} \to \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G_{r_0}, L)^{s_1} \to \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}} \to 0.$$

Comme les termes du milieu sont $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-acycliques et invariants par torsion par le caractère $-\psi$, une chasse au diagramme facile fournit un isomorphisme :

$$\begin{aligned}(26)\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big) &= H^1\big(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)\big) \\ &\xrightarrow{\sim} H^3\big(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), \widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)\big).\end{aligned}$$

(où « $(-\psi)$ » désigne la torsion par $-\psi$.) Mais $\widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p^\times, L)$, d'où $H^1(\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p), \widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)) = 0$. Par ailleurs $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$ est la somme directe de $\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p)$

et d'une algèbre de Lie $\mathfrak{l}(\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 (l'algèbre de Lie formée des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Rappelons que la cohomologie d'une algèbre de Lie de dimension d est nulle en degré $> d$. Comme $\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p)$ est de dimension 1 et $\mathfrak{l}(\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2, la formule de Künneth pour la cohomologie des algèbres de Lie entraîne alors que, pour tout $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-module M, on a $H^3(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), M) \simeq H^1(\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p), M) \otimes H^2(\mathfrak{l}(\mathbb{Q}_p), M)$ (seul terme éventuellement non-nul). En prenant $M = \widehat{H}^0(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)$, on voit que l'on obtient bien $H^3(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), M) = 0$ puisque $H^1(\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p), M) = 0$, d'où le résultat par (26). □

Corollaire 5.1.3. — *Pour tout caractère ψ comme ci-dessus, le module de Hecke $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ est Eisenstein.*

Démonstration. — Par exactitude du foncteur « vecteurs localement analytiques » ([**45**, Th.7.1]), la surjectivité de (7) et la proposition 5.1.2, on voit que le module de Hecke $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ est un quotient de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{M}_{L,\mathrm{an}}\big)$. Le corollaire suit alors du même argument que celui dans la preuve du corollaire 3.1.3 en utilisant le lemme 3.1.2. □

5.2. — On donne ici quelques rappels sur le foncteur de Jacquet de [**22**] et [**25**] et sur les résultats de [**24**] pour le groupe GL_2 sur $\mathbb{Q}$.

Soit V un L-espace vectoriel topologique localement convexe (où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) muni d'une action localement analytique de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$. Dans [**22**, Def.3.4.5] est défini un L-espace vectoriel topologique localement convexe de type compact $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V)$ muni d'une représentation localement analytique de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ appelé module de Jacquet de V. Nous ne rappelons pas sa définition ici, mais simplement que si $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ (§2.1) et si $J^{\chi_1\otimes\chi_2}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V)$ est le sous-espace de $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V)$ sur lequel $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ agit par $\chi_1 \otimes \chi_2$, il y a un isomorphisme naturel (cf. [**22**, Prop.3.4.9]) :

$$J^{\chi_1\otimes\chi_2}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V) \xrightarrow{\sim} V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_1\otimes\chi_2} \tag{27}$$

où $V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_1\otimes\chi_2}$ est le sous-espace de $V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ sur lequel π_t agit par la multiplication par $(\chi_1 \otimes \chi_2)(t)$ pour tout $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$.

Le module de Jacquet $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{\mathrm{an}}\big)$ est une représentation localement analytique essentiellement admissible de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ au sens de [**21**], et donc correspond à un faisceau cohérent sur $\widehat{\mathrm{T}}$ noté $\mathscr{E}_c$ (cf. [**24**, §4.4]). L'action des opérateurs de Hecke T_ℓ et $S_\ell^{\pm1}$ sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ (pour $\ell \nmid Mp$) induit une action sur $\mathscr{E}_c$. On note, comme dans [**24**, §4.4], $\mathscr{A}_c \subset \mathscr{E}\mathrm{nd}(\mathscr{E}_c)$ le sous-faisceau cohérent d'algèbres engendré par T_ℓ et $S_\ell^{\pm1}$ et $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ le Spec relatif de $\mathscr{A}_c$ sur $\widehat{\mathrm{T}}$. Donc $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est un espace rigide analytique muni d'une injection continue :

$$\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c \hookrightarrow \widehat{\mathrm{T}} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}_p[\{T_\ell, S_\ell^{\pm1}\}_{\ell\nmid Mp}] \simeq (\mathscr{W} \times \mathbb{G}_m)^2 \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}_p[\{T_\ell, S_\ell^{\pm1}\}_{\ell\nmid Mp}].$$

On notera typiquement $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ un point de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ où $\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}$ désigne le point correspondant de $\widehat{\mathrm{T}}$ et λ le système correspondant de valeurs propres de Hecke (le choix de tordre par $|\,| \otimes |\,|^{-1}$ s'expliquera au §5.5). L'espace $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est invariant par torsion « diagonale » par les éléments de $\mathscr{W}$ (cf. [**24**],(4.4.8)) : le tordu du point $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ par $\chi \in \mathscr{W}$ est le point $(\chi\chi_2 \,|\,| \otimes \chi\chi_1 \,|\,|^{-1}, \chi\lambda)$.

On déduit par ailleurs de (27) :

Proposition 5.2.1. — *On a un isomorphisme Hecke-équivariant :*

$$J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}(\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}})^{\lambda} \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}.$$

Comme l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ est unitaire, on remarque que l'on a pour tout point $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ (cf. [**22**, Lem.4.4.2]) :

$$|\chi_2(p)| \leq 1 \text{ et } |\chi_1(p)| = |\chi_2(p)|^{-1}. \tag{28}$$

5.3. — On rappelle brièvement le lien entre l'espace rigide $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ et la courbe (ou surface) de Hecke de Coleman et Mazur ([**17**]).

Soit f une forme modulaire comme au §3.2 (i.e. parabolique, normalisée, de poids $k \geq 2$ et niveau $N = p^r M$ pour un entier $r \geq 0$, définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$) de système de valeurs propres hors niveau λ et telle que $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes \pi_p(f) = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$. Par (14) et la compatibilité entre foncteurs de Jacquet classique et localement analytique ([**22**, Prop.4.3.6]), on voit que les deux points $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ et $(\chi_1 z^{k-2} \otimes \chi_2 z^{2-k}, \lambda)$ sont alors dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. On peut construire aussi des points dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ à partir de formes f telles que $\pi_p(f)$ est une série spéciale et à partir des séries d'Eisenstein. On dit que les points de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ obtenus par torsion par des caractères arbitraires dans $\mathscr{W}$ des points précédents sont des *points classiques* (noter une légère différence avec la définition de [**24**] où l'on n'autorisait que des torsions par des caractères *localement algébriques* de $\mathbb{Z}_p^\times$. Ceci ne portera pas à conséquence dans la suite car les caractères localement algébriques de $\mathbb{Z}_p^\times$ sont Zariski-dense dans $\mathscr{W}$). La clôture zariskienne (au sens rigide analytique) des points classiques dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est par définition la *surface de Hecke* de niveau M (cf. [**24**, Prop.4.4.15]). C'est une variété rigide analytique équidimensionnelle de dimension 2 stable sous l'action des éléments de $\mathscr{W}$. Les points $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ de la surface de Hecke correspondent aux formes modulaires p-adiques f de niveau M qui sont des tordues par des éléments de $\mathscr{W}$ de formes modulaires surconvergentes de pente finie, niveau modéré M et vecteurs propres de Hecke. Plus précisément, si f est une forme surconvergente de pente finie, poids entier k, niveau $N = Mp^r$ (pour $(M,p) = 1$ et $r \geq 0$), définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. dont le q-développement vit dans $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L[[q]]$), de caractère $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to L^\times$, vecteur propre de U_p de valeur propre α et vecteur propre des T_ℓ, S_ℓ de système de valeurs propres λ, alors f correspond au point :

$$\big(\mathrm{nr}(\alpha/p) \otimes \mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}, \lambda\big)$$

de $(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$. Par exemple, si f est une forme classique comme au §4.3 nouvelle pour $\Gamma_1(M)$ et si λ est le système de valeurs propres de Hecke associé, alors le point correspondant à $f(z)-\alpha_p f(pz)$ est $(\chi_1 z^{k-2}\otimes\chi_2 z^{2-k},\lambda)$ et celui correspondant à $f(z)-\beta_p f(pz)$ est $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$. De même, si f est nouvelle pour $\Gamma_1(Mp^r)$ avec $r>0$ et de pente nulle en p comme au §4.4, le point correspondant à f est $(\chi_1 z^{k-2}\otimes\chi_2 z^{2-k},\lambda)$ et celui correspondant à $f\,|_{w_{p^r}}$ est le tordu par χ_0 du point $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$.

La surface de Hecke est en fait une union de composantes connexes de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ et son complémentaire dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est une union disjointe de composantes irréductibles de dimension 1 dont chacune est juste une orbite sous l'action de $\mathscr{W}$ (cf. la discussion suivant la preuve de [**24**, Prop.4.4.14], le point étant que toute composante de dimension 2 contient un ensemble Zariski-dense de points classiques). En fait, on s'attend à ce que $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ coïncide avec la surface de Hecke, au moins hors du lieu d'Eisenstein (cf. [**23**, Thm.7.5.8]).

On dit qu'un point $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est de poids classique si $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique au sens de la définition 2.1.1. Tout point classique de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est de poids classique mais la réciproque est fausse (par exemple, les formes surconvergentes de pente finie et de poids entier qui ne sont pas des formes modulaires classiques donnent des points de poids classique non classiques).

Définition 5.3.1. — *On dit qu'un point* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ *de* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ *est ordinaire si chacun des caractères* χ_1 *et* χ_2 *est unitaire (i.e. entier).*

Proposition 5.3.2. — *Tout point ordinaire* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ *de* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ *se trouve sur la surface de Hecke.*

Démonstration. — Quitte à tordre par $\chi_{2|\mathbb{Z}_p^\times}^{-1}$, on peut supposer χ_2 non-ramifié. Tout élément de $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\,|\otimes\chi_1|\,|^{-1}}(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_{\mathrm{an}})^\lambda$ correspond alors en particulier à un élément de $\widehat{H}_c^1(K_1^p(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$ par la proposition 5.2.1, donc à un élément de $\widehat{H}_c$ par la proposition 5.1.1. Mais, par [**34**], tout système de valeurs propres de Hecke dans la partie ordinaire de $\widehat{H}_c$ provient d'une forme modulaire p-adique. Il est alors montré dans [**32**] (voir aussi [**11**] pour $p=2$) que toute forme modulaire p-adique ordinaire est surconvergente (même principe que la fin de la preuve du théorème 4.4.8). □

5.4. — On définit et on étudie les « mauvais » points sur la surface de Hecke.

Définition 5.4.1. — *Un point* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ *de* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ *est mauvais s'il est de poids classique* k *et si le point* $(\chi_2\,|\,|\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}\,z^{k-1},\lambda)$ *est aussi dans* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$.

De manière équivalente par la proposition 5.2.1, $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ est mauvais s'il est de poids classique k et si l'espace :

$$\widehat{H}_c^1(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\,|z^{1-k}\otimes\chi_1|\,|^{-1}z^{k-1},\lambda}$$

est non-nul (où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle le point est défini). La définition 5.4.1 est une extension aux points de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ de la notion de mauvais point sur la courbe de Hecke définie dans [**24**, Def.4.5.5]. Notons que l'ensemble des mauvais points sur $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est invariant sous l'action de $\mathscr{W}$.

Lemme 5.4.2. — *Si* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ *est de poids classique et s'il y a des éléments de* $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}$ *qui ne sont pas localement algébriques sous l'action de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$*, alors* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ *est un mauvais point de* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$.

Démonstration. — Supposons que $\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}$ est de poids classique k. Si $v\in\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}$ n'est pas localement algébrique, alors $X_-^{k-1}v$ est non-nul. Par [**22**, Prop.4.4.4], il appartient à

$$\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |z^{1-k}\otimes\chi_1|\ |^{-1}z^{k-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}$$

et donc $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ est un mauvais point. □

Proposition 5.4.3. — *Soit* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ *de poids classique* k. *Si* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ *n'est pas un point classique, alors il est mauvais. Réciproquement, si* $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ *est mauvais, alors soit ce n'est pas un point classique, soit* $|\chi_2(p)|=|p^{k-1}|$.

Démonstration. — Étant donné que tout vecteur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-localement algébrique dans $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}$ est le tordu d'un élément de l'image de (12) pour un $k\geq 2$, on voit que si $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ n'est pas un point classique, alors aucun vecteur dans $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}$ ne peut être $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-localement algébrique. Donc $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ est mauvais par le lemme 5.4.2. Si par contre $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ est classique, on sait que $|p^{k-1}|\leq|\chi_2(p)|\leq 1$ (valable pour tout point classique). Si la première inégalité est stricte, alors par (28) appliqué à $(\chi_2\,|\,|\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}z^{k-1},\lambda)$ on déduit :

$$\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |z^{1-k}\otimes\chi_1|\ |^{-1}z^{k-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}=0$$

et donc $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ n'est pas mauvais. □

Grâce à la proposition 5.4.3, on peut donner un critère simple et utile permettant de reconnaître les mauvais points sur la surface de Hecke.

Proposition 5.4.4. — *Si* f *est une forme surconvergente non-nulle de poids entier* $k\geq 2$, *de niveau* $N=Mp^r$ $(r\geq 0)$, *vecteur propre pour* U_p, $\mathbb{T}$ *et pour l'action de* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, *alors le point correspondant sur la surface de Hecke est un mauvais point de* $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ *si et seulement s'il existe une forme surconvergente* g *non-nulle de poids* $2-k$, *de niveau* N, *vecteur propre pour* U_p, $\mathbb{T}$ *et pour l'action de* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ *telle que* f *et* $\theta^{k-1}(g)$ *ont même valeur propre de* U_p, *même système de valeurs propres de Hecke et même caractère de* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ *(cf. §4 pour* θ^{k-1}*).*

Démonstration. — Avec les notations du §5.3, rappelons que f correspond au point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p)\otimes\mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k},\lambda\big)$ de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Supposons d'abord qu'il existe une telle forme g. Il est facile de voir que g correspond au point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p^k)\otimes\mathrm{nr}(p^k/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^k,\varepsilon^{k-1}\lambda\big)$ de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Quitte à tordre par $\varepsilon^{1-k}\in\mathscr{W}$, on voit que le point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p)z^{1-k}\otimes\mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}z^{k-1},\lambda\big)$ est aussi dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$, ce qui montre que le point associé à f est mauvais. Réciproquement, supposons que le point associé à f est mauvais, i.e. que $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p)z^{1-k}\otimes\mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}z^{k-1},\lambda\big)$ est aussi dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Quitte à tordre cette fois par ε^{k-1}, on voit que $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p^k)\otimes\mathrm{nr}(p^k/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^k,\varepsilon^{k-1}\lambda\big)$ est un point de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Si f n'est pas classique, on sait déjà que $f=\theta^{k-1}(g)$ par **[13]** et **[14]**. On peut donc supposer f classique. Par la proposition 5.4.3 appliquée à f, on a $|\alpha|=p^{k-1}$ et le point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p^k)\otimes\mathrm{nr}(p^k/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^k,\varepsilon^{k-1}\lambda\big)$ est ordinaire. Par la proposition 5.3.2, il correspond à une forme modulaire surconvergente non-nulle g de poids $2-k$ et niveau N, de valeur propre de U_p égale à α/p^{k-1}, de système de valeurs propres de Hecke égal à $\varepsilon^{k-1}\lambda$ et de caractère de p-composante χ_p. On voit que g satisfait les conditions de l'énoncé. □

5.5. — On énonce maintenant et on commence à démontrer un résultat important de l'article qui est le :

Théorème 5.5.1. — *Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ n'est pas mauvais au sens de la définition 5.4.1, alors on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}},\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\lambda}_L\Big)\xrightarrow{\sim}\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}.$$

On voit que la torsion par $|\,|\otimes|\,|^{-1}$ à droite permet de considérer l'induite parabolique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ plutôt que l'induite $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}\big)^{\mathrm{an}}$. Cet énoncé est essentiellement une conséquence de **[24**, Lem.4.5.13**]** et du résultat principal de **[25]**. Pour la commodité du lecteur, nous donnons maintenant une preuve complète du théorème 5.5.1.

Proposition 5.5.2. — *Si $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$, il y a un isomorphisme naturel :*

$$J^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}},\widehat{H}^1_c(K_p^1(M)^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big).\tag{29}$$

Démonstration. — Par [**22**, Th.3.5.6], on a un isomorphisme :

$$J^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M)^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big). \tag{30}$$

En combinant (30) avec la propriété universelle des produits tensoriels, on a le résultat. □

Lorsque $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ n'est pas de poids classique, le théorème 5.5.1 découle immédiatement des propositions 2.1.4 et 5.5.2, du lemme 2.1.2 et de la proposition 5.2.1. Supposons maintenant que $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ est de poids classique. Comme on suppose de plus que ce n'est pas un mauvais point de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$, c'est un point classique par la proposition 5.4.3.

Lemme 5.5.3. — *Si $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)$ est un point classique qui n'est pas mauvais, alors chaque flèche dans l'image de* (29) *se factorise par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ (vu comme quotient de $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$ par l'application* (2)*).*

Démonstration. — Les éléments de $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}_{L,\mathrm{an}}$ sont tous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-localement algébriques par le lemme 5.4.2. Comme $\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}$ est de poids classique k, ils sont en fait localement $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$-algébriques. Comme X_-^{k-1} annule ces vecteurs, l'image de chaque flèche dans l'image de l'isomorphisme (30) est annulée par X_-^{k-1}, et donc chaque flèche dans l'image de l'isomorphisme (29) a un noyau qui contient $X_-^{k-1}\Big(\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\Big)$. Le résultat découle alors du lemme 2.1.3. □

Le lemme 5.5.3 montre que, si $(\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ est de poids classique k et n'est pas mauvais, alors on a un isomorphisme :

$$J^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(\widehat{H}^1_c(K^1_p(M))_{L,\mathrm{an}})^{\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big).$$

Il n'est pas possible d'obtenir plus d'informations en appliquant la théorie générale des modules de Jacquet au caractère $\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}$ de poids classique k. Pour terminer la preuve du théorème 5.5.1 dans le cas de poids classique k, on doit montrer que la restriction :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)\\ \to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)\end{aligned} \tag{31}$$

est un isomorphisme (puis utiliser comme précédemment les propositions 2.1.4 et 5.2.1). Lorsque $\chi_2\,|\,|\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}$ est de pente non critique, c'est-à-dire lorsque $|\chi_2(p)|>|p^{k-1}|$, (31) découle du théorème classique de Amice-Vélu et Vishik (cf. le

lemme A.2.1 et aussi la preuve de [**25**, Prop.2.5]). Lorsque $\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}$ est de pente critique (qui est le cas intéressant utilisé dans la suite), (31) découle du résultat suivant, démontré au §5.6 :

Proposition 5.5.4. — *Si* $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda) \in (\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ *est un point classique qui n'est pas mauvais et si* λ *n'est pas Eisenstein, alors tout élément de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}, \widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)$ *s'étend de manière unique en un élément de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1}, \widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)$.

En effet, on observe que l'inclusion :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1} \subset \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}\,\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

induit une surjection :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1} \twoheadrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

dont le noyau coïncide avec le noyau de (2). Si λ n'est pas Eisenstein, la proposition 5.5.4 entraîne alors que (31) est un isomorphisme. Si λ est Eisenstein, le point classique $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ de poids k provient nécessairement d'une série d'Eisenstein. Cette série d'Eisenstein est soit ordinaire, mais alors on n'est pas dans le cas critique, soit de pente $k-1$. Mais une telle série d'Eisenstein est toujours dans l'image de θ^{k-1}. Ce cas est donc impossible par la proposition 5.4.4 lorsque $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ n'est pas mauvais.

5.6. — On montre la proposition 5.5.4.

En faisant agir $\mathbb{T}$ via le système de valeurs propres λ, on munit $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1}$ d'une structure de module de Hecke. La dérivation $k-1$ fois induit un isomorphisme naturel :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1}/\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}.$$

Supposons donné un morphisme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2} \to \widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}, \tag{32}$$

et considérons le diagramme cartésien de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-représentations avec une action équivariante de Hecke :

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2} & \overset{(32)}{\longrightarrow} & \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1} & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} & \equiv & \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array} .$$

Comme l'espace $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$ est muni de sa topologie localement convexe la plus fine, on voit que la suite exacte verticale de droite est scindée en tant que suite exacte d'espaces vectoriels topologiques. Donc E est un L-espace vectoriel localement convexe de type compact. Par hypothèse, le système de valeurs propres λ n'est pas Eisenstein. De plus, $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$ par la dérivée du caractère $\chi_2 z^{1-k}\otimes\chi_1 z^{k-1}$ de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$. Le corollaire 5.1.3 implique alors que la surjection :

$$E \twoheadrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \tag{33}$$

est scindée comme application de $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-modules, donc aussi comme application de $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$-modules.

Notons U (resp. V, resp. W) le sous-espace fermé de $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ (resp. de $E^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$, resp. de $\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\big)^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$) sur lequel $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)$ agit par le caractère $\chi_2\,|\,|\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}\,z^{k-1}$. Comme la surjection (33) est scindée comme application de $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$-représentations, on a encore une suite exacte de L-espaces vectoriels de type compact :

$$0 \to U \to V \to W \to 0. \tag{34}$$

Les opérateurs de Hecke π_t pour $t\in\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ et l'algèbre de Hecke $\mathbb{T}$ agissent sur U, V, W et les morphismes dans la suite exacte sont équivariants pour ces actions. Par [**22**, Lem.3.5.2] le L-espace vectoriel $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\big)$ est la représentation de dimension 1 de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ donnée par le caractère $\chi_2\,|\,|\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\,|^{-1}\,z^{k-1}$ et il s'identifie par (27) à :

$$\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\big)^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\,|z^{1-k}\otimes\chi_1|\,|^{-1}z^{k-1}}.$$

Notons W_0 cet espace de dimension 1 et V_0 l'image inverse de W_0 dans V. La suite exacte (34) induit une suite exacte $0\to U\to V_0\to W_0\to 0$. D'après la preuve de [**22**, Prop.4.2.33], l'action de $\pi_\wp$ induit un opérateur compact sur U, et aussi sur V_0 puisque

W_0 est de dimension 1. La théorie des opérateurs compacts entraîne alors que le sous-espace caractéristique de V_0 pour $(\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \chi_2 \,|\,| \, z^{1-k} \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1} \, z^{k-1}, \mathbb{T} = \lambda)$ est de dimension finie, et donc que tout sous-espace de cet espace qui est stable par $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ et $\mathbb{T}$ contient un vecteur propre non-nul pour $(\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \chi_2 \,|\,| \, z^{1-k} \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1} \, z^{k-1}, \mathbb{T} = \lambda)$. Comme $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ n'est pas un mauvais point par hypothèse, cet espace caractéristique est donc d'intersection nulle avec U. Il est par suite isomorphe à W_0 et coïncide aussi avec l'espace propre pour $(\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \chi_2 \,|\,| \, z^{1-k} \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1} \, z^{k-1}, \mathbb{T} = \lambda)$. Par la formule d'adjonction de [**22**, Th.3.5.6], on en déduit une section de (33) de la forme :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \hookrightarrow E^\lambda \subset E$$

d'où on tire facilement la proposition 5.5.4.

Remarque 5.6.1. — La preuve du théorème 5.5.1 donnée ici dans le cas de poids classique est différente de celle donnée dans [**24**, Lem.4.5.13]. Dans *loc.cit.*, on ne montre pas directement que (31) est un isomorphisme. À la place, on montre le théorème 5.5.1 « pour tous les poids à la fois » et on utilise de façon cruciale les propriétés géométriques de la surface de Hecke. On peut résumer la situation en disant que l'on y démontre que (31) est un isomorphisme par passage à la limite à partir des poids non-classiques. Ici, on travaille plutôt poids par poids et la géométrie de la surface de Hecke est remplacée par le résultat de la proposition 5.1.2.

Remarque 5.6.2. — En utilisant la proposition 5.1.2 au lieu du corollaire 5.1.3 dans le cas critique, on démontre par les mêmes méthodes que, si $(\chi_2 \,|\,| \otimes \chi_1 \,|\,|^{-1}, \lambda)$ n'est pas mauvais (où « mauvais » est ici défini comme au §5.4 mais avec le faisceau d'algèbres $\mathscr{A}$, et pas $\mathscr{A}_c$, agissant sur le faisceau cohérent associé au module de Jacquet de $\widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}$), alors tout élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big)$$

s'étend de manière unique en un élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big)$$

puis que tout élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-1}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big)$$

s'étend de manière unique en un élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2)^{\mathrm{an}}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big).$$

Noter qu'il n'y a pas besoin ici de l'hypothèse « λ non Eisenstein » dans l'analogue de la proposition 5.5.4.

Remarque 5.6.3. — Notons que la proposition 5.4.4 est encore valable si l'on définit « mauvais » en termes de $\mathscr{A}$ plutôt que $\mathscr{A}_c$ (cf. remarque précédente). La raison en est que, même si l'analogue de la proposition 5.1.1 ne marche pas avec H^1 au lieu de H_c^1, il marche encore à condition de se restreindre aux parties ordinaires (pour l'action

de U_p sur la source et l'action de $p\pi_\wp$ sur le but). On aurait pu ainsi tout aussi bien travailler avec H^1 plutôt que H^1_c.

5.7. — On démontre maintenant le résultat principal de l'article qui est une version faible de la conjecture 3.3.2.

Pour toute représentation continue H de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on note $H^\pm$ les espaces propres de H sous l'action d'une conjugaison complexe dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Lemme 5.7.1. — *Soit f une forme parabolique de niveau $N = Mp^r$ nouvelle en M comme au §3.2. On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big((\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f), \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big) \simeq L.$$

Démonstration. — Par [**24**, §4.3], le terme de gauche s'identifie à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big((\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes \pi_p(f), (\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2})^{f,\pm}\big)$$

qui est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\pi_p(f), H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2})^{f,\pm}\big) \simeq L$. □

On fixe f une forme parabolique nouvelle de niveau $N = Mp^r$ comme au §3.3 et on conserve les notations du §3.3. Rappellons que, par définition (cf. §2.3) :

(i) si $\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, alors :

$$B(\sigma_p(f)) \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0} \oplus \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0},$$

(ii) si $\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ avec $* \neq 0$, alors $B(\sigma_p(f))$ est une extension non scindée :

$$0 \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0} \to B(\sigma_p(f)) \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0} \to 0,$$

cette extension s'identifiant au complété unitaire universel B de l'induite parabolique localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ (théorème 2.2.2). On pose dans la suite $B_1 \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ et $B_2 \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$. Notons que B_2 est aussi le complété unitaire universel de l'induite localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}} = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathrm{an}}$ (voir preuve du théorème 2.2.2). Rappelons enfin que $\Pi_p(f)$ est par définition la composante $\sigma(f)$-isotypique de $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L$ ou de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ (§3.3).

Théorème 5.7.2. — *On a $\sigma_p(f)$ scindée si et seulement si $\Pi_p(f)$ contient la représentation $B_2 = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de p et à remplacer f par la forme nouvelle « sous-jacente » au tordu de f, on peut supposer $\chi_1 z^{k-2}$ non-ramifié et soit $r = 0$, soit $r > 0$ et f de pente nulle. Si $r = 0$ (resp. $r > 0$), on dit que $f(z) - \beta_p f(pz)$ (resp. $f\,|_{w_{p^r}}$) est la forme de pente $k-1$ associée à f (avec les notations du §4.1). Supposons $\sigma_p(f)$ non scindée.

Par la proposition 5.4.4 et la même preuve que dans [**30**, Prop.11], on voit que le point de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ correspondant à la forme de pente $k-1$ associée à f n'est pas mauvais (définition 5.4.1). Par le théorème 5.5.1, on en déduit que $\Pi_p(f)$ ne contient pas $\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}}$ et donc *a fortiori* B_2. Supposons $\sigma_p(f)$ scindée et posons $W \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_2, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))^f_L\big)$ c'est-à-dire :

$$W = \operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}}, \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))^f_L\big).$$

Par les théorèmes 4.3.3 et 4.4.8, la forme de pente $k-1$ associée à f est dans l'image de θ^{k-1} d'où on déduit que W est non-nul par le théorème 5.5.1 appliqué à la forme g telle que $f(z)-\beta_p f(pz)=\theta^{k-1}(g)$ (resp. $f\,|_{w_{p^r}}=\theta^{k-1}(g)$). Par [**24**, §4], le théorème 5.5.1 et la proposition 5.2.1, W est un L-espace vectoriel de dimension finie. Il est muni d'une action continue de $\operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ déduite de l'action sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))$. Toute sous-représentation absolument irréductible non-nulle de W est nécessairement isomorphe à $\sigma(f)$ par les relations d'Eichler-Shimura sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))\otimes L$ et un argument bien connu dû à Mazur (voir [**38**, p.115]). On a donc $\sigma(f)\overset{\iota}{\hookrightarrow} W$ d'où une application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $B_2\to\Pi_p(f)$, $x\mapsto(v\mapsto\iota(v)(x))$ (où $v\in\sigma(f)$). Cette application est une injection fermée car B_2 est topologiquement irréductible et car les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach B_2 et $\Pi_p(f)$ sont admissibles. □

Théorème 5.7.3. — *Si $\sigma_p(f)$ est non scindée, alors il existe une unique (à multiplication près par une constante non-nulle) injection fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $B(\sigma_p(f))\hookrightarrow\Pi_p(f)$.*

Démonstration. — Quitte à tordre, on se ramène à la situation de la preuve du théorème 5.7.2. On a alors vu que, si $\sigma_p(f)$ est non scindée, le point de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ correspondant à la forme de pente $k-1$ associée à f n'est pas mauvais. La suite exacte courte $0\to B_1\to B\to B_2\to 0$ induit une suite exacte :

$$0\to\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_2,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)\to\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)$$
$$\to\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_1,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big).$$

Le premier terme est nul par le théorème 5.7.2 et le dernier de dimension 1 par la proposition 2.2.1 et le lemme 5.7.1. Mais celui du milieu est non-nul par ce qui précède et les théorèmes 2.2.2 et 5.5.1. On a donc un isomorphisme :

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)\xrightarrow{\sim}\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_1,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)\simeq L.$$

De plus, le morphisme correspondant $B\to\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L$ est une injection fermée. En effet, il est injectif par le théorème 2.2.2 et le fait que l'application induite sur le sous-objet B_1 est non-nulle, et c'est une application fermée car les deux $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach B et $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L$ sont admissibles. On en déduit $\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^f_L\big)\simeq L^2\simeq\sigma(f)$ (par Eichler-Shimura) d'où avec la proposition 3.2.3 :

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\operatorname{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\sigma(f),\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^f_L)\big)=\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\Pi_p(f))\neq 0.$$

On a aussi une injection :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\Pi_p(f)) &\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^f_L)\big)\simeq L\\ F &\mapsto \big(v\mapsto (x\mapsto F(x)(v)\big)\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 5.7.4. — *La représentation $\Pi_p(f)$ contient toujours $B(\sigma_p(f))$ comme sous-représentation fermée.*

Appendice A
Preuve de la proposition 2.1.4

A.1. — Commençons par quelques préliminaires topologiques. Soit $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ (resp. $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$) le sous-espace fermé de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ des fonctions localement analytiques $f:\mathbb{Q}_p\to L$ (cf. §2.1) qui sont à support compact (resp. à support dans $\mathbb{Z}_p$). Il est stable par $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$ (resp. $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)$) et l'application naturelle :

$$L[\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p)]\otimes_{L[N(\mathbb{Z}_p)]}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}\to\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}} \tag{35}$$

est un isomorphisme. On note aussi $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$ et $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ les sous-espaces fermés de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ et $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ formés des fonctions à support dans $\mathbb{Z}_p$. Ce sont encore des sous-espaces stables par $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)$ et les applications analogues à (35) sont des isomorphismes.

Si $r\geq 1$, on note $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ l'espace de Banach des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ et analytiques sur chaque disque fermé $D(z,r)\overset{\text{déf}}{=}\{x\in\overline{\mathbb{Q}}_p\,|\,\|x-z\|\leq|p^r|\}$ pour tout $z\in\mathbb{Z}_p$. Si $\mathscr{O}(D(z,r))$ désigne l'espace de Banach des fonctions rigides analytiques sur $D(z,r)$ à valeurs dans L, il y a un isomorphisme topologique naturel :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r\xrightarrow{\sim}\oplus_{z\in\mathbb{Z}_p/p^r}\mathscr{O}(D(z,r))$$

(attention : la topologie sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ induite par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$ est plus grossière que la topologie ci-dessus d'espace de Banach). Si l'on choisit $r_0\geq 1$ de telle sorte que $\chi_2\chi_1^{-1}$ est analytique sur $1+p^{r_0}\mathbb{Z}_p$, on voit que $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ est stable par $K_p(r)$ dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$ pour tout $r\geq r_0$ (voir §3.1 pour $K_p(r)$). De plus, on vérifie facilement que l'action de $K_p(r)$ est continue pour la topologie d'espace de Banach de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$. En fait, on a plus : si $\mathbb{K}_p(r)$ désigne le sous-groupe affinoïde du groupe algébrique GL_2 sur $\mathbb{Q}_p$ défini par les conditions $|a-1|,|b|,|c|,|d-1|\leq|p^r|$, alors $K_p(r)$ est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points de $\mathbb{K}_p(r)$, et l'action de $K_p(r)$ est en fait induite par une action rigide analytique

de $\mathbb{K}_p(r)$ sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ (l'action de $K_p(r)$ est « $\mathbb{K}_p(r)$-analytique » au sens de [**26**]). En particulier, on peut différentier cette action pour obtenir une action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ (pour $r\geq r_0$). L'application naturelle :

$$\varinjlim_{r\geq r_0}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\longrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}} \tag{36}$$

est alors un isomorphisme topologique $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant.

Pour $d\geq 0$ et $r\geq 1$, on pose :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}\overset{\text{déf}}{=}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\bigcap\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d},$$

et :

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}&\overset{\text{déf}}{=}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\bigcap\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}\\&=\bigcup_{d\geq 0}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}.\end{aligned}$$

Chacun des espaces $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}$ est de dimension finie et leur réunion est dense dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ (pour sa topologie de Banach). Si d est suffisamment grand, alors $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}$ engendre $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}$ comme $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-module (en fait, si $\chi_1\otimes\chi_2$ n'est pas de poids classique, tout $d\geq 0$ convient, mais si $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique $k\geq 2$, il faut prendre $d\geq k-1$, cf. le lemme 2.1.2 et le lemme 2.1.3).

On reprend maintenant le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach V de la proposition 2.1.4. Pour $r\geq 1$, soit $V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ le sous-espace de V des vecteurs v tels que l'application « orbite » : $g\to g\cdot v$, lorsque restreinte à $K_p(r)$, est (la restriction à $K_p(r)$ d') une fonction rigide analytique sur $\mathbb{K}_p(r)$ à valeurs dans V. Si $\mathscr{O}(\mathbb{K}_p(r),V)$ est l'espace de Banach des fonctions rigides analytiques sur $\mathbb{K}_p(r)$ à valeurs dans V, alors la flèche qui envoie $v\in V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ sur son application orbite identifie $V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ à un sous-espace fermé de $\mathscr{O}(\mathbb{K}_p(r),V)$ ([**26**, Prop.3.3.3]). On munit $V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ de la topologie de Banach induite par celle de $\mathscr{O}(\mathbb{K}_p(r),V)$ (qui est plus fine que la topologie induite par le Banach V). On a alors un isomorphisme topologique $\varinjlim_r V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}\xrightarrow{\sim}V_{\mathrm{an}}$.

Remarque A.1.1. — On utilise ici la définition des vecteurs localement analytiques donnée dans [**26**, Def.3.5.3] qui diffère de celle de [**45**] : les deux définitions donnent le même espace sous-jacent V_{an}, mais la topologie de V_{an} définie dans [**26**] est en général plus fine que celle définie dans [**45**] (cf. [**26**, Th.3.5.7]). On démontrera la proposition 2.1.4 lorsque V_{an} est muni de la topologie de [**26**], ce qui implique immédiatement l'énoncé correspondant lorsque V_{an} est muni de la topologie plus grossière de [**45**]. Notons que, dans les applications, V sera toujours un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach (unitaire)

admissible, et dans ce cas les deux topologies sur V_{an} sont alors les mêmes (utiliser [**26**, Prop.6.2.4] et [**45**, Th.7.1]).

A.2. — On démontre la proposition 2.1.4. On conserve les notations du §A.1.

Lemme A.2.1. — *La restriction :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}},V\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}},V\right) \tag{37}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Puisque $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$ est dense dans l'espace $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$, toute application linéaire continue :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}} \to V \tag{38}$$

est nulle (resp. est $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariante) si et seulement s'il en est de même de sa restriction à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$. Il suffit donc de montrer que tout élément dans l'image de (37) s'étend en une application linéaire continue (38). Si $f(X)\in\mathbb{Q}_p[X]$, notons $||f(X)||$ le sup des valeurs absolues p-adiques de ses coefficients. Notons $||-||_V$ une norme sur V donnant sa topologie de Banach. On choisit $||-||_V$ invariante sous $N(\mathbb{Z}_p)$ (ce qui est possible car $N(\mathbb{Z}_p)$ est compact). Soit $A>0$ tel que $||\wp v||_V \leq A||v||_V$ pour tout $v\in V$ où $\wp \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Soit ϕ dans l'image de (37) et, pour chaque $d\geq 0$, soit $C(d)>0$ tel que $||\phi(f(X))||_V \leq C(d)||f(X)||$ pour les $f(X)$ de degré au plus d. Pour chaque $z\in\mathbb{Z}_p$ et $r\geq 0$, on a (cf. (1)) :

$$f(\tfrac{X-z}{p^r})|_{z+p^r\mathbb{Z}_p} = \chi_2(p)^{-r}\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\wp^r\cdot f(X).$$

En utilisant l'invariance sous $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+$ de ϕ, on obtient :

$$\begin{aligned}||\phi(f(\tfrac{X-z}{p^r}))||_V &= |\chi_2(p)|^{-r}||\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\wp^r\cdot\phi(f(X))||_V\\ &\leq (|\chi_2(p)|^{-1}A)^r||\phi(f(X))||_V \leq (|\chi_2(p)|^{-1}A)^r C(d)||f(X)||.\end{aligned}$$

Soit h tel que $|\chi_2(p)|^{-1}A\leq|p^{-h}|$, on voit que, pour chaque $d\geq 0$, la restriction de ϕ à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ est tempérée d'ordre $\leq h$. Par le théorème d'Amice-Vélu ([**1**]) et Vishik ([**47**]), si $d>h-1$ la restriction s'étend de manière unique en une application linéaire continue $\widetilde{\phi}_d : \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}\to V$ qui est tempérée d'ordre $\leq h$. L'unicité montre alors que l'extension $\widetilde{\phi}_d$ ne dépend pas du choix de $d>h-1$ et définit l'extension cherchée de ϕ à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$. □

Lemme A.2.2. — *La restriction :*

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}},V_{\mathrm{an}}\right)$$
$$\to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}},V_{\mathrm{an}}\right)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme la flèche (35) et son analogue en remplaçant « an » par « lp » sont des isomorphismes et comme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+$ engendre le groupe $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, il suffit de montrer que la restriction :

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}},V_{\mathrm{an}}\right)$$
$$\to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)}\left(\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}},V_{\mathrm{an}}\right) \tag{39}$$

est un isomorphisme. Compte tenu du lemme A.2.1, il suffit de montrer que si $\phi : \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}} \to V$ est une application continue dont la restriction ϕ^{lp} à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$ se factorise comme le composé d'une application continue $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}} \to V_{\mathrm{an}}$ avec l'injection naturelle $V_{\mathrm{an}} \to V$, alors ϕ admet aussi une factorisation analogue. Soit $r \geq r_0$, ϕ_r la restriction de ϕ à $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ et d un entier assez grand pour que $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}$ engendre $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ sous $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Comme $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}$ est de dimension finie, son image par ϕ^{lp} dans V_{an} est de dimension finie et tombe donc dans $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ pour un $s \geq r$. Comme ϕ^{lp} est $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant et $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ est stable par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$, on voit que l'image de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}$ tombe encore dans $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$. Considérons maintenant l'application continue :

$$\begin{aligned}\Phi : K_p(s)\times\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}} &\to V\\ (g,f) &\mapsto \phi_r(g\cdot f)-g\cdot\phi_r(f).\end{aligned}$$

Soit $f \in \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}$, alors l'application $g \mapsto \Phi(g,f)$ est (la restriction à $K_p(s)$ d') une fonction rigide analytique sur $\mathbb{K}_p(s)$ (car l'action de $K_p(s)$ sur f et $\phi_r(f)$ provient d'une action rigide analytique de $\mathbb{K}_p(s)$). De plus, toutes ses dérivées sont nulles car ϕ^{lp} est $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. On voit donc que Φ est nul sur $K_p(s)\times\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}$. Mais cet espace est dense dans $K_p(s)\times\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$, donc Φ est identiquement nul et l'application ϕ_r est $K_p(s)$-équivariante. Comme l'action de $K_p(s)$ sur $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ est $\mathbb{K}_p(s)$-rigide analytique, on voit que ϕ_r se factorise par une application continue $K_p(s)$-équivariante :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\right)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}} \to V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}},$$

et donc en particulier par une application continue $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\to V_{\mathrm{an}}.$$

Passant à la limite inductive sur $r\geq r_0$ et utilisant (36), on obtient le résultat. □

Lemme A.2.3. — *Soit* $f\in\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ *et* $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *tels que* $g\cdot f$ *est encore dans* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$, *alors pour tout élément* ϕ *de* $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}},V_{\mathrm{an}}\Big)$, *on a* $\phi(g\cdot f)=g\cdot\phi(f)$.

Démonstration. — Soit $\Omega\subset\mathbb{Q}_p$ le support de f. Il suffit de montrer que, pour tout $z\in\Omega$ et tout voisinage ouvert compact $\Omega_z\subset\Omega$ de z, on a :

$$\phi\big(g\cdot(f_{|\Omega_z})\big)\overset{?}{=}g\cdot\phi(f_{|\Omega_z}). \tag{40}$$

Fixons $z\in\Omega$ et $n\overset{\text{déf}}{=}\left(\begin{smallmatrix}1 & -z\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p)$ (donc z est le translaté par n du point $0\in\mathbb{Q}_p$, cf. (1)). Comme le support de $g\cdot f$ est contenu dans $\mathbb{Q}_p$ par hypothèse, l'image de z par g vit dans $\mathbb{Q}_p$ et donc ng^{-1} envoie $0\in\mathbb{Q}_p$ vers un point de $\mathbb{Q}_p$. On peut donc écrire :

$$ng^{-1}=\overline{n}^{-1}b^{-1}$$

pour un $\overline{n}\in\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p)$ et un $b\in\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$. Par l'invariance de ϕ sous $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, on obtient pour tout voisinage ouvert compact $\Omega_z\subset\Omega$ de z :

$$\begin{aligned}\phi\big(g\cdot(f_{|\Omega_z})\big) &= \phi\big(b\overline{n}n\cdot(f_{|\Omega_z})\big)=b\cdot\phi\big(\overline{n}n\cdot(f_{|\Omega_z})\big)\\ g\cdot\phi(f_{|\Omega_z}) &= b\overline{n}n\cdot\phi(f_{|\Omega_z})=b\overline{n}\cdot\phi\big(n\cdot(f_{|\Omega_z})\big).\end{aligned}$$

Quitte à remplacer f par $n\cdot f$ et z par 0, on est donc ramené à montrer que, pour $\overline{n}\in\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p)$ et Ω_0 un voisinage suffisamment petit de 0 dans Ω, on a :

$$\phi(\overline{n}\cdot f)\overset{?}{=}\overline{n}\cdot\phi(f). \tag{41}$$

Fixons r tel que f est analytique sur $D(0,r)$ et $s\geq r$ suffisamment grand pour avoir $\phi(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}))\subset V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ (un tel s existe car $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$ est un espace de Banach et V_{an} est réunion des Banach $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$, cf. [**6**, Prop.1 p.I.20] par exemple). Soit $t_0\geq 0$ tel que $\wp^{-t_0}\overline{n}\wp^{t_0}\in K_p(s)\cap\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p)$ (rappelons que $\wp=\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$), on a aussi pour tout $t\geq t_0$:

$$\wp^{-t}\overline{n}\wp^{t}\in K_p(s)\cap\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p) \tag{42}$$

et notons que $(\wp^{-t}\cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\in\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$ pour $t\geq 0$. Comme l'action de $K_p(s)$ sur $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$ et $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ provient d'une action rigide analytique de $\mathbb{K}_p(s)$ et comme ϕ est $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant, on obtient :

$$\phi(k\cdot f')=k\cdot\phi(f') \tag{43}$$

pour tout $k \in K_p(s)$ et $f' \in \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}_r$. Un calcul donne alors pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}\phi(\overline{n}\cdot f_{|p^{r+t}\mathbb{Z}_p}) &= \wp^t\wp^{-t}\cdot\phi\big(\overline{n}\wp^t\cdot(\wp^{-t}\cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big) = \wp^t\cdot\phi\big(\wp^{-t}\overline{n}\wp^t\cdot(\wp^{-t}\cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big)\\ &= \wp^t(\wp^{-t}\overline{n}\wp^t)\cdot\phi\big((\wp^{-t}\cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big) = \overline{n}\cdot\phi\big(\wp^t(\wp^{-t}\cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big)\\ &= \overline{n}\cdot\phi(f_{|p^{r+t}\mathbb{Z}_p})\end{aligned}$$

où les deuxième et quatrième égalités découlent de la $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariance de ϕ et la troisième de (43) et (42). On obtient bien (41) pour $\Omega_0 = p^{r'}\mathbb{Z}_p$ avec $r' \geq r+t$. □

Lemme A.2.4. — *La restriction :*

$$\begin{aligned}(44)\quad &\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\Big)\\ &\qquad\qquad\to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\Big)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ engendre $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'application (44) est injective. On doit montrer sa surjectivité. Munissons $L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ de sa topologie localement convexe la plus fine et considérons le produit tensoriel $L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]\otimes_L\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ muni de sa topologie produit tensoriel inductive (cet espace est isomorphe à une somme directe de copies de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ indexées par les éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et cette topologie n'est autre que la topologie somme directe). L'inclusion $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\hookrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ induit une application continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$(45)\qquad L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]\otimes_L\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\to\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}.$$

Si $w \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on a une immersion fermée :

$$\begin{aligned}(46)\quad &\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\oplus\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\\ &\qquad\qquad\hookrightarrow L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]\otimes_L\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\end{aligned}$$

définie par $(f_1, f_2)\mapsto 1\otimes f_1 + w\otimes f_2$. Comme $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p\cup w\mathbb{Q}_p$, le composé de (45) et (46) est une surjection continue. Comme son but et sa source sont de plus des espaces localement convexes de type compact, le théorème de l'image ouverte entraîne qu'il s'agit d'une surjection topologique. Il en est donc de même de (45). Puisque V_{an} est muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, toute application linéaire continue $\phi : \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\to V_{\mathrm{an}}$ induit une application continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\Phi : L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]\otimes_L\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\to V_{\mathrm{an}}.$$

Nous allons montrer que, si ϕ est de plus $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant, alors le noyau de Φ contient le noyau de (45). Comme (45) est une surjection topologique, cela montrera que Φ se factorise par une application continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\overline{\Phi}$: $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}} \to V_{\mathrm{an}}$ dont la restriction à $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ coïncide avec ϕ (et $\overline{\Phi}$ sera un antécédent de ϕ, d'où la surjectivité voulue). Soit donc $\phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\big)$ et $g_1\otimes f_1+\cdots+g_r\otimes f_r$ un élément dans le noyau de (45) où $g_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $f_i \in \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$. On a donc dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$:

$$\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot f_i = 0 \tag{47}$$

et on doit montrer que :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot \phi(f_i) \stackrel{?}{=} 0. \tag{48}$$

Il suffit de montrer que, si $z \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}_p)$ et Ω_z est un voisinage ouvert suffisamment petit de z dans $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot \phi(f_{i|\Omega_z g_i^{-1}}) \stackrel{?}{=} 0 \tag{49}$$

(on peut en effet écrire $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{j=1}^{s}\Omega_{z_j}$, $f_i = \sum_{j=1}^{s} f_{i|\Omega_{z_j}g_i^{-1}}$ et on a bien alors :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot\phi(f_i) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} g_i\cdot\phi(f_{i|\Omega_{z_j}g_i^{-1}}) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot\phi(f_{i|\Omega_{z_j}g_i^{-1}}) = 0).$$

Soit $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\frac{dz-b}{-cz+a} = 0$, quitte à remplacer $g_1\otimes f_1+\cdots+g_r\otimes f_r$ par $g_1g^{-1}\otimes f_1+\cdots+g_rg^{-1}\otimes f_r$, il suffit de traiter le cas $z=0$. Si 0 n'est pas dans le support de $g_i\cdot f_i$, alors on peut supposer de même pour Ω_0 (quitte à le rapetisser) et le i-ième terme dans (49) est déjà nul. On peut donc supposer que 0 est dans le support de chaque $g_i\cdot f_i$, que Ω_0 est à support dans $\mathbb{Q}_p$ et donc que chaque $g_i\cdot f_i$ est aussi à support dans $\mathbb{Q}_p$ (puisque l'on ne regarde que $f_{i|\Omega_0 g_i^{-1}}$). Le lemme A.2.3 entraîne alors avec (47) :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot\phi(f_{i|\Omega_0 g_i^{-1}}) = \sum_{i=1}^{r}\phi\big(g_i\cdot(f_{i|\Omega_0 g_i^{-1}})\big) = \sum_{i=1}^{r}\phi\big((g_i\cdot f_i)_{|\Omega_0}\big) = \phi\big((\sum_{i=1}^{r} g_i\cdot f_i)_{|\Omega_0}\big) = 0.$$

□

La proposition 2.1.4 découle des lemmes A.2.2 et A.2.4 et de l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V\big)$.

Remarque A.2.5. — La preuve précédente de la proposition 2.1.4 est la spécialisation au cas considéré des arguments de [**25**] et est assez analogue à la preuve de [**21**, Prop.2.5] : les lemmes A.2.1 et A.2.2 correspondent à [**21**, Lem.3.23] et les lemmes A.2.3 et A.2.4 à [**21**, Lem.3.1]. La différence clef est la suivante : dans le contexte de [**21**, Prop.2.5], on suppose que $\chi_1 \otimes \chi_2$ est de poids classique k et de pente non critique (i.e. $|\chi_1(p)| > |p^{k-2}|$), et aussi que V est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire. Cela permet de se restreindre à $d = k-2$ dans la preuve du lemme A.2.1. De plus, l'espace $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-invariant (pas seulement $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$-invariant). Cela permet d'énoncer et de démontrer un résultat qui évite de considérer les vecteurs localement analytiques dans V et l'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\right)^{\mathrm{an}}$.

Références

[1] Y. Amice & J. Vélu – Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, *Astérisque* **24-25** (1975), p. 119–131.

[2] F. Baldassarri & B. Chiarellotto – Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients, in *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991)*, Perspect. Math., vol. 15, Academic Press, 1994, p. 11–50.

[3] L. Berger & C. Breuil – Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 155–211.

[4] ———, Towards a p-adic langlands programme, cours au C.M.S. de Hangzhou (2004) `http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html`.

[5] P. Berthelot – Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie, `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/`.

[6] N. Bourbaki – *Topological vector spaces. Chapters 1–5*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer, 1987.

[7] C. Breuil – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[8] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[9] ———, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[10] K. Buzzard & F. Calegari – Slopes of overconvergent 2-adic modular forms, *Compos. Math.* **141** (2005), p. 591–604.

[11] K. Buzzard & R. Taylor – Companion forms and weight one forms, *Ann. of Math.* **149** (1999), p. 905–919.

[12] R. F. Coleman – A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[13] ———, Classical and overconvergent modular forms, *Invent. Math.* **124** (1996), p. 215–241.

[14] ———, Classical and overconvergent modular forms of higher level, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **9** (1997), p. 395–403.

[15] ———, p-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[16] R. F. Coleman & A. Iovita – Hidden structures on semi-stable curves, ce volume.

[17] R. F. Coleman & B. Mazur – The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[18] P. Colmez – Une correspondance de Langlands p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication, 2004.

[19] ———, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[20] P. Deligne – Formes modulaires et représentations de GL(2), in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 55–105. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[21] M. Emerton – p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, *Duke Math. J.* **130** (2005), p. 353–392.

[22] ———, Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 775–839.

[23] ———, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), p. 279–393.

[24] ———, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, *Invent. Math.* **164** (2006), p. 1–84.

[25] ———, Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction, à paraître dans *J. Institut Math. Jussieu*.

[26] ———, Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups, à paraître dans *Memoirs of the AMS*.

[27] G. Faltings – Crystalline cohomology of semistable curve—the $\mathbf{Q}_p$-theory, *J. Algebraic Geom.* **6** (1997), p. 1–18.

[28] ———, Almost étale extensions, *Astérisque* **279** (2002), p. 185–270.

[29] G. Faltings & B. W. Jordan – Crystalline cohomology and GL(2, $\mathbf{Q}$), *Israel J. Math.* **90** (1995), p. 1–66.

[30] E. Ghate – Ordinary forms and their local Galois representations, à paraître dans les *Actes de la conférence à Hyderabad 2003*.

[31] E. Ghate & A. Mézard – Filtered modules attached to modular forms, prépublication, 2006.

[32] F. Q. Gouvêa – *Arithmetic of p-adic modular forms*, Lecture Notes in Math., vol. 1304, Springer, 1988.

[33] B. H. Gross – A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod p), *Duke Math. J.* **61** (1990), p. 445–517.

[34] H. Hida – Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), p. 545–613.

[35] N. M. Katz – p-adic properties of modular schemes and modular forms, in *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350.

[36] N. M. Katz & B. Mazur – *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies, vol. 108, Princeton Univ. Press, 1985.

[37] M. Kurihara – A tameness criterion, in *Volume à la mémoire d'O. Hyodo*, université de Tokyo, 1993, p. 27–36.

[38] B. Mazur – Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ. Math. I.H.É.S.* **47** (1977), p. 33–186.

[39] K. A. Ribet – Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus, in *Modular functions of one variable, V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, Springer, 1977, p. 17–51. Lecture Notes in Math., Vol. 601.

[40] T. Saito – Modular forms and p-adic Hodge theory, *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.

[41] W. H. Schikhof – *Non-Archimedean calculus*, Lecture notes, vol. 7812, Katholieke Universiteit Mathematisch Instituut, 1978.

[42] ———, *Ultrametric calculus*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 4, Cambridge Univ. Press, 1984.

[43] P. Schneider & J. Teitelbaum – Banach space representations and Iwasawa theory, *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[44] ———, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[45] ———, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[46] J-P. Serre – Quelques applications du théorème de Čebotarev, *Publ. Math. I.H.É.S.* (1981), p. 123–201.

[47] M. Vishik – Nonarchimedean measures connected with Dirichlet series, *Math. USSR Sb.* **28** (1976), p. 216–228.

C. Breuil, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* breuil@ihes.fr

M. Emerton, Mathematics Department, Northwestern University, 2033 Sheridan Road, Evanston, IL 60208, U.S.A. • *E-mail :* emerton@math.northwestern.edu

Astérisque
331, 2010, p. 317–353

EXTENSIONS FOR SUPERSINGULAR REPRESENTATIONS OF $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

by

Vytautas Paškūnas

Abstract. — Let $p > 2$ be a prime number. Let $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and π, τ smooth irreducible representations of G on $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector spaces with a central character. We show if π is supersingular then $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi) \neq 0$ implies $\tau \cong \pi$ and compute the dimension of $\mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi)$. This answers affirmatively for $p > 2$ a question of Colmez. We also determine $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)$, when π is the Steinberg representation. As a consequence of our results combined with those already in the literature one knows the extensions between all the irreducible representations of G.

***Résumé* (Extensions aux représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$).** — Soit $p > 2$ un nombre premier. Soient $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et π, τ des représentations lisses irréductibles de G sur des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels avec caractère central. Nous montrons que si π est supersingulière alors $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi) \neq 0$ implique $\tau \cong \pi$ et nous calculons la dimension de $\mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi)$. Cela répond par l'affirmative pour $p > 2$ à une question de Colmez. Nous déterminons aussi $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)$, quand π est la représentation de Steinberg. En conséquence de nos résultats, combinés avec ceux de la litérature, nous connaissons maintenant les extensions entre toutes les représentations irréductibles de G.

1. Introduction

In this paper we study the category Rep_G of smooth representations of $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ on $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector spaces. Smooth irreducible $\overline{\mathbb{F}}_p$-representations of G with a central character have been classified by Barthel-Livne [**1**] and Breuil [**4**]. A smooth irreducible representation π of G is supersingular, if it is not a subquotient of any principal series representation. Roughly speaking a supersingular representation is an $\overline{\mathbb{F}}_p$-analog of a supercuspidal representation.

Theorem 1.1. — *Assume that $p > 2$ and let τ and π be irreducible smooth representations of G admitting a central character. If π is supersingular and $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi) \neq 0$ then $\tau \cong \pi$. Moreover, if $p \geq 5$ then $\dim \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) = 5$.*

2010 Mathematics Subject Classification. — 22E50, 11F70.
Key words and phrases. — Supersingular, mod p Langlands correspondence.

© Astérisque 331, SMF 2010

This answers affirmatively for $p > 2$ a question of Colmez, see the introduction of [**7**]. When $p = 3$ there are two cases and we can show that in one of them $\dim \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) = 5$, in the other $\dim \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) \leq 6$, which is the expected dimension. We note that if τ is a twist of Steinberg representation by a character or irreducible principal series then Colmez [**7**, VII.5.3] and Emerton [**8**, Prop. 4.3.14] prove by different methods that $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi) = 0$. Our result is new when τ is supersingular or a character.

We now explain the strategy of the proof. We first get rid of the extensions coming from the centre Z of G. Let $\zeta : Z \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be the central character of π, and let $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ be the full subcategory of Rep_G consisting of representations with the central character ζ. We show in Theorem 8.1 that if $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi) \neq 0$ then τ also admits a central character ζ. Let $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$ parameterise all the isomorphism classes of extensions between π and τ admitting a central character ζ. We show that if $\tau \ncong \pi$ then $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi) \cong \mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)$ and there exists an exact sequence:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) \to \mathrm{Hom}(Z,\overline{\mathbb{F}}_p) \to 0, \tag{1}$$

where Hom denotes continuous group homomorphisms. Let I be the 'standard' Iwahori subgroup of G, (see §2), and I_1 the maximal pro-p subgroup of I. Since ζ is smooth, it is trivial on the pro-p subgroup $I_1 \cap Z$, hence we may consider ζ as a character of ZI_1. Let $\mathscr{H} := \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_{ZI_1}^G \zeta)$ be the Hecke algebra, and $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$ the category of right $\mathscr{H}$-modules. Let $\mathscr{I} : \mathrm{Rep}_{G,\zeta} \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$ be the functor

$$\mathscr{I}(\kappa) := \kappa^{I_1} \cong \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{ZI_1}^G \zeta, \kappa).$$

Vignéras shows in [**18**] that $\mathscr{I}$ induces a bijection between irreducible representations of G with the central character ζ and irreducible $\mathscr{H}$-modules. Using results of Ollivier [**13**] we show that there exists an E_2-spectral sequence:

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^j\,\mathscr{I}(\pi)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{G,\zeta}(\tau,\pi). \tag{2}$$

The 5-term sequence associated to (2) gives an exact sequence:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathscr{I}(\pi)) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^1\,\mathscr{I}(\pi)). \tag{3}$$

Now $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathscr{I}(\pi))$ has been determined in [**6**] and in fact is zero if $\tau \ncong \pi$. The problem is to understand $\mathbb{R}^1\,\mathscr{I}(\pi)$ as an $\mathscr{H}$-module.

We have two approaches to this. Results of Kisin [**10**] imply that the dimension of $\mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi)$ is bounded below by the dimension of $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\rho,\rho)$, where ρ is the 2-dimensional irreducible $\overline{\mathbb{F}}_p$-representation of $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$, corresponding to π under the mod p Langlands, see [**5**], [**7**]. (Excluding one case when $p = 3$.) Let $\mathfrak{I}$ be the image of $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi), \mathbb{R}^1\,\mathscr{I}(\pi))$. Using (1) and (3) we obtain a lower bound on the dimension of $\mathfrak{I}$. By forgetting the $\mathscr{H}$-module structure we obtain an isomorphism of vector spaces:

$$\mathbb{R}^1\,\mathscr{I}(\pi) \cong H^1(I_1/Z_1, \pi),$$

where Z_1 is the maximal pro-p subgroup of Z. The key idea is to bound the dimension of $H^1(I_1/Z_1, \pi)$ from above and use this to show if $\mathscr{I}(\tau)$ was a submodule of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$ for some $\tau \not\cong \pi$ then this would force the dimension of $\mathfrak{I}$ to be smaller than calculated before.

At the time of writing (an n-th draft of) this, [**10**] was not written up and there were some technical issues with the outline of the argument in the introductions of [**7**] and [**9**], caused by the fact that all the representations in [**7**] are assumed to have a central character. Since we only need a lower bound on the dimension of $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)$ and only in the supersingular case, we have written up the proof of a weaker statement in the appendix. The proof given there is a variation on Colmez-Kisin argument.

In order to bound the dimension of $H^1(I_1/Z_1, \pi)$ we prove a new result about the structure of supersingular representations of G. Let M be the subspace of π generated by π^{I_1} and the semi-group $\left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. One may show that M is a representation of I.

Theorem 1.2. — *The map $(v, w) \mapsto v - w$ induces an exact sequence of I-representations:*

$$0 \to \pi^{I_1} \to M \oplus \Pi\,.\,M \to \pi \to 0,$$

where $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.

We show that the restrictions of M and M/π^{I_1} to $I \cap U$, where U is the unipotent upper triangular matrices, are injective objects in $\mathrm{Rep}_{I\cap U}$. If $\psi : I \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ is a smooth character and $p > 2$, using this, we work out $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi, M)$ and $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi, M/\pi^{I_1})$. Theorem 1.2 enables us to determine $H^1(I_1/Z_1, \pi)$ as a representation of I, see Theorem 7.9 and Corollary 7.10. Once one has this it is quite easy to work out $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$ as an $\mathscr{H}$-module in the regular case, see Proposition 10.5, without using Colmez's work. It is also possible to work out directly the $\mathscr{H}$-module structure of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$ in the Iwahori case. However, the proof relies on heavy calculations of $\mathrm{Ext}^1_K(\mathbf{1}, \pi)$ and $\mathrm{Ext}^1_K(St, \pi)$, where $K := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ and St is the Steinberg representation of $K/K_1 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. So we decided to exclude it and use "stratégie de Kisin" instead.

The primes $p = 2$, $p = 3$ require some special attention. Theorem 1.2 holds when $p = 2$, but our calculation of $H^1(I_1/Z_1, \pi)$ breaks down for the technical reason that the trivial character is the only smooth character of I, when $p = 2$. However, if $p = 2$ and we fix a central character ζ then there exists only one supersingular representation (up to isomorphism) with central character ζ. Hence, it is enough to show that $\mathrm{Ext}^1_G(\tau, \pi) = 0$ when τ is a character, since all the other cases are handled in [**7**, VII.5.3], [**8**, §4]. It might be easier to do this directly.

Let Sp be the Steinberg representation of G. After the first draft of this paper, it was pointed out to me by Emerton that it was not known (although expected) that $\mathrm{Ext}^1_G(\eta, \mathrm{Sp}) = 0$, when $\eta : G \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ is a smooth character of order 2 (all the other cases have been worked out in [**8**, §4], see also [**7**, §VII.4,§VII.5]). A slight modification of our proof for supersingular representations also works for the Steinberg representation. In

the last section we work out $\mathrm{Ext}^1_G(\tau, \mathrm{Sp})$ for all irreducible τ, when $p > 2$. As a result of this and the results already in the literature ([**6**], [**7**], [**8**]), one knows $\mathrm{Ext}^1_G(\tau, \pi)$ for all irreducible τ and π, when $p > 2$. We record this in the last section.

Acknowledgements. — The key ideas of this paper stem from a joint work with Christophe Breuil [**6**]. I would like to thank Pierre Colmez for pointing out this problem to me and Florian Herzig for a number of stimulating discussions. I would like to thank Gaëtan Chenevier, Pierre Colmez and Mark Kisin for some very helpful discussion on the "stratégie de Kisin" outlined in [**7**] and [**9**]. This paper was written when I was visiting Université Paris-Sud and IHÉS, supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft. I would like to thank these institutions.

2. Notation

Let $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, let P be the subgroup of upper-triangular matrices, T the subgroup of diagonal matrices, U be the unipotent upper triangular matrices and $K := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Let $\mathfrak{p} := p\mathbb{Z}_p$ and

$$I := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ \mathfrak{p} & \mathbb{Z}_p^\times \end{pmatrix}, \quad I_1 := \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathbb{Z}_p \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}, \quad K_1 := \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix}.$$

For $\lambda \in \mathbb{F}_p$ we denote the Teichmüller lift of λ to $\mathbb{Z}_p$ by $[\lambda]$. Set

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{F}_p^\times \right\}.$$

Let $\alpha : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be the character

$$\alpha(\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{pmatrix}) := \lambda\mu^{-1}.$$

Further, define

$$\Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}, \quad s := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ we define an unramified character $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, by $x \mapsto \lambda^{\mathrm{val}(x)}$.

Let Z be the centre of G, and set $Z_1 := Z \cap I_1$. Let $G^0 := \{g \in G : \det g \in \mathbb{Z}_p^\times\}$ and set $G^+ := ZG^0$.

Let $\mathscr{G}$ be a topological group. We denote by $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \overline{\mathbb{F}}_p)$ the continuous group homomorphism, where the additive group $\overline{\mathbb{F}}_p$ is given the discrete topology. If $|||$ is a representation of $\mathscr{G}$ and S is a subset of $|||$ we denote by $\langle \mathscr{G}.S \rangle$ the smallest subspace of $|||$ stable under the action of $\mathscr{G}$ and containing S. Let $\mathrm{Rep}_{\mathscr{G}}$ be the category of smooth representations of $\mathscr{G}$ on $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector spaces. If $\mathscr{Z}$ is the centre of $\mathscr{G}$ and $\zeta : \mathscr{Z} \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ is a smooth character then we denote by $\mathrm{Rep}_{\mathscr{G},\zeta}$ the full subcategory of $\mathrm{Rep}_{\mathscr{G}}$ consisting of representations with central character ζ.

All the representations in this paper are on $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector spaces.

3. Irreducible representations of K

We recall some facts about the irreducible representations of K and introduce some notation. Let σ be an irreducible smooth representation of K. Since K_1 is an open pro-p subgroup of K, the space of K_1-invariants σ^{K_1} is non-zero, and since K_1 is normal in K, σ^{K_1} is a non-zero K-subrepresentation of σ, and since σ is irreducible we obtain $\sigma^{K_1} = \sigma$. Hence the smooth irreducible representations of K coincide with the irreducible representations of $K/K_1 \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, and so there exists a uniquely determined pair of integers (r, a) with $0 \leq r \leq p-1$, $0 \leq a < p-1$, such that

$$\sigma \cong \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det{}^a .$$

Note that $r = \dim \sigma - 1$ and throughout the paper given σ, r will always mean $\dim \sigma - 1$. The space of I_1-invariants σ^{I_1} is 1-dimensional and so H acts on σ^{I_1} by a character $\chi_\sigma = \chi$. Explicitly,

$$\chi(\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{pmatrix}) = \lambda^r (\lambda\mu)^a.$$

We define an involution $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ on the set of isomorphism classes of smooth irreducible representations of K by setting

$$\tilde{\sigma} := \mathrm{Sym}^{p-r-1} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det{}^{r+a} .$$

Note that $\chi_{\tilde{\sigma}} = \chi_\sigma^s$. For the computational purposes it is convenient to identify $\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ with the space of homogeneous polynomials in $\overline{\mathbb{F}}_p[x, y]$ of degree r. The action of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ is given by

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . P(x, y) := P(ax + cy, bx + dy).$$

With this identification σ^{I_1} is spanned by x^r.

Lemma 3.1. — *Let $0 \leq j \leq r$ be an integer and define $f_j \in \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det{}^a$ by*

$$f_j := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{p-1-j} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s x^r.$$

If $r = p-1$ and $j = 0$ then $f_0 = (-1)^{a+1}(x^r + y^r)$, otherwise $f_j = (-1)^{a+1}\binom{r}{j} x^j y^{r-j}$.

Proof. — It is enough to prove the statement when $a = 0$, since twisting the action by $\det^a$ multiplies f_j by $(\det s)^a = (-1)^a$. We have

$$f_j = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{p-1-j} (\lambda x + y)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \Big(\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^{p-1+i-j} \Big) x^i y^{r-i}. \tag{4}$$

If $a \geq 0$ is an integer then $\Lambda_a := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \lambda^a$ is zero, unless $a > 0$ and $p-1$ divides a, in which case $\Lambda_a = -1$. Note that $0^0 = 1$. If $a = p-1+i-j$ then $\Lambda_a \neq 0$ if and only if $i = j$ or $i - j = p-1$, which is equivalent to $r = i = p-1$ and $j = 0$. This implies the assertion. □

Let $\overline{\mathbb{F}}_p[[I \cap U]]$ denote the completed group algebra of $I \cap U$. Since $I \cap U \cong \mathbb{Z}_p$ mapping X to $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$ induces an isomorphism between the ring of formal power series in one variable $\overline{\mathbb{F}}_p[[X]]$ and $\overline{\mathbb{F}}_p[[I \cap U]]$. Every smooth representation τ of $I \cap U$ is naturally a module over $\overline{\mathbb{F}}_p[[I \cap U]]$, and we will also view τ as a module over $\overline{\mathbb{F}}_p[[X]]$ via the above isomorphism.

Lemma 3.2. — *Let* $x^r \in \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^a$ *then* $X^r s x^r = (-1)^a r! x^r$.

Proof. — We have $s x^r = (-1)^a y^r$. If $0 \leq i \leq r$ then $X \cdot x^{r-i} y^i = x^{r-i}(y+1)^i - x^{r-i} y^i = i x^{r-i+1} y^{i-1} + Q$, where Q is a homogeneous polynomial of degree r, such that the degree of Q in y is less than $i-1$. Applying this observation r times we obtain that $X^r \cdot y^r = r! x^r$. □

4. Irreducible representations of G

We recall some facts about the irreducible representations of G. We fix an integer r with $0 \leq r \leq p-1$. We consider $\operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ as a representation of KZ by making p act trivially. It is shown in [**1**, Prop. 8] that there exists an isomorphism of algebras:

$$\operatorname{End}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2) \cong \overline{\mathbb{F}}_p[T]$$

for a certain $T \in \operatorname{End}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2)$ defined in [**1**, §3]. One may describe T as follows. Let $\varphi \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ be such that $\operatorname{Supp} \varphi = ZK$ and $\varphi(1) = x^r$. Since φ generates $\text{c-Ind}_{KZ}^G \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2$ as a G-representation T is determined by $T\varphi$.

Lemma 4.1. — (i) *If* $r = 0$ *then*

$$T\varphi = \Pi\varphi + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t\varphi.$$

(ii) *Otherwise,*

$$T\varphi = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t\varphi.$$

Proof. — In the notation of [**1**] this is a calculation of $T([1, e_{\vec{0}}])$. The claim follows from the formula (19) in the proof of [**1**] Theorem 19. □

It follows from [**1**, Thm. 19] that the map $T - \lambda$ is injective, for all $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$.

Definition 4.2. — *Let $\pi(r,\lambda)$ be a representation of G defined by the exact sequence:*

$$0 \longrightarrow \text{c-Ind}_{ZK}^{G} \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \xrightarrow{T-\lambda} \text{c-Ind}_{ZK}^{G} \operatorname{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \longrightarrow \pi(r,\lambda) \longrightarrow 0.$$

If $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ is a smooth character then set $\pi(r,\lambda,\eta) := \pi(r,\lambda) \otimes \eta \circ \det$.

It follows from [**1**, Thm. 30] and [**4**, Thm. 1.1] that $\pi(r,\lambda)$ is irreducible unless $(r,\lambda) = (0,\pm 1)$ or $(r,\lambda) = (p-1,\pm 1)$. Moreover, one has non-split exact sequences:

$$0 \to \mu_{\pm 1} \circ \det \to \pi(p-1,\pm 1) \to \mathrm{Sp} \otimes \mu_{\pm 1} \circ \det \to 0, \tag{5}$$

$$0 \to \mathrm{Sp} \otimes \mu_{\pm 1} \circ \det \to \pi(0,\pm 1) \to \mu_{\pm 1} \circ \det \to 0, \tag{6}$$

where Sp is the Steinberg representation of G, (we take (5) as definition) and if $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ then $\mu_\lambda : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, $x \mapsto \lambda^{\mathrm{val}(x)}$. Further, if $\lambda \neq 0$ and $(r,\lambda) \neq (0,\pm 1)$ then [**1**, Thm. 30] asserts that

$$\pi(r,\lambda) \cong \operatorname{Ind}_P^G \mu_{\lambda^{-1}} \otimes \mu_\lambda \omega^r. \tag{7}$$

It follows from [**1**, Thm. 33] and [**4**, Thm. 1.1] that the irreducible smooth representations of G with the central character fall into 4 disjoint classes:

(i) characters, $\eta \circ \det$;
(ii) special series, $\mathrm{Sp} \otimes \eta \circ \det$;
(iii) (irreducible) principal series $\pi(r,\lambda,\eta)$, $0 < r \leq p-1$, $\lambda \neq 0$, $(r,\lambda) \neq (p-1,\pm 1)$;
(iv) supersingular $\pi(r,0,\eta)$, $0 \leq r \leq p-1$.

4.1. Supersingular representations. — We discuss the supersingular representations. Breuil has shown [**4**, Thm. 1.1] that the representations $\pi(r,0,\eta)$ are irreducible and using the results [**1**] classified smooth irreducible representations of G with a central character.

Definition 4.3. — *An irreducible representation π with a central character is supersingular if $\pi \cong \pi(r,0,\eta)$ for some $0 \leq r \leq p-1$ and a smooth character η.*

All the isomorphism between supersingular representations corresponding to different r and η are given by

$$\pi(r,0,\eta) \cong \pi(r,0,\eta\mu_{-1}) \cong \pi(p-1-r,0,\eta\omega^r) \cong \pi(p-1-r,0,\eta\omega^r\mu_{-1}) \tag{8}$$

see [**4**, Thm. 1.3]. It follows from [**1**, Cor.36] that an irreducible smooth representation of G with a central character is supersingular if and only if it is not a subquotient of any principal series representation.

We fix a supersingular representation π of G and we are interested in $\operatorname{Ext}^1_G(\tau,\pi)$, where τ is an irreducible smooth representation of G. If $\eta : G \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ is a smooth character, then twisting by η induces an isomorphism

$$\operatorname{Ext}^1_G(\tau,\pi) \cong \operatorname{Ext}^1_G(\tau \otimes \eta, \pi \otimes \eta).$$

Hence, we may assume that $p \in Z$ acts trivially on π, so that $\pi \cong \pi(r,0,\omega^a)$, for some $0 \leq r \leq p-1$, and $0 \leq a < p-1$. It follows from [**4**, Thm. 3.2.4, Cor. 4.1.4]

that π^{I_1} is 2-dimensional. Moreover, [**4**, Cor. 4.1.5] implies that there exists a basis $\{v_\sigma, v_{\tilde\sigma}\}$ of π^{I_1}, such that $\Pi v_\sigma = v_{\tilde\sigma}$, $\Pi v_{\tilde\sigma} = v_\sigma$ and there exists an isomorphism of K-representations:

$$\langle K \centerdot v_\sigma\rangle \cong \sigma, \quad \langle K \centerdot v_{\tilde\sigma}\rangle \cong \tilde\sigma,$$

where $\sigma := \mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^a$. The group H acts on v_σ by a character χ and on $v_{\tilde\sigma}$ by a character χ^s. Explicitly,

$$\chi(\begin{pmatrix}[\lambda] & 0\\ 0 & [\mu]\end{pmatrix}) = \lambda^r(\lambda\mu)^a, \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{F}_p^\times. \tag{9}$$

Lemma 4.4. — *The following relations hold:*

$$v_\sigma = (-1)^{a+1} \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p} \lambda^{p-1-r} \begin{pmatrix}1 & [\lambda]\\ 0 & 1\end{pmatrix} t v_{\tilde\sigma}; \tag{10}$$

$$v_{\tilde\sigma} = (-1)^{r+a+1} \sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p} \lambda^{r} \begin{pmatrix}1 & [\lambda]\\ 0 & 1\end{pmatrix} t v_{\sigma}; \tag{11}$$

$$X^r t v_{\tilde\sigma} = (-1)^a r! v_\sigma, \quad X^{p-1-r} t v_\sigma = (-1)^{r+a}(p-1-r)! v_{\tilde\sigma}. \tag{12}$$

Proof. — Since $tv_{\tilde\sigma} = s\Pi v_{\tilde\sigma} = sv_\sigma$ this is a calculation in $\mathrm{Sym}^r \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes \det^a$, which is done in Lemmas 3.1 and 3.2. □

Definition 4.5. — $M := \left\langle \begin{pmatrix} p^{\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pi^{I_1}\right\rangle$, $M_\sigma := \left\langle \begin{pmatrix} p^{2\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix} v_\sigma\right\rangle$ *and* $M_{\tilde\sigma} := \left\langle \begin{pmatrix} p^{2\mathbb{N}} & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix} v_{\tilde\sigma}\right\rangle$.

Lemma 4.6. — *The subspaces M, M_σ, $M_{\tilde\sigma}$ are stable under the action of I.*

Proof. — We prove the statement for M, the rest is identical. By definition M is stable under $I\cap U$. Since $I = (I\cap P^s)(I\cap U)$ it is enough to show that M is stable under $I\cap P^s$. Suppose that $g_1 \in I\cap P^s$, $g_2 \in I\cap U$. Since $I = (I\cap U)(I\cap P^s)$ there exists $h_2 \in I\cap U$ and $h_1 \in I\cap P^s$ such that $g_1g_2 = h_2h_1$. Moreover, for $n \geq 0$ we have $t^{-n}(I\cap P^s)t^n \subset I$. Hence, if $v \in \pi^{I_1}$ then $(t^{-n}h_1t^n)v \in \pi^{I_1}$ and so

$$g_1(g_2t^nv) = h_2h_1t^nv = h_2t^n(t^{-n}h_1t^n)v \in M, \quad \forall v \in \pi^{I_1}.$$

This implies that M is stable under $I\cap P^s$. □

The isomorphism $\pi(r,0,\omega^a) \cong \pi(p-r-1,0,\omega^{r+a})$ allows to exploit the symmetry between M_σ and $M_{\tilde\sigma}$. In particular, if we prove a statement about M_σ which holds for all σ, then it also holds for $M_{\tilde\sigma}$ (with σ replaced by $\tilde\sigma$).

Proposition 4.7. — *The triples $\chi \hookrightarrow M_\sigma$ and $\chi^s \hookrightarrow M_{\tilde\sigma}$ are injective envelopes of χ and χ^s in* $\mathrm{Rep}_{H(I_1\cap U)}$. *In particular, $M_\sigma^{I_1\cap U} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma$ and $M_{\tilde\sigma}^{I_1\cap U} = \overline{\mathbb{F}}_p v_{\tilde\sigma}$.*

Proof. — We will show the claim for M_σ. The relations (12) imply that

$$v_\sigma = (-1)^r r!(p-1-r)!X^{r+p(p-1-r)}t^2 v_\sigma.$$

For $n \geq 0$ define $\lambda_n := ((-1)^r r!(p-1-r)!)^n$, $e_0 := 0$ and $e_n := r+p(p-1-r)+p^2 e_{n-1}$. Further define $M_{\sigma,n} := \langle (I_1 \cap U)t^{2n}v_\sigma \rangle$. Since $t^{2n}v_\sigma = \lambda_1 X^{p^{2n}e_1}t^{2(n+1)}v_\sigma$, $M_{\sigma,n}$ is contained in $M_{\sigma,n+1}$ and hence

$$M_\sigma = \varinjlim_n M_{\sigma,n}.$$

Since $v_\sigma = \lambda_n X^{e_n}t^{2n}v_\sigma$ and $Xv_\sigma = 0$ we obtain an isomorphism $M_{\sigma,n} \cong \overline{\mathbb{F}}_p[X]/(X^{e_n+1})$. In particular, for all $n \geq 0$ we have $M_{\sigma,n}^{I_1 \cap U} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma$, and so $M_\sigma^{I_1 \cap U} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma$. Given $m \geq 0$, set $\mathscr{U}_m := \left(\begin{smallmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, choose n such that $e_n > p^m$ and define $M'_{\sigma,m} := \langle (I_1 \cap U) \centerdot X^{e_n+1-p^m}t^{2n}v_\sigma \rangle$. Then $M'_{\sigma,m} \cong \overline{\mathbb{F}}_p[X]/(X^{p^m}) \cong M_\sigma^{\mathscr{U}_m}$ is an injective envelope of χ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1 \cap U)/\mathscr{U}_m}$. Since $M_\sigma = \varinjlim M'_{\sigma,m}$ we obtain that M_σ is an injective envelope of χ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1 \cap U)}$. □

Lemma 4.8. — *Let $n \geq 0$ be an odd integer then $t^n v_\sigma \in M_{\tilde{\sigma}}$ and $t^n v_{\tilde{\sigma}} \in M_\sigma$. Hence, $tM_\sigma \subset M_{\tilde{\sigma}}$ and $tM_{\tilde{\sigma}} \subset M_\sigma$.*

Proof. — It follows from the definition that $t^2 M_{\tilde{\sigma}} \subset M_{\tilde{\sigma}}$. Hence, it is enough to consider $n = 1$. Applying t to (12) we obtain $tv_\sigma = (-1)^a (r!)^{-1} X^{pr} t^2 v_{\tilde{\sigma}} \in M_{\tilde{\sigma}}$. If $k, m \geq 0$ are integers and m even then we have $t(X^k t^m v_\sigma) = X^{pk} t^m (tv_\sigma)$ and since $tv_\sigma \in M_{\tilde{\sigma}}$ and m is even we obtain $t(X^k t^m v_\sigma) \in M_{\tilde{\sigma}}$. The set $\{X^k t^m v_\sigma : k, m \geq 0, 2 \mid m\}$ spans M_σ as an $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector space. Hence, $tM_\sigma \subset M_{\tilde{\sigma}}$. The rest follows by symmetry. □

Lemma 4.9. — *We have $sv_\sigma \in M_\sigma$ and $sv_{\tilde{\sigma}} \in M_{\tilde{\sigma}}$.*

Proof. — Since $sv_\sigma = s\Pi v_{\tilde{\sigma}} = tv_{\tilde{\sigma}}$ this follows from Lemma 4.8. □

Lemma 4.10. — *M is the direct sum of its I-submodules M_σ and $M_{\tilde{\sigma}}$.*

Proof. — Proposition 4.7 implies that $(M_\sigma \cap M_{\tilde{\sigma}})^{I_1} = M_\sigma^{I_1} \cap M_{\tilde{\sigma}}^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma \cap \overline{\mathbb{F}}_p v_{\tilde{\sigma}} = 0$. Hence $M_\sigma \cap M_{\tilde{\sigma}} = 0$ and so it is enough to show that $M = M_\sigma + M_{\tilde{\sigma}}$. Clearly, $M_\sigma \subset M$ and $M_{\tilde{\sigma}} \subset M$. Lemma 4.8 implies $M \subseteq M_\sigma + M_{\tilde{\sigma}}$. □

Definition 4.11. — *We set $\pi_\sigma := M_\sigma + \Pi \centerdot M_{\tilde{\sigma}}$ and $\pi_{\tilde{\sigma}} := M_{\tilde{\sigma}} + \Pi \centerdot M_\sigma$.*

Proposition 4.12. — *The subspaces π_σ and $\pi_{\tilde{\sigma}}$ are stable under the action of G^+.*

Proof. — We claim that $s\pi_\sigma \subseteq \pi_\sigma$. Now $s(\Pi M_{\tilde{\sigma}}) = tM_{\tilde{\sigma}} \subset M_\sigma$ by Lemma 4.8. It is enough to show that $sM_\sigma \subset \pi_\sigma$. By definition of M_σ it is enough to show that $s(ut^n v_\sigma) \in \pi_\sigma$ for all $u \in I_1 \cap U$ and all even non-negative integers n. Lemma 4.9 gives $sv_\sigma \in M_\sigma$ and if $n \geq 2$ is an even integer then $st^n v_\sigma = \Pi t^{n-1} v_\sigma \in \Pi M_{\tilde{\sigma}}$ by Lemma 4.8. Since $s(K_1 \cap U)s = I_1 \cap U^s$ for all $u \in K_1 \cap U$, and $n \geq 0$ even, we get that $sut^n v_\sigma \in \pi_\sigma$. If $u \in (I_1 \cap U) \setminus (K_1 \cap U)$ and $n > 0$ even, then the matrix identity:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta^{-1} & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^{-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

implies that $sut^n v_\sigma \in M_\sigma$. This settles the claim. By symmetry $\pi_{\tilde\sigma}$ is also stable under s, and since $\pi_\sigma = \Pi\pi_{\tilde\sigma}$, we obtain that π_σ is stable under $\Pi s\Pi^{-1}$. Lemma 4.6 implies that π_σ is stable under I. Since s, $\Pi s\Pi^{-1}$ and I generate G^0, we get that π_σ is stable under G^0. Since Z acts by a central character, π_σ is stable under $G^+ = ZG^0$. The result for $\pi_{\tilde\sigma}$ follows by symmetry. □

5. Extensions

In this section we compute extensions of characters for different subgroups of I.

Definition 5.1. — *Define functions κ^u, ε, $\kappa^l : I_1 \to \overline{\mathbb{F}}_p$ as follows, for $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I_1$ we set*

$$\kappa^u(A) = \omega(b), \quad \varepsilon(A) = \omega(p^{-1}(a-d)), \quad \kappa^l(A) = \omega(p^{-1}c),$$

where $\omega : \mathbb{Z}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$ is the reduction map composed with the canonical embedding.

Proposition 5.2. — *If $p \neq 2$ then $\mathrm{Hom}(I_1/Z_1, \overline{\mathbb{F}}_p) = \langle \kappa^u, \kappa^l \rangle$. If $p = 2$ then $\dim \mathrm{Hom}(I_1/Z_1, \overline{\mathbb{F}}_p) = 4$.*

Proof. — Let $\psi : I_1/Z_1 \to \overline{\mathbb{F}}_p$ be a continuous group homomorphism. Since $I_1 \cap U \cong I_1 \cap U^s \cong \mathbb{Z}_p$ there exist $\lambda, \mu \in \overline{\mathbb{F}}_p$ such that $\psi|_{I_1\cap U} = \lambda\kappa^u$ and $\psi|_{I_1\cap U^s} = \mu\kappa^l$. Then $\psi - \lambda\kappa^u - \mu\kappa^l$ is trivial on $I_1 \cap U$ and $I_1 \cap U^s$. The matrix identity

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(1+\alpha\beta)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\alpha\beta) & \beta \\ 0 & (1+\alpha\beta)^{-1} \end{pmatrix} \tag{14}$$

implies that $I_1 \cap U$ and $I_1 \cap U^s$ generate $I_1 \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. So $\psi - \lambda\kappa^u - \mu\kappa^l$ must factor through det. The image of Z_1 in $1+\mathfrak{p}$ under det is $(1+\mathfrak{p})^2$. If $p > 2$ then $(1+\mathfrak{p})^2 = 1+\mathfrak{p}$ and hence $\psi = \lambda\kappa^u + \mu\kappa^l$. If $p = 2$ then $\dim \mathrm{Hom}((1+\mathfrak{p})/(1+\mathfrak{p})^2, \overline{\mathbb{F}}_p) = 2$. □

Lemma 5.3. — *Assume $p > 2$ then $\mathrm{Hom}((I_1 \cap P)/Z_1, \overline{\mathbb{F}}_p) = \langle \kappa^u, \varepsilon \rangle$ and $\mathrm{Hom}((I_1 \cap P^s)/Z_1, \overline{\mathbb{F}}_p) = \langle \kappa^l, \varepsilon \rangle$.*

Proof. — Let $\psi : (I_1 \cap P)/Z_1 \to \overline{\mathbb{F}}_p$ be a continuous group homomorphism. Since $I_1 \cap U \cong \mathbb{Z}_p$ there exist $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ such that $\psi|_{I_1\cap U} = \lambda\kappa^u$. Then $\psi - \lambda\kappa^u$ is trivial on $I_1 \cap U$, and hence defines a homomorphism $(I_1 \cap P)/Z_1(I_1 \cap U) \cong (T \cap I_1)/Z_1 \to \overline{\mathbb{F}}_p$. Since $p > 2$ we have an isomorphism $(T \cap I_1)/Z_1 \cong 1 + p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$. Hence, there exists $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_p$ such that $\psi = \mu\varepsilon + \lambda\kappa^u$. Conjugation by Π gives the second assertion. □

Proposition 5.4. — *Let $\chi, \psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be characters. $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi, \chi)$ is non-zero if and only if $\psi = \chi\alpha$ or $\psi = \chi\alpha^{-1}$. Moreover,*

(i) *if $p > 3$ then $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) = \dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha^{-1}, \chi) = 1$;*
(ii) *if $p = 3$ then $\chi\alpha = \chi\alpha^{-1}$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) = 2$;*
(iii) *if $p = 2$ then $\chi = \chi\alpha = \chi\alpha^{-1} = \mathbf{1}$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 4$.*

Proof. — Since the order of H is prime to p and $I = HI_1$ we have

$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,\chi) \cong \mathrm{Hom}_H(\psi, H^1(I_1/Z_1,\chi)).$$

Now $H^1(I_1/Z_1,\chi) \cong \mathrm{Hom}(I_1/Z_1,\overline{\mathbb{F}}_p)$, where if $\xi \in \mathrm{Hom}(I_1/Z_1,\overline{\mathbb{F}}_p)$ and $h \in H$ then $[h\,.\,\xi](u) = \chi(h)\xi(h^{-1}uh)$. The assertion follows from Proposition 5.2. □

Similarly one obtains:

Lemma 5.5. — *Let $\chi,\psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be characters and let $\mathscr{U} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathfrak{p}^k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ for some integer k then $\mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}}(\psi,\chi) \neq 0$ if and only if $\psi = \chi\alpha^{-1}$. Moreover, $\dim \mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}}(\chi\alpha^{-1},\chi) = 1$.*

Lemma 5.6. — *Let $\chi,\psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be characters and let $\mathscr{U} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^k & 1 \end{smallmatrix}\right)$ for some integer k then $\mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}}(\psi,\chi) \neq 0$ if and only if $\psi = \chi\alpha$. Moreover, $\dim \mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}}(\chi\alpha,\chi) = 1$.*

Lemma 5.7. — *Assume $p > 2$ and let $\chi,\psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be characters then $\mathrm{Ext}^1_{(I_1\cap P)/Z_1}(\psi,\chi) \neq 0$ if and only if $\psi \in \{\chi,\chi\alpha^{-1}\}$. Moreover,*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha^{-1},\chi) = \dim \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi,\chi) = 1.$$

Lemma 5.8. — *Assume $p > 2$ and let $\chi,\psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be characters then $\mathrm{Ext}^1_{(I_1\cap P)/Z_1}(\psi,\chi) \neq 0$ if and only if $\psi \in \{\chi,\chi\alpha\}$. Moreover,*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha,\chi) = \dim \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi,\chi) = 1.$$

Proposition 5.9. — *Let $\chi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be a character and let $\chi \hookrightarrow J_\chi$ be an injective envelope of χ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1\cap U)}$, then $(J_\chi/\chi)^{I_1\cap U}$ is 1-dimensional and H acts on it by $\chi\alpha^{-1}$. Moreover, $\chi\alpha^{-1} \hookrightarrow J_\chi/\chi$ is an injective envelope of $\chi\alpha^{-1}$ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1\cap U)}$.*

Proof. — Consider an exact sequence of $H(I\cap U)$-representations:

$$0 \to \chi \to J_\chi \to J_\chi/\chi \to 0.$$

Since J_χ is an injective envelope of χ in $\mathrm{Rep}_{I\cap U}$ taking $I_1 \cap U$ invariants induces H-equivariant isomorphism $(J_\chi/\chi)^{I_1\cap U} \cong H^1(I_1\cap U,\chi)$. It follows from Lemma 5.5 that $\dim(J_\chi/\chi)^{I_1\cap U} = 1$ and H acts on $(J_\chi/\chi)^{I_1\cap U}$ via the character $\chi\alpha^{-1}$. Let $J_{\chi\alpha^{-1}}$ be an injective envelope of $\chi\alpha^{-1}$ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1\cap U)}$, then there exists an exact sequence of $H(I_1\cap U)$-representations:

$$0 \to J_\chi/\chi \to J_{\chi\alpha^{-1}} \to Q \to 0.$$

Since $J_{\chi\alpha^{-1}}$ is an essential extension of $\chi\alpha^{-1}$, we have $J_{\chi\alpha^{-1}}^{I_1\cap U} \cong \chi\alpha^{-1}$. Hence taking $(I_1\cap U)$-invariants induces an isomorphism $Q^{I_1\cap U} \cong H^1(I_1\cap U, J_\chi/\chi) \cong H^2(I_1\cap U,\chi)$. Since $I_1 \cap U \cong \mathbb{Z}_p$ is a free pro-p group we have $H^2(I_1\cap U,\chi) = 0$, see [**17**, §3.4]. Hence $Q^{I_1\cap U} = 0$, which implies $Q = 0$. □

Lemma 5.10. — *Let $\iota : J \hookrightarrow A$ be a monomorphism in an abelian category $\mathscr{A}$. If J is an injective object in $\mathscr{A}$ then there exists $\sigma : A \to J$ such that $\sigma \circ \iota = \mathrm{id}$.*

Proof. — Since J is injective the map $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,J)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(J,J)$ is surjective. □

6. Exact sequence

Let $\pi:=\pi(r,0,\eta)$ with $0\le r\le p-1$. We use the notation of §4.1, so that $\sigma:=\mathrm{Sym}^r\,\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det^a$, with $\det^a=\eta\circ\det|_K$, and $\chi:H\to\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ a character as in (9). We construct an exact sequence of I-representations which will be used to calculate $H^1(I_1/Z_1,\pi)$.

Lemma 6.1. — *If $r\neq 0$ then set*

$$w_\sigma:=\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_p}\lambda^{p-r}\begin{pmatrix}1&[\lambda]\\0&1\end{pmatrix}tv_{\tilde\sigma}+(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu)v_\sigma.$$

Then w_σ is fixed by $I_1\cap P^s$ and

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}w_\sigma=w_\sigma-(-1)^a r v_\sigma.$$

If $r=0$ then set

$$w_\sigma:=\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}\lambda\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma.$$

Then

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}w_\sigma=w_\sigma+v_\sigma,\quad \begin{pmatrix}1&0\\p&1\end{pmatrix}w_\sigma=w_\sigma-(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu^2)v_\sigma.$$

If $\alpha\in[x]+\mathfrak{p}$, $\beta\in[y]+\mathfrak{p}$ then

$$\begin{pmatrix}1+p\alpha&0\\0&1+p\beta\end{pmatrix}w_\sigma=w_\sigma+(x-y)(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu)v_\sigma.$$

Proof. — We set $w:=w_\sigma$. Suppose that $r\neq 0$. Now $tv_{\tilde\sigma}=s\Pi v_{\tilde\sigma}=sv_\sigma$. Hence, if we identify v_σ with $x^r\in\mathrm{Sym}^r\,\overline{\mathbb{F}}_p^2\otimes\det^a$ then Lemma 3.1 applied to $j=r-1$ gives $w=-(-1)^a r x^{r-1}y$. This implies the assertion.

Suppose that $r=0$ and let $P(X):=\frac{X^p+1-(X+1)^p}{p}\in\mathbb{Z}[X]$, then **[16]** implies that

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}w&=\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}\lambda\begin{pmatrix}1&1+[\mu]+p[\lambda]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma\\&=\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}\lambda\begin{pmatrix}1&[\mu+1]+p[\lambda+P(\mu)]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma.\end{aligned}\tag{15}$$

Hence,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}w &= \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}\lambda\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda+P(\mu-1)]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma\\ &= \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}(\lambda-P(\mu-1))\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma\\ &= w-\sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}P(\mu-1)\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma\\ &= w+(-1)^a\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}P(\mu-1)\begin{pmatrix}1&[\mu]\\0&1\end{pmatrix}tv_{\tilde\sigma}\\ &= w+(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}P(\mu-1))v_\sigma,\end{aligned}\tag{16}$$

where the last two equalities follow from (10), (11). If $p=2$ then $P(X-1)=1-X$, otherwise $P(X-1)=\sum_{i=1}^{p-1}p^{-1}\binom{p}{i}X^i(-1)^{p-i}$. Hence $\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}P(\mu-1)=-\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p^\times}\mu^{p-1}=1$.

Now t^2v_σ is fixed by $\begin{pmatrix}1&\mathfrak{p}^2\\0&1\end{pmatrix}$ and $I_1\cap P^s$, so the matrix identity

$$\begin{pmatrix}1&0\\\beta&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\alpha(1+\alpha\beta)^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1+\alpha\beta)^{-1}&0\\\beta&1+\alpha\beta\end{pmatrix}\tag{17}$$

implies that

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&0\\p&1\end{pmatrix}w &= \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}\lambda\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda-\mu^2]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma\\ &= \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}(\lambda+\mu^2)\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma = w-(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu^2)v_\sigma.\end{aligned}\tag{18}$$

If $\alpha\in[x]+\mathfrak{p}$ and $\beta\in[y]+\mathfrak{p}$ then the same argument gives

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+p\alpha&0\\0&1+p\beta\end{pmatrix}w &= \sum_{\lambda,\mu\in\mathbb{F}_p}\lambda\begin{pmatrix}1&[\mu]+p[\lambda+\mu(x-y)]\\0&1\end{pmatrix}t^2v_\sigma\\ &= w+(x-y)(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu)v_\sigma.\end{aligned}$$

□

Proposition 6.2. — *We have* $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_pv_\sigma)^{I_1\cap U}=(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_pv_\sigma)^{I_1}$. *Moreover, let* Δ_σ *be the image of* $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_pv_\sigma)^{I_1}$ *in* $H^1(I_1,\mathbf{1})\cong\mathrm{Hom}(I_1,\overline{\mathbb{F}}_p)$. *Then the following hold:*

(i) *if either* $r\neq0$ *or* $p>3$ *then* $\Delta_\sigma=\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^u$;

(ii) *if* $p=3$ *and* $r=0$ *then* $\Delta_\sigma=\overline{\mathbb{F}}_p(\kappa^u+\kappa^l)$;
(iii) *if* $p=2$ *and* $r=0$ *then* $\Delta_\sigma=\overline{\mathbb{F}}_p(\kappa^u+\kappa^l+\varepsilon)$.

Proof. — It follows from Proposition 5.9 that $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma)^{I_1\cap U}$ is 1-dimensional. Since $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma)^{I_1}\neq 0$ the inclusion $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma)^{I_1}\subseteq(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma)^{I_1\cap U}$ is an equality. The image of w_σ of Lemma 6.1 spans $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma)^{I_1}$ and the last assertion follows from Lemma 6.1. □

Theorem 6.3. — *The map* $(v,w)\mapsto v-w$ *induces an exact sequence of* I*-representations:*

$$0\to\pi^{I_1}\to M\oplus\Pi\centerdot M\to\pi\to 0.$$

Proof. — We claim that $M\cap\Pi\centerdot M=\pi^{I_1}$. Consider an exact sequence:

$$0\to\pi^{I_1}\to M\cap\Pi\centerdot M\to Q\to 0.$$

Since $M\cap\Pi\centerdot M$ is an I_1-invariant subspace of π, we have $(M\cap\Pi\centerdot M)^{I_1}\subseteq\pi^{I_1}$. Since $M\cap\Pi\centerdot M$ contains π^{I_1} the inclusion is an equality. Hence, by taking I_1-invariants we obtain an injection $\partial: Q^{I_1}\hookrightarrow H^1(I_1,\pi^{I_1})\cong\mathrm{Hom}(I_1,\overline{\mathbb{F}}_p)\oplus\mathrm{Hom}(I_1,\overline{\mathbb{F}}_p)$. The element Π acts on $H^1(I_1,\pi^{I_1})$ by $\Pi\centerdot(\psi_1,\psi_2)=(\psi_2^\Pi,\psi_1^\Pi)$. Let Δ_σ (resp. $\Delta_{\tilde\sigma}$) denote the image of $(M_\sigma/\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma)^{I_1}$ (resp. $(M_{\tilde\sigma}/\overline{\mathbb{F}}_p v_{\tilde\sigma})^{I_1}$) in $\mathrm{Hom}(I_1,\overline{\mathbb{F}}_p)$. Let Δ be the image of $(M/\pi^{I_1})^{I_1}$ in $H^1(I_1,\pi^{I_1})$ so that $\Delta=\Delta_\sigma\oplus\Delta_{\tilde\sigma}$. By taking I_1-invariants of the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \pi^{I_1} & \longrightarrow & M\cap\Pi\centerdot M & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi^{I_1} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\pi^{I_1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

we obtain a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc}
Q^{I_1} & \xhookrightarrow{\partial} & H^1(I_1,\pi^{I_1})\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}}\\
(M/\pi^{I_1})^{I_1} & \xhookrightarrow{\partial} & H^1(I_1,\pi^{I_1}).
\end{array}$$

and hence an injection $\partial(Q^{I_1})\hookrightarrow\Delta$. Acting by Π we obtain an injection $\partial(Q^{I_1})\hookrightarrow\Pi\centerdot\Delta$. We claim that $\Delta\cap\Pi\centerdot\Delta=0$. We have

$$\Delta\cap\Pi\centerdot\Delta=(\Delta_\sigma\cap\Pi\centerdot\Delta_{\tilde\sigma})\oplus(\Delta_{\tilde\sigma}\cap\Pi\centerdot\Delta_\sigma).$$

By symmetry we may assume that $r<p-1$. Proposition 6.2 applied to M_σ and $M_{\tilde\sigma}$ implies that that if $r\neq 0$ then $\Delta=\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^u\oplus\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^u$, hence $\Pi\centerdot\Delta=\overline{\mathbb{F}}_p(\kappa^u)^\Pi\oplus\overline{\mathbb{F}}_p(\kappa^u)^\Pi=\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^l\oplus\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^l$, so that $\Delta\cap\Pi\centerdot\Delta=0$. If $r=0$ then Proposition 6.2 implies that $\Delta=\overline{\mathbb{F}}_p(\kappa^u-(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu^2)\kappa^l+(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu)\varepsilon)\oplus\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^u$, hence $\Pi\centerdot\Delta=\overline{\mathbb{F}}_p\kappa^l\oplus\overline{\mathbb{F}}_p(\kappa^l-(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu^2)\kappa^u-(\sum_{\mu\in\mathbb{F}_p}\mu)\varepsilon)$, again $\Delta\cap\Pi\centerdot\Delta=0$. Note that if $r=0$ then we have to apply Proposition 6.2 to $M_{\tilde\sigma}$ with $r=p-1$, and $p-1\neq 0$. This implies that $Q^{I_1}=0$ and hence $Q=0$.

Since G^+ and Π generate G, Proposition 4.12 implies that $\pi_\sigma+\pi_{\tilde\sigma}$ is stable under the action of G. Since π is irreducible we get $\pi=\pi_\sigma+\pi_{\tilde\sigma}$. This implies surjectivity. □

Corollary 6.4. — *We have* $M_\sigma \cap \Pi \centerdot M_{\tilde{\sigma}} = \pi_\sigma^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma$ *and* $M_{\tilde{\sigma}} \cap \Pi \centerdot M_\sigma = \pi_{\tilde{\sigma}}^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_{\tilde{\sigma}}$.

Proof. — It is enough to show that $\pi_\sigma^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma$, since by Theorem 6.3 $M_\sigma \cap \Pi \centerdot M_{\tilde{\sigma}}$ is contained in π^{I_1}. Suppose not. Clearly $v_\sigma \in \pi_\sigma$, so since π^{I_1} is 2-dimensional, we obtain that $v_{\tilde{\sigma}} \in \pi_\sigma$. Then there exists $u_1 \in M_\sigma$ and $u_2 \in \Pi \centerdot M_{\tilde{\sigma}}$ such that $v_{\tilde{\sigma}} = u_1 + u_2$. So $u_2 \in \Pi \centerdot M_{\tilde{\sigma}} \cap (M_\sigma + M_{\tilde{\sigma}}) \subset \pi^{I_1}$ by Theorem 6.3. Hence $u_2 = \lambda v_\sigma$ for some $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$, and so $u_2 \in M_\sigma$, and so $v_{\tilde{\sigma}} \in M_\sigma$. This contradicts $M_\sigma \cap M_{\tilde{\sigma}} = 0$. □

Corollary 6.5. — *As* G^+*-representation* π *is the direct sum of its subrepresentations* π_σ *and* $\pi_{\tilde{\sigma}}$.

Proof. — It follows from Theorem 6.3 that $\pi = \pi_\sigma + \pi_{\tilde{\sigma}}$. Now

$$(\pi_\sigma \cap \pi_{\tilde{\sigma}})^{I_1} = \pi_\sigma^{I_1} \cap \pi_{\tilde{\sigma}}^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma \cap \overline{\mathbb{F}}_p v_{\tilde{\sigma}} = 0.$$

Hence, $\pi_\sigma \cap \pi_{\tilde{\sigma}} = 0$. □

Corollary 6.6. — *We have* $\pi \cong \mathrm{Ind}_{G^+}^G \pi_\sigma \cong \mathrm{Ind}_{G^+}^G \pi_{\tilde{\sigma}}$.

7. Computing $H^1(I_1/Z_1, \pi)$

We keep the notation of §6 and compute $H^1(I_1/Z_1, \pi)$ as a representation of H under the assumption $p > 2$.

Lemma 7.1. — *Assume that* $p > 2$. *Let* $\psi, \chi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *be characters. Let* N *be a smooth representation of* $(I \cap P)/Z_1$, *such that* $N|_{H(I_1 \cap U)}$ *is an injective envelope of* χ *in* $\mathrm{Rep}_{H(I_1 \cap U)}$. *Suppose that* $\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\psi, N) \neq 0$ *then* $\psi = \chi$. *Moreover,* $\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, N) \cong \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, \chi)$ *is* 1*-dimensional.*

Proof. — Suppose that we have a non-split extension $0 \to N \to E \to \psi \to 0$. Since $N|_{H(I_1 \cap U)}$ is injective Lemma 5.10 implies that the extension splits when restricted to $H(I_1 \cap U)$. Hence, there exists $v \in E^{I_1 \cap U}$ such that H acts on v by ψ and the image of v spans the underlying vector space of ψ. If v is fixed by $I_1 \cap T$, then since $I_1 \cap T$ and $H(I_1 \cap U)$ generate $I \cap P$ we would obtain a splitting of E as an $I \cap P$-representation. Hence, there exists some $h \in I_1 \cap T$, such that $(h-1)v \in N$ is non-zero. Since h normalizes $I_1 \cap U$ and v is fixed by $I_1 \cap U$, we obtain that $(h-1)v \in N^{I_1 \cap U}$. Since H acts on v by ψ and T is abelian, we get that H acts on $(h-1)v$ by ψ. Since $N|_{H(I_1 \cap U)}$ is an injective envelope of χ we obtain that $\chi = \psi$.

By Proposition 5.9, N/χ is an injective envelope of $\chi\alpha^{-1}$. Since $p > 2$, $\chi \neq \chi\alpha^{-1}$ and so $\mathrm{Hom}_{I\cap P}(\chi, N/\chi) = \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, N/\chi) = 0$. So applying $\mathrm{Hom}_{I\cap P}(\chi, \centerdot)$ to the short exact sequence of $(I \cap P)/Z_1$ representations $0 \to \chi \to N \to N/\chi \to 0$ gives us an isomorphism $\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, N) \cong \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, \chi)$. Lemma 5.7 implies that these spaces are 1-dimensional. □

Proposition 7.2. — *Assume that $p>2$. Let $\psi,\chi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be characters. Let N be a smooth representation of I/Z_1, such that $N|_{H(I_1\cap U)}$ is an injective envelope of χ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1\cap U)}$. Suppose that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,N)\neq 0$ and let $\mathscr{K}$ be the kernel of the restriction map $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,N)\to \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\psi,N)$ then one of the following holds:*

(i) *if $\mathscr{K}\neq 0$ then $\psi=\chi\alpha$;*
(ii) *if $\mathscr{K}=0$ then $\psi=\chi$.*

Moreover, $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N)=1$, and let R be the submodule of N, fitting in the exact sequence $0\to N^{I_1}\to R\to (N/N^{I_1})^{I_1}\to 0$, then there exists an exact sequence:

$$0\to \mathrm{Hom}_I(\chi,\chi\alpha^{-2})\to \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,R)\to \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,N)\to 0.$$

Proof. — Suppose that $\mathscr{K}\neq 0$ then there exists a non-split extension $0\to N\to E\to \psi\to 0$ of I/Z_1-representations, which splits when restricted to $I\cap P$. Hence, there exists $v\in E^{I_1\cap P}$ such that H acts on v by ψ and the image of v spans the underlying vector space of ψ. Let k be the smallest integer $k\geq 1$ such that v is fixed by $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \mathfrak{p}^k & 1\end{smallmatrix}\right)$. If $k=1$ then v is fixed by $I\cap U^s$. Since $I\cap U^s$ and $I\cap P$ generate I, we would obtain that I acts on v by ψ and hence the extension splits. Hence, k is at least 2. Set $\mathscr{U}:=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \mathfrak{p}^{k-1} & 1\end{smallmatrix}\right)$. Our assumption on k implies that $v':=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ p^{k-1} & 1\end{smallmatrix}\right)v-v\in N$ is non-zero. The matrix identity (14) implies that v' is fixed by $I_1\cap U$. Since $N^{I_1\cap U}$ is 1-dimensional and H acts on $N^{I_1\cap U}$ by χ, we obtain a non-zero element in $\mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}}(\psi,\chi)$. Lemma 5.6 implies that $\psi=\chi\alpha$. Let $\bar v$ be the image of v in E/N^{I_1}. Again by Proposition 5.9 $(N/N^{I_1})^{I_1\cap U}$ is 1-dimensional and H acts on $(N/N^{I_1})^{I_1\cap U}$ by $\chi\alpha^{-1}$. If the extension $0\to N/N^{I_1}\to E/N^{I_1}\to \psi\to 0$ is non-split, then by the same argument we would obtain a non-zero element in $\mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}'}(\chi\alpha,\chi\alpha^{-1})$, where $\mathscr{U}':=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \mathfrak{p}^m & 1\end{smallmatrix}\right)$, for some $m\geq 1$. This contradicts Lemma 5.6, as $p>2$ and so α is non-trivial. Hence we obtain an exact sequence:

$$0\to \mathrm{Hom}_I(\chi\alpha,\chi\alpha^{-1})\to \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi)\to \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N)\to 0. \tag{19}$$

If $p>3$ then $\dim \mathrm{Hom}_I(\chi\alpha,\chi\alpha^{-1})=0$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi)=1$. If $p=3$ then $\dim \mathrm{Hom}_I(\chi\alpha,\chi\alpha^{-1})=1$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi)=2$. Hence, $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N)=1$.

Assume that $\mathscr{K}=0$. Since we have assumed that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,N)\neq 0$ we obtain that $\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\psi,N)\neq 0$ and Lemma 7.1 implies that $\psi=\chi$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,N)\leq 1$. Suppose that there exists a non-split extension $0\to N\to E\to \chi\to 0$ of I/Z_1-representations, which remains non-split when restricted to $I\cap P$. Let w_1 be a basis vector of $N^{I_1\cap U}$. Lemmas 7.1, 5.7 and 5.3 imply that there exists $v\in E$ such that H acts on v by χ and for all $g\in I_1\cap P$ we have $gv=v+\varepsilon(g)w_1$. In particular, v is fixed by $I\cap U$ and $\left(\begin{smallmatrix}1+\mathfrak{p}^2 & 0\\ 0 & 1+\mathfrak{p}^2\end{smallmatrix}\right)$. As before, let k be the smallest integer $k\geq 1$ such that v is fixed by $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \mathfrak{p}^k & 1\end{smallmatrix}\right)$. We claim that $k=2$. Indeed, if $k>2$ then let $v':=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ p^{k-1} & 1\end{smallmatrix}\right)v-v$. Then $v'\in N$ is non-zero, and the matrix identity (14) implies that v' is fixed by $I_1\cap U$. Since $N^{I_1\cap U}$ is 1-dimensional and H acts on $N^{I_1\cap U}$ by χ, we obtain a non-zero element in $\mathrm{Ext}^1_{H\mathscr{U}}(\chi,\chi)$, with $\mathscr{U}:=\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \mathfrak{p}^{k-1} & 1\end{smallmatrix}\right)$. Lemma 5.6 implies that $\chi=\chi\alpha$. Since $p>2$ this cannot happen.

Consider $u := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right) v - v$. Using (14) and the fact that $k \geq 2$ we obtain

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(1+p)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+p & 1 \\ 0 & (1+p)^{-1} \end{pmatrix} v - v \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(1+p)^{-1} & 1 \end{pmatrix} (v + 2w_1) - v = u + 2w_1. \end{aligned} \tag{20}$$

Since $2w_1 \neq 0$ we get $u \neq 0$ and so $k = 2$. By Proposition 5.9 $(N/\overline{\mathbb{F}}_p w_1)^{I_1 \cap U}$ is 1-dimensional. This implies that $(N/\overline{\mathbb{F}}_p w_1)^{I_1 \cap U} \cong (N/\overline{\mathbb{F}}_p w_1)^{I_1}$ and the image of u in $N/\overline{\mathbb{F}}_p w_1$ spans $(N/\overline{\mathbb{F}}_p w_1)^{I_1 \cap U}$. If we set $R := \langle w_1, u \rangle$ then by construction we obtain that the map $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N) \to \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N/R)$ is zero. Proposition 5.9 implies that $(N/R)^{I_1}$ is 1-dimensional and H acts on it by a character $\chi\alpha^{-2}$. This implies the claim. □

Corollary 7.3. — *Assume $p > 2$ then the restriction maps*

$$\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi, \chi) \to \mathrm{Ext}^2_{(I \cap P^s)/Z_1}(\chi, \chi),$$
$$\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi, \chi) \to \mathrm{Ext}^2_{(I \cap P)/Z_1}(\chi, \chi)$$

are injective.

Proof. — Consider the exact sequence of I-representations $0 \to \chi \to \mathrm{Ind}_{I \cap P^s}^I \chi \to Q \to 0$. Iwahori decomposition implies that

$$(\mathrm{Ind}_{I \cap P^s}^I \chi)|_{H(I_1 \cap U)} \cong \mathrm{Ind}_H^{H(I_1 \cap U)} \chi,$$

and hence it is an injective envelope of χ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1 \cap U)}$. Proposition 5.9 implies that $Q|_{H(I_1 \cap U)}$ is an injective envelope of $\chi\alpha^{-1}$ in $\mathrm{Rep}_{H(I_1 \cap U)}$. Since $p > 2$ Lemma 5.4 implies that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, \chi) = 0$, so using Shapiro's lemma we obtain an exact sequence:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{(I \cap P^s)/Z_1}(\chi, \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, Q) &\to \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi, \chi) \\ &\to \mathrm{Ext}^2_{(I \cap P^s)/Z_1}(\chi, \chi). \end{aligned}$$

Now $\dim \mathrm{Ext}^1_{(I \cap P^s)/Z_1}(\chi, \chi) = 1$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, Q) = 1$ by Proposition 7.2. This implies the result for $I \cap P^s$. By conjugating by Π we obtain the result for $I \cap P$. □

Corollary 7.4. — *Assume $p > 2$ and let N be as in Proposition 7.2 then* $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N) = 1$, *the natural maps*

$$\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi, \chi) \to \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi, N), \tag{21}$$
$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N) \to \mathrm{Ext}^1_{(I \cap P)/Z_1}(\chi, N) \tag{22}$$

are injective and (22) *is an isomorphism.*

Proof. — We have an exact sequence:

$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N/\chi) \to \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi, \chi).$$

Proposition 5.9 and Lemma 7.1 imply that $\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, N/\chi) = 0$. The commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N/\chi) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi,\chi) \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 7.3} \\ \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi, N/\chi) & \xrightarrow{0} & \mathrm{Ext}^2_{(I\cap P)/Z_1}(\chi,\chi) \end{array}$$

and Corollary 7.3 implies that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N/\chi) \to \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi,\chi)$ is the zero map. Hence, (21) is injective and

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N) = \dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N/\chi) = 1,$$

where the last equality is given by Propositions 5.9 and 7.2. We know that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi, N) \neq 0$. So if (22) is not injective, then Proposition 7.2 gives $\chi = \chi\alpha$, but this cannot hold, since $p > 2$. Since both sides have dimension 1, (22) is an isomorphism. □

7.1. $p = 3$. — The case $p = 3$ requires some extra arguments. If you are only interested in $p \geq 5$ then please skip this subsection.

Lemma 7.5. — *Assume $p = 3$ and let N be as in Proposition 7.2 then the composition:*

$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Ext}^2_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha,\chi)$$

is injective, where ∂ is induced by a short exact sequence $0 \to \chi \to N \to N/\chi \to 0$.

Proof. — Since $p = 3$ we have $\alpha = \alpha^{-1}$ and hence it follows from the Corollary 7.4 that $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) = 1$. Corollary 7.2 implies that the restriction map $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) \to \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi)$ is injective. Moreover, Lemma 7.1 gives $\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha, N) = 0$, and so the map $\partial : \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) \to \mathrm{Ext}^2_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha,\chi)$ is injective. The assertion follows from the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi) \\ {\scriptstyle (22)}\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) & \xhookrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^2_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha,\chi). \end{array}$$

□

Lemma 7.6. — *Assume $p = 3$ and let N be as in Proposition 7.2. Assume that $N^{K_1} \cong \mathrm{Ind}_{HK_1}^{I}\chi$ as a representation of I, then the composition:*

$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Ext}^2_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha,\chi)$$

is zero, where ∂ is induced by a short exact sequence $0 \to \chi \to N \to N/\chi \to 0$.

Proof. — Since $p = 3$ we have $\alpha = \alpha^{-1}$ and hence it follows from the Corollary 7.4 that $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) = 1$. Let Δ be the image of the restriction map

$$\Delta := \mathrm{Im}(\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) \to \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi)).$$

We claim that Δ is contained in the image of the natural map

$$\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N) \to \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi). \tag{23}$$

Since $p = 3$ we have $\dim N^{K_1} = 3$ and so the image of N^{K_1} in N/N^{I_1} is a 2-dimensional I-stable subspace. Since it follows from Proposition 5.9 that $(N/N^{I_1})^{I_1}$ and $((N/N^{I_1})/(N/N^{I_1})^{I_1})^{I_1}$ are 1-dimensional we obtain an exact sequence $0 \to N^{I_1} \to N^{K_1} \to R \to 0$, where where R is the subspace of N/χ defined in Proposition 7.2 (with N/χ instead of N). Since $N^{K_1} \cong \mathrm{Ind}_{HK_1}^I \chi$ we get:

$$N^{K_1}|_{I\cap P^s} \cong \chi \oplus \chi\alpha \oplus \chi \cong \chi \oplus R|_{I\cap P^s}.$$

Let ϕ be the composition:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, R) \to \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N^{K_1}) \to \\ \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N) \to \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi).\end{aligned}$$

Then we have a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, R) & \xrightarrow{7.2} & \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) \\ \downarrow \mathrm{Res} & & \downarrow \mathrm{Res} \\ \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, R) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi). \end{array}$$

The top horizontal arrow is surjective by Proposition 7.2. Hence, Δ equals to the image of $\phi \circ \mathrm{Res}$. Since the image of ϕ is contained in the image of (23) we get the claim. The assertion follows from the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) \\ \downarrow \mathrm{Res} & & \downarrow \mathrm{Res} \\ \mathrm{Ext}^1_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, N/\chi) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{Ext}^2_{(I\cap P^s)/Z_1}(\chi\alpha, \chi), \end{array}$$

since the claim implies that the composition $\partial \circ \mathrm{Res}$ is the zero map. □

Lemma 7.7. — *Assume $p = 3$ let N_χ and N_{χ^s} be as in Proposition 7.2 with respect to χ and χ^s. Further assume that $N_{\chi^s}^{K_1} \cong \mathrm{Ind}_{HK_1}^I \chi^s$ as a representation of I, then the natural map*

$$\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) \to \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha, N_\chi) \oplus \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha, N_{\chi^s}^\Pi) \tag{24}$$

is injective, where $N_{\chi^s}^\Pi$ denotes the twist of action of I on N_{χ^s} by Π.

Proof. — Applying $\mathrm{Hom}_{I/Z_1}(\chi\alpha, \centerdot)$ to the short exact sequence $0 \to \chi \to N_\chi \to N_\chi/\chi \to 0$ gives a long exact sequence. Equation (19) shows that the map $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) \to \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N_\chi)$ is surjective, which implies that

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) \to \mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha, N_\chi)) \cong \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, N_\chi/\chi).$$

If we replace N_χ with N_{χ^s} and χ with χ^s the same isomorphism holds. Twisting by Π gives:

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha,\chi)\to\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi\alpha,N^\Pi_{\chi^s}))\cong\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N^\Pi_{\chi^s}/\chi).$$

Lemma 7.5 implies that the composition

$$\mathrm{Res}\circ\partial:\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N_\chi/\chi)\to\mathrm{Ext}^2_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha,\chi)$$

is an injection. And Lemma 7.6 implies that the composition

$$\mathrm{Res}\circ\partial:\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N^\Pi_{\chi^s}/\chi)\to\mathrm{Ext}^2_{(I\cap P)/Z_1}(\chi\alpha,\chi)$$

is zero. Hence, $\partial(\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N_\chi/\chi))\cap\partial(\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,N^\Pi_\chi/\chi))=0$ and so the map in (24) is injective. □

Lemma 7.8. — *Assume $p=3$ and $r=0$ then $M_{\tilde\sigma}$ satisfies the assumptions of Lemma 7.6.*

Proof. — Now $\langle(I\cap U)tv_\sigma\rangle=\langle Isv_{\tilde\sigma}\rangle\cong St|_I\cong\mathrm{Ind}^I_{HK_1}\chi^s$ as a representation of I, where $St\cong\mathrm{Sym}^2\overline{\mathbb{F}}_3^2$ is the Steinberg representation of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$. Hence we have an injection $\mathrm{Ind}^I_{HK_1}\chi^s\hookrightarrow M_{\tilde\sigma}$. Since $M_{\tilde\sigma}|_{H(I\cap U)}$ is an injective envelope of χ^s in $\mathrm{Rep}_{H(I\cap U)}$ we obtain that $M_{\tilde\sigma}^{K_1\cap U}\cong\mathrm{Ind}^{H(I\cap U)}_{H(K_1\cap U)}\chi^s$ as a representation of $H(I\cap U)$. Hence $\dim M_{\tilde\sigma}^{K_1\cap U}=3$ and so we obtain $M_{\tilde\sigma}^{K_1\cap U}\cong M_{\tilde\sigma}^{K_1}\cong\mathrm{Ind}^I_{HK_1}\chi^s$. □

7.2. — Using the lemmas above we prove the main result of this section.

Theorem 7.9. — *Assume $p>2$ and let $\psi:H\to\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be a character, such that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,\pi_\sigma)\neq0$. Then $\psi\in\{\chi\alpha,\chi\}$. Moreover,*

(i) $\dim\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,\pi_\sigma)=2$;
(ii) *if $p>3$ or $p=3$ and $r\in\{0,2\}$ then* $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,\pi_\sigma)=0$;
(iii) *if $p=3$ and $r=1$ then* $\dim\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha,\pi_\sigma)\leq1$.

Proof. — Corollary 7.4, (21) gives injections:

$$\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi,\chi)\hookrightarrow\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi,M_\sigma),$$
$$\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi,\chi)\hookrightarrow\mathrm{Ext}^2_{I/Z_1}(\chi,\Pi\centerdot M_{\tilde\sigma}).$$

Moreover, $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,\chi)=0$. Corollary 6.4 gives a short exact sequence $0\to\chi\to M_\sigma\oplus\Pi\centerdot M_{\tilde\sigma}\to\pi_\sigma\to0$, which induces an isomorphism:

$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,M_\sigma)\oplus\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,\Pi\centerdot M_{\tilde\sigma})\cong\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,\pi_\sigma).$$

Corollary 7.4 implies that $\dim\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi,\pi_\sigma)=2$.

Assume that $\psi\neq\chi$. From $0\to M_\sigma\to\pi_\sigma\to(\Pi\centerdot M_{\tilde\sigma})/\chi\to0$ we obtain a long exact sequence:

$$\mathrm{Hom}_I(\psi,\chi\alpha)\hookrightarrow\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,M_\sigma)\to\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,\pi_\sigma)\to\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,(\Pi\centerdot M_{\tilde\sigma})/\chi).$$

If $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi, M_\sigma) \neq 0$ then Proposition 7.2 implies $\psi = \chi\alpha$. Similarly, if $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi, (\Pi \centerdot M_{\tilde\sigma})/\chi) \neq 0$ then $\psi = (\chi^s\alpha^{-1})^\Pi = \chi\alpha$. Hence, $\psi = \chi\alpha$ and $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \pi_\sigma) \leq 1$.

If $p > 3$ then Proposition 7.2 implies that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, M_\sigma/\chi) = 0$. Hence the exact sequence $0 \to \Pi \centerdot M_{\tilde\sigma} \to \pi_\sigma \to M_\sigma/\chi \to 0$ gives an exact sequence:

$$\mathrm{Hom}_I(\chi\alpha, \chi\alpha^{-1}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \Pi \centerdot M_{\tilde\sigma}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \pi_\sigma).$$

Since $p > 3$ Proposition 7.2 implies that $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \Pi \centerdot M_{\tilde\sigma}) = 0$ and hence $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \pi_\sigma) = 0$.

Assume that $p = 3$ and $r = 0$ Lemmas 7.7 and 7.8 give an exact sequence:

$$\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, M_\sigma \oplus \Pi \centerdot M_{\tilde\sigma}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \pi_\sigma).$$

Since $p = 3$ we have $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \chi) = 2$ and Proposition 7.2 gives $\dim \mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, M_\sigma \oplus \Pi \centerdot M_{\tilde\sigma}) = 2$. Hence $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \pi_\sigma) = 0$. Since $p = 3$ and $r = 0$ we have $(\chi\alpha)^\Pi = \chi\alpha$, $\chi = \chi^s$ and since $\pi_{\tilde\sigma} = \Pi \centerdot \pi_\sigma$, we also obtain $\mathrm{Ext}^1_{I/Z_1}(\chi\alpha, \pi_{\tilde\sigma}) = 0$, which deals with the case $p = 3$ and $r = 2$. □

Corollary 7.10. — *Assume $p > 2$ and let $\psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be a character. Suppose that $\mathrm{Hom}_I(\psi, H^1(I_1/Z_1, \pi)) \neq 0$ then $\psi \in \{\chi, \chi^s\}$. Moreover, the following hold:*

(i) *if $p = 3$ and $r = 1$ then $\dim H^1(I_1/Z_1, \pi) \leq 6$;*
(ii) *otherwise, $\dim H^1(I_1/Z_1, \pi) = 4$.*

Proof. — By Corollary 6.5 $\pi \cong \pi_\sigma \oplus \pi_{\tilde\sigma}$ as I-representations. The assertion follows from Theorem 7.9. We note that if $p = 3$ and $r = 1$ then $\chi\alpha = \chi^s$ and $\chi^s\alpha = \chi$. □

8. Extensions and central characters

We fix a smooth character $\zeta : Z \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ and let $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ be the full category of Rep_G consisting of representations with central character ζ. Let V be an $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector space with an action of Z, given by $zv = \zeta(z)v$, for all $z \in Z$ and $v \in V$. Then $\mathrm{Ind}_Z^G V$ is an object of $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$, moreover given π in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ by Frobenius reciprocity we get

$$\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G V) \cong \mathrm{Hom}_Z(\pi, V) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\pi, V). \tag{25}$$

Hence, the functor $\mathrm{Hom}_G(\centerdot, \mathrm{Ind}_Z^G V)$ is exact and so $\mathrm{Ind}_Z^G V$ is an injective object in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$. Further, if V is the underlying vector space of π then we may embed $\pi \hookrightarrow \mathrm{Ind}_Z^G V$, $v \mapsto [g \mapsto gv]$. Hence, $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ has enough injectives.

For π_1, π_2 in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ we denote $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi_1, \pi_2) := \mathbb{R}^1 \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ computed in the category $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$.

Proposition 8.1. — *Let π_1 and π_2 be irreducible representations of G admitting a central character. Let ζ be the central character of π_2. If $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_1, \pi_2) \neq 0$ then ζ is also*

the central character of π_1. *If* $\pi_1 \not\cong \pi_2$ *then* $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi_1,\pi_2) = \mathrm{Ext}^1_G(\pi_1,\pi_2)$. *If* $\pi_1 \cong \pi_2$ *then there exists an exact sequence:*

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi_1,\pi_2) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi_1,\pi_2) \to \mathrm{Hom}(Z,\overline{\mathbb{F}}_p).$$

Moreover, if $p>2$ *then the last arrow is surjective.*

Proof. — Suppose that we have a non-split extension $0 \to \pi_2 \to E \to \pi_1 \to 0$ in Rep_G. For all $z \in Z$ we define $\theta_z : E \to E$, $v \mapsto zv - \zeta(z)v$. Since z is central in G, θ_z is G-equivariant. If $\theta_z = 0$ for all $z \in Z$ then E admits a central character ζ, and hence ζ is the central character of π_1 and the extension lies in $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi_1,\pi_2)$. If $\theta_z \neq 0$ for some $z \in Z$ then it induces an isomorphism $\pi_1 \cong \pi_2$.

We assume that $\pi_1 \cong \pi_2$ and drop the subscript. Then (25) gives $\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G \zeta) \cong \pi^*$. Fix a non-zero $\varphi \in \mathrm{Hom}_Z(\pi,\zeta)$. Since π is irreducible we obtain an exact sequence:

$$0 \to \pi \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ind}_Z^G \zeta \to Q \to 0. \tag{26}$$

Since $\mathrm{Ind}_Z^G \zeta$ is an injective object in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$, and (26) is in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ by applying $\mathrm{Hom}_G(\pi,\centerdot)$ to (26) we obtain an exact sequence:

$$\pi^* \to \mathrm{Hom}_G(\pi,Q) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \to 0. \tag{27}$$

If we consider (26) as an exact sequence in Rep_G then by applying $\mathrm{Hom}_G(\pi,\centerdot)$ we get an exact sequence:

$$\pi^* \to \mathrm{Hom}_G(\pi,Q) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G \zeta). \tag{28}$$

Putting (27) and (28) together we obtain an exact sequence:

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G \zeta).$$

Let $0 \to \mathrm{Ind}_Z^G \zeta \to E \to \pi \to 0$ be an extension in Rep_G. For all $z \in Z$, $\theta_z : E \to E$ induces $\theta_z(E) \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G \zeta)$. Now $\theta_z(E) = 0$ for all $z \in Z$ if and only if E has a central character ζ, but since $\mathrm{Ind}_Z^G \zeta$ is an injective object in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ Lemma 5.10 implies that the sequence is split if and only if E has a central character ζ. Now

$$\begin{aligned} \theta_{z_1z_2}(v) &= z_1z_2v - \zeta(z_1z_2)v = z_1(z_2v - \zeta(z_2)v) + z_1\zeta(z_2)v - \zeta(z_1z_2)v \\ &= \zeta(z_1)\theta_{z_2}(v) + \zeta(z_2)\theta_{z_1}(v). \end{aligned} \tag{29}$$

Hence, if we set $\psi_E(z) := \zeta(z)^{-1}\theta_z(E)$, then (29) gives $\psi_E(z_1z_2) = \psi_E(z_1) + \psi_E(z_2)$. Hence, the map $E \mapsto \psi_E$ induces an injection $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G \zeta) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Z,\pi^*)$. The image of

$$\mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \mathrm{Ind}_Z^G \zeta) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Z,\pi^*)$$

is contained in $\mathrm{Hom}(Z,\overline{\mathbb{F}}_p\varphi)$, which is isomorphic to $\mathrm{Hom}(Z,\overline{\mathbb{F}}_p)$. To a continuous group homomorphism $\psi : G \to \overline{\mathbb{F}}_p$ we may associate an extension $\left(\begin{smallmatrix}1 & \psi\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \otimes \pi$. The image of this extension in $\mathrm{Hom}(Z,\overline{\mathbb{F}}_p)$ is equal to the restriction of ψ to Z. If $p>2$ then the restriction map induces a surjection $\mathrm{Hom}(G,\overline{\mathbb{F}}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(Z,\overline{\mathbb{F}}_p)$, which yields the last assertion. □

Proposition 8.2. — *Let $\pi := \pi(r, 0, \eta)$ and ζ the central character of π. Assume that $p > 2$ and $(p, r) \neq (3, 1)$ then* $\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi, \pi) \geq 3$.

Proof. — This follows from [**10**, 2.3.4]. □

Remark 8.3. — *At the time of writing this note,* [**10**] *was not written up and there were some technical issues with the outline of the argument given in the introductions to* [**7**] *and* [**9**]. *Since we only need a lower bound on the dimension and only in the supersingular case, we have written up another proof of Proposition 8.2 in the appendix. The proof given there is a variation of Colmez-Kisin argument.*

9. Hecke Algebra

Let ζ be the central character of π. Let $\mathscr{H} := \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_{ZI_1}^G \zeta)$. Let $\mathscr{I} : \mathrm{Rep}_{G,\zeta} \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$ be the functor:

$$\mathscr{I}(\pi) := \pi^{I_1} \cong \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{ZI_1}^G \zeta, \pi).$$

Let $\mathscr{T} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{H}} \to \mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ be the functor:

$$\mathscr{T}(M) := M \otimes_{\mathscr{H}} \text{c-Ind}_{ZI_1}^G \zeta.$$

One has $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(M, \mathscr{I}(\pi)) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathscr{T}(M), \pi)$. Moreover, Vignéras in [**18**, Thm. 5.4] shows that $\mathscr{I}$ induces a bijection between irreducible objects in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ and $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$. Let $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}^{I_1}$ be the full subcategory of $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ consisting of representations generated by their I_1-invariants. Ollivier has shown [**13**] that

$$\mathscr{I} : \mathrm{Rep}_{G,\zeta}^{I_1} \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}, \quad \mathscr{T} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{H}} \to \mathrm{Rep}_{G,\zeta}^{I_1} \tag{30}$$

are quasi-inverse to each other and so $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$ is equivalent to $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}^{I_1}$. In particular, suppose that $\tau = \langle G \cdot \tau^{I_1} \rangle$, π in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ and let $\pi_1 := \langle G \cdot \pi^{I_1} \rangle \subseteq \pi$ then one has:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(\tau, \pi) \cong \mathrm{Hom}_G(\tau, \pi_1) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathscr{I}(\pi_1)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathscr{I}(\pi)) \end{aligned} \tag{31}$$

and the natural map $\mathscr{T}\mathscr{I}(\tau) \to \tau$ is an isomorphism.

Let J be an injective object in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$, then the first isomorphism of (31) implies that $J_1 := \langle G \cdot J^{I_1} \rangle$ is an injective object in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}^{I_1}$. Since $\mathscr{T}$ and $\mathscr{I}$ induce an equivalence of categories between $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$ and $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}^{I_1}$ we obtain that $\mathscr{I}(J_1) = \mathscr{I}(J)$ is an injective object in $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}}$. Hence, (31) gives an E_2-spectral sequence:

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^j \mathscr{I}(\pi)) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{G,\zeta}(\tau, \pi) \tag{32}$$

The 5-term sequence associated to (32) gives us:

Proposition 9.1. — *Let τ and π be in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ suppose that τ is generated as a G-representation by τ^{I_1} then there exists an exact sequence:*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathscr{I}(\pi)) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau, \pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^1 \mathscr{I}(\pi)) \\ \to \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathscr{I}(\pi)) \to \mathrm{Ext}^2_{G,\zeta}(\tau, \pi) \end{aligned} \tag{33}$$

It is easy to write down the first two non-trivial arrows of (33) explicitly. An extension class of $0 \to \mathscr{I}(\pi) \to E \to \mathscr{I}(\tau) \to 0$ maps to the extension class of $0 \to \mathscr{T}\mathscr{I}(\pi) \to \mathscr{T}(E) \to \mathscr{T}\mathscr{I}(\tau) \to 0$. Let ϵ be an extension class of $0 \to \pi \to \kappa \to \tau \to 0$. We may apply $\mathscr{I}$ to get

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}(\pi) \longrightarrow \mathscr{I}(\kappa) \longrightarrow \mathscr{I}(\tau) \xrightarrow{\partial_\epsilon} \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi). \tag{34}$$

The second non-trivial arrow in (33) is given by $\epsilon \mapsto \partial_\epsilon$.

We are interested in (32) when both π and τ are irreducible. We recall some facts about the structure of $\mathscr{H}$ and its irreducible modules, for proofs see [**18**] or [**14**, §1]. As an $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector space $\mathscr{H}$ has a basis indexed by double cosets $I_1\backslash G/ZI_1$, we write T_g for the element corresponding to a double coset $I_1 g Z I_1$. Given π in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$, and $v \in \pi^{I_1}$, the action of T_g is given by:

$$vT_g = \sum_{u \in I_1/(I_1 \cap g^{-1} I_1 g)} ug^{-1}v. \tag{35}$$

Let $\chi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ be a character then we define $e_\chi \in \mathscr{H}$ by

$$e_\chi := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \chi(h) T_h.$$

Then $e_\chi e_\psi = e_\chi$ if $\chi = \psi$ and 0 otherwise and it follows from (35) that $\pi^{I_1} e_\chi$ is the χ-isotypical subspace of π^{I_1} as a representation of H. The elements T_{n_s}, T_Π and e_χ, for all χ generate $\mathscr{H}$ as an algebra, and are subject to the following relations: $T_\Pi^2 = \zeta(p)^{-1}$,

$$e_\chi T_{n_s} = T_{n_s} e_{\chi^s}, \quad e_\chi T_\Pi = T_\Pi e_{\chi^s}, \quad e_\chi T_{n_s}^2 = -e_\chi e_{\chi^s} T_{n_s}. \tag{36}$$

Note that $e_\chi e_{\chi^s} = e_\chi$ if $\chi = \chi^s$ and $e_\chi e_{\chi^s} = 0$, otherwise. We let $\mathscr{H}^+$ be the subalgebra of $\mathscr{H}$ generated by T_{n_s}, $T_\Pi T_{n_s} T_\Pi^{-1}$ and e_χ for all characters χ. One may naturally identify $\mathscr{H}^+ \cong \mathrm{End}_{G^+}(\text{c-Ind}_{ZI_1}^{G^+} \zeta)$.

Definition 9.2. — *Let $0 \le r \le p-1$ be an integer, $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ and $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ a smooth character, and let ζ be the central character of $\pi(r,\lambda,\eta)$ then we define $\mathscr{H}$-modules $M(r,\lambda) := \pi(r,\lambda)^{I_1}$, $M(r,\lambda,\eta) := \pi(r,\lambda,\eta)^{I_1}$.*

Assume for simplicity that $\zeta(p) = 1$ then it is shown in [**6**, Cor. 6.4] that $M(r,\lambda,\eta)$ has an $\overline{\mathbb{F}}_p$-basis $\{v_1, v_2\}$ such that

(i) $v_1 e_\chi = v_1$, $v_1 T_\Pi = v_2$, $v_2 e_{\chi^s} = v_2$, $v_2 T_\Pi = v_1$ and such that $v_1 T_{n_s} = -v_1$ if $r = p-1$ and $v_1 T_{n_s} = 0$ otherwise.
(ii) $v_2(1 + T_{n_s}) = \eta(-p^{-1})\lambda v_1$ if $r = 0$ and $v_2 T_{n_s} = \eta(-p^{-1})\lambda v_1$ otherwise,

where $\chi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ is the character $\chi(\left(\begin{smallmatrix}[\lambda] & 0\\ 0 & [\mu]\end{smallmatrix}\right)) = \lambda^r \eta([\lambda\mu])$. If $\lambda = 0$ so that $\pi(r,\lambda,\eta)$ is supersingular, then $v_1 = v_\sigma$ and $v_2 = v_{\tilde{\sigma}}$.

Lemma 9.3. — *Let π be a supersingular representation of G then*

(i) *if $r \in \{0, p-1\}$ then*

(a) $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\pi^{I_1}, \pi^{I_1}) = 1$;
(b) $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{H}}(\pi^{I_1}, *) = 0$ *for* $i > 1$;
(ii) *otherwise,* $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\pi^{I_1}, \pi^{I_1}) = 2$.

Proof. — [**6**, Cor. 6.7, 6.6]. □

We look more closely at the regular case. Let π be supersingular with $0 < r < p-1$ and assume for simplicity that $p \in Z$ acts trivially on π. For $(\lambda_1, \lambda_2) \in \overline{\mathbb{F}}_p^2$ we define an $\mathscr{H}$-module E_{λ_1,λ_2} to be a 4-dimensional vector space with basis $\{v_\chi, v_{\chi^s}, w_\chi, w_{\chi^s}\}$ with the action of $\mathscr{H}$ given on the generators

$$w_\chi T_{n_s} = \lambda_1 v_{\chi^s}, \quad w_{\chi^s} T_{n_s} = \lambda_2 v_\chi, \quad v_\chi T_{n_s} = v_{\chi^s} T_{n_s} = 0 \tag{37}$$

and $w_\psi T_\Pi = w_{\psi^s}$, $v_\psi T_\Pi = v_{\psi^s}$, $w_\psi e_\psi = w_\psi$, $v_\psi e_\psi = v_\psi$, for $\psi \in \{\chi, \chi^s\}$. Then $\langle v_\chi, v_{\chi^s}\rangle$ is stable under the action of $\mathscr{H}$ and we have an exact sequence:

$$0 \to \mathscr{I}(\pi) \to E_{\lambda_1,\lambda_2} \to \mathscr{I}(\pi) \to 0 \tag{38}$$

The extension (38) is split if and only if $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$. It is immediate that the map $\overline{\mathbb{F}}_p^2 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi), \mathscr{I}(\pi))$ sending (λ_1, λ_2) to the equivalence class of (38) is an isomorphism of $\overline{\mathbb{F}}_p$-vector spaces.

Lemma 9.4. — *Let* $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ *then*

$$\mathscr{T}(E_{0,\lambda}) \cong \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma}{(T_\sigma^2)}, \quad \mathscr{T}(E_{\lambda,0}) \cong \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \tilde{\sigma}}{(T_{\tilde{\sigma}}^2)} \tag{39}$$

where $T_\sigma \in \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$ *is given by Lemma 4.1.*

Proof. — Let $\varphi \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ such that $\mathrm{Supp}\,\varphi = KZ$ and $\varphi(1)$ spans σ^{I_1}. Let $\tau := \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma}{(T_\sigma^2)}$ and v the image of φ in τ. Then $\tau = \langle G \centerdot v\rangle = \langle G \centerdot \tau^{I_1}\rangle$. And so it is enough to show that $\mathscr{I}(\tau) \cong E_{0,\lambda}$. Since $T_\sigma : \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \to \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ is injective and $\pi \cong \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma}{(T_\sigma)}$, we have a an exact sequence

$$0 \to \pi \to \tau \to \pi \to 0 \tag{40}$$

and we may identify the subobject with $T_\sigma(\tau)$. Now, v, Πv, $T_\sigma(v)$ and $T_\sigma(\Pi v)$ are linearly independent and I_1-invariant. Thus $\dim \tau^{I_1} \geq 4$ and since $\dim \pi^{I_1} = 2$ we obtain an exact sequence of $\mathscr{H}$-modules

$$0 \to \mathscr{I}(\pi) \to \mathscr{I}(\tau) \to \mathscr{I}(\pi) \to 0 \tag{41}$$

Hence, $\mathscr{I}(\tau) \cong E_{\lambda_1,\lambda_2}$ for some $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Since $\sigma \cong \langle K \centerdot \varphi\rangle \cong \langle K \centerdot v\rangle$ and $\langle K \centerdot T_\sigma(v)\rangle \cong T_\sigma(\langle K \centerdot v\rangle) \cong \sigma$, [**14**, 3.1.3] gives

$$v e_\chi = v, \quad (T_\sigma(v)) e_\chi = T_\sigma(v), \quad v T_{n_s} = (T_\sigma(v)) T_{n_s} = 0. \tag{42}$$

Hence, $\lambda_1 = 0$. If $\lambda_2 = 0$ then (41) would split and so would (40). Hence, $\lambda_2 \neq 0$. We leave it to the reader to check that for any $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$, $E_{0,\lambda} \cong E_{0,1}$. □

Lemma 9.5. — *If* $E = E_{\lambda_1,\lambda_2}$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ *then* $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \mathscr{I}(\pi)) = 1$.

Proof. — Applying $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(*, \mathscr{I}(\pi))$ to (38) gives an exact sequence

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi), \mathscr{I}(\pi)) &\hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi), \mathscr{I}(\pi)) \\ &\to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \mathscr{I}(\pi)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi), \mathscr{I}(\pi))\end{aligned} \tag{43}$$

Hence, $\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E, \mathscr{I}(\pi)) = 1 + \dim \Upsilon$, where Υ is the image of the last arrow in (43). Yoneda's interpretation of Ext says that $\Upsilon \neq 0$ is equivalent to the following commutative diagram of $\mathscr{H}$-modules:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathscr{I}(\pi) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \mathscr{I}(\pi) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathscr{I}(\pi) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

with A non-split. Then $A \cong E_{\mu_1,\mu_2}$ for some $\mu_1, \mu_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p$. The condition $vT^2_{n_s} = 0$ for all $v \in B$ is equivalent to $\mu_1\lambda_2 = 0$ and $\mu_2\lambda_1 = 0$. Since $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ we obtain $\mu_1 = \mu_2 = 0$ and hence a contradiction to a non-split A. □

10. Main result

Let π an irreducible representation with a central character ζ. A construction of [**14**, §6], [**6**, §9] gives an injection $\pi \hookrightarrow \Omega$, where Ω is in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ and $\Omega|_K$ is an injective envelope of $\mathrm{soc}_K \pi$ in $\mathrm{Rep}_{K,\zeta}$.

Lemma 10.1. — *If $\pi \cong \pi(r, 0, \eta)$ with $0 < r < p-1$ then $\Omega^{I_1} \cong E_{\lambda_1,\lambda_2}$ with $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Otherwise, $\Omega^{I_1} \cong \pi^{I_1}$.*

Proof. — Let σ be an irreducible smooth representation of K and $\mathrm{Inj}\,\sigma$ injective envelope of σ in $\mathrm{Rep}_{K,\zeta}$. If $\sigma = \chi \circ \det$ or $\sigma \cong St \otimes \chi \circ \det$ then $\dim(\mathrm{Inj}\,\sigma)^{I_1} = \dim \sigma^{I_1} = 1$ and $\dim(\mathrm{Inj}\,\sigma)^{I_1} = 2$ otherwise, [**14**, 6.4.1, §4.1]. If π is either a character, special series, a twist of unramified series or $\pi \cong \pi(0, 0, \eta)$ then $\mathrm{soc}_K \pi$ is a direct summand of $(\mathbf{1} \oplus St) \otimes \chi \circ \det$. Hence,

$$\Omega^{I_1} = (\mathrm{soc}_K \Omega)^{I_1} = (\mathrm{soc}_K \pi)^{I_1} \subseteq \pi^{I_1} \subseteq \Omega^{I_1}$$

and so $\pi^{I_1} \cong \Omega^{I_1}$. If π is a tamely ramified principal series, which is not a twist of unramified principal series, then $\dim \pi^{I_1} = 2$ and $\mathrm{soc}_K \pi$ is irreducible, so $\dim \Omega^{I_1} = 2$. Finally, if $\pi \cong \pi(r, 0, \eta)$ with $0 < r < p-1$ then it follows from [**14**, 6.4.5] that $\Omega^{I_1} \cong E_{\lambda_1,\lambda_2}$ with $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. □

Proposition 10.2. — *Let π, τ be irreducible representations of G with a central character, and let ζ be the central character of π. Suppose that $\mathrm{Ext}^1_G(\tau, \pi) \neq 0$. If*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau, \pi) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)) \tag{44}$$

is not surjective then $\tau \cong \pi \cong \pi(r, 0, \eta)$ with $0 < r < p-1$.

Proof. — We note that Proposition 8.1 implies that ζ is the central character of τ. Since $\Omega|_K$ is an injective object in $\mathrm{Rep}_{K,\zeta}$, $\Omega|_{I_1}$ is an injective object in $\mathrm{Rep}_{I_1,\zeta}$. Hence, $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\Omega)=0$ and we have an exact sequence:

$$0\to\mathscr{I}(\pi)\to\mathscr{I}(\Omega)\to\mathscr{I}(\Omega/\pi)\to\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)\to 0. \tag{45}$$

Assume $\pi\cong\pi(r,0,\eta)$, $0<r<p-1$. Let $\partial\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi))$ be non-zero. Suppose that $\tau\ncong\pi$ then $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathscr{I}(\pi))=0$, [**6**, 6.5], Lemma 10.1 implies $\mathscr{I}(\Omega)/\mathscr{I}(\pi)\cong\mathscr{I}(\pi)$. So we have a surjection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathscr{I}(\Omega/\pi))\twoheadrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)). \tag{46}$$

Further, we have an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_G(\tau,\Omega/\pi)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathscr{I}(\Omega/\pi)). \tag{47}$$

Choose $\psi\in\mathrm{Hom}_G(\tau,\Omega/\pi)$ mapping to ∂ under the composition of (47) and (46). Since τ is irreducible, by pulling back the image of ψ we obtain an extension $0\to\pi\to E_\psi\to\tau\to 0$ inside of Ω. By construction, (44) maps the class of this extension to ∂.

If $\pi\ncong\pi(r,0,\eta)$ with $0<r<p-1$ then Lemma 10.1 says that $\mathscr{I}(\Omega/\pi)\cong\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$ and arguing as above we get that (44) is surjective. □

Corollary 10.3. — *Let π, τ be irreducible representations of G with a central character, and suppose that π is supersingular with a central character ζ. If $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)\neq 0$ and $\tau\ncong\pi$ then*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)).$$

Proof. — Proposition 8.1 implies that the central character of τ is ζ and $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)\cong\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$. By [**6**, Cor.6.5], $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathscr{I}(\pi))=0$. The assertion follows from Propositions 9.1, 10.2. □

Lemma 10.4. — *Let π and τ be supersingular representations of G with the same central character. Suppose that $\pi^{I_1}\cong\tau^{I_1}$ as H-representations then $\pi\cong\tau$.*

Proof. — It follows from the explicit description of supersingular modules $M(r,0,\eta)$ of $\mathscr{H}$ in §9 or [**14**, Def.2.1.2] that $\mathscr{I}(\tau)\cong\mathscr{I}(\pi)$ as $\mathscr{H}$-modules. Hence, $\tau\cong\mathscr{T}\mathscr{I}(\tau)\cong\mathscr{T}\mathscr{I}(\pi)\cong\pi$. □

Proposition 10.5. — *Let $\pi=\pi(r,0,\eta)$ with $0<r<p-1$, and let ζ be the central character of π. Assume that $p\geq 5$ then $\mathbb{R}\mathscr{I}^1(\pi)\cong\mathscr{I}(\pi)\oplus\mathscr{I}(\pi)$.*

Proof. — Corollary 6.6 implies that we have an isomorphism of $\mathscr{H}^+$-modules $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)\cong\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_\sigma)\oplus\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_{\tilde\sigma})$. Let $v\in\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_\sigma)$ it follows from Theorem 7.9 that $ve_\chi=v$. Since $0<r<p-1$ we have $\chi\neq\chi^s$ and so $ve_{\chi^s}=0$. Since $T_{n_s}\in\mathscr{H}^+$, $vT_{n_s}\in\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_\sigma)$ and hence $vT_{n_s}=vT_{n_s}e_\chi=ve_{\chi^s}T_{n_s}=0$. So T_{n_s} kills $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_\sigma)$ and by symmetry it also kills $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_{\tilde\sigma})$. Theorem 7.9 gives $\dim\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_\sigma)=2$. If we chose a basis $\{v,w\}$ of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_\sigma)$ then $\{vT_\Pi,wT_\Pi\}$ is a basis of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi_{\tilde\sigma})$. And it

follows from the explicit description of $M(r,0,\eta)$ in §9 that $\langle v, vT_\Pi\rangle$ is stable under the action of $\mathscr{H}$ and is isomorphic to $M(r,0,\eta)$. □

Proposition 10.6. — *Let π and ζ be as in Proposition 10.5 and let τ be an irreducible representation of G with a central character ζ. Assume $p>2$ and $\tau \ncong \pi$ then* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi))=0$.

Proof. — Assume that $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau), \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)) \neq 0$ if $p\geq 5$ then Proposition 10.5 implies that $\mathscr{I}(\tau)\cong\mathscr{I}(\pi)$, and hence $\tau\cong\pi$. Assume that $p=3$ then the assumption $0<r<p-1$ forces $r=1$. Corollary 7.10 implies that $\tau^{I_1}\cong\chi\oplus\chi^s$ as an H-representation, where χ is as in (9). It follows from Lemma 10.4 that τ cannot be supersingular. Since $\chi\neq\chi^s$ we get that τ is a principal series representation. Corollary 10.3 implies that $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)\neq 0$. Let η be one of the characters $\omega\circ\det$, $\mu_{-1}\circ\det$, $\omega\mu_{-1}\circ\det$. Since $p=3$ and $r=1$, (8) gives $\pi\cong\pi\otimes\eta$. Twisting by η gives $\mathrm{Ext}^1_G(\tau\otimes\eta,\pi)\neq 0$, and hence $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau\otimes\eta), \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi))\neq 0$. Since $p>2$ [**1**, Thm. 34, Cor. 36] imply that $\tau\ncong\tau\otimes\eta$ and so $\mathscr{I}(\tau)\ncong\mathscr{I}(\tau\otimes\eta)$ as $\mathscr{H}$-modules. This implies that $\dim\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$ is at least $4\times 2=8$, which contradicts Corollary 7.10. □

Theorem 10.7. — *Assume that $p>2$ and let τ and π be irreducible smooth representations of G admitting a central character. Suppose that π is supersingular and* $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)\neq 0$ *then $\tau\cong\pi$.*

Proof. — If $0<r<p-1$ the assertion follows from Corollary 10.3 and Proposition 10.6. Suppose that $r\in\{0,p-1\}$. Let $\mathfrak{I}$ be the image of $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi),\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi))$. Then it follows from Propositions 8.2, 9.1 and Lemma 9.3 that $\dim\mathfrak{I}\geq 3-1=2$. Hence, $\mathscr{I}(\pi)\oplus\mathscr{I}(\pi)$ is a submodule of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$. By forgetting the action of $\mathscr{H}$ we obtain an isomorphism of vector spaces $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)\cong H^1(I_1/Z_1,\pi)$. Corollary 7.10 implies that $\dim\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)=4$. Since $\dim\mathscr{I}(\pi)=2$ we obtain

$$\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)\cong\mathscr{I}(\pi)\oplus\mathscr{I}(\pi). \tag{48}$$

Corollary 10.3 implies the result. □

Remark 10.8. — *We note that the proof in the regular case $0<r<p-1$ is purely representation theoretic and makes no use of Colmez's functor. The Iwahori case $r\in\{0,p-1\}$ could also be done representation theoretically. One needs to work out the action of $\mathscr{H}$ on $H^1(I_1/Z_1,\pi)$. This can be done, but it is not so pleasant, in particular $p=3$ requires extra arguments.*

Lemma 10.9. — *Let $\pi\cong\pi(r,0,\eta)$ with $0<r<p-1$, then*

$$\dim\mathscr{I}(\Omega/\pi)\centerdot e_\chi T_{n_s}\geq 1,\quad \dim\mathscr{I}(\Omega/\pi)\centerdot e_{\chi^s}T_{n_s}\geq 1.$$

Proof. — We have an exact sequence of K-representations:

$$0\to\pi^{K_1}\to\Omega^{K_1}\to(\Omega/\pi)^{K_1} \tag{49}$$

Since $\Omega|_K\cong\mathrm{Inj}\,\sigma\oplus\mathrm{Inj}\,\tilde\sigma$, we have $\Omega^{K_1}\cong\mathrm{inj}\,\sigma\oplus\mathrm{inj}\,\tilde\sigma$, where inj denotes an injective envelope in the category Rep_{K/K_1}, [**14**, 6.2.4]. In [**6**, 20.1, §16] we have determined

the K-representation $\pi^{K_1} \cong \pi_\sigma^{K_1} \oplus \pi_{\tilde\sigma}^{K_1}$. It follows from the description and [**6**, 3.4, 3.5] that $\pi_\sigma^{K_1}$ is isomorphic to the kernel of $\mathrm{inj}\,\sigma \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_I^K \chi$. Hence, $(\Omega/\pi)^{K_1}$ contains $\mathrm{Ind}_I^K \chi \oplus \mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ as a subobject and so $(\Omega/\pi)^{I_1}$ contains $V := (\mathrm{Ind}_I^K \chi \oplus \mathrm{Ind}_I^K \chi^s)^{I_1}$. Moreover, V is stable under the action of T_{n_s}, and $\dim Ve_\chi T_{n_s} = \dim Ve_{\chi^s} T_{n_s} = 1$, [**14**, 3.1.11]. This yields the claim. □

Proposition 10.10. — *Let $\pi \cong \pi(r,0,\eta)$ with $0 < r < p-1$. If $p \geq 5$ then*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma,\pi) \leq 2, \quad \dim \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\tilde\sigma,\pi) \leq 2. \tag{50}$$

If $p = 3$ then

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma,\pi) \leq 3, \quad \dim \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\tilde\sigma,\pi) \leq 3. \tag{51}$$

Proof. — We have $\mathrm{Hom}_{K/Z_1}(\sigma,\pi) \cong \mathrm{Hom}_{K/Z_1}(\sigma,\Omega)$, since by construction $\mathrm{soc}_K\,\Omega \cong \mathrm{soc}_K\,\pi$. Moreover, since $\Omega|_K$ is injective in $\mathrm{Rep}_{K,\zeta}$ we have $\mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma,\Omega) = 0$. Hence,

$$\mathrm{Hom}_{K/Z_1}(\sigma,\Omega/\pi) \cong \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma,\pi). \tag{52}$$

It follows from [**14**, 4.1.5] that if κ is any smooth K-representation then one has

$$\mathrm{Hom}_{K/Z_1}(\sigma,\kappa) \cong \mathrm{Ker}(\mathscr{I}(\kappa)e_\chi \xrightarrow{T_{n_s}} \mathscr{I}(\kappa)e_{\chi^s}). \tag{53}$$

Now Lemma 10.9, (52) and (53) imply that

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma,\pi) \leq \dim \mathscr{I}(\Omega/\pi)e_\chi - 1 = \dim \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)e_\chi. \tag{54}$$

It follows from Theorem 7.9 that if $p \geq 5$ then $\dim \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)e_\chi = 2$ and if $p = 3$ then $\dim \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)e_\chi \leq 3$. The same proof also works for $\tilde\sigma$. □

Proposition 10.11. — *Let $\pi \cong \pi(r,0,\eta)$ with $0 < r < p-1$. If $p \geq 5$ then*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \leq 3. \tag{55}$$

If $p = 3$ then

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \leq 4. \tag{56}$$

Proof. — Recall that we have an exact sequence:

$$0 \to \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \xrightarrow{T} \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \to \pi \to 0. \tag{57}$$

Applying $\mathrm{Hom}_G(*,\pi)$ to (57) gives an exact sequence

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma,\pi) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \to \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma,\pi). \tag{58}$$

We may think of this exact sequence first as Yoneda Exts in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$, but since $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ has enough injectives Yoneda's Ext^n is isomorphic to $\mathbb{R}^n\,\mathrm{Hom} \cong \mathrm{Ext}^n_{G,\zeta}$. For any A in $\mathrm{Rep}_{G,\zeta}$ we have

$$\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma, A) \cong \mathrm{Hom}_{K/Z_1}(\sigma, \mathrm{F}A),$$

where $\mathrm{F} : \mathrm{Rep}_{G,\zeta} \to \mathrm{Rep}_{K,\zeta}$ is the restriction. The functor F is exact and maps injectives to injectives, hence

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma, A) \cong \mathrm{Ext}^1_{K/Z_1}(\sigma, \mathrm{F}A). \tag{59}$$

Now (58), (59) and Proposition 10.10 give the assertion. □

The same proof gives:

Corollary 10.12. — *Let* $n \geq 1$ *and* $\tau = \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^{G}\sigma}{(T^n)}$ *or* $\tau = \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^{G}\tilde{\sigma}}{(T^n)}$. *If* $p \geq 5$ *then* $\dim \text{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi) \leq 3$*; if* $p = 3$ *then* $\dim \text{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi) \leq 4$.

Theorem 10.13. — *Assume* $p > 2$ *and* $\pi \cong \pi(r,0,\eta)$ *supersingular. If* $(p,r) \neq (3,1)$ *then* $\dim \text{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) = 3$.

Proof. — Proposition 8.2 or §A gives $\dim \text{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \geq 3$. If $0 < r < p-1$ then equality follows from Proposition 10.11. If $r = 0$ or $r = p-1$ then $\text{Ext}^2_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi),\mathscr{I}(\pi)) = 0$ and $\text{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\pi),\mathscr{I}(\pi))$ is 1-dimensional by Lemma 9.3. Hence, (48) and (33) give $\dim \text{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) = 3$. □

For future use we record the following:

Proposition 10.14. — *Assume* $p > 2$ *and* $\pi \cong \pi(r,0,\eta)$ *supersingular. Let* $0 \to \mathscr{I}(\pi) \to E \to \mathscr{I}(\pi) \to 0$ *be a non-split extension of* $\mathscr{H}$*-modules. If* $(p,r) \neq (3,1)$ *then* $\dim \text{Ext}^1_{G,\zeta}(\mathscr{T}(E),\pi) \leq 3$.

Proof. — If $(p,r) \neq (3,1)$ then we have $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi) \cong \mathscr{I}(\pi) \oplus \mathscr{I}(\pi)$ and so $\dim \text{Hom}_{\mathscr{H}}(E, \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)) = 2$. So if $\dim \text{Ext}^1_{\mathscr{H}}(E,\mathscr{I}(\pi)) \leq 1$ then (33) allows us to conclude. If $r = 0$ or $r = p-1$ the latter may be deduced from Lemma 9.3. If $0 < r < p-1$ and $E \cong E_{\lambda_1,\lambda_2}$ with $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ then this is given by Lemma 9.5. If $\lambda_1\lambda_2 = 0$ then $\mathscr{T}(E) \cong \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^{G}\sigma}{(T^2)}$ or $\frac{\text{c-Ind}_{KZ}^{G}\tilde{\sigma}}{(T^2)}$ and the assertion is given by Corollary 10.12. □

11. Non-supersingular representations

We compute $\text{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$, when π is the Steinberg representation of G or a character and τ is an irreducible representation of G under the assumption $p > 2$. The results of this paper combined with [**6**] give all the extensions between irreducible representations of G, when $p > 2$. We record this below. A lot of cases have been worked out by different methods by Colmez [**7**] and Emerton [**8**]. The new results of this section are determination of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\text{Sp})$, where Sp is the Steinberg representation, and showing that if $\eta : G \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ is a smooth character of order 2 then $\text{Ext}^1_G(\eta,\text{Sp}) = 0$.

Proposition 11.1. — *Assume* $p > 2$ *and let* $\psi : H \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ *be a character. Suppose that* $\text{Ext}^1_{I/Z_1}(\psi,\text{Sp}) \neq 0$ *then* $\psi = \mathbf{1}$ *the trivial character. Moreover,* $\dim \text{Ext}^1_{I/Z_1}(\mathbf{1},\text{Sp}) = 2$.

Proof. — It follows from (7) that $\pi(p-1,1) \cong \text{Ind}_P^G \mathbf{1}$. By restricting (5) to I we obtain an exact sequence of I-representations:

$$0 \to \mathbf{1} \to \text{Ind}_{I\cap P^s}^{I}\mathbf{1} \oplus \text{Ind}_{I\cap P}^{I}\mathbf{1} \to \text{Sp} \to 0. \tag{60}$$

If we set $M := \mathrm{Ind}_{I\cap P^s}^{I} \mathbf{1}$ then $\mathrm{Ind}_{I\cap P}^{I} \mathbf{1} \cong M^{\Pi}$, and $M|_{H(I\cap U)} \cong \mathrm{Ind}_{H}^{H(I\cap U)} \mathbf{1}$ is an injective envelope of $\mathbf{1}$ in $\mathrm{Rep}_{H(I\cap U)}$. So (60) is an analog of Theorem 6.3. The proof of Theorem 7.9 goes through without any changes. For $p = 3$ we note that $M^{K_1} \cong \mathrm{Ind}_{HK_1}^{I} \mathbf{1}$ and hence M satisfies the assumptions of Lemma 7.7. □

Let $\omega : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\times}$ be a character, such that $\omega(p) = 1$ and $\omega|_{\mathbb{Z}_p^{\times}}$ is the reduction map composed with the canonical embedding.

Proposition 11.2. — *Assume $p > 2$ then $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathbf{1}) \cong M(p-3,1,\omega)$ and $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathrm{Sp}) \cong M(p-1,1)$,*

Proof. — Recall (5) gives an exact sequence

$$0 \to \mathbf{1} \to \pi(p-1,1) \to \mathrm{Sp} \to 0. \tag{61}$$

Applying $\mathscr{I}$ to (61) we get an exact sequence:

$$0 \to \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathbf{1}) \to \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi(p-1,1)) \to \mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathrm{Sp}).$$

Now [**6**, Thm. 7.16] asserts that $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi(p-1,1)) \cong M(p-3,1,\omega) \oplus M(p-1,1)$. Now H acts on $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathbf{1})$ and $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi(p-1,1))$ via $h \mapsto T_{h^{-1}}$. It follows from Definition 9.2 that

$$M(p-1,1) \cong \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}, \quad M(p-3,1,\omega) \cong \alpha \oplus \alpha^{-1}$$

as H-representations. Propositions 5.2, 5.4 imply that

$$\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathbf{1}) \cong H^1(I_1/Z_1, \mathbf{1}) \cong \mathrm{Hom}(I_1/Z_1, \overline{\mathbb{F}}_p) = \langle \kappa^u, \kappa^l \rangle \cong \alpha \oplus \alpha^{-1}$$

as H-representations. Since $p > 2$ we get $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathbf{1}) \cong M(p-3,1,\omega)$. Then $M(p-1,1)$ is a 2-dimensional submodule of $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathrm{Sp})$. However, Proposition 11.1 implies that $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\mathrm{Sp})$ is 2-dimensional, so the injection is an isomorphism. □

Lemma 11.3. — *Let M be an irreducible $\mathscr{H}$-module. If $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M, \mathscr{I}(\mathbf{1}))$ or $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M, \mathscr{I}(\mathrm{Sp}))$ is non-zero then $M \in \{\mathscr{I}(\mathbf{1}), \mathscr{I}(\mathrm{Sp})\}$. Moreover,*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\mathbf{1}), \mathscr{I}(\mathrm{Sp})) = \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\mathrm{Sp}), \mathscr{I}(\mathbf{1})) = 1.$$

If $p > 2$ then $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\mathbf{1}), \mathscr{I}(\mathbf{1}))$ and $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\mathrm{Sp}), \mathscr{I}(\mathrm{Sp}))$ are zero, and if $p = 2$ then both spaces are 1-dimensional.

Proof. — Recall that (6) gives an exact sequence:

$$0 \to \mathrm{Sp} \to \pi(0,1) \to \mathbf{1} \to 0. \tag{62}$$

Applying $\mathscr{I}$ we obtain an exact sequence:

$$0 \to \mathscr{I}(\mathrm{Sp}) \to M(0,1) \to \mathscr{I}(\mathbf{1}) \to 0. \tag{63}$$

If $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(M, \mathscr{I}(\mathrm{Sp})) \neq 0$ and $M \ncong \mathscr{I}(\mathbf{1})$ then from (63) we obtain that $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(N, M(0,1)) \neq 0$, and [**6**, Cor.6.5] implies that M is either a subquotient of $M(0,1)$ or a subquotient of $M(p-1,1)$. Hence $M \cong \mathscr{I}(\mathrm{Sp})$. Using (61) one can deal in the same way with $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(N, \mathscr{I}(\mathbf{1}))$. Since $\mathscr{I}(\mathbf{1})$ and $\mathscr{I}(\mathrm{Sp})$ are one

dimensional, one can verify the rest by hand using the description of $\mathscr{H}$ in terms of generators and relations given in (36). □

Let π and τ be irreducible representations of G admitting the same central character ζ. Assume that π is not supersingular. When $p>2$ for given π we are going to list all τ such that $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)\neq 0$. If one is interested in $\mathrm{Ext}^1_G(\tau,\pi)$ then this can be deduced from Proposition 8.1. If $\eta : G\to \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ is a smooth character then $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau\otimes\eta,\pi\otimes\eta)\cong\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$. Hence, we may assume that π is $\mathbf{1}$, Sp or $\pi(r,\lambda)$ with $\lambda\neq 0$ and $(r,\lambda)\neq(0,\pm1)$, $(r,\lambda)\neq(p-1,\pm1)$. Recall if $\lambda\neq 0$ and $(r,\lambda)\neq(0,\pm1)$ then [**1**, Thm. 30] asserts that

$$\pi(r,\lambda)\cong \mathrm{Ind}_P^G \mu_{\lambda^{-1}}\otimes\mu_\lambda\omega^r. \tag{64}$$

It follows from (64) that if $\lambda\neq\pm1$ then $\pi(0,\lambda)\cong\pi(p-1,\lambda)$. Hence, we may assume that $1\leq r\leq p-1$. Propositions 9.1 and 10.2 gives us an exact sequence:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{J}(\tau),\mathscr{J}(\pi))\hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)\twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{J}(\tau),\mathbb{R}^1\mathscr{J}(\pi)). \tag{65}$$

Theorem 11.4. — *Let π, τ and ζ be as above. Assume that $p>2$ and $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)\neq 0$. Let d be the dimension of $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$.*

(i) *if $\pi\cong\mathbf{1}$ then one of the following holds:*
  (a) *$\tau\cong\mathrm{Sp}$, and $d=1$;*
  (b) *$p\geq 5$, $\tau\cong\pi(p-3,1,\omega)\cong\mathrm{Ind}_P^G\omega\otimes\omega^{-1}$ and $d=1$;*
  (c) *$p=3$, $\tau\cong\mathrm{Sp}\otimes\omega\circ\det$ and $d=1$;*

(ii) *if $\pi\cong\mathrm{Sp}$ then $\tau\cong\mathbf{1}$ and $d=2$;*

Proof. — This follows from (65), Lemma 11.3 and Proposition 11.2. We note that if $p=3$ then $\pi(p-3,1,\omega)$ is reducible, but has a unique irreducible subobject isomorphic to $\mathrm{Sp}\otimes\omega\circ\det$. □

For the sake of completeness we also deal with $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$ when π is irreducible principal series. We deduce the results from [**6**, §8], but they are also contained in [**7**] and [**8**].

Theorem 11.5. — *Let π, τ and ζ be as above. Assume that $p>2$, $\pi\cong\pi(r,\lambda)$ with $1\leq r\leq p-1$, $\lambda\in\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ and $(r,\lambda)\neq(p-1,\pm1)$. Then*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi(r,\lambda),\pi(r,\lambda))\cong\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times,\overline{\mathbb{F}}_p).$$

In particular, $\dim\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi(r,\lambda),\pi(r,\lambda))=2$. Moreover, suppose that $\tau\ncong\pi$ and $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)\neq 0$. Let d be the dimension of $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi)$ then one of the following holds:

(i) *if $(r,\lambda)=(p-2,\pm1)$ then such τ does not exist;*
(ii) *if $(r,\lambda)=(p-3,\pm1)$ (hence $p\geq 5$) then $\tau\cong\mathrm{Sp}\otimes\omega^{-1}\mu_{\pm1}\circ\det$ and $d=1$;*
(iii) *otherwise, $\tau\cong\pi(s,\lambda^{-1},\omega^{r+1})$, where $0\leq s\leq p-2$ and $s\equiv p-3-r \pmod{p-1}$, and $d=1$.*

Remark 11.6. — *Note that if* $\pi = \pi(r,\lambda)$ *is as in (iii) and we write* $\pi \cong \mathrm{Ind}_P^G \psi_1 \otimes \psi_2\omega^{-1}$, *then it follows from* (64) *that* $\pi(s,\lambda^{-1},\omega^{r+1}) \cong \mathrm{Ind}_P^G \psi_2 \otimes \psi_1\omega^{-1}$.

Proof. — The first assertion follows from [**6**, Cor.8.2]. Assume that $\tau \ncong \pi$ then it follows from [**6**, Cor.6.5, 6.6, 6.7] that $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathscr{I}(\pi)) = 0$. Hence, (65) implies that $\mathrm{Ext}^1_{G,\zeta}(\tau,\pi) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{I}(\tau),\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi))$. The assertions (i),(ii) and (iii) follow from [**6**, Thm. 7.16], where $\mathbb{R}^1\mathscr{I}(\pi)$ is determined. The difference between (ii) and (iii) is accounted for by the fact that if $r = p-3$ then $s = 0$ and if $\lambda = \pm 1$ then $\pi(s,\lambda^{-1},\omega^{r+1}) \cong \pi(0,\pm 1,\omega^{p-2})$, which is reducible, but has a unique irreducible submodule isomorphic to $\mathrm{Sp}\otimes\omega^{-1}\mu_{\pm 1}\circ\det$. □

Appendix A

Lower bound on $\dim \mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi)$

Let $\mathbb{F}$ be a finite field of characteristic $p > 2$ and $W(\mathbb{F})$ the ring of Witt vectors. Let $0 \le r \le p-1$ be an integer and set

$$\pi(r) := \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \mathrm{Sym}^r \mathbb{F}^2}{(T)}.$$

We note that the endomorphism T is defined over $\mathbb{F}$, see [**1**, Prop 1]. In this section, we bound the dimension of $\mathrm{Ext}^1_G(\pi(r),\pi(r))$ from below, using the ideas of Colmez and Kisin. Let L be a finite extension of $W(\mathbb{F})[1/p]$ and $\mathscr{O}$ the ring of integers in L. Let $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ be the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$. Let $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}} G$ be the category of $\mathscr{O}[G]$-modules of finite length, with the central character, and such that the action of G is continuous for the discrete topology. Let $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}}\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ be the category of $\mathscr{O}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$-modules of finite length, such that the action of $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ is continuous for the discrete topology. Colmez in [**7**] has defined an exact functor

$$\mathbf{V} : \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}} G \to \mathrm{Rep}_{\mathscr{O}}\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}.$$

Set $\rho(r) := \mathbf{V}(\pi(r))$, then $\rho(r)$ is an absolutely irreducible 2-dimensional $\mathbb{F}$-representation of $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, uniquely determined by the following: $\det\rho = \omega^{r+1}$; the restriction of ρ to inertia is isomorphic to $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$, where ω_2 is the fundamental character of Serre of niveau 2. In the notation of [**5**], $\rho(r) = \mathrm{ind}\,\omega_2^{r+1}$. We note that since, $\pi(r)$ and $\rho(r)$ are absolutely irreducible, the functor $\mathbf{V}$ induces an isomorphism:

$$\mathrm{Hom}_G(\pi(r),\pi(r)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\rho(r),\rho(r)) \cong \mathbb{F}. \tag{66}$$

Let $\eta : \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathscr{O}^\times$ be a crystalline character lifting $\zeta := \omega^r$ the central character of $\pi(r)$. We consider η as a character of the centre of G, $Z(G) \cong \mathbb{Q}_p^\times$ via the class field theory. To simplify the notation we set $\pi := \pi(r)$ and $\rho := \rho(r)$. Let $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}}^{\pi,\eta} G$ be the full subcategory of $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}} G$, such that τ is an object in $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}}^{\pi,\eta} G$ if and only if the central character of τ is equal to (the image of) η, and the irreducible subquotients of τ are isomorphic to π. We note that $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}}^{\pi,\eta} G$ is abelian.

For τ and κ in $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} G$ we let $\mathrm{Ext}^1_G(\kappa,\tau)$ be the Yoneda Ext^1 in $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} G$, so an element of $\mathrm{Ext}^1_G(\kappa,\tau)$ can be viewed as an equivalence class of an exact sequence

$$0 \to \tau \to E \to \kappa \to 0, \tag{67}$$

where E lies in $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} G$. Applying $\mathbf{V}$ to (67) we get an exact sequence $0 \to \mathbf{V}(\tau) \to \mathbf{V}(E) \to \mathbf{V}(\kappa) \to 0$. Hence, a map

$$\mathrm{Ext}^1_G(\kappa,\tau) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbf{V}(\kappa),\mathbf{V}(\tau)). \tag{68}$$

A theorem of Colmez [**7**, VII.5.3] asserts that (68) is injective, when $\tau = \kappa = \pi$.

Lemma A.1. — *Let τ and κ be in $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} G$ then $\mathbf{V}$ induces an isomorphism, and an injection respectively:*

$$\mathrm{Hom}_G(\kappa,\tau) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbf{V}(\kappa),\mathbf{V}(\tau)),$$

$$\mathrm{Ext}^1_G(\kappa,\tau) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbf{V}(\kappa),\mathbf{V}(\tau)).$$

Proof. — We may assume that $\tau \neq 0$ and $\kappa \neq 0$. We argue by induction on $\ell(\tau)+\ell(\kappa)$, where ℓ is the length as an $\mathscr{O}[G]$-module. If $\ell(\tau)+\ell(\kappa) = 2$ then $\tau \cong \kappa \cong \pi$ and the assertion about Ext^1 is a Theorem of Colmez cited above, the assertion about Hom follows from (66). Assume that $\ell(\tau) > 1$ then we have an exact sequence:

$$0 \to \tau' \to \tau \to \pi \to 0. \tag{69}$$

Since $\mathbf{V}$ is exact we get an exact sequence:

$$0 \to \mathbf{V}(\tau') \to \mathbf{V}(\tau) \to \mathbf{V}(\pi) \to 0. \tag{70}$$

Applying $\mathrm{Hom}_G(\kappa,\boldsymbol{.})$ to (69) and $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbf{V}(\kappa),\boldsymbol{.})$ to (70) we obtain two long exact sequences, and a map between them induced by $\mathbf{V}$. With the obvious notation we get a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & C^0 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & B^1 & \longrightarrow & C^1 \\
 & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{A}^0 & \longrightarrow & \mathscr{B}^0 & \longrightarrow & \mathscr{C}^0 & \longrightarrow & \mathscr{A}^1 & \longrightarrow & \mathscr{B}^1 & \longrightarrow & \mathscr{C}^1.
\end{array}$$

The first and third vertical arrows are isomorphisms, fourth and sixth injections by induction hypothesis. This implies that the second arrow is an isomorphism, and the fifth is an injection. Hence,

$$\mathrm{Hom}_G(\kappa,\tau) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbf{V}(\kappa),\mathbf{V}(\tau)),$$

$$\mathrm{Ext}^1_G(\kappa,\tau) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbf{V}(\kappa),\mathbf{V}(\tau)).$$

If $\ell(\tau) = 1$ and $\ell(\kappa) > 1$ then one may argue similarly with $\mathrm{Hom}_G(\boldsymbol{.},\tau)$ and $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\boldsymbol{.},\mathbf{V}(\tau))$. □

From now on we assume that $(p,r) \neq (3,1)$. Let $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ be the full subcategory of $\mathrm{Rep}_{\mathscr{O}} \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, with objects ρ', such that there exists π' in $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} G$ with $\rho' \cong \mathbf{V}(\pi')$. Lemma A.1 implies that $\mathbf{V}$ induces an equivalence of categories between $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} G$ and $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. In particular, $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ is abelian. We define three deformation problems for ρ, closely following Mazur [**12**]. Let D^u be the universal deformation problem; $D^{\omega\eta}$ the deformation problem with the determinant condition, so that we consider the deformations with determinant equal to $\omega\eta$, [**12**, §24]; $D^{\pi,\eta}$ a deformation problem with the categorical condition, so that we consider those deformations, which as representations of $\mathscr{O}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]$ lie in $\mathrm{Rep}^{\pi,\eta}_{\mathscr{O}} \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, [**12**, §25], [**15**]. Since ρ is absolutely irreducible, the functors D^u, $D^{\omega\eta}$, $D^{\pi,\eta}$ are (pro-)representable by complete local noetherian $\mathscr{O}$-algebras R^u, $R^{\omega\eta}$, $R^{\pi,\eta}$ respectively. By the universality of R^u we have surjections $R^u \twoheadrightarrow R^{\omega\eta}$ and $R^u \twoheadrightarrow R^{\pi,\eta}$.

For ρ' in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}} \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ we set $h^i(\rho') := \dim_{\mathbb{F}} H^i(\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}, \rho')$. Let V be the underlying vector space of ρ, the $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$ acts by conjugation on $\mathrm{End}_{\mathbb{F}} V$. We denote this representation by $\mathrm{Ad}(\rho)$, in particular $\mathrm{Ad}(\rho) \cong \rho \otimes \rho^*$. Local Tate duality gives

$$h^2(\rho \otimes \rho^*) = h^0(\rho \otimes \rho^* \otimes \omega) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}}(\rho, \rho \otimes \omega).$$

Now [**4**, Lem. 4.2.2] implies that $\rho \cong \rho \otimes \omega$ if and only if $p = 2$ or $(p,r) = (3,1)$. Since both cases are excluded here, we have $h^2(\mathrm{Ad}(\rho)) = 0$. Since ρ is absolutely irreducible $h^0(\rho \otimes \rho^*) = 1$. The local Euler characteristic gives:

$$4 = \dim \rho \otimes \rho^* = -h^0(\rho \otimes \rho^*) + h^1(\rho \otimes \rho^*) - h^2(\rho \otimes \rho^*)$$

and so $h^1(\mathrm{Ad}(\rho)) = 5$. Since $p > 2$ the exact sequence of $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$-representations:

$$0 \to \mathrm{Ad}^0(\rho) \to \mathrm{Ad}(\rho) \overset{trace}{\to} \mathbb{F} \to 0$$

splits. Hence $h^1(\mathrm{Ad}^0(\rho)) = 3$ and $h^2(\mathrm{Ad}^0(\rho)) = 0$. It follows from [**11**] that $R^u \cong \mathscr{O}[[t_1, \ldots, t_5]]$ and $R^{\omega\eta} \cong \mathscr{O}[[t_1, t_2, t_3]]$.

Inverting p we get surjections $R^u[1/p] \twoheadrightarrow R^{\omega\eta}[1/p]$ and $R^u[1/p] \twoheadrightarrow R^{\pi,\eta}[1/p]$, and hence closed embeddings

$$\mathrm{Spec}\, R^{\omega\eta}[1/p] \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, R^u[1/p], \quad \mathrm{Spec}\, R^{\pi,\eta}[1/p] \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, R^u[1/p].$$

Let $x \in \mathrm{Spec}\, R^{\omega\eta}[1/p]$ be a closed point with residue field E. Specializing at x we obtain a continuous 2-dimensional E-representation V_x of $\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Suppose that V_x is crystalline, and if λ_1, λ_2 are eigenvalues of φ on $D_{crys}(V_x^*)$ then $\lambda_1 \neq \lambda_2$ and $\lambda_1 \neq \lambda_2 p^{\pm 1}$ then Berger-Breuil in [**3**] associate to V_x a unitary E-Banach space representation B_x of G. Choose a G-invariant norm $\|\,.\,\|$ on B_x defining the topology and such that $\|B_x\| \subseteq |E|$ and let B_x^0 be the unit ball with respect to $\|\,.\,\|$. Berger has shown in [**2**] that $B_x^0 \otimes_{\mathscr{O}_E} \mathbb{F} \cong \pi$ as G-representations. The constructions in [**3**] and [**7**] are mutually inverse to one another. This means

$$V_x \cong E \otimes_{\mathscr{O}_E} \varprojlim \mathbf{V}(B_x^0/\varpi_E^n B_x^0).$$

Hence, every such x also lies in $\mathrm{Spec}\, R^{\pi,\eta}[1/p]$. A Theorem of Kisin [**10**, 1.3.4] asserts that the set of crystalline points, satisfying the conditions above, is Zariski

dense in $\operatorname{Spec} R^{\omega\eta}[1/p]$. Since $\operatorname{Spec} R^{\omega\eta}[1/p]$ and $\operatorname{Spec} R^{\pi,\eta}[1/p]$ are closed subsets of $\operatorname{Spec} R^{u}[1/p]$, we get that $\operatorname{Spec} R^{\omega\eta}[1/p]$ is contained in $\operatorname{Spec} R^{\pi,\eta}[1/p]$. Since $R^{\omega\eta}[1/p]$ is reduced we get a surjective homomorphism $R^{\pi,\eta}[1/p] \twoheadrightarrow R^{\omega\eta}[1/p]$. Let I be the kernel of $R^{u} \twoheadrightarrow R^{\pi,\eta}$ and let $a \in I$. The image of a in $R^{\pi,\eta}[1/p]$ is zero, hence a maps to 0 in $R^{\omega\eta}[1/p]$. Since $R^{\omega\eta}$ is p-torsion free, the map $R^{\omega\eta} \to R^{\omega\eta}[1/p]$ is injective, and hence the image of a in $R^{\omega\eta}$ is zero. So the surjection $R^{u} \twoheadrightarrow R^{\omega\eta}$ factors through $R^{\pi,\eta} \twoheadrightarrow R^{\omega\eta}$. Let $\mathfrak{m}_{\pi,\eta}$ and $\mathfrak{m}_{\omega\eta}$ be the maximal ideals in $R^{\pi,\eta}$ and $R^{\omega\eta}$ respectively. Then we obtain a surjection:

$$D^{\pi,\eta}(\mathbb{F}[\varepsilon])^* \cong \frac{\mathfrak{m}_{\pi,\eta}}{\varpi_L R^{\pi,\eta} + \mathfrak{m}_{\pi,\eta}^2} \twoheadrightarrow \frac{\mathfrak{m}_{\omega\eta}}{\varpi_L R^{\omega\eta} + \mathfrak{m}_{\omega\eta}^2} \cong D^{\omega\eta}(\mathbb{F}[\varepsilon])^*, \tag{71}$$

where $\mathbb{F}[\varepsilon]$ is the dual numbers, $\varepsilon^2 = 0$, and star denotes $\mathbb{F}$-linear dual. It follows from (71) that $\dim_{\mathbb{F}} D^{\pi,\eta}(\mathbb{F}[\varepsilon]) \geq \dim_{\mathbb{F}} D^{\omega\eta}(\mathbb{F}[\varepsilon]) = 3$. Now $D^{u}(\mathbb{F}[\varepsilon]) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{F}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(\rho,\rho)$, [**12**, §22] and so $D^{\pi,\eta}(\mathbb{F}[\varepsilon])$ is isomorphic to the image of $\operatorname{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi)$ in $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{F}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(\rho,\rho)$ via (68), where $\operatorname{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi)$ is Yoneda Ext in the category of smooth $\mathbb{F}$-representations of G with central character ζ. Now, [**7**, VII.5.3] implies that the map $\operatorname{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{F}[\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}]}(\rho,\rho)$ is an injection. We obtain:

Theorem A.2. — *Let π be as above and assume that $(p,r) \neq (3,1)$ then* $\dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Ext}^1_{G,\zeta}(\pi,\pi) \geq 3$.

References

[1] L. Barthel & R. Livné – "Irreducible modular representations of GL_2 of a local field", *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[2] L. Berger – "Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2", *Astérisque* **330** (2010), p. 263–279.

[3] L. Berger & C. Breuil – "Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$", *Astérisque* **330** (2010), p. 155–211.

[4] C. Breuil – "Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I", *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[5] ———, "Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II", *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[6] C. Breuil & V. Paškūnas – "Towards mod p Langlands correspondence for GL_2", to appear in *Memoirs of Amer. Math. Soc.*

[7] P. Colmez – "Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules", *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.

[8] M. Emerton – "Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II: derived functors", this volume.

[9] M. Kisin – "The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2", *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), p. 641–690.

[10] ———, "Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ representations", appendix to [**7**].

[11] B. Mazur – "Deforming Galois representations", in *Galois groups over* **Q** *(Berkeley, CA, 1987)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, 1989, p. 385–437.

[12] ———, "An introduction to the deformation theory of Galois representations", in *Modular forms and Fermat's last theorem (Boston, MA, 1995)*, Springer, 1997, p. 243–311.

[13] R. Ollivier – "Le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$", *J. reine angew. Math.* **635** (2009), p. 149–185.

[14] V. Paškūnas – "Coefficient systems and supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$", *Mémoires de la SMF* **99** (2004).

[15] R. Ramakrishna – "On a variation of Mazur's deformation functor", *Compositio Math.* **87** (1993), p. 269–286.

[16] J-P. Serre – *Corps locaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII, Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.

[17] ———, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, 1994.

[18] M.-F. Vignéras – "Representations modulo p of the p-adic group $\mathrm{GL}(2, F)$", *Compos. Math.* **140** (2004), p. 333–358.

V. Paškūnas, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 100131, D-33501 Bielefeld, Germany • *E-mail :* paskunas@mathematik.uni-bielefeld.de

Astérisque
331, 2010, p. 355–402

ORDINARY PARTS OF ADMISSIBLE REPRESENTATIONS OF p-ADIC REDUCTIVE GROUPS I. DEFINITION AND FIRST PROPERTIES

by

Matthew Emerton

Abstract. — If G is a connected reductive p-adic group, P is a parabolic subgroup of G, and M is a Levi factor of P, and if A is an Artinian local ring having a finite residue field of characteristic p, then we define a functor Ord_P from the category of admissible smooth P-representations over A to the category of admissible smooth M-representations of A, which we call the functor of ordinary parts. We show that this functor is right adjoint to the functor of parabolic induction $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$, where $\overline{P}$ is an opposite parabolic to P.

Résumé **(Parties ordinaires de représentations admissibles de groupes réductifs p-adiques I. Définitions et premières propriétés)**

Soit G un groupe p-adique connexe réductif, P un sous-groupe parabolique de G, et M un facteur de Levi de P. Si A est un anneau local artinien ayant un corps résiduel fini de caractéristique p, alors nous définissons un foncteur Ord_P de la catégorie des P-représentations sur A lisses et admissibles vers la catégorie des M-représentations de A lisses et admissibles, que nous appelons foncteur des parties ordinaires. Nous montrons que ce foncteur est adjoint à droite du foncteur d'induction parabolique $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$, où $\overline{P}$ est un opposé parabolique de P.

1. Introduction

This paper is the first of two in which we define and study the functors of ordinary parts on categories of admissible smooth representations of p-adic reductive groups over fields of characteristic p, as well as their derived functors. These functors of ordinary parts, which are characterized as being right adjoint to parabolic induction, play an important role in the study of smooth representation theory in characteristic p. They also have important global applications: when applied in the context of the

2000 Mathematics Subject Classification. — 22E50.
Key words and phrases. — Ordinary parts, representations of p-adic reductive groups, parabolic induction.

The author was supported in part by NSF grants DMS-0401545 and DMS-0701315.

© Astérisque 331, SMF 2010

p-adically completed cohomology spaces introduced in [**6**], they provide a representation theoretic approach to Hida's theory of (nearly) ordinary parts of cohomology [**11, 12, 13**]. The immediate applications that we have in mind are for the group GL_2: the results of our two papers have applications to the construction of the mod p and p-adic local Langlands correspondences for the group $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, and to the investigation of local-global compatibility for p-adic Langlands over the group GL_2 over $\mathbb{Q}$.

To describe our results more specifically, let G be (the $\mathbb{Q}_p$-valued points of) a connected reductive p-adic group, P a parabolic subgroup of G, $\overline{P}$ an opposite parabolic to P, and $M = P \bigcap \overline{P}$ the corresponding Levi factor of P and $\overline{P}$. If k is a finite field of characteristic p, we let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$ (resp. $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(k)$) denote the category of admissible smooth G-representations (resp. M-representations) over k. Parabolic induction yields a functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} : \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(k) \to \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$. The functor of ordinary parts associated to P is then a functor $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k) \to \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(k)$, which is right adjoint to $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$.

In this paper, we define Ord_P and study its basic properties. In the sequel [**10**] we investigate the derived functors of Ord_P, and present some applications to the computation of Ext spaces in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$ in the case when $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, computations which in turn play a role in the construction of the mod p and p-adic local Langlands correspondences (see [**4**] and [**8**]). The applications to local-global compatibility are part of the arguments of [**8**]. We hope to discuss the applications in the context of p-adically completed cohomology in a future paper. Let us only mention here that Theorem 3.4.8 below is an abstract formulation of Hida's general principle that the ordinary part of cohomology should be finite over weight space.

1.1. Arrangement of the paper. — In order to allow for maximum flexibility in applications, we actually work throughout the paper with representations defined not just over the field k, but over general Artinian local rings, or even complete local rings, having residue field k. This necessitates a development of the foundations of the theory of admissible representations over such coefficient rings. Such a development is the subject of Section 2. We also take the opportunity in that section to present some related representation theoretic notions that do not seem to be in the literature, and which will be useful in this paper, its sequel, and future applications. The functors Ord_P are defined, and some of their basic properties established, in Section 3. Their characterization as adjoint functors is proved in Section 4. In the appendix we establish some simple functional analytic results about modules over p-adic integer rings.

1.2. Notation and terminology. — Throughout the paper, we fix a prime p, as well as a finite extension E of $\mathbb{Q}_p$, with ring of integers $\mathscr{O}$. We let $\mathbb{F}$ denote the residue field of $\mathscr{O}$, and ϖ a choice of uniformizer of $\mathscr{O}$. Let $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$ denote the category of complete Noetherian local $\mathscr{O}$-algebras having finite residue fields, and let $\mathrm{Art}(\mathscr{O})$

denote the full subcategory of $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$ consisting of those objects that are Artinian (or equivalently, of finite length as $\mathscr{O}$-modules).

If A is an object of $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$, and V is an A-module which is torsion as an $\mathscr{O}$-module, then we write $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})$ to denote the Pontrjagin dual of V (where V is endowed with its discrete topology), equipped with its natural profinite topology. If V is a G-representation over A, for some group G, then the contragredient action makes V^* a G-representation over A (with each element of G acting via a continuous automorphism).

If V is any $\mathscr{O}$-module, then we let V_{fl} denote the maximal $\mathscr{O}$-torsion free quotient of V. We write $V[\varpi^i]$ to denote the kernel of multiplication by ϖ^i on V, and $V[\varpi^\infty] := \bigcup_{i\geq 0} V[\varpi^i]$. If $\mathscr{C}$ is any $\mathscr{O}$-linear category, then for any integer $i \geq 0$ (resp. $i = \infty$), we let $\mathscr{C}[\varpi^i]$ denote the full subcategory of $\mathscr{C}$ consisting of objects that are annihilated by ϖ^i (resp. by some power of ϖ).

1.3. Acknowledgments. — I would like to thank the referee for a very careful reading of the paper, and for saving me from a blunder or two. I would also like to thank Florian Herzig for his close reading of an earlier version of the paper, and Kevin Buzzard for his helpful comments.

2. Representations of p-adic analytic groups

Let G be a p-adic analytic group. Throughout this section, we will let A denote an object of $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$, with maximal ideal $\mathfrak{m}$. We denote by $\mathrm{Mod}_G(A)$ the abelian category of representations of G over A (with morphisms being A-linear G-equivariant maps); equivalently, $\mathrm{Mod}_G(A)$ is the abelian category of $A[G]$-modules, where $A[G]$ denotes the group ring of G over A. In this section we introduce, and study some basic properties of, various categories of G-representations, as well as of certain related categories of what we will call augmented G-representations.

2.1. Augmented G-representations. — If H is a compact open subgroup of G, then as usual we let $A[[H]]$ denote the completed group ring of H over A, i.e.

$$A[[H]] := \varprojlim_{H'} A[H/H'], \tag{2.1.1}$$

where H' runs over all normal open subgroups of H. We equip $A[[H]]$ with the projective limit topology obtained by endowing each of the rings $A[H/H']$ appearing on the right hand side of (2.1.1) with its $\mathfrak{m}$-adic topology. The rings $A[H/H']$ are then profinite (since each H/H' is a finite group), and hence this makes $A[[H]]$ a profinite, and so in particular compact, topological ring.

2.1.2. *Theorem*. — *The completed group ring $A[[H]]$ is Noetherian.*

Proof. — In the case when $A = \mathscr{O} = \mathbb{Z}_p$, this is proved by Lazard [**14**]: after replacing H by an open subgroup, if necessary, Lazard equips $\mathbb{Z}_p[[H]]$ with an exhaustive decreasing filtration $F^\bullet$ whose associated graded ring $\mathrm{Gr}^\bullet_F \mathbb{Z}_p[[H]]$ is isomorphic to a

polynomial algebra (with generators in degree 1) over the graded ring $\mathbb{F}_p[t]$ (which is the graded ring associated to $\mathbb{Z}_p$ with its p-adic filtration).

For general A, we may write $A[[H]] \xrightarrow{\sim} A\hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p[[H]]$, and so equip $A[[H]]$ with an exhaustive decreasing filtration obtained as the completed tensor product of the $\mathfrak{m}$-adic filtration on A and Lazard's filtration $F^\bullet$ on $\mathbb{Z}_p[[H]]$. The graded ring associated to this filtration on the completed tensor product is naturally isomorphic to a quotient of the tensor product of the individual associated graded rings, i.e. is isomorphic to a quotient of $(\mathrm{Gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}A) \otimes_{\mathbb{F}_p[t]} \mathrm{Gr}^\bullet_F\mathbb{Z}_p[[H]]$, where $\mathrm{Gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}A$ denotes the graded ring associated to the $\mathfrak{m}$-adic filtration on A (which is also naturally an algebra over the graded ring $\mathbb{F}_p[t]$ associated to the p-adic filtration of $\mathbb{Z}_p$, since $p \in \mathfrak{m}$).

Thus the associated graded ring to $A[[H]]$ is isomorphic to a quotient of a polynomial algebra over the Noetherian ring $\mathrm{Gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}A$, and thus is again Noetherian. Consequently $A[[H]]$ itself is Noetherian, as claimed. □

2.1.3. *Proposition*. — 1. *Any finitely generated $A[[H]]$-module admits a unique profinite topology with respect to which the $A[[H]]$-action on it becomes jointly continuous.*

2. *Any $A[[H]]$-linear morphism of finitely generated $A[[H]]$-modules is continuous with respect to the profinite topologies on its source and target given by part* (1).

Proof. — Since $A[[H]]$ is Noetherian, we may find a presentation

$$A[[H]]^s \to A[[H]]^r \to M \to 0$$

of M, for some $r, s \geq 0$. Since $A[[H]]$ is profinite, it follows that the first arrow has closed image, and hence that M is the quotient of the profinite module $A[[H]]^r$ by a closed $A[[H]]$-submodule. If we equip M with the induced quotient topology, then it becomes a profinite module. The resulting profinite topology on M is clearly independent of the chosen presentation, and satisfies the requirements of the proposition. □

2.1.4. *Definition*. — If M is a finitely generated $A[[H]]$-module, we refer to the topology given by the preceding lemma as the canonical topology on M.

2.1.5. *Definition*. — By an augmented representation of G over A we mean an $A[G]$-module M equipped with an $A[[H]]$-module structure for some (equivalently, any) compact open subgroup H of G, such that the two induced $A[H]$-actions (the first induced by the inclusion $A[H] \subset A[[H]]$ and the second by the inclusion $A[H] \subset A[G]$) coincide.

2.1.6. *Definition*. — By a profinite augmented G-representation over A we mean an augmented G-representation M over A that is also equipped with a profinite topology, so that the $A[[H]]$-action on M is jointly continuous [(1)] for some (equivalently any) compact open subgroup H over A.

[(1)] It is equivalent to ask that the profinite topology on M admits a neighborhood basis at the origin consisting of $A[[H]]$-submodules.

The equivalence of the conditions "some" and "any" in the preceding definitions follows from the fact that if H_1 and H_2 are two compact open subgroups of G, then $H := H_1 \bigcap H_2$ has finite index in each of H_1 and H_2.

We denote by $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{aug}}(A)$ the abelian category of augmented G-representations over A, with morphisms being maps that are simultaneously G-equivariant and $A[[H]]$-linear for some (equivalently, any) compact open subgroup H of G, and by $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ the abelian category of profinite augmented G-representations, with morphisms being continuous A-linear G-equivariant maps (note that since $A[H]$ is dense in $A[[H]]$, any such map is automatically $A[[H]]$-linear for any compact open subgroup H of G). Forgetting the topology induces a forgetful functor

$$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A) \longrightarrow \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{aug}}(A).$$

We let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{aug}}(A)$ consisting of augmented G-modules that are finitely generated over $A[[H]]$ for some (equivalently any) compact open subgroup H of G. Proposition 2.1.3 shows that by equipping each object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)$ with its canonical topology, we may lift the inclusion $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A) \to \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{aug}}(A)$ to an inclusion $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A) \to \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$.

2.1.7. *Proposition*. — *The category* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)$ *forms a Serre subcategory of each of the abelian categories* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{aug}}(A)$ *and* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A)$ (*i.e. it is closed under passing to subobjects, quotients, and extensions*). *In particular, it itself is an abelian category.*

Proof. — Closure under the formation of quotients and extensions is evident, and closure under the formation of subobjects follows from Theorem 2.1.2. □

2.2. Smooth G-representations. — In this subsection we give the basic definitions, and state the basic results, related to smooth, and admissible smooth, representations of G over A. In the case when A is Artinian, our definitions will agree with the standard ones. Otherwise, they may be slightly unorthodox, but will be the most useful ones for our later purposes.

2.2.1. *Definition*. — Let V be a representation of G over A. We say that a vector $v \in V$ is smooth if:

1. v is fixed by some open subgroup of G.
2. v is annihilated by some power $\mathfrak{m}^i$ of the maximal ideal of A.

We let V_{sm} denote the subset of V consisting of smooth vectors.

2.2.2. *Remark*. — The following equivalent way of defining smoothness can be useful: a vector $v \in V$ is smooth if and only if v is annihilated by the intersection $J \bigcap A[H]$ for some open ideal $J \subset A[[H]]$, where H is some (equivalently, any) compact open subgroup of G.

2.2.3. *Remark*. — If A is Artinian, then $\mathfrak{m}^i = 0$ for sufficiently large i, and so automatically $\mathfrak{m}^i v = 0$ for any element v of any A-module V. Thus condition (2) can be

omitted from the definition of smoothness for such A, and our definition coincides with the usual one.

2.2.4. *Lemma*. — *The subset V_{sm} is an $A[G]$-submodule of V.*

Proof. — If $v_i \in V_{\mathrm{sm}}$ $(i = 1, 2)$ are fixed by open subgroups $H_i \subset G$, and annihilated by $\mathfrak{m}^{i_1}$ and $\mathfrak{m}^{i_2}$, then any A-linear combination of v_1 and v_2 is fixed by $H_1 \bigcap H_2$, and annihilated by $\mathfrak{m}^{\max i_1, i_2}$, and hence also lies in V_{sm}. Thus V_{sm} is an A-submodule of V. Also, if $v \in V_{\mathrm{sm}}$ is fixed by the open subgroup $H \subset G$, and annihilated by $\mathfrak{m}^i$, then gv is fixed by $gHg^{-1} \subset G$ for any $g \in G$, and again annihilated by $\mathfrak{m}^i$. Thus V_{sm} is closed under the action of G. □

2.2.5. *Definition*. — We say that a G-representation V of G over A is smooth if $V = V_{\mathrm{sm}}$; that is, if every vector of V is smooth.

We let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G(A)$ consisting of smooth G-representations. The association $V \mapsto V_{\mathrm{sm}}$ is a left-exact functor from $\mathrm{Mod}_G(A)$ to $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, which is right adjoint to the inclusion of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ into $\mathrm{Mod}_G(A)$.

2.2.6. *Lemma*. — *The full subcategory $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ of $\mathrm{Mod}_G(A)$ is closed under the formation of subobjects, quotients, and inductive limits (and so in particular is an abelian category).*

Proof. — This is clear. □

The following lemma provides some useful ways of thinking about smooth representations of G.

2.2.7. *Lemma*. — *Let V be a G-representation over A, and suppose that V is torsion as an $\mathscr{O}$-module. (Note that this holds automatically if A is torsion as an $\mathscr{O}$-module, e.g. if A is an object of $\mathrm{Art}(\mathscr{O})$.) The following conditions on V are equivalent.*

1. *V is smooth.*
2. *The A-action on V and the G-action on V are both jointly continuous, when V is given its discrete topology.*
3. *The A-action and the G-action on V^* are both jointly continuous when V^* is given its natural profinite topology.*
4. *For some (equivalently, every) compact open subgroup H of G, the $A[H]$-action on V extends (in a necessarily unique manner) to an $A[[H]]$-action which is continuous when V is equipped with the discrete topology.*
5. *For some (equivalently, every) compact open subgroup H of G, the H-action on V^* extends (in a necessarily unique manner) to a continuous action of the completed group ring $A[[H]]$ on V^*.*

(In both conditions (2) and (3), the ring A is understood to be equipped with its $\mathfrak{m}$-adic topology.)

Proof. — The straightforward (and well-known) proofs are left to the reader. □

Lemma 2.2.7 implies that passing to Pontrjagin duals induces an anti-equivalence

$$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A) \xrightarrow{\mathrm{anti}\sim} \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro\,aug}}(A). \tag{2.2.8}$$

2.2.9. *Definition*. — We say that a smooth G-representation V over A is admissible if $V^H[\mathfrak{m}^i]$ (the $\mathfrak{m}^i$-torsion part of the subspace of H-fixed vectors in V) is finitely generated over A for every open subgroup H of G and every $i \geq 0$.

2.2.10. *Remark*. — If A is Artinian, so that $\mathfrak{m}^i = 0$ for i sufficiently large, then $V^H[\mathfrak{m}^i] = V^H$ for i sufficiently large, and so the preceding definition agrees with the usual definition of an admissible smooth A-module.

We let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ consisting of admissible representations.

2.2.11. *Lemma*. — *A smooth G-representation V over A is admissible if and only if V^* is finitely generated as an $A[[H]]$-module for some (equivalently, every) compact open subgroup H of G.*

Proof. — This is well-known. □

By Lemma 2.2.11, the anti-equivalence (2.2.8) restricts to an anti-equivalence

$$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A) \xrightarrow{\mathrm{anti}\sim} \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A). \tag{2.2.12}$$

2.2.13. *Proposition*. — *The category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ forms a Serre subcategory of the abelian category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. In particular, it itself is an abelian category.*

Proof. — This follows directly from the anti-equivalences (2.2.8) and (2.2.12), together with Proposition 2.1.7 and Lemma 2.2.6. □

2.2.14. *Remark*. — It follows from Lemma 2.2.11, together with the topological version of Nakayama's lemma, that if H is an open pro-p subgroup of G (so that $A[[H]]$ is a – typically non-commutative – local ring), then V is admissible if and only if $V^H[\mathfrak{m}]$ is finite dimensional over $A/\mathfrak{m}$. In particular, if the condition of Definition 2.2.9 holds when $i = 1$, then it holds automatically for all values of i, and so V is admissible.

2.2.15. *Definition*. — Let V be a G-representation over A.

1. We say that an element $v \in V$ is locally admissible if v is smooth, and if the smooth G-subrepresentation of V generated by v is admissible.
2. We let $V_{\mathrm{l\,adm}}$ denote the subset of V consisting of locally admissible elements.

2.2.16. *Lemma*. — *The subset $V_{\mathrm{l\,adm}}$ is an $A[G]$-submodule of V.*

Proof. — Let $v_i \in V_{\mathrm{l\,adm}}$ $(i = 1, 2)$, and let W_i denote the G-subrepresentation of V generated by v_i. Since $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ is a Serre subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, we see that the image of the map $W_1 \bigoplus W_2 \to V$ induced by the inclusions $W_i \subset V$ is admissible. This image certainly contains any A-linear combination of the v_i, and thus $V_{\mathrm{l\,adm}}$ is

an A-submodule of V. It is also clearly G-invariant, and thus is an $A[G]$-submodule of V. □

2.2.17. *Definition*. — We say that a G-representation V of G over A is locally admissible if $V = V_{\mathrm{l\,adm}}$; that is, if every vector of V is locally admissible. (2)

We let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,adm}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ consisting of locally admissible G-representations.

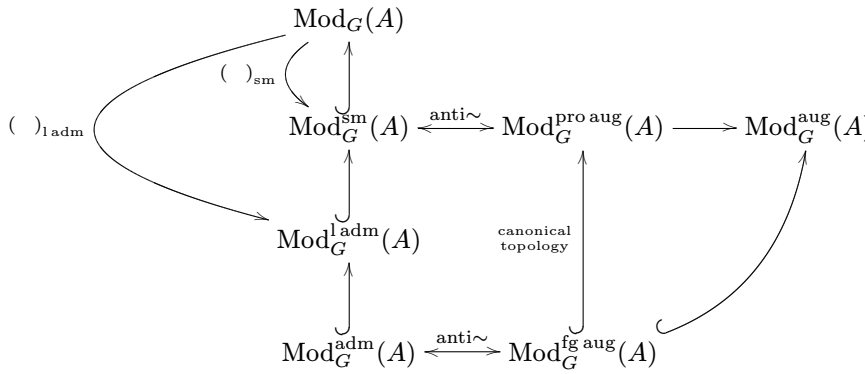
2.2.18. *Proposition*. — *The category* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,adm}}(A)$ *is closed under passing to subrepresentations, quotients, and inductive limits in* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. *In particular, it itself is an abelian category.*

Proof. — Since $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ is closed under passing to subrepresentations and quotients in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, the same is evidently true for $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,adm}}(A)$. The closure under formation of inductive limits is also clear, since the property of being locally admissible is checked element-wise. □

2.2.19. *Remark*. — Clearly any finitely generated locally admissible representation is in fact admissible smooth. Since any representation is the inductive limit of finitely generated ones, we see that a representation is locally admissible if and only if it can be written as an inductive limit of admissible smooth representations.

The association $V \mapsto V_{\mathrm{l\,adm}}$ gives rise to a left-exact functor from $\mathrm{Mod}_G(A)$ to $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,adm}}(A)$, which is right adjoint to the inclusion of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l\,adm}}(A)$ into $\mathrm{Mod}_G(A)$.

The following diagram summarizes the relations between the various categories that we have introduced:



(2) As was pointed out by a referee, in the context of smooth representations of p-adic groups over the field of complex numbers, such representations have been called *quasi-admissible* by Harish-Chandra.

2.3. Some finiteness conditions. — Let Z denote the centre of G.

2.3.1. *Definition*. — Let V be an object of $\mathrm{Mod}_G(A)$.

1. We say that V is Z-finite if, writing I to denote the annihilator of V in $A[Z]$, the quotient $A[Z]/I$ is finitely generated as an A-module.
2. We say that $v \in V$ is locally Z-finite if the $A[Z]$-submodule of V generated by v is finitely generated as an A-module. We let $V_{Z-\mathrm{fin}}$ denote the subset of locally Z-finite elements of V.
3. We say that V is locally Z-finite if every $v \in V$ is locally finite over Z, i.e. if $V = V_{Z-\mathrm{fin}}$.

2.3.2. *Lemma*. — 1. *For any object V of $\mathrm{Mod}_G(A)$, the subset $V_{Z-\mathrm{fin}}$ is an $A[G]$-submodule of V.*
2. *If V_1 and V_2 are two (locally) Z-finite representations, then $V_1 \bigoplus V_2$ is again (locally) Z-finite.*
3. *Any $A[G]$-invariant submodule or quotient of a (locally) Z-finite representation is again (locally) Z-finite.*

Proof. — If V_1 and V_2 are $A[G]$-modules annihilated by the A-finite quotients $A[Z]/I_1$ and $A[Z]/I_2$ of $A[Z]$, respectively, then $V_1 \bigoplus V_2$ is annihilated by $A[Z]/(I_1 \bigcap I_2)$, which is again A-finite (since it embeds into $(A[Z]/I_1) \times (A[Z]/I_2)$). This proves (2) in the case of Z-finite representations.

Now suppose that v_1 and v_2 are two elements of $V_{Z-\mathrm{fin}}$, for some $A[G]$-module V. Let I_i denote the annihilator of v_i in $A[Z]$, and let W_i be the G-subrepresentation of V generated by v_i. Since Z is the centre of G, we see that I_i annihilates all of W_i. Thus each W_i is Z-finite, and thus so is $W_1 \bigoplus W_2$. The image of the natural map $W_1 \bigoplus W_2 \to V$ contains all linear combinations of the v_i, and is G-invariant. Thus $V_{Z-\mathrm{fin}}$ is an $A[G]$-submodule of V, proving (1).

Now let V_1 and V_2 be locally Z-finite $A[G]$-modules. Then $(V_1 \bigoplus V_2)_{Z-\mathrm{fin}}$ contains V_1 and V_2, and so, since it is an $A[G]$-submodule of $V_1 \bigoplus V_2$, equals all of $V_1 \bigoplus V_2$. This proves (2) in the case of locally Z-finite representations.

Part (3) is evident (and was already used implicitly in the proof of part (1)). □

2.3.3. *Lemma*. — *If V is an object of $\mathrm{Mod}_G(A)$ which is finitely generated over $A[G]$, then V is Z-finite if and only if V is locally Z-finite.*

Proof. — As we already observed in the proof of the preceding lemma, if an $A[G]$-module is generated by a single locally Z-finite vector, then it is Z-finite. If V is generated by finitely many such vectors, then it is a quotient of a direct sum of finitely many Z-finite representations, and so is again Z-finite (by parts (2) and (3) of the preceding lemma). □

2.3.4. *Lemma*. — *If V is an object of $\mathrm{Mod}_G(A)$, then any locally admissible vector in V is locally Z-finite.*

Proof. — Suppose that $v \in V$ is locally admissible, let $H \subset G$ be a compact open subgroup that fixes v, and let $\mathfrak{m}^i$ annihilate v, for some $i \geq 0$. If $W \subset V$ denotes the $A[G]$-submodule generated by v, then W is admissible smooth, by assumption, and is annihilated by $\mathfrak{m}^i$, and so W^H is finitely generated over A. Since W^H is Z-invariant, we conclude that v is locally Z-finite, as claimed. □

2.3.5. *Lemma*. — *If an object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ is finitely generated over $A[G]$, then V is Z-finite.*

Proof. — This follows directly from the preceding lemmas. □

2.3.6. *Lemma*. — *Let V be an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, and consider the following conditions on V.*

1. *V is of finite length (as an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, or equivalently, as an object of $\mathrm{Mod}_G(A)$), and is admissible.*
2. *V is finitely generated as an $A[G]$-module, and is admissible.*
3. *V is of finite length (as an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$), and is Z-finite.*

Then (1) *implies* (2) *and* (3).

Proof. — The implication (1) ⇒ (2) is immediate. The implication (1) ⇒ (3) then follows from this together with the preceding lemma. □

We make the following conjecture:

2.3.7. *Conjecture*. — *If G is a reductive p-adic group, then the three conditions of Lemma* 2.3.6 *are mutually equivalent.*

2.3.8. *Theorem*. — *Conjecture* 2.3.7 *holds in the following two cases:*

1. *G is a torus.*
2. *$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.*

Proof. — Suppose first that G is a torus, so that $G = Z$. Let V be an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. Taking into account Lemma 2.3.5, we see that each of conditions (2) and (3) of Lemma 2.3.6 implies that V is both finitely generated over $A[Z]$ and Z-finite. These conditions, taken together, imply in their turn that V is finitely generated as an A-module. In particular, it is a finite length object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$. Thus conditions (2) and (3) of Lemma 2.3.6 each imply condition (1).

Suppose now that $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. The results of [**1**] and [**2**] imply that any irreducible smooth G-representation that is Z-finite is admissible (see [**2**, Cor. 1.2], and note that each of the representations listed in this corollary is admissible), and thus condition (3) of Lemma 2.3.6 implies condition (1). It remains to show that the same is true of condition (2) of Lemma 2.3.6. To this end, let V be an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ that is finitely generated over $A[G]$. We must show that it is of finite length.

Write $H = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)Z \subset G$. Let $S \subset V$ be a finite set that generates V over $A[G]$, and let W be the $A[H]$-submodule of V generated by S. Since V is smooth (by assumption), and Z-finite (by Lemma 2.3.5), we see that W is finitely generated as an

A-module, annihilated by some power of $\mathfrak{m}$. Since W contains the generating set S, the H-equivariant embedding $W \hookrightarrow V$ induces a G-equivariant surjection $c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W \to V$. Thus it suffices to show that any admissible quotient V of $c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W$ is of finite length as an $A[G]$-module. Taking into account Proposition 2.2.13, we see in fact that it suffices to prove the analogous result with W replaced by one of its (finitely many) Jordan-Hölder factors, which will be a finite dimensional irreducible representation of H over $k := A/\mathfrak{m}$. Extending scalars to a finite extension of k, if necessary, we may furthermore assume that W is an absolutely irreducible representation of H over k, and this we do from now on.

Since V is a quotient of $c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W$, the evaluation map

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W, V) \otimes_k c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W \to V \tag{2.3.9}$$

is surjective. Lemma 2.3.10 below shows that $\mathrm{Hom}_{k[G]}(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W, V)$ is a finite dimensional k-vector space. It is also naturally a module over the endomorphism algebra $\mathscr{H} := \mathrm{End}_{k[G]}(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W)$. In [**1**] it is proved that $\mathscr{H} \cong k[T]$ (where T denotes a certain specified endomorphism whose precise definition need not concern us here). Thus $\mathrm{Hom}_{k[G]}(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W, V)$ is a finite dimensional $k[T]$-module, and hence is a direct sum of $k[T]$-modules of the form $k[T]/f(T)k[T]$, for various non-zero polynomials $f(T) \in k[T]$.

Taking into account the surjection (2.3.9), we see that it suffices to show that any G-representation of the form $(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W)/f(T)(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W)$ is of finite length. Further extending scalars, if necessary, we may assume that $f(T)$ factors completely in $k[T]$ as a product of linear factors, and hence are reduced to showing that for any scalar $\lambda \in k$, the quotient $(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W)/(T-\lambda)(c\text{–}\mathrm{Ind}_H^G W)$ is of finite length. This, however, follows from the results of [**1**] and [**2**]. (Indeed, these quotients are either irreducible or of length two – see Theorems 1.1 and 2.7.1 of [**2**].) Thus the theorem is proved in the case of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. □

2.3.10. *Lemma*. — *If U and V are smooth representations of G over A, such that U is finitely generated over $A[G]$ and V is admissible, then $\mathrm{Hom}_{A[G]}(U, V)$ is a finitely generated A-module.*

Proof. — Let $W \subset U$ be a finitely generated A-submodule that generates U over $A[G]$, let $H \subset G$ be a compact open subgroup of G that fixes W, and let $i \geq 0$ be such that $\mathfrak{m}^i$ annihilates W. (Since U is a smooth representation of G over A, such H and i exist.) Restricting homomorphisms to W induces an embedding

$$\mathrm{Hom}_{A[G]}(U, V) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A(W, V^H[\mathfrak{m}^i]). \tag{2.3.11}$$

Since V is an admissible smooth G-representation, its submodule $V^H[\mathfrak{m}^i]$ is finitely generated over A, and so the target of (2.3.11) is finitely generated over A. The same is thus true of the source, and the lemma follows. □

2.4. ϖ-adically admissible G-representations. — In this subsection we introduce a class of representations related to the considerations of [**15**].

2.4.1. *Definition*. — We say that a G-representation V over A is ϖ-adically continuous if:

1. V is ϖ-adically separated and complete.
2. The $\mathscr{O}$-torsion subspace $V[\varpi^\infty]$ of V is of bounded exponent (i.e. is annihilated by a sufficiently large power of ϖ).
3. The G-action $G \times V \to V$ is continuous, when V is given its ϖ-adic topology.
4. The A-action $A \times V \to V$ is continuous, when A is given its $\mathfrak{m}$-adic topology and V is given its ϖ-adic topology.

2.4.2. *Remark*. — Conditions (3) and (4) of the definition can be expressed more succinctly as follows: for any $i \geq 0$, the G-action on $V/\varpi^i V$ is smooth, in the sense of 2.2.1. Also, the reader may easily check, in Definition 2.4.1, that condition (3) is equivalent to the apparently weaker condition that the map $G \times V \to V$ be left-continuous (i.e. that the map $G \to V$ defined by $g \mapsto gv$ is continuous for each $v \in V$) when V is equipped with its ϖ-adic topology, and that condition (4) is equivalent to the apparently weaker condition that the map $A \times V \to V$ be left-continuous when A is equipped with its $\mathfrak{m}$-adic topology and V is equipped with its ϖ-adic topology.

We let $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G(A)$ consisting of ϖ-adically continuous representations of G over A.

2.4.3. *Remark*. — If V is a $\mathscr{O}$-torsion object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then $V = V[\varpi^i]$ for some $i \geq 0$, hence $V = V/\varpi^i V$, and so V is in fact a smooth representation of G. Thus $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)[\varpi^\infty] = \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)[\varpi^\infty]$. In particular, when A is an object of $\mathrm{Art}(\mathscr{O})$, the categories $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ coincide.

We now establish some basic results concerning the category $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$.

2.4.4. *Proposition*. — *Let $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ be a short exact sequence in $\mathrm{Mod}_G(A)$. If V_2 is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then the following are equivalent:*

1. *V_1 is closed in the ϖ-adic topology of V_2, and $V_3[\varpi^\infty]$ has bounded exponent.*
2. *V_3 is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$.*

Furthermore, if these equivalent conditions hold, then the G-representation V_1 is also an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, and the ϖ-adic topology on V_2 induces the ϖ-adic topology on V_1.

Proof. — The surjection $V_2 \to V_3$ induces a surjection $V_2/\varpi^i V_2 \to V_3/\varpi^i V_3$ for each $i \geq 0$. Thus $V_3/\varpi^i V_3$ is a smooth $A[G]$-representation for each $i \geq 0$, since this is true of $V_2/\varpi^i V_2$ by assumption. Since V_2 is assumed to be ϖ-adically complete and separated, we see furthermore that V_1 is closed in V_2 if and only if V_3 (which is isomorphic to the quotient V_2/V_1) is ϖ-adically complete and separated. From this we conclude the equivalence of (1) and (2).

If these conditions hold, then it follows from Lemma A.1 that the ϖ-adic topology on V_2 induces the ϖ-adic topology on V_1, and hence that V_1 is ϖ-adically separated and complete, since V_2 is by assumption. This shows that V_1 satisfies condition (1) of Definition 2.4.1. It obviously satisfies condition (2), since it is a submodule of V_2, which satisfies this condition by assumption. Conditions (3) and (4) are also inherited from the corresponding conditions for V_2, again taking into account the fact that the ϖ-adic topology on V_2 induces the ϖ-adic topology on V_1. Thus V_1 is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, as claimed. □

2.4.5. *Corollary*. — *The category* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ *is closed under the formation of kernels and images in the abelian category* $\mathrm{Mod}_G(A)$.

Proof. — Suppose that $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3$ is an exact sequence of objects in $\mathrm{Mod}_G(A)$, with V_2 and V_3 lying in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. Let V_3' denote the image of V_2 in V_3. Since $V_3[\varpi^\infty]$ has bounded exponent, by assumption, so does $V_3'[\varpi^\infty]$. The preceding proposition then implies that both V_1 and V_3' lie in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. This proves the closure of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ under the formation of kernels and images. □

2.4.6. *Corollary*. — *If* V *is any object of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$*, then each of* $V[\varpi^\infty]$ *and* V_{fl} *is also an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$.

Proof. — Since $V[\varpi^\infty]$ is of bounded exponent, the discussion of Remark A.2 show that $V[\varpi^\infty]$ is ϖ-adically closed in V. Since $(V_{\mathrm{fl}})[\varpi^\infty] = 0$, the result is now seen to follow directly from Proposition 2.4.4, applied to the short exact sequence $0 \to V[\varpi^\infty] \to V \to V_{\mathrm{fl}} \to 0$. □

2.4.7. *Definition*. — A ϖ-adically admissible representation of G over A is an object V of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ for which the induced G-representation on $(V/\varpi V)[\mathfrak{m}]$ (which is then a smooth G-representation over $A/\mathfrak{m}$, by Remark 2.4.2) is in fact an admissible smooth G-representation over $A/\mathfrak{m}$.

2.4.8. *Remark*. — Since admissible smooth representations form a Serre subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, we see (taking into account Remarks 2.2.14 and 2.4.2) that if V is a ϖ-adically admissible G-representation over A, then in fact $V/\varpi^i V$ is an admissible smooth representation for every $i \geq 0$.

We let $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ consisting of ϖ-adically admissible representations.

2.4.9. *Remark*. — Combining the observations of Remarks 2.4.3 and 2.4.8, one sees that $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)[\varpi^\infty] = \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)[\varpi^\infty]$. In particular, when A is an object of $\mathrm{Art}(\mathscr{O})$, the categories $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ coincide.

2.4.10. *Proposition*. — *The functor* $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O})$ *induces an* A*-linear anti-equivalence of categories* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)^{\mathrm{fl}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)^{\mathrm{fl}}$.

Proof. — As is explained in the proof of [**15**, Thm. 1.2], the functor $V \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O})$, the latter space being equipped with the weak topology (i.e. the topology of point-wise convergence), induces an equivalence of categories between the category of ϖ-adically separated and complete flat $\mathscr{O}$-modules and the category of compact linear-topological flat $\mathscr{O}$-modules. The reader may now easily check that this functor induces the required equivalence. □

2.4.11. *Proposition*. — *The category* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$ *is closed under the formation of kernels, images, and cokernels in the abelian category* $\mathrm{Mod}_G(A)$*, and under extensions in the category* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$*. In particular,* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$ *is an abelian category.*

Proof. — Suppose first that $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ is a short exact sequence of objects in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, with V_1 and V_3 being objects of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. For any $i \geq 0$, we have the exact sequence $V_1/\varpi^i V_1 \to V_2/\varpi^i V_2 \to V_3/\varpi^i V_3 \to 0$. Since $V_1/\varpi^i V_1$ and $V_3/\varpi^i V_3$ are assumed to be admissible smooth G-representations over A, the same is true of $V_2/\varpi^i V_2$, by Proposition 2.2.13. Thus V_2 is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$.

Suppose now that $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3$ is an exact sequence of objects of $\mathrm{Mod}_G(A)$, with V_2 and V_3 being objects of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. Let V_3' denote the image of V_2 in V_3. It follows from Corollary 2.4.5 that V_1 and V_3' are objects of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. Since $V_3[\varpi^\infty]$ is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)[\varpi^\infty]$, which by Remark 2.4.9 equals $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)[\varpi^\infty]$, so is $V_3'[\varpi^\infty]$, by Proposition 2.2.13. Choose $i \geq 0$ so that $V_3'[\varpi^i] = V_3'[\varpi^\infty]$. For each $j \geq i$, our given exact sequence yields an exact sequence

$$V_3'[\varpi^i] = V_3'[\varpi^j] \to V_1/\varpi^j V_1 \to V_2/\varpi^j V_2 \to V_3'/\varpi^j V_3' \to 0.$$

Since the first and third terms of the exact sequence lie in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$, we conclude from Proposition 2.2.13 that the other two terms do also. We conclude that V_1 and V_3' are both objects of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}$.

Suppose finally that $V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ is an exact sequence of objects of $\mathrm{Mod}_G(A)$, with V_1 and V_2 being objects of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. We wish to show that V_3 is also an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. By what we have already proved, we know that the image of V_1 in V_2 again lies in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. Thus, replacing V_1 by this image, we may assume that our sequence is in fact short exact.

We intend to apply Theorem A.11, but before doing so, we must verify that V_3 is complete, with $\mathscr{O}$-torsion of bounded exponent. Since $V_2[\varpi^\infty]$ has bounded exponent by assumption, it is no loss of generality to do this after replacing V_1 and V_2 by $(V_1)_{fl}$ and $(V_2)_{fl}$ respectively, and replacing V_3 by its quotient by the image of $V_2[\varpi^\infty]$. We may thus assume that V_1 and V_2 are $\mathscr{O}$-torsion free.

Applying $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(-, \mathscr{O})$ to the embedding $V_1 \hookrightarrow V_2$, and taking into account the anti-equivalence of categories of Proposition 2.4.10, we obtain a map $M_2 \to M_1$ of objects of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)^{\mathrm{fl}}$. Let M denote the image of M_2 in M_1, and let $\widetilde{M}$ denote the saturation of M in M_1 as an $\mathscr{O}$-module, i.e.

$$\widetilde{M} = \{m \in M_1 \mid \varpi^i m \in M \text{ for some } i \geq 0\}.$$

The quotient $M_1/\widetilde{M}$ is again an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)^{\mathrm{fl}}$, and thus the complex $M_2 \to M_1 \to M_1/\widetilde{M}$ in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{fg\,aug}}(A)^{\mathrm{fl}}$, with the last map being a surjection, arises via the anti-equivalence of Proposition 2.4.10 from a complex $V \to V_1 \to V_2$ in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)^{\mathrm{fl}}$, with the first arrow being an injection, by Lemma A.13. Since the second arrow is also an injection, by assumption, we conclude that $V = 0$, and hence that $M_1/\widetilde{M} = 0$, i.e. that the saturation in M_1 of the image M of M_2 is equal to M_1. Thus the quotient M_1/M is $\mathscr{O}$-torsion. Since it is furthermore finitely generated over $A[[H]]$, for any compact open subgroup H of G (as this is true of M_1), it is of bounded exponent. It follows from Lemma A.14 that $V_3[\varpi^\infty]$ has bounded exponent. Lemma A.1 then implies that ϖ-adic topology on V_2 induces the ϖ-adic topology on V_1. Since V_1 is ϖ-adically complete by assumption, we find that it is ϖ-adically closed in V_2, and so it follows from Proposition 2.4.4 that V_3 is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, and in particular is ϖ-adically complete.

We now apply $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(-,\mathscr{O})$ to the exact sequence $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ to obtain (by Theorem A.11) the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_3)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_2)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_1)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big) \\ \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3[\varpi^\infty],E/\mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2[\varpi^\infty],E/\mathscr{O}).$$

(Note that $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_i)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_i,\mathscr{O})$ for $i = 1,2,3$, since $\mathscr{O}$ is torsion free as a module over itself.) Proposition 2.4.10 and Lemma 2.2.11 (together with Remark 2.4.9) imply that, for any compact open subgroup H of G, each of $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_1)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big)$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_2)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big)$, and $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2[\varpi^\infty],E/\mathscr{O})$ is a finitely generated $A[[H]]$-module. Since $A[[H]]$ is Noetherian, a consideration of this exact sequence shows that the $A[[H]]$-modules $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}\big((V_3)_{\mathrm{fl}},\mathscr{O}\big)$ and $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3[\varpi^\infty],E/\mathscr{O})$ are also finitely generated, and thus that $(V_3)_{\mathrm{fl}}$ and $V_3[\varpi^\infty]$ are both objects of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$ (by the same proposition and lemma). We have already observed that since $V_3[\varpi^\infty]$ has bounded exponent, Proposition 2.4.4 implies that V_3 lies in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. Since it is furthermore an extension of the objects $(V_3)_{\mathrm{fl}}$ and $V_3[\varpi^\infty]$ of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, it follows from the first paragraph of the proof that V_3 is itself an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. □

2.4.12. *Proposition*. — *If* $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ *is a short exact sequence in* $\mathrm{Mod}_G(A)$*, and if* V_2 *is an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$*, then the following are equivalent:*

1. V_1 *is closed in the* ϖ*-adic topology of* V_2*, and* $V_3[\varpi^\infty]$ *has bounded exponent.*
2. V_1 *is an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$*.*
3. V_3 *is an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$*.*
4. V_3 *is an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$*.*

If these equivalent conditions hold, then the ϖ*-adic topology on* V_2 *induces the* ϖ*-adic topology on* V_1*.*

Proof. — The equivalence of (1) and (3) follows from Proposition 2.4.4, and clearly (4) implies (3). Since V_1 (resp. V_3) is the kernel of the map $V_2 \to V_3$ (resp. the cokernel

of the map $V_1 \to V_2$), the equivalence of (2) and (4) follows from Proposition 2.4.11. Finally, note that if (3) holds, then $V_3/\varpi^i V_3$ is a quotient of $V_2/\varpi^i V_2$ for any $i \geq 0$. The latter module is an admissible $A[G]$-representation by assumption, and thus so is the former. Consequently, V_3 is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, and so (3) implies (4). The remaining claim of the proposition follows from Proposition 2.4.4. □

2.4.13. *Corollary*. — *If V is any object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, then each of $V[\varpi^\infty]$ and V_{fl} is also an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$.*

Proof. — This follows directly from the preceding proposition, applied to the short exact sequence $0 \to V[\varpi^\infty] \to V \to V_{\mathrm{fl}} \to 0$. (Compare the proof of Corollary 2.4.6.) □

3. Ordinary parts

In this section we take G to be a p-adic reductive group (by which we always mean the group of $\mathbb{Q}_p$-points of a connected reductive algebraic group over $\mathbb{Q}_p$). We suppose that P is a parabolic subgroup of G (more precisely, the group of $\mathbb{Q}_p$-valued points of a parabolic subgroup of G defined over $\mathbb{Q}_p$), with unipotent radical N, that M is a Levi factor of P (so that $P = MN$), and that $\overline{P}$ is an opposite parabolic to P, with unipotent radical $\overline{N}$, chosen so that $M = P \bigcap \overline{P}$. (This condition uniquely determines $\overline{P}$.) Our goal in this section is to define the functor of ordinary parts, which (for any object A of $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$) is a functor $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$. In the following section we will show that it is right adjoint to parabolic induction $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G : \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$.

In fact, it is technically convenient to define Ord_P in a more general context, as a functor $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$, and this we do in Subsection 3.1. In Subsection 3.2 we establish some elementary properties of Ord_P. In Subsection 3.3, we prove that Ord_P, when applied to admissible smooth G-representations, yields admissible smooth M-representations. Finally, Subsection 3.4 extends the main definitions and results of the preceding subsections to the context of ϖ-adically continuous and ϖ-adically admissible representations over A.

The functor Ord_P is analogous to the locally analytic Jacquet functor J_P studied in [**5**] and [**7**], and many of the constructions and arguments of this section and the next are suitable modifications of the constructions and arguments found in those papers. Typically, the arguments become simpler. (As a general rule, the theory of Ord_P is more elementary than the theory of the Jacquet functors J_P, just as the theory of p-adic modular forms is more elementary in the ordinary case than in the more general finite slope case.)

3.1. The definition of Ord_P. — We fix G, P, $\overline{P}$, etc., as in the preceding discussion. We let A denote an object of $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$.

3.1.1. *Definition*. — If V is a representation of N over A, and if $N_1 \subset N_2$ are compact open subgroups of N, then let $h_{N_2,N_1} : V^{N_1} \to V^{N_2}$ denote the operator defined by $h_{N_2,N_1}(v) := \sum_{n \in N_2/N_1} nv$. (Here we are using n to denote both an element of N_2/N_1, and a choice of coset representative for this element in N_2. Since $v \in V^{N_1}$, the value nv is well-defined independently of the choice of coset representative.)

3.1.2. *Lemma*. — *If $N_1 \subset N_2 \subset N_3$ are compact open subgroups of N, then*

$$h_{N_3,N_2} h_{N_2,N_1} = h_{N_3,N_1}.$$

Proof. — This is immediate from the definition of the operators. □

Fix a compact open subgroup P_0 of P, and set $M_0 := M \bigcap P_0$, $N_0 := N \bigcap P_0$, and $M^+ := \{m \in M \mid mN_0m^{-1} \subset N_0\}$. Let Z_M denote the centre of M, and write $Z_M^+ := M^+ \bigcap Z_M$. Note that each of M_0 and N_0 is a subgroup of G, while M^+ and Z_M^+ are submonoids of G.

3.1.3. *Definition*. — If V is a representation of P over A, then for any $m \in M^+$, we define $h_{N_0,m} : V^{N_0} \to V^{N_0}$ via the formula $h_{N_0,m}(v) := h_{N_0,mN_0m^{-1}}(mv)$.

3.1.4. *Lemma*. — *If $m_1, m_2 \in M^+$, then $h_{N_0,m_1m_2} = h_{N_0,m_1} h_{N_0,m_2}$.*

Proof. — We compute that

$$\begin{aligned} h_{N_0,m_1m_2} &= h_{N_0,m_1m_2N_0m_2^{-1}m_1^{-1}m_1m_2} \\ &= h_{N_0,m_1N_0m_1^{-1}} h_{m_1N_0m_1^{-1},m_1m_2N_0m_2^{-1}m_1^{-1}m_1m_2} \\ &= h_{N_0,m_1N_0m_1^{-1}m_1} h_{N_0,m_2N_0m_2^{-1}m_2} = h_{N_0,m_1} h_{N_0,m_2}. \quad \square \end{aligned}$$

If $m \in M_0$, then (since in this case $mN_0m^{-1} = N_0$) the operator $h_{N_0,m}$ coincides with the given action of m on V^{N_0}. In general, the preceding lemma shows that the operators $h_{N_0,m}$ induce an action of the monoid M^+ on V^{N_0}, which we refer to as the Hecke action of M^+.

Regarding V^{N_0} as a module over the monoid algebra $A[M^+]$, and so in particular its central subalgebra $A[Z_M^+]$, via this action, we may consider the $A[Z_M]$-module $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})$, as well as its submodule $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})_{Z_M-\mathrm{fin}}$.

3.1.5. *Lemma*. — *If U is an $A[Z_M^+]$-module which is finitely generated over A, then evaluation at the element $1 \in Z_M$ induces an embedding $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U) \hookrightarrow U$. In particular, $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U)$ is finitely generated over A.*

Proof. — If B denotes the image of $A[Z_M^+]$ in $\mathrm{End}_A(U)$, then B is a commutative finite A-algebra, and so is isomorphic to the product of its localizations at its finitely many maximal ideals, i.e. $B \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m} \text{ maximal}} B_{\mathfrak{m}}$. This factorization of B induces a

corresponding factorization of the B-module U, namely $U = \prod_{\mathfrak{m}\text{ maximal}} U_{\mathfrak{m}}$, and a consequent factorization

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m}\text{ maximal}} \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U_{\mathfrak{m}}).$$

We will say that a maximal ideal $\mathfrak{m}$ is ordinary (resp. non-ordinary) if and only if no (resp. some) element $z \in Z_M^+$ has its image in B lying in $\mathfrak{m}$. If $\mathfrak{m}$ is ordinary, then the $A[Z_M^+]$-module structure on $U_{\mathfrak{m}}$ extends in a unique manner to an $A[Z_M]$-module structure (since Z_M^+ generates Z_M as a group [**5**, Prop. 3.3.2 (i)]), and evaluation at $1 \in Z_M$ induces an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U_{\mathfrak{m}}) \xrightarrow{\sim} U_{\mathfrak{m}}.$$

On the other hand, if $\mathfrak{m}$ is non-ordinary, then it is easily seen that

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U_{\mathfrak{m}}) = 0.$$

Thus evaluation at 1 induces an embedding

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{m}\text{ ordinary}} U_{\mathfrak{m}} \subset U,$$

as claimed. □

3.1.6. *Lemma*. — *Let W be an $A[Z_M^+]$-module, and let $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)$.*

1. *The image $\mathrm{im}(\phi)$ of ϕ is an $A[Z_M^+]$-submodule of W.*
2. *ϕ is locally Z_M-finite if and only if $\mathrm{im}(\phi)$ is finitely generated as an A-module.*
3. *If $z \in Z_M^+$, then $z\,\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\phi)$.*

Proof. — Claim (1) is clear, since we have $z_1\phi(z_2) = \phi(z_1 z_2)$ for $z_1 \in Z_M^+$ and $z_2 \in Z_M$. As for claim (2), note that we may regard ϕ as an element of the $A[Z_M]$-submodule $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M], \mathrm{im}(\phi)\big)$ of $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)$. If $\mathrm{im}(\phi)$ is finitely generated over A, then Lemma 3.1.5 shows that this submodule is finitely generated over A, and thus that ϕ is locally Z_M-finite. On the other hand, let $\mathrm{ev}_1 : \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}} \to W$ denote the map given by evaluation at $1 \in Z_M^+$. For any $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}}$, if U denotes the $A[Z_M]$-submodule of $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ generated by ϕ, then clearly $\mathrm{ev}_1(U)$ coincides with the image $\mathrm{im}(\phi)$ of ϕ. Thus if ϕ is locally Z_M-finite, we see that U is finitely generated over A, and hence the same is true of $\mathrm{im}(\phi)$. This completes the proof of (2). Claim (3) follows from the following calculation:

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(\phi) &:= A\text{-linear span of the elements } \phi(z'), z' \in Z_M\\ &= A\text{-linear span of the elements } \phi(zz'), z' \in Z_M\\ &= A\text{-linear span of the elements } z\phi(z'), z' \in Z_M\\ &= z\,\mathrm{im}(\phi).\end{aligned}$$

□

3.1.7. *Lemma*. — *Let W be an $A[M^+]$-module.*

1. *The $A[Z_M]$-module structure on $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)$ extends naturally to an $A[M]$-module structure, characterized by the property that for any $z \in Z_M$, the map $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W) \to W$ induced by evaluation at z is M^+-equivariant.*
2. *If the M_0-action on W is furthermore smooth, then the induced M-action on $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ is smooth.*

Proof. — From [**5**, Prop. 3.3.6], we see that the natural map $A[M^+] \otimes_{A[Z_M^+]} A[Z_M] \to A[M]$ is an isomorphism, and thus that the restriction map induces an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{A[M+]}(A[M], W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W). \tag{3.1.8}$$

The source of this isomorphism has a natural $A[M]$-module structure, which we may then transport to the target. This $A[M]$-module structure clearly satisfies the condition of (1).

Suppose now that W is M_0-smooth. Part (4) of Lemma 2.2.7 shows that the $A[M_0]$-action on W then extends to an $A[[M_0]]$-action, and that any element of W is annihilated by an open ideal in $A[[M_0]]$. Let ϕ be an element of $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}}$. Since $\mathrm{im}(\phi)$ is a finitely generated A-submodule of W, by Lemma 3.1.6, we may find an open ideal I in $A[[M_0]]$ which annihilates $\mathrm{im}(\phi)$. Hence the intersection $I \bigcap A[M_0]$ annihilates ϕ itself (as follows directly from the definition of the M-action on ϕ, together with the fact that $M_0 \subset M^+$), and so the M_0-action on ϕ is smooth (by Remark 2.2.2). Thus the M-action on $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ is smooth, proving (2). □

We now give the main definition of this section.

3.1.9. *Definition*. — If V is a smooth representation of P over A, then we write

$$\mathrm{Ord}_P(V) := \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})_{Z_M-\mathrm{fin}},$$

and refer to $\mathrm{Ord}_P(V)$ as the P-ordinary part of V (or just the ordinary part of V, if P is understood).

Lemma 3.1.7 shows that $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})$, and hence $\mathrm{Ord}_P(V)$, is naturally an M-representation over A. Since the Hecke M_0-action on V^{N_0} coincides with the given M_0-action, it is smooth, and so the same lemma shows that the M-action on $\mathrm{Ord}_P(V)$ is smooth. Thus the formation of $\mathrm{Ord}_P(V)$ yields a functor from $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$ to $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$.

3.1.10. *Definition*. — We define the canonical lifting

$$\mathrm{Ord}_P(V) \to V^{N_0}$$

to be the composite of the inclusion $\mathrm{Ord}_P(V) \subset \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})$ with the map $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0}) \to V^{N_0}$ given by evaluation at the element $1 \in A[Z_M]$.

Our choice of terminology is motivated by that of [**3**, §4].

Although the definition of the functor Ord_P depends on the choice of compact open subgroup P_0 of P, we now show that it is independent of this choice, up to natural isomorphism. To this end, suppose that P_0' is an open subgroup of P_0. Write $M_0' := M \bigcap P_0'$, $N_0' := N \bigcap P_0'$, $(M^+)' := \{m \in M \,|\, mN_0'm^{-1} \subset N_0'\}$, $(Z_M^+)' := (M^+)' \bigcap Z_M$. We define the Hecke action of $(M^+)'$ on $V^{N_0'}$ in analogy to the Hecke action of M^+ on V^{N_0}.

Let $z \in Z_M$ be such that $zN_0'z^{-1} \subset N_0$, and for any object V of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, define a map $h_{N_0,N_0',z} : V^{N_0'} \to V^{N_0}$ via the formula $v \mapsto h_{N_0,zN_0'z^{-1}}zv$, for $v \in V^{N_0'}$.

3.1.11. ***Lemma***. — 1. *The map $h_{N_0,N_0',z}$ intertwines the Hecke action of the intersection $M^+ \bigcap (M^+)'$ on its source and target.*

2. *If P_0'' is another compact open subgroup of P, giving rise to N_0'', $(M^+)''$, etc., and if $z, z' \in Z_M$ are such that $zN_0'z^{-1} \subset N_0$ and $z'N_0''(z')^{-1} \subset N_0'$, then $h_{N_0,N_0',z}h_{N_0',N_0'',z'} = h_{N_0,N_0'',zz'}$.*

Proof. — If $m \in M^+ \bigcap (M^+)'$, then

$$\begin{aligned}
h_{N_0,m}h_{N_0,N_0',z} &= h_{N_0,mN_0m^{-1}m}h_{N_0,zN_0'z^{-1}z} \\
&= mh_{m^{-1}N_0m,N_0}h_{N_0,zN_0'z^{-1}z} \\
&= mh_{m^{-1}N_0m,zN_0'z^{-1}z} \\
&= zmh_{(zm)^{-1}N_0zm,N_0'} \\
&= zmh_{(zm)^{-1}N_0zm,m^{-1}N_0'm}h_{m^{-1}N_0'm,N_0'} \\
&= zh_{z^{-1}N_0z,N_0'}h_{N_0',mN_0'm^{-1}m} \\
&= h_{N_0,zN_0'z^{-1}z}h_{N_0',mN_0'm^{-1}m} \\
&= h_{N_0,N_0',z}h_{N_0',m}.
\end{aligned}$$

This proves claim (1). Claim (2) is proved by an analogous computation. □

If we write $Y' = M^+ \bigcap (M^+)'$ and $Y = Z_M^+ \bigcap (Z_M^+)'$, then Y generates Z_M as a group [**5**, Prop. 3.3.2 (i)], and Y' and Z_M generate M [**5**, Prop. 3.3.2 (ii)]. In particular, the inclusions

$$\mathrm{Hom}_{A[(Z_M^+)']}(A[Z_M], V^{N_0'}) \subset \mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], V^{N_0'})$$

and

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0}) \subset \mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], V^{N_0})$$

are actually equalities. Since $h_{N_0,N_0',z}$ is Y'-equivariant, it induces an $M = Y'Z_M$-equivariant map

$$\mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], V^{N_0'}) \to \mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], V^{N_0})$$

and hence an M-equivariant map

$$\mathrm{Hom}_{A[(Z_M^+)']}(A[Z_M], V^{N_0'}) \to \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0}),$$

which we denote by $\imath_{N_0,N_0',z}$. Now define

$$\imath_{N_0,N_0'} := z^{-1}\imath_{N_0,N_0',z} : \mathrm{Hom}_{A[(Z_M^+)']}(A[Z_M], V^{N_0'}) \to \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0}).$$

3.1.12. *Proposition*. — 1. *The map $\imath_{N_0,N_0'}$ is well-defined independently of the choice of element $z \in Z_M$ such that $zN_0'z^{-1} \subset N_0$.*
2. *$\imath_{N_0,N_0'}$ is an M-equivariant isomorphism.*
3. *If P_0'' is another choice of compact open subgroup of P, giving rise to N_0'', etc., then $\imath_{N_0,N_0'}\imath_{N_0',N_0''} = \imath_{N_0,N_0''}$.*

Proof. — Since z^{-1} is central in M, and since $\imath_{N_0,N_0',z}$ is M-equivariant, the same is true of the map $z^{-1}\imath_{N_0,N_0',z}$. This proves the M-equivariance claim of part (2).

If P_0'' is as in part (3), and $z' \in Z_M$ is such that $z'N_0''(z')^{-1} \subset N_0'$, then part (2) of Lemma 3.1.11 shows that $\imath_{N_0,N_0',z}\imath_{N_0',N_0'',z'} = \imath_{N_0,N_0'',zz'}$. Thus

$$z^{-1}\imath_{N_0,N_0',z}(z')^{-1}\imath_{N_0',N_0'',z'} = (zz')^{-1}\imath_{N_0,N_0'',zz'}.$$

(Here we have also used the fact that $\imath_{N_0,N_0',z}$ is M-equivariant, and so in particular Z_M-equivariant.) This proves part (3).

If we take $P_0'' = P_0$ in part (3), then we find that $\imath_{N_0,N_0,zz'}$ is induced by $h_{N_0,zz'}$, and thus gives the action of $zz' \in Z_M^+$ on $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})$. Consequently $(zz')^{-1}\imath_{N_0,N_0,zz'}$ acts as the identity on $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})$, and we find that $z^{-1}\imath_{N_0,N_0',z}$ and $(z')^{-1}\imath_{N_0',N_0,z'}$ are mutually inverse isomorphisms. This completes the proof of claim (2). Also, since z and z' are independent of one another, we find that the isomorphism $z^{-1}\imath_{N_0,N_0',z}$ does not depend on the choice of z. This proves claim (1), and completes the proof of the proposition. □

The preceding result shows that Ord_P is well-defined, up to canonical isomorphism, independently of the choice of the open subgroup P_0 of P. It is similarly independent of the choice of the Levi factor M of P. Indeed, if M' is another Levi factor of P, then we may canonically identify M and M' via the canonical isomorphisms $M \xleftarrow{\sim} P/N \xrightarrow{\sim} M'$. Furthermore, there is a uniquely determined element $n \in N$ such that $nMn^{-1} = M'$, and the isomorphism induced by conjugation by n yields the same identification of M and M'. Via this canonical identification, we may and do regard any M'-representation equally well as an M-representation.

Given a choice of compact open subgroup $P_0 \subset P$, write $P_0' := nP_0n^{-1}$, $M_0' := nM_0n^{-1} = nMn^{-1} \bigcap P_0'$, $N_0' := nN_0n^{-1} = N \bigcap P_0'$, $(M')^+ := nM^+n^{-1} = \{m' \in M' \,|\, m'N_0'(m')^{-1} \subset N_0'\}$, and $Z_{M'}^+ := nZ_M^+n^{-1} = (M')^+ \bigcap Z_{M'}$. We define the Hecke action of $(M')^+$ on $V^{N_0'}$ in analogy to the Hecke action of M^+ on V^{N_0}, and denote by

$$\mathrm{Ord}_P' : \mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$$

the functor

$$V \mapsto \mathrm{Hom}_{A[Z_{M'}^+]}(A[Z_{M'}], V^{N_0'})_{Z_{M'}-\mathrm{fin}}.$$

(The analogue of Lemma 3.1.7 for P_0' and M' shows that $\mathrm{Hom}_{A[Z^+_{M'}]}(A[Z_{M'}], V^{N_0'})$, and so also $\mathrm{Hom}_{A[Z^+_{M'}]}(A[Z_{M'}], V^{N_0'})_{Z_{M'}-\mathrm{fin}}$, is naturally an M'-representation, and hence an M-representation.) Thus Ord'_P is the analogue of the functor Ord_P, but computed using the Levi factor M' of P rather than M. (Note that we have already seen that this functor is well-defined independently of the particular choice of compact open subgroup P_0' used to compute it.)

Multiplication by n provides an isomorphism $V^{N_0} \xrightarrow{\sim} V^{N_0'}$, which intertwines the operator h_m on V^{N_0} with the operator $h_{nmn^{-1}}$ on $V^{N_0'}$, for each $m \in M^+$. Consequently, multiplication by n induces an M-equivariant isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{A[Z^+_M]}(A[Z_M], V^{N_0}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[Z^+_{M'}]}(A[Z_{M'}], V^{N_0'}),$$

and hence an M-equivariant isomorphism $\mathrm{Ord}_P(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}'_P(V)$. This shows that the functor Ord_P is well-defined, up to canonical isomorphism, independently of the choice of Levi factor of P.

3.2. Some elementary properties of Ord_P. — In this subsection, we record some simple properties of the functor Ord_P. We maintain the notation of the preceding subsection (A, P, M, N, P_0, M_0, N_0, M^+, Z_M, Z^+_M, etc.), and begin with a lemma that records some useful facts related to the monoid Z^+_M.

3.2.1. *Lemma*. — 1. *The monoid Z^+_M contains a compact open subgroup of Z_M.*
2. *If Z_0 is a compact open subgroup of Z^+_M, then we may find a submonoid $Z_0 \subset Y \subset Z^+_M$ for which the quotient Y/Z_0 is a finitely generated monoid, and such that Y generates Z_M as a group.*

Proof. — Since M_0 is an open subgroup of M, the intersection $M_0 \bigcap Z_M$ is a compact open subgroup of Z_M, which is clearly contained in Z^+_M. This proves (1).

Suppose that Z_0 is any compact open subgroup of Z_M contained in Z^+_M. We claim that Z_M/Z_0 is a finitely generated abelian group. (The proof will be given in the following paragraph.) This quotient is generated by Z^+_M/Z_0 (since, as we have already recalled, Z^+_M generates Z_M as a group). Thus we may find a finitely generated submonoid of Z^+_M/Z_0 which generates Z_M/Z_0. The preimage of this submonoid in Z^+_M is a submonoid Y of Z^+_M satisfying the requirements of (2).

To see that Z_M/Z_0 is finitely generated, let Z^0_M denote the ($\mathbb{Q}_p$-points of the) connected component of (the algebraic group underlying) Z_M; so Z^0_M is (the group of $\mathbb{Q}_p$-points of) a torus. If we write $Z^0_0 := Z_0 \bigcap Z^0_M$, then Z^0_M/Z^0_0 has finite index in Z_M/Z_0, and so it suffices to show that the former group is finitely generated. Let S denote the maximal split quotient of Z^0_M (in the category of tori), and let S' denote the kernel of the map $Z^0_M \to S$. The torus S' is then anisotropic, and hence (its groups of $\mathbb{Q}_p$-points is) compact. The intersection $S' \bigcap Z^0_0$ is compact and open in the compact group S', and hence of finite index. Thus, if we let S_0 denote the image of Z^0_0 in S, it suffices to show that S/S_0 is finitely generated. Let S_1 denote the maximal compact subgroup of S. Since S_0 is of finite index in S_1, it suffices in turn

to show that S/S_1 is finitely generated. Since S is a product of copies of $\mathbb{Q}_p^\times$, this follows from the isomorphism $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. (We remark that in fact Z_M itself is topologically finitely generated. Indeed, this follows from what we have just proved, together with [**9**, Prop. 6.4.1].) □

3.2.2. *Lemma*. — *If $\{W_i\}_{i\in I}$ is an inductive system of smooth Z_M^+-modules*[(3])*, then the natural map of $A[Z_M]$-modules*

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W_i)_{Z_M-\mathrm{fin}} \to \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], \varinjlim_i W_i)_{Z_M-\mathrm{fin}} \tag{3.2.3}$$

is an isomorphism.

Proof. — Let $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W_j)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ for some index j in the directed set I, and suppose that the image of ϕ under (3.2.3) vanishes, or equivalently, that the image of $\mathrm{im}(\phi)$ under the map $W_j \to \varinjlim_i W_i$ vanishes. Since Lemma 3.1.6 shows that $\mathrm{im}(\phi)$ is a finitely generated A-submodule of W_j, we may find an index k lying over j such that the image of $\mathrm{im}(\phi)$ under the transition map $W_j \to W_k$ vanishes, or equivalently, such that the image of ϕ under the map $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W_j)_{Z_M-\mathrm{fin}} \to \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W_k)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ vanishes. This proves the injectivity of (3.2.3).

Now let $\phi' \in \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], \varinjlim_i W_i)_{Z_M-\mathrm{fin}}$. Lemma 3.1.6 shows that $\mathrm{im}(\phi')$ is a finitely generated and Z_M^+-invariant A-submodule of $\varinjlim_i W_i$. Thus we may find a finitely generated A-module $U \subset W_j$ that maps isomorphically onto $\mathrm{im}(\phi')$, for some sufficiently large index j. Let $Z_0 \subset Z_M^+$ be a compact open subgroup that fixes U element-wise, so that the Z_M^+-action on U factors through Z_M^+/Z_0. Fix a submonoid Y of Z_M^+ satisfying the conditions of Lemma 3.2.1 (2).

If we choose k over j large enough, then, as the monoid ring $A[Y/Z_0]$ is Noetherian (since Y/Z_0 is finitely generated), the image of the finitely generated $A[Y/Z_0]$-module $A[Y/Z_0]U$ in W_k will map isomorphically onto its image in $\varinjlim_i W_i$, which is to say, onto $\mathrm{im}(\phi')$. Consequently, if we choose j large enough, then we may choose U to be an $A[Y]$-submodule of W_j that maps isomorphically onto $\mathrm{im}(\phi')$. We may then lift ϕ' to an element

$$\phi \in \mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], U)_{Z_M-\mathrm{fin}} \subset \mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], W_j)_{Z_M-\mathrm{fin}}.$$

Since Y generates Z_M as a group, the natural inclusion

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W_j)_{Z_M-\mathrm{fin}} \subset \mathrm{Hom}_{A[Y]}(A[Z_M], W_j)_{Z_M-\mathrm{fin}}$$

is an isomorphism. Thus ϕ is in fact an element of $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W_j)_{Z_M-\mathrm{fin}}$, which maps to the given element ϕ'. This shows that (3.2.3) is surjective. □

(3) I.e., smooth under the action of a compact open subgroup of Z_M^+; such a subgroup exists, by Lemma 3.2.1 (1).

3.2.4. *Proposition*. — $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$ *is left-exact and additive, and commutes with inductive limits.*

Proof. — The functors $V \mapsto V^{N_0}$ and $W \mapsto \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], W)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ (on the categories of smooth P-representations and M^+-modules respectively) are left-exact and additive, and (taking into account Lemma 3.2.2) commute with inductive limits. Thus Ord_P also has these properties. □

3.3. Preservation of admissibility. — If V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, then we may also regard it as an object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, and so define $\mathrm{Ord}_P(V)$, an object of $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$. The main result of this subsection is Theorem 3.3.3 below, which shows that if V is an admissible smooth G-representation, then $\mathrm{Ord}_P(V)$ is an admissible smooth M-representation.

We begin with a key lemma, which allows us to gain some control over the Hecke Z_M^+-action on V^{N_0}. Recall that if I is a compact open subgroup of G, then we say that I admits an Iwahori decomposition with respect to P and $\overline{P}$ if the product map

$$(I \bigcap \overline{N}) \times (I \bigcap M) \times (I \bigcap N) \to I$$

is a bijection. Note that, by applying the bijection $g \mapsto g^{-1}$ from I to itself, we find that the product map

$$(I \bigcap N) \times (I \bigcap M) \times (I \bigcap \overline{N}) \to I$$

is also a bijection.

3.3.1. *Remark*. — Note that the product map induces an injection

$$\overline{N} \times M \times N \hookrightarrow G.$$

Thus the following pair of conditions is equivalent to I admitting an Iwahori decomposition:

1. $I \subset \overline{N}MN$.
2. If $\overline{n}mn \in I$, with $\overline{n} \in \overline{N}$, $m \in M$, $n \in N$, then each of $\overline{n}, m, n$ lies in I.

From this it follows immediately that if I and I' are two subgroups, both admitting an Iwahori decomposition, then the same is true of $I \cap I'$, i.e. $I \cap I' = (I \cap I' \cap \overline{N}) \times (I \cap I' \cap M) \times (I \cap I' \cap N)$.

3.3.2. *Lemma*. — *Let I_0 and I_1 be two compact open subgroups of G, both of which admit an Iwahori decomposition with respect to P and $\overline{P}$. Suppose furthermore that $I_1 \bigcap \overline{N} \subset I_0 \bigcap \overline{N}$, that $I_1 \bigcap M = I_0 \bigcap M$, and that $I_1 \bigcap N = I_0 \bigcap N = N_0$. If $z_0 \in Z_M^+$ is such that $(I_0 \bigcap \overline{N}) \subset z_0(I_1 \bigcap \overline{N})z_0^{-1}$, then $h_{N_0,z_0}(V^{I_1}) \subset V^{I_0}$.*

Proof. — To ease notation, write $M_1 := I_1 \bigcap M = I_0 \bigcap M$, and $\overline{N}_i := I_i \bigcap \overline{N}$, for $i = 0, 1$. Thus $I_0 = \overline{N_0}M_1N_0$, while $I_1 = \overline{N}_1M_1N_0$. Also, since z_0 centralizes M, we see that $z_0I_1z_0^{-1} = z_0\overline{N}_1z_0^{-1}M_1z_0N_0z_0^{-1}$, and so our assumption that $z_0\overline{N}_1z_0^{-1} \supset \overline{N}_0$ implies that $z_0I_1z_0^{-1} \bigcap I_0 = \overline{N}_0M_1z_0N_0z_0^{-1}$.

Evidently $z_0 I_1 z_0^{-1} \supset z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0$, and so $z_0 V^{I_1} = V^{z_0 I_1 z_0^{-1}} \subset V^{z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0}$. Thus to prove the lemma, it suffices to show that $h_{N_0, z_0 N_0 z_0^{-1}}(V^{z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0}) \subset V^{I_0}$. Since M_1 normalizes both N_0 and $z_0 N_0 z_0^{-1}$, we see that $h_{N_0, z_0 N_0 z_0^{-1}}(V^{z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0})$ is invariant under M_1 and N_0. Thus it suffices to show that it is furthermore invariant under $\overline{N}_0$.

Let $\overline{n} \in \overline{N}_0$, and $v \in V^{z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0}$. Fix a set $\{n_l\}$ of coset representatives for $N_0 / z_0 N_0 z_0^{-1}$. Then

$$\overline{n} h_{N_0, z_0 N_0 z_0^{-1}} v = \overline{n} \sum_l n_l v = \sum_l \overline{n} n_l v = \sum_l n'_l \overline{p}_l v = \sum_l n'_l v,$$

where we have used the Iwahori decomposition of I_0 to rewrite each product $\overline{n} n_l$ in the form $n'_l \overline{p}_l$, with $n'_l \in N_0$ and $\overline{p}_l \in \overline{N}_0 M_1$. We claim that the n'_l again form a set of coset representatives for $N_0 / z_0 N_0 z_0^{-1}$. Given this, we find that

$$\overline{n} h_{N_0, z_0 N_0 z_0^{-1}} v = h_{N_0, z_0 N_0 z_0^{-1}} v,$$

and thus that $V^{z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0}$ is fixed by $\overline{N}_0$, as required.

Suppose now that $(n'_l)^{-1} n'_{l'} \in z_0 N_0 z_0^{-1}$ for some $l \neq l'$. Then

$$n_l^{-1} n_{l'} = \overline{p}_l^{-1} (n'_l)^{-1} n'_{l'} \overline{p}_{l'},$$

and the right hand side of this equation is a product of elements all lying in $z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0$. Since the left hand side lies in N, we see from the Iwahori decomposition of $z_0 I_1 z_0^{-1} \bigcap I_0$ that in fact $n_l^{-1} n_{l'} \in z_0 N_0 z_0^{-1}$, contradicting the fact that they are distinct coset representatives for $N_0 / z_0 N_0 z_0^{-1}$. Thus $\{n'_l\}$ is indeed a set of distinct coset representatives for $N_0 / z_0 N_0 z_0^{-1}$, and the lemma is proved. □

We now choose a cofinal sequence $\{I_i\}_{i \geq 0}$ of compact open subgroups of G, with each I_i normal in I_0, and such that each I_i admits an Iwahori decomposition with respect to P and $\overline{P}$. We write $M_i := I_i \bigcap M$, $N_i := I_i \bigcap N$, and $\overline{N_i} := I_i \bigcap \overline{N}$, for each $i \geq 0$.

For each $i \geq j \geq 0$, we write $I_{i,j} := \overline{N}_i M_j N_0$. Each $I_{i,j}$ is a compact open subgroup of I_0 (since we may rewrite it as $I_{i,j} = I_i M_j N_0$, noting that $M_j N_0$ is a subgroup of $M_0 N_0$, and thus of I_0, and so normalizes I_i). The bijection

$$\overline{N}_i \times M_j \times N_0 \xrightarrow{\sim} I_{i,j}$$

provides an Iwahori decomposition of $I_{i,j}$.

3.3.3. *Theorem*. — *If V is an admissible smooth representation of G over A, then $\mathrm{Ord}_P(V)$ is an admissible smooth representation of M, and the canonical lifting of Definition* 3.1.10 *is an embedding.*

Proof. — Since V is smooth by assumption, it is the inductive limit of its submodules $V[\mathfrak{m}^i]$ ($i \geq 0$). Since Ord_P is left-exact and preserves inductive limits (Proposition 3.2.4), the embedding $\mathrm{Ord}_P(V[\mathfrak{m}^i]) \hookrightarrow \mathrm{Ord}_P(V)[\mathfrak{m}^i]$ is an isomorphism, and $\mathrm{Ord}_P(V)$ is the inductive limit of its submodules $\mathrm{Ord}_P(V)[\mathfrak{m}^i]$. It thus suffices to

prove the theorem with V replaced by $V[\mathfrak{m}^i]$ for some $i \geq 0$. We must show that, for each $j \geq 0$, $\mathrm{Ord}_P(V)^{M_j}$ is finitely generated over A, and that the canonical lifting induces an embedding $\mathrm{Ord}_P(V)^{M_j} \hookrightarrow V^{N_0}$. We will compute $\mathrm{Ord}_P(V)$ using the compact open subgroup $P_0 := M_0 N_0$ of P. Observe that $V^{M_j N_0}$ is invariant under the Hecke Z_M^+-action on V^{N_0} (since Z_M^+ is central in M), and thus

$$\mathrm{Ord}_P(V)^{M_j} = \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})^{M_j}_{Z_M-\mathrm{fin}} = \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{M_j N_0})_{Z_M-\mathrm{fin}}.$$

Let $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{M_j N_0})_{Z_M-\mathrm{fin}}$. Lemma 3.1.6 (2) shows that $\mathrm{im}(\phi)$ is a finitely generated Z_M^+-invariant A-module, and thus is contained in $V^{I_{i,j}}$ for some sufficiently large $i \geq j$. If we choose $z_0 \in Z_M^+$ so that $z_0 \overline{N}_i z_0^{-1} \supset \overline{N_j}$, then Lemma 3.1.6 (3) shows that in fact $\mathrm{im}(\phi) = h_{N_0,z_0}\,\mathrm{im}(\phi) \subset h_{N_0,z_0}(V^{I_{i,j}}) \subset V^{I_{j,j}}$ (the final inclusion holding by Lemma 3.3.2). Thus if we let U denote the maximal A-submodule of $V^{I_{j,j}}$ that is invariant under the Hecke Z_M^+-action, then we see that in fact $\mathrm{im}(\phi) \subset U$. Consequently, $\mathrm{Ord}_P(V)^{M_j} \subset \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], U)$, and so is finitely generated over A, by Lemma 3.1.5. The same lemma shows that the canonical lifting induces an embedding $\mathrm{Ord}_P(V)^{M_j} \hookrightarrow U \subset V^{I_{j,j}} \subset V^{N_0}$. □

3.4. Extension to the case of ϖ-adically complete representations. — We begin by making the following definition.

3.4.1. ***Definition***. — If V is an object of $\mathrm{Mod}_P^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then we define

$$\mathrm{Ord}_P(V) := \varprojlim_i \mathrm{Ord}_P(V/\varpi^i V).$$

(Note that each of the quotients $V/\varpi^i V$ is an object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A/\mathfrak{m}^i)$, by Remark 2.4.2, and hence its P-ordinary part is defined.)

We now establish some basic properties of the functor Ord_P on the category $\mathrm{Mod}_P^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. It will ease the notation, and lend itself to further applications, if we work in a more general situation. Thus, we let H denote an arbitrary p-adic analytic group, and let F denote any $\mathscr{O}$-linear, $\mathscr{O}$-module valued, left-exact functor on $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)[\varpi^\infty]$. We extend F to a functor on $\mathrm{Mod}_H^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ via the formula

$$F(V) := \varprojlim_i F(V/\varpi^i V), \tag{3.4.2}$$

for any object V of $\mathrm{Mod}_H^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. For any such V, the $\mathscr{O}$-module $F(V)$ has a natural projective limit topology, obtained by endowing each of the terms $F(V/\varpi^i V)$ appearing in the projective limit that defines $F(V)$ with its discrete topology. We also note that $F(V)$ is ϖ-adically complete and separated (since each term $F(V/\varpi^i V)$ appearing in the projective limit is ϖ-adically discrete [(4)], hence ϖ-adicallly complete and separated, and a projective limit of ϖ-adically complete and separated $\mathscr{O}$-modules is itself ϖ-adically complete and separated).

The following results establish some additional properties of $F(V)$.

(4) I.e. the ϖ-adic topology on this module coincides with the discrete topology.

3.4.3. *Proposition*. — 1. *The natural map $F(V[\varpi^\infty]) \to F(V)[\varpi^\infty]$ is an isomorphism. In particular, $F(V)[\varpi^\infty]$ is of bounded exponent.*
2. *There is a natural embedding $F(V)_{\mathrm{fl}} \hookrightarrow F(V_{\mathrm{fl}})$, whose cokernel is of bounded exponent.*
3. *The projective limit topology and the ϖ-adic topology on $F(V)$ coincide.*

Proof. — Suppose first that V is $\mathscr{O}$-torsion free. Then for any $i, j \geq 0$, the short exact sequence

$$0 \longrightarrow V/\varpi^i V \xrightarrow{\varpi^j} V/\varpi^{i+j}V \longrightarrow V/\varpi^j V \longrightarrow 0$$

gives rise to an exact sequence

$$0 \longrightarrow F(V/\varpi^i V) \xrightarrow{\varpi^j} F(V/\varpi^{i+j}V) \longrightarrow F(V/\varpi^j V).$$

Passing to the projective limit in i, we obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow F(V) \xrightarrow{\varpi^j} F(V) \longrightarrow F(V/\varpi^j V).$$

Thus $F(V)$ is $\mathscr{O}$-torsion free, which verifies conditions (1) and (2), and for any $j \geq 0$, we obtain an embedding

$$F(V)/\varpi^j F(V) \hookrightarrow F(V/\varpi^j V).$$

This verifies condition (3), and completes the proof of the lemma for $\mathscr{O}$-torsion free V.

Let us turn to the general case. Fix $i \geq 0$ so that $V[\varpi^i] = V[\varpi^\infty]$. For any $j \geq i$, we have the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V[\varpi^i] & \longrightarrow & V/\varpi^j V & \longrightarrow & V_{\mathrm{fl}}/\varpi^j V_{\mathrm{fl}} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \searrow^{\varpi^i} & \downarrow & & \\ & & & & & & V/\varpi^{i+j}V & & \end{array}$$

whose top row is exact, which gives rise to the diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F(V[\varpi^i]) & \longrightarrow & F(V/\varpi^j V) & \longrightarrow & F(V_{\mathrm{fl}}/\varpi^j V_{\mathrm{fl}}) & & \\ & & & & & \searrow^{\varpi^i} & \downarrow & & \\ & & & & & & F(V/\varpi^{i+j}V) & & \end{array} \tag{3.4.4}$$

whose top row is again exact. Passing to the inductive limit over j, we obtain the diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(V[\varpi^i]) & \longrightarrow & F(V) & \longrightarrow & F(V_{\mathrm{fl}}) \\ & & & & & \searrow^{\varpi^i} & \downarrow \\ & & & & & & F(V) \end{array}$$

with an exact top row. The result of the first paragraph shows that $F(V_{\mathrm{fl}})$ is $\mathscr{O}$-torsion free, and so we see that $F(V[\varpi^i])$ maps isomorphically onto $F(V)[\varpi^\infty]$, verifying

condition (1), and also that there is an induced injection $F(V)_{\mathrm{fl}} \hookrightarrow F(V_{\mathrm{fl}})$, whose cokernel is annihilated by ϖ^i, verifying condition (2).

We now derive (3). For any $j \geq 0$, let $K_j \subset F(V)$ denote the kernel of the natural map $F(V) \to F(V/\varpi^j V)$. The sequence $\{K_j\}_{j\geq 0}$ forms a basis of neighborhoods of 0 in the projective limit topology on $F(V)$. Clearly $\varpi^j F(V) \subset K_j$.

Taking into account condition (1), which we have already proved, and the exactness of the top row of (3.4.4), we find that the map $F(V)[\varpi^\infty] \to F(V/\varpi^j V)$ is injective if $j \geq i$, and thus that $K_j \bigcap F(V)[\varpi^\infty] = 0$. If we let K'_j denote the image of K_j under the surjection $F(V) \to F(V)_{\mathrm{fl}}$, it follows that, when $j \geq i$, the induced surjection $K_j \to K'_j$ is in fact an isomorphism.

It follows from the results of the first paragraph of the proof that the kernel of the map $F(V_{\mathrm{fl}}) \to F(V_{\mathrm{fl}}/\varpi^j V_{\mathrm{fl}})$ is precisely $\varpi^j F(V_{\mathrm{fl}})$, and thus that the image of K'_j under the injection $F(V)_{\mathrm{fl}} \hookrightarrow F(V_{\mathrm{fl}})$ of (2) is contained in $\varpi^j F(V_{\mathrm{fl}})$. Since, as we have shown above, the cokernel of this injection is annihilated by ϖ^i, we find that $\varpi^i K'_j \subset \varpi^j F(V)_{\mathrm{fl}}$, and thus (since $F(V)_{\mathrm{fl}}$ is $\mathscr{O}$-torsion free) that $K'_j \subset \varpi^{j-i} F(V)_{\mathrm{fl}}$, provided that $j \geq i$.

Both K_j and $\varpi^{j-i} F(V)$ are subsets of K_{j-i}, and we have just shown that the image of the first in K'_{j-i} is contained in the image of the second. If we now suppose that $j \geq 2i$, so that the surjection $K_{j-i} \to K'_{j-i}$ is also an isomorphism, we conclude that $K_j \subset \varpi^{j-i} F(V)$. Thus the two decreasing sequences of $\mathscr{O}$-submodules $\{K_j\}_{j\geq 0}$ and $\{\varpi^j F(V)\}_{j\geq 0}$ of $F(V)$ do indeed define the same topology on $F(V)$, proving (3). □

3.4.5. ***Corollary***. — *If H_1 and H_2 are two p-adic analytic groups, if $F : \mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{H_1}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{H_2}(A)$ is a left-exact functor, and if we extend F to a functor on $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{cont}}_{H_1}(A)$ via the formula* (3.4.2)*, then the extended functor takes values in $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{cont}}_{H_2}(A)$. If in addition the restriction of F to $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_1}(A)$ takes values in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_2}(A)$, then the restriction to $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{adm}}_{H_1}(A)$ of the extension of F takes values in $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{adm}}_{H_2}(A)$.*

Proof. — The preceding proposition implies, for any object V of $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{cont}}_{H_1}(A)$, that $F(V)$ is ϖ-adically complete and separated and that $F(V)[\varpi^\infty]$ has bounded exponent, verifying conditions (1) and (2) of Definition 2.4.1 for $F(V)$. We also conclude that the projective limit topology on $F(V)$ coincides with the ϖ-adic topology. Consequently, for any $i \geq 0$, we may find $j \geq 0$ such that $F(V)/\varpi^i F(V)$ is a subquotient of $F(V/\varpi^j V)$. Since the latter representation is a smooth H_2-representation, so is the former, by Lemma 2.2.6. Remark 2.4.2 now shows that $F(V)$ is an object of $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{cont}}_{H_2}(A)$.

Suppose now that F restricts to a functor $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_1}(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_2}(A)$. If V is an object of $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{adm}}_{H_1}(A)$, then $V/\varpi^j V$ is an object of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_1}(A)$, for each $j \geq 0$, and so $F(V/\varpi^j V)$ is an object of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_2}(A)$. As shown in the preceding paragraph, for any $i \geq 0$, the quotient $F(V)/\varpi^i F(V)$ is a subquotient of $F(V/\varpi^j V)$ for some $j \geq 0$, and thus is also an object of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{H_2}(A)$, by Proposition 2.2.13. We conclude that $F(V)$ is an object of $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{adm}}_{H_2}(A)$, as claimed. □

3.4.6. *Proposition*. — *Taking ordinary parts is a functor* $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_P^{\varpi-\mathrm{cont}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$.

Proof. — Since Ord_P is a left-exact functor on $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, this follows directly from Corollary 3.4.5, together with the fact that the definition of Ord_P on $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ is made according to the formula (3.4.2). □

For each $i \geq 0$, we have the canonical lifting $\mathrm{Ord}_P(V/\varpi^i V) \to (V/\varpi^i V)^{N_0}$. These are compatible in an evident way as we change i, and so passing to the projective limit, we obtain an M^+-equivariant map

$$\mathrm{Ord}_P(V) \to V^{N_0}, \tag{3.4.7}$$

which we again refer to as the canonical lifting.

3.4.8. *Theorem*. — *The passage to ordinary parts gives rise to a functor* $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$. *Furthermore, for any object* V *of* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, *the canonical lifting* (3.4.7) *is a closed embedding, when source and target are given their* ϖ*-adic topologies.*

Proof. — The first claim of the theorem follows from Corollary 3.4.5, together with Theorem 3.3.3. That same theorem shows that if V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, then the canonical lifting $\mathrm{Ord}_P(V/\varpi^j V) \to (V/\varpi^j V)^{N_0}$ is an embedding, for any $j \geq 0$. Passing to the projective limit over j, we find that the canonical lifting $\mathrm{Ord}_P(V) \to V^{N_0}$ is a topological embedding, when source and target are given their corresponding projective limit topologies. Proposition 3.4.3 (applied to each of the left-exact functors Ord_P and $(-)^{N_0}$) implies that these topologies coincide with the ϖ-adic topologies on source and target, completing the proof of the theorem. □

4. Adjunction formulas

4.1. Parabolic induction. — Let A denote an object of $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$, with maximal ideal $\mathfrak{m}$. If U is an object of $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$, then we regard U as a $\overline{P}$-representation, via the projection $\overline{P} \to \overline{P}/\overline{N} \xrightarrow{\sim} M$, and define:

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U := \{f : G \to U \mid f \text{ locally constant }, \quad f(\overline{p}g) = \overline{p}f(g) \text{ for all } \overline{p} \in \overline{P}, g \in G\}.$$

The right regular action of G on functions induces a natural G-action on $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U$, making it an $A[G]$-module.

If U is an object of $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then again regarding U as a $\overline{P}$-representation, we define:

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U := \{f : G \to U \mid f \text{ continuous when } U \text{ is given its } \varpi\text{-adic topology }, \quad f(\overline{p}g) = \overline{p}f(g) \text{ for all } \overline{p} \in \overline{P}, g \in G\}.$$

Again, the right regular action of G on functions induces a natural G-action on $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U$, making it an $A[G]$-module.

In order to establish some basic properties of the functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$, it will be convenient to choose a continuous section $\sigma : \overline{P}\backslash G \to G$ to the projection $G \to \overline{P}\backslash G$. (Such a section exists, since G is a locally trivial $\overline{P}$-bundle over $\overline{P}\backslash G$, and hence we may find a finite cover of $\overline{P}\backslash G$ by disjoint open and closed sets over which this bundle is trivialized.) If we write $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\overline{P}\backslash G, U)$ (resp. $\mathscr{C}(\overline{P}\backslash G, U)$) to denote the space of locally constant (resp. continuous) U-valued functions on $\overline{P}\backslash G$, for an object U of $\mathrm{Mod}_{G}^{\mathrm{sm}}(A)$ (resp. an object U of $\mathrm{Mod}_{G}^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, equipped with its ϖ-adic topology), then pulling back functions along σ induces natural A-linear isomorphisms

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\overline{P}\backslash G, U), \qquad \text{for any object } U \text{ of } \mathrm{Mod}_{M}^{\mathrm{sm}}(A), \tag{4.1.1}$$

and

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(\overline{P}\backslash G, U), \qquad \text{for any object } U \text{ of } \mathrm{Mod}_{M}^{\varpi-\mathrm{cont}}(A). \tag{4.1.2}$$

4.1.3. ***Lemma.*** — *If U is an object of $\mathrm{Mod}_{M}^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then for each $i \geq 0$, there is a natural isomorphism*

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)/\varpi^{i}(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}(U/\varpi^{i}U).$$

Proof. — Taking into account the isomorphism (4.1.2), it suffices to show that

$$\mathscr{C}(X, U)/\varpi^{i}\,\mathscr{C}(X, U) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(X, U/\varpi^{i}U)$$

for any profinite space X. For any $j \geq i$, we have the pair of short exact sequences

$$0 \longrightarrow (\varpi^{j-i}U + U[\varpi^{i}])/\varpi^{j}U \longrightarrow U/\varpi^{j}U \xrightarrow{\varpi^{i}} \varpi^{i}U/\varpi^{j}U \longrightarrow 0$$

and

$$0 \to \varpi^{i}U/\varpi^{j}U \to U/\varpi^{j}U \to U/\varpi^{i}U \to 0.$$

Note that the projective systems $\{(\varpi^{j-i}U + U[\varpi^{i}])/\varpi^{j}U\}_{j\geq i}$ and $\{\varpi^{i}U/\varpi^{j}U\}_{j\geq i}$ both satisfy the Mittag–Leffler condition. Indeed, for the latter projective system, the transition maps are even surjective. For the former projective system, denoting the jth term in the system by M_j, the image of the map $M_k \to M_j$ (for $k \geq j \geq i$) is $(\varpi^{\min(k-i,j)}U + U[\varpi^{i}])/\varpi^{j}U$. If $k \geq j + i$, then $k - i \geq j$, and so this image simplifies to $(\varpi^{j}U + U[\varpi^{i}])/\varpi^{j}U$, which is independent of k.

Upon applying the (manifestly exact) functor $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X, -)$, we obtain the short exact sequences

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}\big(X, (\varpi^{j-i}U + U[\varpi^{i}])/\varpi^{j}U\big) \longrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X, U/\varpi^{j}U) \xrightarrow{\varpi^{i}} \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X, \varpi^{i}U/\varpi^{j}U) \longrightarrow 0$$

and

$$0 \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X, \varpi^{i}U/\varpi^{j}U) \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X, U/\varpi^{j}U) \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X, U/\varpi^{i}U) \to 0.$$

Furthermore, the two projective systems $\{\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}\big(X,(\varpi^{j-i}U+U[\varpi^i])/\varpi^jU\big)\}_{j\geq i}$ and $\{\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X,\varpi^iU/\varpi^jU)\}_{j\geq i}$ again satisfy the Mittag–Leffler condition, since $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X,-)$ is exact. Thus, passing to the projective limit in j, we obtain short exact sequences

$$0\longrightarrow\mathscr{C}(X,U[\varpi^i])\longrightarrow\mathscr{C}(X,U)\xrightarrow{\varpi^i}\mathscr{C}(X,\varpi^iU)\longrightarrow 0$$

and

$$0\to\mathscr{C}(X,\varpi^iU)\to\mathscr{C}(X,U)\to\mathscr{C}(X,U/\varpi^iU)\to 0.$$

(The exactness of the second sequence also follows directly from the discreteness of U/ϖ^iU.) Putting these together yields the exact sequence

$$0\longrightarrow\mathscr{C}(X,U[\varpi^i])\longrightarrow\mathscr{C}(X,U)\xrightarrow{\varpi^i}\mathscr{C}(X,U)\longrightarrow\mathscr{C}(X,U/\varpi^iU)\longrightarrow 0,$$

proving the lemma. □

4.1.4. *Lemma*. — *For objects U of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_M(A)$, the formation of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ commutes with the formation of inductive limits.*

Proof. — Taking into account the isomorphism (4.1.1), it suffices to show that the formation of $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X,U)$ commutes with the formation of inductive limits for any profinite space X. However, this is clear, as any element of $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(X,U)$ assumes only finitely many different values in U (since X is compact). □

4.1.5. *Proposition*. — *Parabolic induction $U\mapsto\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ gives rise to exact functors $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_M(A)\to\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_G(A)$ and $\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{cont}}_M(A)\to\mathrm{Mod}^{\varpi-\mathrm{cont}}_G(A)$.*

Proof. — We first consider the case when U is smooth. As already noted in the proof of Lemma 4.1.3, the formation of locally constant functions is manifestly an exact functor. It follows from the isomorphism (4.1.1) that the formation of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ is exact in U. We must show that it furthermore yields an object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_G(A)$. Fix a compact open subgroup H of G. Since $\overline{P}\backslash G$ is compact, it is the union of finitely many H-orbits, say $\overline{P}g_1H,\dots,\overline{P}g_rH$. Restricting functions from G to $\coprod_{i=1}^r g_iH$ thus induces the first of two isomorphisms in the following sequence of maps:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\\
&\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{i=1}^{r}\{f\in\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(g_iH,U)\,|\,f(\overline{p}g_ih)=\overline{p}f(g_ih)\text{ for all }\overline{p}\in\overline{P}\textstyle\bigcap g_iHg_i^{-1}\}\\
&\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{i=1}^{r}\{f\in\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H,U)\,|\,f(g_i^{-1}\overline{p}g_ih)=\overline{p}f(h)\text{ for all }\overline{p}\in\overline{P}\textstyle\bigcap g_iHg_i^{-1}\}\\
&\hookrightarrow\bigoplus_{i=1}^{r}\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H,U),
\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

in which the second isomorphism is induced by left translation by g_i^{-1} on the ith summand, and the third map is the obvious embedding. If we equip each of the summands with the H-action given by right translation, then these maps become H-equivariant.

The right regular H-action on $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H,U)$ makes this space an object of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$, since any element of $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H,U)$ is uniformly locally constant (since H is compact) and assumes only finitely many values in U. Thus $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ embeds into a finite direct sum of smooth H-representations, and so is itself a smooth H-representation.

We now consider the case of ϖ-adically continuous representations. If $0 \to U_1 \to U_2 \to U_3 \to 0$ is a short exact sequence in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then for any $i \geq 0$ we obtain the short exact sequence $0 \to U_1/(U_1 \bigcap \varpi^i U_2) \to U_2/\varpi^i U_2 \to U_3/\varpi^i U_3 \to 0$, which in turn yields a short exact sequence

$$0 \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}\big(\overline{P}\backslash G, U_1/(U_1 \bigcap \varpi^i U_2)\big) \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}\big(\overline{P}\backslash G, U_2/\varpi^i U_2\big) \\ \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}\big(\overline{P}\backslash G, U_3/\varpi^i U_3\big) \to 0.$$

Since the projective system $\{U_1/(U_1 \bigcap \varpi^i U_2)\}_{i\geq 0}$ has surjective transition maps, so does the projective system $\{\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}\big(\overline{P}\backslash G, U_1/(U_1 \bigcap \varpi^i U_2)\big)\}_{i\geq 0}$. Thus, passing to the projective limit in i, we obtain a short exact sequence

$$0 \to \mathscr{C}(\overline{P}\backslash G, U_1) \to \mathscr{C}(\overline{P}\backslash G, U_2) \to \mathscr{C}(\overline{P}\backslash G, U_3) \to 0.$$

(Here we have used Proposition 2.4.4, which shows that the topology on U_1 induced by the decreasing sequence of $\mathscr{O}$-submodules $U_1 \bigcap \varpi^i U_2$ coincides with the ϖ-adic topology on U_1.) Taking into account the isomorphism (4.1.2), we see that $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ induces an exact functor on $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. It remains to show that it takes values in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$.

If U is any object of $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$, then the space $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ is ϖ-adically complete and separated, since the isomorphism (4.1.2) identifies it with a space of continuous functions with values in the ϖ-adically complete and separated space U. Lemma 4.1.3 then shows that there is a natural isomorphism

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}(U/\varpi^i U),$$

and thus that the functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ on $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ is naturally isomorphic to the functor on $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$ obtained from the functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ on $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$ according to formula (3.4.2). Corollary 3.4.5 now implies that $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ takes values in $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$. □

4.1.7. *Proposition*. — *If U is an admissible smooth (resp. locally admissible smooth, resp. ϖ-adically admissible) $A[M]$-module, then $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ is an admissible smooth (resp. locally admissible smooth, resp. ϖ-adically admissible) $A[G]$-module.*

Proof. — In light of Proposition 4.1.5 and Lemmas 4.1.3 and 4.1.4, it suffices to consider the case when U is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$. Let H be a compact open subgroup of G, and let $j \geq 0$. As in the proof of Proposition 4.1.5, let $\{\overline{P}g_1, \ldots, \overline{P}g_r\} \subset G$ be a set of representatives for the finitely many orbits of H on $\overline{P}\backslash G$. If we write $M_i := M \cap g_i H g_i^{-1}$, for $i = 1, \ldots, r$, then the composition of the first two maps

of (4.1.6) induces an embedding

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)^{H}[\mathfrak{m}^j] \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} U^{M_i}[\mathfrak{m}^j].$$

Since each M_i is an open subgroup of M, and since U is assumed admissible, we see that the target of this embedding is finitely generated over A, and thus so is the source. This proves the proposition. □

Suppose now that U is an object of $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(G)$, so that elements of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U$ are locally constant. If f is such an element, then its support, which is an open and closed subset of G, is invariant under left translation by $\overline{P}$, and so corresponds to a compact open subset of the quotient $\overline{P}\backslash G$. We will thus frequently speak of the support of f as a subset of $\overline{P}\backslash G$, rather than of G.

Composing the closed embedding $N \hookrightarrow G$ with the quotient map $G \to \overline{P}\backslash G$, we obtain an open immersion

$$\jmath : N \hookrightarrow \overline{P}\backslash G,$$

which identifies N with an open subset $\jmath(N)$ of $\overline{P}\backslash G$. Let $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big)$ denote the A-submodule of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U$ consisting of elements whose support (thought of as a compact open subset of $\overline{P}\backslash G$) is contained in $\jmath(N)$. Pulling back such a function to N via $\jmath$, we obtain a locally constant compactly supported function $N \to U$. Thus, if we denote $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$ the A-module of all such functions, then we have a map of A-modules

$$\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big) \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U). \tag{4.1.8}$$

4.1.9. *Lemma*. — *The map* (4.1.8) *is an isomorphism.*

Proof. — Clearly this map is injective. On the other hand, given a function $f \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$, we may extend it to a function on $\overline{P}N$ via the formula $f(\overline{p}n) = \overline{p}f(n)$, and then extend it by zero to a function on G. Since f is compactly supported, this extension is locally constant, and yields an element of $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big)$ that maps to f under (4.1.8). Thus (4.1.8) is also surjective. □

We denote the inverse isomorphism to (4.1.8) by $\jmath_*$. Thus

$$\jmath_* : \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U) \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big).$$

The translation action of P on $\overline{P}\backslash G$ leaves its open subset $\jmath(N)$ invariant. Concretely, we see that if $mn \in MN = P$, and $n' \in N$, then

$$\jmath(n')mn = \jmath(m^{-1}n'mn)$$

(where the left side denotes the translation action of mn on the element $\jmath(n') \in \overline{P}\backslash G$). Thus $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big)$ is P-invariant. We may transport this P-action via the isomorphism of Lemma 4.1.9 to a P-action on $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$. Of course, this P-action also admits a direct description, as follows:

$$(mnf)(n') = mf(m^{-1}n'mn), \text{ for } m \in M,\ n, n' \in N, \text{ and } f \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U).$$

There is a natural isomorphism of $A[P]$-modules

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)\otimes_A U \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U),$$

if we equip the left hand side with the tensor product P-action, where P acts on $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)$ via the above description (taking the M-action on the coefficients A to be trivial), and on U through its quotient M.

4.2. A simple adjunction formula. — Fix a compact open subgroup P_0 of P, and define M_0, N_0, M^+, etc., as in Subsection 3.1. We regard $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)$ as an $A[P]$-module via the formula of the preceding subsection (taking the M-action on A to be trivial). For any compact open subset $\Psi \subset N$, we denote by $1_\Psi \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)$ the characteristic function of Ψ (i.e. 1_Ψ is identically equal to 1 on Ψ, and vanishes elsewhere). If V is an object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, then (since M normalizes N), the space $\mathrm{Hom}_{A[N]}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V)$ has a natural M-action.

4.2.1. ***Lemma***. — *The map* $\mathrm{ev}_{1_{N_0}} : \mathrm{Hom}_{A[N]}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V) \to V^{N_0}$, *induced by evaluation at the function* $1_{N_0} \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)$, *is* M^+*-equivariant, if we equip the target with its Hecke* M^+*-action.*

Proof. — This is a simple calculation. □

Since the source of $\mathrm{ev}_{1_{N_0}}$ is an $A[M]$-module, it induces an M-equivariant map

$$\mathrm{Hom}_{A[N]}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V) \to \mathrm{Hom}_{A[M^+]}(A[M],V^{N_0}) \Big(\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M],V^{N_0})\Big), \tag{4.2.2}$$

where the isomorphism, which was observed in the proof of Lemma 3.1.7 (1), follows from [**5**, Prop. 3.3.6].

4.2.3. ***Proposition***. — *The map* (4.2.2) *is an isomorphism.*

Proof. — Given $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[N]}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V)$, let $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}_{A[M^+]}(A[M],V^{N_0})$ denote the image of ϕ under (4.2.2). If $m \in M^+$, then

$$\tilde{\phi}(m) = (m\tilde{\phi})(1) = (m\phi)(1_{N_0}) = \phi(m1_{N_0}) = \phi(1_{mN_0m^{-1}}) \tag{4.2.4}$$

(where $1_{mN_0m^{-1}}$ denotes the characteristic function of mN_0m^{-1}). Since any element of $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)$ may be written in the form $\sum_i a_i n_i 1_{mN_0m^{-1}}$ for some finite collections $\{a_i\} \subset A$ and $\{n_i\} \subset N$, and some $m \in M^+$, we see that ϕ is completely determined by the function $\tilde{\phi}$, and thus (4.2.2) is injective. Conversely, given any $\tilde{\phi} \in \mathrm{Hom}_{A[M^+]}(A[M],V^{N_0})$, we can define $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[N]}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V)$ via the formula (4.2.4), i.e.

$$\phi(f) := \sum_i a_i n_i \tilde{\phi}(m),$$

for any function $f = \sum_i a_i n_i 1_{mN_0m^{-1}} \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)$; the M^+-equivariance of $\tilde{\phi}$ ensures that $\phi(f)$ is well-defined, independently of the choice of representation of f as a sum of this form. Thus (4.2.2) is also surjective. □

4.2.5. *Remark*. — Since the source of (4.2.2) is independent of the choice of N_0, this isomorphism yields another proof of Proposition 3.1.12.

4.2.6. *Proposition*. — *If U and V are objects of $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, respectively, then there is a natural isomorphism*

$$\mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U),V\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U,\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M],V^{N_0})\big).$$

Proof. — We compute

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U),V\big) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A)\otimes_A U,V\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[P]}\big(U,\mathrm{Hom}_A(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V)\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U,\mathrm{Hom}_{A[N]}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,A),V)\big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U,\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M],V^{N_0})\big),\end{aligned}$$

where the third isomorphism arises from the fact that the P-action on M factors through $M = P/N$, and the final isomorphism is provided by Proposition 4.2.3. □

4.2.7. *Proposition*. — *If U is a locally Z_M-finite smooth representation of M over A then there is a natural M-equivariant isomorphism $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U))$, characterized by the fact that its composite with the canonical lifting $\mathrm{Ord}_P(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U)) \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U)^{N_0}$ is given by mapping an element $u \in U$ to the constant function u supported on N_0.*

Proof. — If we write $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ as the directed union of finitely generated, Z_M-invariant, A-modules, then we may write

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U)^{N_0} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I, z\in Z_M^+} \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(z^{-1}N_0z,U_i)^{N_0} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I, z\in Z_M^+} A[z^{-1}N_0z/N_0]\otimes_A U_i,$$

where, in forming the inductive limits, we direct Z_M^+ via the relation of divisibility. Lemma 3.2.2 yields an isomorphism

$$\varinjlim_{i,z} \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], A[z^{-1}N_0z/N_0]\otimes_A U_i)_{Z_M-\mathrm{fin}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_p(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U)).$$

It is easily checked that evaluation at 1 induces an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], A[z^{-1}N_0z/N_0]\otimes_A U_i)_{Z_M-\mathrm{fin}} \xrightarrow{\sim} U_i,$$

where U_i is embedded into $A[z^{-1}N_0z/N_0]\otimes_A U_i$ via $u \mapsto 1\otimes u$. Thus we find that

$$U \xrightarrow{\sim} \varinjlim_i U_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_p(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U))$$

in the manner claimed. We leave it to the reader to verify that this isomorphism is M-equivariant. □

4.2.8. ***Corollary***. — *If U is a locally Z_M-finite smooth representation of M over A, and if V is a smooth representation of P over A, then passing to ordinary parts induces a natural isomorphism*

$$\mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,U),V\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U,\mathrm{Ord}_P(V)\big).$$

Proof. — This follows from the preceding propositions, together with the fact that, since U is locally Z_M-finite by assumption, the inclusion

$$\mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U,\mathrm{Ord}_P(V)\big) \subset \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U,\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M],V^{N_0})\big)$$

is in fact an equality. □

4.3. Ordinary parts of parabolically induced representations. — In this subsection we will strengthen Proposition 4.2.7 by computing the P-ordinary part of a representation parabolically induced from $\overline{P}$.

Fix a minimal parabolic subgroup P_0 of G (defined over $\mathbb{Q}_p$) contained in P, choose a Levi factor M_0 of P_0 contained in M, and let W denote the Weyl group of G with respect to M_0. We may choose a subset $W_P \subset W$ so that G decomposes as the disjoint union of locally closed subsets

$$G = \coprod_{w \in w_P} \overline{P} w P.$$

We may and do choose W_P so that it contains the identity $1 \in W$, and also the longest element $w_\ell \in W$. We define a partial ordering on W_P as follows: $w \succ w'$ if and only if $\overline{P}wP$ is contained in the closure of $\overline{P}w'P$. (See for instance the discussion at the beginning of [**3**, §6.3]; note, though, that the parabolic subgroups P_Θ and P_Ω considered there are both supposed to be attached to subsets Θ and Ω of positive simple roots. Thus to compare our situation with that of [**3**, §6.3], one should write $P = P_\Omega$ for some set of positive simple roots, as well as $\overline{P} = w_\ell^{-1} P w_\ell$, so that the above decomposition of G gets rewritten as $G = \coprod_{w \in w_P} P_\Omega w_\ell w P_\Omega$. In [**3**, §1.1] a subgroup W_Ω of W associated to Ω is defined, and a particular set of double-coset representatives $[W_\Omega \backslash W / W_\Omega]$ of the double quotient $W_\Omega \backslash W / W_\Omega$ is chosen. If $w \in W$, let $[w] \in [W_\Omega \backslash W / W_\Omega]$ denote the representative of $W_\Omega w W_\Omega$. The map $w \mapsto [w_\ell w]$ then induces a bijection between the subset W_P of W and the set $[W_\Omega \backslash W / W_\Omega]$, which is order-*reversing*, when W_P is equipped with the order introduced above, and $[W_\Omega \backslash W / W_\Omega]$ is equipped with the order defined in [**3**, §6.3].)

For any $w \in W_P$, write

$$S_w := \coprod_{w' \in W_P, w \succ w'} \overline{P} \backslash \overline{P} w' P.$$

Then each S_w is an open subset of $\overline{P}\backslash G$, $S_1 := \jmath(N)$, $S_{w_\ell} := \overline{P}\backslash G$, and $S_{w'} \subset S_w$ if and only if $w \succ w'$.

If U is a locally Z_M-finite smooth representation of M over A, then for each $w \in W_P$, we let $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)(S_w)$ denote the subspace of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$ consisting of functions whose

support (when regarded as a subset of $\overline{P}\backslash G$) lies in S_w. Since each S_w is a union of P-orbits in $\overline{P}\backslash G$, each subspace $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)(S_w)$ is P-invariant.

4.3.1. *Lemma*. — *If $w \succ w'$ and w is an immediate successor of w' in W_P (i.e. if $w \neq w'$, and if there is no element $w'' \in W_P$ such that $w \succeq w'' \succeq w'$), then*

$$\mathrm{Ord}_P\big((\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)(S_w)/(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)(S_{w'})\big) = 0.$$

Proof. — Restricting elements of $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)(S_w)$ to $\overline{P}wP$ induces an exact sequence of P-representations $0 \to (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)(S_{w'}) \to (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U)(S_w) \to \mathscr{C}$, where

$$\mathscr{C} := \{f : \overline{P}wP \to U \mid f(\overline{n}mwp) = mf(wp) \text{ for all } \overline{n} \in \overline{N}, m \in M, p \in P, \text{ and the support of } f \text{ is compact modulo } \overline{P}\}$$

is equipped with the right regular P-action. Since Ord_P is a left-exact functor, it suffices to show that $\mathrm{Ord}_P(\mathscr{C}) = 0$. Suppose that

$$\phi \in \mathrm{Ord}_P(\mathscr{C}) := \mathrm{Hom}_{A[Z_M]^+}(A[Z_M], \mathscr{C}^{N_0})_{Z_M-\mathrm{fin}}.$$

Lemma 3.1.6 (2) shows that $\mathrm{im}(\phi)$ is a finitely generated A-submodule of $\mathscr{C}$. In particular, we may find a compact open subset Ω of $\overline{P}\backslash\overline{P}wP$ such that the support of every element of $\mathrm{im}(\phi)$, taken modulo $\overline{P}$, lies in Ω. Since Ω is compact, we may find $z \in Z_M^+$ such that $\Omega z^{-1} \subset \overline{P}\backslash\overline{P}wN_0$. Since Lemma 3.1.6 (3) implies that

$$\mathrm{im}(\phi) = h_{N_0,z}\,\mathrm{im}(\phi), \tag{4.3.2}$$

we see that in fact every element of $\mathrm{im}(\phi)$ has its support contained in $\overline{P}\backslash\overline{P}wN_0$. Since ϕ takes values in $\mathscr{C}^{N_0}$, every element f of $\mathrm{im}(\phi)$ is furthermore invariant under the right regular action of elements of N_0. Thus, if we write $f(w) = u$, then, when restricted to its support (i.e. to $\overline{P}\backslash\overline{P}wN_0$), the function f is given by the formula

$$\overline{n}mwn_0 \mapsto mu. \tag{4.3.3}$$

We write $f =: f_u$.

If $z \in Z_M^+$, then $h_{N_0,z}f_u$ is again supported on $\overline{P}\backslash\overline{P}wN_0$, and invariant under N_0, and so we may write $h_{N_0,z}f_u = f_{u'}$, for some $u' \in U$. To compute u', we evaluate $h_{N_0,z}f_u$ at w:

$$u' = (h_{N_0,z}f)(w) = \sum_{n \in N_0/zN_0z^{-1}} (nzf_u)(w) = \sum_{n \in N_0/zN_0z^{-1}} f_u(wnz).$$

Since f_u is supported on $\overline{P}wN_0$, we see (taking into account the formula (4.3.3)) that

$$f_u(wnz) = \begin{cases} 0 \text{ if } n \notin w^{-1}\overline{N}w \bigcap N_0 \\ (wzw^{-1})u \text{ if } n \in w^{-1}\overline{N}w \bigcap N_0. \end{cases}$$

Thus

$$u' = [\big(N_0 \bigcap w^{-1}\overline{N}w\big) : \big(zN_0z^{-1} \bigcap w^{-1}\overline{N}w\big)] \cdot (wzw^{-1})u.$$

Since w is a non-trivial element of W_P (since it is strictly greater than the element $w' \in W_P$), the intersection $N \bigcap w^{-1}\overline{N}w$ is non-trivial, and so the intersection

$N_0 \bigcap w^{-1}\overline{N}w$ is a non-trivial pro-p group, which is topologically finitely generated, but of infinite order. As z ranges over the elements of Z_M^+, the groups zN_0z^{-1} range over a cofinal collection of open subgroups of N_0. Thus the intersections $zN_0z^{-1} \bigcap w^{-1}\overline{N}w$ range over a cofinal collection of open subgroups of $N_0 \bigcap w^{-1}\overline{N}w$, and so the index $[\big(N_0 \bigcap w^{-1}\overline{N}w\big) : \big(zN_0z^{-1} \bigcap w^{-1}\overline{N}w\big)]$ can be made an arbitrarily large power of p by choosing $z \in Z_M^+$ appropriately. Since u is annihilated by some power of p, we conclude that $u' = 0$. From (4.3.2) we conclude that in fact $\mathrm{im}(\phi) = 0$, and the lemma follows, since ϕ was an arbitrarily chosen element of $\mathrm{Ord}_P(\mathscr{C})$. □

4.3.4. *Proposition*. — *If U is a locally Z_M-finite smooth M-representation over A, then there is a natural isomorphism of M-representations $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)$.*

Proof. — It follows from the preceding lemma, together with the left-exactness of Ord_P, that the inclusion

$$\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)\big(\jmath(N)\big) \subset \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$$

induces an isomorphism on P-ordinary parts. The proposition now follows from Proposition 4.2.7 and Lemma 4.1.9. □

4.3.5. *Corollary*. — *If U is an object of $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, then there is a natural isomorphism of M-representations $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)$.*

Proof. — For each integer $i \geq 0$, the preceding proposition, together with Lemma 2.3.4, yields an isomorphism

$$U/\varpi^i U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G(U/\varpi^i U)\big).$$

Passing to the projective limit over i, and taking into account Definition 3.4.1 and Lemma 4.1.3, we obtain the required isomorphism. □

4.4. The main adjunction formula. — The main result of this subsection is Theorem 4.4.6, showing that $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ and Ord_P are adjoint functors.

Let U be a smooth, admissible representation of M over A, and let V be a smooth representation of G over A. Recall from Subsection 4.1 that $\jmath_*$ provides a P-equivariant isomorphism between $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$ and $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U\big)\big(\jmath(N)\big)$.

If Ω is a compact open subset of $\overline{P}\backslash G$, and $f \in \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$, then we will let $f_{|\Omega}$ denote the restriction of f to the preimage (under the canonical projection $G \to \overline{P}\backslash G$) of Ω in G, extended by zero to a function on G. The function $f_{|\Omega}$ again lies in $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$, and the support of $f_{|\Omega}$, thought of as a subset of $\overline{P}\backslash G$, is equal to the intersection of Ω and the support of f. The reader may verify the following formula, which we will apply repeatedly: for any $g \in G$, we have that

$$(gf)_{|\Omega} = g(f_{|\Omega g}). \tag{4.4.1}$$

We will apply similar notation when considering elements of $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$: i.e. if $f \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$, and if Ψ is a compact open subset of N, then we will let $f_{|\Psi}$ denote

the restriction of f to Ψ, extended by zero over N. We have the following formula, analogous to (4.4.1): if $mn \in MN = P$, then

$$(mnf)_{|\Psi} = mn(f_{|m^{-1}\Psi mn}). \tag{4.4.2}$$

4.4.3. *Lemma*. — *Let $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big), V\big)$. If $f \in \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big)$ and $g \in G$ are chosen so that gf also lies in $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big)$, then $\phi(gf) = g\phi(f)$.*

Proof. — Let Ω denote the support of f, which by assumption is contained in $\jmath(N)$, and write $\Psi = \jmath^{-1}(\Omega) \subset N$. As in Subsection 3.3, choose a cofinal sequence $\{I_i\}_{i\geq 0}$ of compact open subgroups of G, each admitting an Iwahori decomposition $\overline{N}_i \times M_i \times N_i \xrightarrow{\sim} I_i$. Since Ω, and hence Ψ, is compact, we may choose i sufficiently large so that Ψ is a union of left cosets of N_i, i.e. so that $N_i n \subset \Psi$ for every $n \in \Psi$. Write $f = \jmath_* f'$, with $f' \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$. Since f' is a locally constant function, and in particular assumes only finitely many distinct values in U, enlarging i if necessary, and choosing i' sufficiently large, we may furthermore assume that f' is *left-N_i*-invariant [5], and takes values in $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$. If $n \in \Psi$, we then see that $(nf')_{|N_i}$ is a constant $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$-valued function on N_i.

We let X denote the subspace of $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U)$ consisting of constant $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$-valued functions on N_i, regarded as functions on N via extension by zero. The previous paragraph shows that $(nf')_{|N_i} \in X$.

We claim that $\jmath_*(X)$ is element-wise-fixed by I_i. Note that $\jmath_*(X)$ equals the set of functions $f_u : G \to U$ which are supported on $\overline{P}N_i = \overline{N}MN_i$, and which on that set are defined by the formula $f_u(\overline{n}mn) = mu$, for $\overline{n} \in \overline{N}$, $m \in M$, and $n \in N_i$, where u ranges over the elements of $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$. Note next (taking into account the Iwahori decomposition of I_i) that $\overline{P}N_i = \overline{P}I_i$, and thus that if F is any function on G supported on $\overline{P}N_i$, the same is true of gF, if $g \in I_i$. Furthermore, if $g \in I_i$ and $n \in N_i$ then the product ng again lies in I_i, and so (again taking into account the Iwahori decomposition of I_i) may be written in the form $g = \overline{n}'m'n'$, for some $\overline{n}' \in \overline{N}_i, m' \in M_i$, and $n' \in N_i$. We thus compute that, for any $\overline{n} \in \overline{N}$ and $m \in M$, that

$$\begin{aligned}(gf_u)(\overline{n}mn) = f_u(\overline{n}mng) = f_u(\overline{n}m\overline{n}'m'n') = f_u(\overline{n}(m\overline{n}'m^{-1})mm'n') \\ = mm'u = mu = f_u(\overline{n}mn).\end{aligned}$$

(Here the first equality holds by definition, since G acts by right translation; the second equality is just applying the Iwahori decomposition for ng given above; the third equality is clear; the fourth and sixth equalities follow from the definition of f_u as a function; and the fifth equality follows from the fact that $u \in U^{M_i}$.) Thus $\jmath_*(X)$ is indeed fixed element-wise by I_i.

Since U is assumed to be admissible smooth, the space $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$ is a finitely generated A-module, and thus the same is true of X and $\jmath_*(X)$. Thus $\phi\big(\jmath_*(X)\big)$ is

[5] I.e. constant on left N_i-cosets.

a finitely generated A-submodule of V, and we may choose $j \geq i$ so that I_j fixes $\phi\big(\jmath_*(X)\big)$ element-wise.

The support of gf is equal to the translate Ωg^{-1} of Ω, which by assumption again lies in $\jmath(N)$. Note that this translate is equal to the image under the natural projection $\overline{P}\backslash G \to G$ of the translate $\Psi g^{-1} \subset N g^{-1} \subset G$. Since by assumption it lies $\jmath(N)$, we see that Ψg^{-1} is a compact subset of $\overline{P}N$. Let $\overline{\Psi}$ denote the projection of Ψg^{-1} onto $\overline{N}$ (i.e. the projection onto the first factor in the source of the isomorphism $\overline{N} \times M \times N \xrightarrow{\sim} \overline{P}N$). Choose an element $z \in Z_M$ so that $z\overline{\Psi}z^{-1} \subset \overline{N}_j$, while $z^{-1}N_i z \subset N_i$.

Fix an $n \in \Psi$. Since $\Psi g^{-1} \subset \overline{\Psi}P$, we may write $gn^{-1} = p\overline{n}$ for some $\overline{n} \in \overline{\Psi}^{-1}$ and $p \in P$. By virtue of our choice of z, we have $z\overline{n}z^{-1} \in \overline{N}_j^{-1} = \overline{N}_j$. We now compute:

$$\begin{aligned} g(f_{|\jmath(N_i)zn}) = gn^{-1}z^{-1}(znf)_{|\jmath(N_i)} &= p\overline{n}z^{-1}(znf)_{|\jmath(N_i)} \\ &= pz^{-1}z\overline{n}z^{-1}(znf)_{|\jmath(N_i)} = pz^{-1}(znf)_{|\jmath(N_i)}. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

All but the final equality are trivial manipulations (taking into account the formula (4.4.1)). The final equality holds because $(znf)_{|\jmath(N_i)}$ lies in $\jmath_*(X)$ (as we will show in a moment), and so is fixed by the element $z\overline{n}z^{-1} \in \overline{N}_j \subset \overline{N}_i$. To see that $(znf)_{|\jmath(N_i)} \in \jmath_*(X)$, note that since $(nf')_{|N_i}$ is a constant $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$-valued function on N_i, an application of (4.4.2) shows that $(znf')_{|zN_iz^{-1}} = z\big((nf')_{|N_i}\big)$ is a constant $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$-valued function on $zN_iz^{-1} \supset N_i$. Thus $(znf')_{|N_i}$ is again a constant $U^{M_i}[\mathfrak{m}^{i'}]$-valued on N_i, and so lies in X. Consequently $(znf)_{|\jmath(N_i)} = \jmath_*\big((znf')_{|N_i}\big)$ lies in $\jmath_*(X)$, as claimed.

Applying ϕ to (4.4.4), we compute that

$$\begin{aligned} \phi\big(g(f_{|\jmath(N_i)zn})\big) = \phi\big(pz^{-1}(znf)_{|\jmath(N_i)}\big) &= pz^{-1}\phi\big((znf)_{|\jmath(N_i)}\big) \\ = pz^{-1}(z\overline{n}z^{-1})\phi\big((znf)_{|\jmath(N_i)}\big) &= gn^{-1}z^{-1}\phi\big((znf)_{|\jmath(N_i)}\big) \\ = g\phi\big(n^{-1}z^{-1}(znf)_{|\jmath(N_i)}\big) &= g\phi(f_{|\jmath(N_i)zn}). \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Here the first equality is given by (4.4.4), the second and fifth equalities follow from the P-equivariance of ϕ, and the third equality arises from the fact that $\phi\big((znf)_{|\jmath(N_i)}\big) \in \phi\big(\jmath_*(X)\big)$ (by the discussion of the preceding paragraph), and hence is fixed by the element $z\overline{n}z^{-1} \in \overline{N}_j$. The fourth equality is a trivial manipulation, while the final equality is an application of (4.4.1).

Since $z^{-1}N_iz \subset N_i$, we may write Ψ as a finite disjoint union of left $z^{-1}N_iz$ cosets, say $\Psi = \coprod_l z^{-1}N_izn_l$, and thus decompose Ω as a union of translates of $\jmath(N_i)$, namely $\Omega = \coprod_l \jmath(N_i)zn_l$. Accordingly, we may write $f = \sum_l f_{|\jmath(N_i)zn_l}$, and then compute (taking into account (4.4.5)) that

$$\phi(gf) = \sum_l \phi(gf_{|\jmath(N_i)zn_l}) = \sum_l g\phi(f_{|\jmath(N_i)zn_l}) = g\phi(f).$$

This proves the lemma. □

We now prove our main result.

4.4.6. *Theorem*. — *Let A be an object of* $\mathrm{Comp}(\mathscr{O})$. *If U is an object of* $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$ (*resp.* $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$) *and V is an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ (*resp.* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{cont}}(A)$) *then passage to ordinary parts induces an isomorphism*

$$\mathrm{Hom}_{A[G]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U, V\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U, \mathrm{Ord}_P(V)\big).$$

Consequently, the functor Ord_P *on* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ (*resp.* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$) *is right adjoint to the functor* $U \mapsto \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ (*which takes* $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$, *resp.* $\mathrm{Mod}_M^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, *to* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$, *resp.* $\mathrm{Mod}_G^{\varpi-\mathrm{adm}}(A)$, *by Proposition* 4.1.7).

Proof. — We first consider the case when U and V are smooth. Restricting maps from $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ to $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big)$ induces a map

$$\begin{aligned}(4.4.7)\quad \mathrm{Hom}_{A[G]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U, V\big) &\to \mathrm{Hom}_{A[P]}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big), V\Big)\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[G]}\big(A[G]\otimes_{A[P]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big), V\big).\end{aligned}$$

The natural map

$$A[G]\otimes_{A[P]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big) \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$$

is surjective, as $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big)$ generates $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ over G, since the G-translates of $\jmath(N)$ cover $\overline{P}\backslash G$. Thus (4.4.7) is injective. We claim that it is in fact an isomorphism. To prove this, we have to show that any map of $A[G]$-modules

$$\phi : A[G]\otimes_{A[P]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big) \to V,$$

in which the target is smooth, necessarily factors through the quotient $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U$ of the source. In other words, we have to show that if $g_1, \dots, g_l$ is a finite sequence of elements of G, and $f_1, \dots, f_l$ is a finite sequence of elements of $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U\big)\big(\jmath(N)\big)$, such that

$$(4.4.8)\qquad \sum_{i=1}^{l} g_i f_i = 0 \text{ in } \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}U,$$

then

$$(4.4.9)\qquad \sum_{i=1}^{l} g_i \phi(f_i) \stackrel{?}{=} 0 \text{ in } V.$$

It suffices to show that each point x of $\overline{P}\backslash G$ has a compact open neighborhood Ω_x such that for any neighborhood $\Omega'_x \subset \Omega_x$ of x we have

$$(4.4.10)\qquad \sum_{i=1}^{l} g_i \phi(f_{i|\Omega'_x g_i}) \stackrel{?}{=} 0.$$

Indeed, we can then partition $\overline{P}\backslash G$ into a finite disjoint union of such neighborhoods, say $\overline{P}\backslash G = \coprod_{j=1}^{s} \Omega'_{x_j}$, and writing

$$g_i f_i = \sum_{j=1}^{s} (g_i f_i)_{|\Omega'_{x_j}} = \sum_{j=1}^{s} g_i f_{i|\Omega'_{x_j} g_i}$$

(where we have used (4.4.1)), so that

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} f_{i|\Omega'_{x_j} g_i},$$

we conclude that if (4.4.10) holds, then so does (4.4.9).

If $x = \overline{P}g$ for some $g \in G$, then replacing $(g_1, \dots, g_l)$ by $(gg_1, \dots, gg_l)$, we see that it suffices to treat the case when x equals the identity coset, which is equal to the image $\jmath(e)$ of the identity e of N under the open immersion $\jmath : N \hookrightarrow \overline{P}\backslash G$. Let Ω_e be a compact open neighborhood of $\jmath(e)$ in $\jmath(N)$, chosen so that $\Omega_e g_i \subset \jmath(N)$ for all i for which $g_i \in \overline{P}N$, and so that $\Omega_e g_i$ is disjoint from the support of f_i for all other i. It follows from (4.4.8) (and an application of (4.4.1)) that

$$\sum_{i=1}^{l} (g_i f_i)_{|\Omega_e} = \sum_{i=1}^{l} g_i f_{i|\Omega_e g_i} = 0 \text{ in } \big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big).$$

Applying the map ϕ to the second of these equalities (which is an equation involving elements of $\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big)$, since $f_{i|\Omega_e g_i} = 0$ if $\Omega_e g_i \not\subset \jmath(N)$, by virtue of our choice of Ω_e), and taking into account Lemma 4.4.3, we deduce that indeed $\sum_{i=1}^{l} g_i \phi(f_{i|\Omega_e g_i}) = 0$, and thus we have shown that (4.4.7) is an isomorphism. Now composing (4.4.7) with the isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U\big)\big(\jmath(N)\big), V\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[P]}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U), V\big)$$

induced by $\jmath_*$, together with the isomorphism of Corollary 4.2.8, and taking into account Proposition 4.3.4 (note that these results apply, since Lemma 2.3.4 implies that U is locally Z_M-finite), completes the proof of the theorem in the case when U and V are smooth.

We now consider the case when U is ϖ-adically admissible and V is ϖ-adically continuous. There is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{A[G]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U, V\big) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{(A/\varpi^i A)[G]}\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}(U/\varpi^i U), V/\varpi^i V\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{A[M]}\big(U, \mathrm{Ord}_P(V)\big) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_i \mathrm{Hom}_{(A/\varpi^i A)[M]}\big(U/\varpi^i U, \mathrm{Ord}_P(V/\varpi^i V)\big), \end{array}$$

in which the vertical arrows are given by passing to ordinary parts (here we are taking into account Proposition 4.3.4 and Corollary 4.3.5), and the horizontal arrows arise from the isomorphism of Lemma 4.1.3 and Definition 3.4.1. By what we have already proved, the right hand vertical arrow is also an isomorphism. Thus so is the left hand vertical arrow. □

Appendix A
Functional analysis

In this appendix we establish some simple functional analytic results regarding (not necessarily finitely generated) modules over the ring $\mathscr{O}$.

A.1. Lemma. — *If $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ is a short exact sequence of $\mathscr{O}$-modules such that $V_3[\varpi^\infty]$ has bounded exponent, then the ϖ-adic topology on V_2 induces the ϖ-adic topology on V_1.*

Proof. — If we choose i so large that $V_3[\varpi^i] = V_3[\varpi^\infty]$, then we deduce the second of the inclusions

$$\varpi^j V_1 \subset V_1 \bigcap \varpi^j V_2 \subset \varpi^{j-i} V_1;$$

the first is evident. This proves the lemma. □

In the remainder of the appendix, we will restrict our attention to $\mathscr{O}$-modules whose submodule of torsion elements is of bounded exponent. We begin with a general remark about such modules.

A.2. Remark. — If V is any $\mathscr{O}$-module then there is a canonical short exact sequence

$$0 \to V[\varpi^\infty] \to V \to V_{\mathrm{fl}} \to 0. \tag{A.3}$$

Suppose now that the torsion submodule of V is of bounded exponent, i.e. that $V[\varpi^\infty] = V[\varpi^i]$ for some sufficiently large i. Then, for any $j \geq i$, tensoring the above short exact sequence by $\mathscr{O}/\varpi^j$ over $\mathscr{O}$ induces a short exact sequence

$$0 \to V[\varpi^\infty] = V[\varpi^i] \to V/\varpi^j V \to V_{\mathrm{fl}}/\varpi^j V_{\mathrm{fl}} \to 0. \tag{A.4}$$

We now turn to proving Theorem A.11 below. We begin by first making a definition, and then establishing some preliminary results.

A.5. Definition. — If V is an $\mathscr{O}$-module, then we say that an $\mathscr{O}$-linear map $\phi : V \to E$ is bounded if the image is contained in $\dfrac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}$ for some $i \geq 0$. We let $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V, E)$ denote the $\mathscr{O}$-submodule of $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E)$ consisting of bounded maps.

A.6. Lemma. — *If A is an Artinian local ring, then an A-module is flat if and only if it is free.*

Proof. — Any free module is flat; we must prove the converse. Let $\mathfrak{m}$ denote the maximal ideal of A, and choose a basis $\{\overline{e}_i\}_{i \in I}$ of $V/\mathfrak{m}V$, as well as elements $e_i \in V$ lifting the basis elements $\overline{e}_i$. The elements e_i give rise to a map $\phi : A^{\oplus I} \to V$, which we will show is an isomorphism.

Let U denote the kernel of ϕ, and W its image. By construction $V = W + \mathfrak{m}V$. Iterating this inequality, and using the fact that $\mathfrak{m}^i = 0$ for sufficiently large i, we find that in fact $V = W$, i.e. that ϕ is surjective. Thus we have a short exact sequence

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow A^{\oplus I} \xrightarrow{\phi} V \longrightarrow 0,$$

which when tensored with $A/\mathfrak{m}$ over A, yields a short exact sequence

$$0 \longrightarrow U/\mathfrak{m}U \longrightarrow A^{\oplus I} \xrightarrow{\overline{\phi}} V/\mathfrak{m}V \longrightarrow 0$$

(since V is flat over A, by assumption). Now $\overline{\phi}$ is an isomorphism, since the $\overline{e}_i$ form a basis of $V/\mathfrak{m}V$. Thus we find that $U/\mathfrak{m}U = 0$, and hence that $U = \mathfrak{m}U$. Iterating this inequality (and again using the fact that $\mathfrak{m}^i = 0$ for some i) shows that $U = 0$, and thus that ϕ is injective. Consequently ϕ is an isomorphism, as claimed. □

A.7. Lemma. — *If V is a ϖ-adically complete and separated, torsion free $\mathscr{O}$-module, then there is a short exact sequence*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] \to 0.$$

Proof. — The short exact sequence $0 \to \mathscr{O} \to E \to E/\mathscr{O} \to 0$ gives rise to an exact sequence $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})$, which in turn induces an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty]. \tag{A.8}$$

We will show that this sequence is also exact on the right.

To this end, let $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty]$, and suppose that ϕ is annihilated by ϖ^i, so that in fact

$$\phi : V/\varpi^i V \to \frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}/\mathscr{O}.$$

Since V is torsion free, and hence flat over $\mathscr{O}$, it follows that $V/\varpi^j V$ is flat over $\mathscr{O}/\varpi^j\mathscr{O}$, for each $j > 0$, and so Lemma A.6 implies that $V/\varpi^j V$ is free over $\mathscr{O}/\varpi^j\mathscr{O}$, for each $j > 0$. Proceeding inductively on j, we see that we may construct a projective system of maps $\phi_j : V/\varpi^j V \to \frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}/\varpi^{j-i}\mathscr{O}$, for each $j \geq i$, such that $\phi_i = \phi$. Passing to the projective limit in j, we obtain a map $V \to \frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O} \subset E$, which is an element of $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V, E)$ lifting ϕ. □

A.9. Lemma. — *If V is an $\mathscr{O}$-module whose torsion submodule is of bounded exponent, then there is an exact sequence*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_{\mathrm{fl}}, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}) \to 0.$$

Proof. — Since $E/\mathscr{O}$ is an injective $\mathscr{O}$-module, the short exact sequence (A.3) gives rise to a short exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_{\mathrm{fl}}, E/\mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}) \to 0,$$

which in turn gives rise to an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_{\mathrm{fl}}, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}).$$

We will show that this latter exact sequence is also short exact.

To this end, suppose that $\phi : V[\varpi^\infty] \to E/\mathscr{O}$. By assumption $V[\varpi^\infty] = V[\varpi^i]$ for some i, and so in fact $\phi : V[\varpi^\infty] \to \frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}/\mathscr{O}$. The short exact sequence (A.4)

(taken with $j = i$) induces an embedding $V[\varpi^\infty] = V[\varpi^i] \hookrightarrow V/\varpi^i V$, and thus, using the fact that $\frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}/\mathscr{O}$ is injective over $\mathscr{O}/\varpi^i\mathscr{O}$, we may extend ϕ to a map $\phi' : V/\varpi^i V \to \frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}/\mathscr{O}$. Composing ϕ' with the projection $V \to V/\varpi^i V$ yields an element of $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty]$ which maps onto ϕ. □

A.10. Proposition. — *If V is a ϖ-adically complete and separated $\mathscr{O}$-module whose torsion submodule is of bounded exponent, then there is an exact sequence*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}) \to 0.$$

Proof. — Since $\mathscr{O}$ and E are torsion free, the surjection $V \to V_{\mathrm{fl}}$ induces isomorphisms $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_{\mathrm{fl}}, \mathscr{O}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O})$ and $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V_{\mathrm{fl}}, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V, E)$. Thus we obtain the required four term exact sequence by gluing together the short exact sequences obtained by applying Lemma A.7 to V_{fl} and Lemma A.9 to V. □

A.11. Theorem. — *If $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ is a short exact sequence of ϖ-adically complete and separated $\mathscr{O}$-modules, the torsion submodule of each of which has bounded exponent, then there is a long exact sequence*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1[\varpi^\infty], E/\mathscr{O}) \to 0.$$

Proof. — The injective resolution $E \to E/\mathscr{O}$ of $\mathscr{O}$ gives rise to a morphism of short exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, E) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3, E/\mathscr{O}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, E/\mathscr{O}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, E/\mathscr{O}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Passing to bounded maps in the top row, and to torsion submodules in the bottom row, we obtain a morphism of exact sequences

(A.12)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V_3, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V_2, E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}-\mathrm{bd}}(V_1, E) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_3, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty]. & & \end{array}$$

The top row of this diagram is canonically identified with the exact sequence of continuous dual spaces

$$0 \to (E \otimes_{\mathscr{O}} V_3)' \to (E \otimes_{\mathscr{O}} V_2)' \to (E \otimes_{\mathscr{O}} V_1)'$$

associated to the exact sequence of Banach spaces

$$0 \to E \otimes_{\mathscr{O}} V_1 \to E \otimes_{\mathscr{O}} V_2 \to E \otimes_{\mathscr{O}} V_3 \to 0,$$

and so is exact on the right, by the Hahn–Banach theorem. (One could also prove this exactness directly, using the style of argument employed in the proof of Lemmas A.7 and A.9.)

We claim that the bottom row of (A.12) is also exact on the right. To see this, let $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty]$, and suppose that $\varpi^j \phi = 0$, so that in fact $\phi : V_1 \to \frac{1}{\varpi^j}\mathscr{O}/\mathscr{O}$. Now, if $i \geq 0$ is chosen so that $V_3[\varpi^\infty] = V_3[\varpi^i]$, then (as was noted in the proof of Lemma A.1) we have an inclusion $V_1 \bigcap \varpi^{i+j} V_2 \subset \varpi^j V_1$. Since $\frac{1}{\varpi^{i+j}}\mathscr{O}/\mathscr{O}$ is injective over $\mathscr{O}/\varpi^{i+j}\mathscr{O}$, we find that we may lift the composite map

$$V_1/V_1 \bigcap \varpi^{i+j} V_2 \longrightarrow V_1/\varpi^j V_1 \xrightarrow{\phi} \frac{1}{\varpi^i}\mathscr{O}/\mathscr{O} \subset \frac{1}{\varpi^{i+j}}\mathscr{O}/\mathscr{O}$$

to a map $\phi' : V_2/\varpi^{i+j}V_2 \to \frac{1}{\varpi^{i+j}}\mathscr{O}/\mathscr{O}$. The map ϕ' then gives an element of $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, E/\mathscr{O})[\varpi^\infty]$ which maps onto ϕ.

We have thus seen that both the top and bottom row of (A.12) are short exact. Applying the snake lemma, and taking into account Proposition A.10, we obtain the six term exact sequence in the statement of the theorem. □

We close the appendix by noting two further lemmas. They are both simple consequences of the Hahn–Banach theorem (and could also be deduced directly using arguments of the type used in the proof of Lemmas A.7 and A.9).

A.13. Lemma. — *Let $V_1 \to V_2$ be an $\mathscr{O}$-linear map of ϖ-adically complete and torsion free $\mathscr{O}$-modules. If the induced map $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, \mathscr{O})$ is surjective, then the given map is injective.*

Proof. — Let V denote the kernel of the given map; it is a ϖ-adically closed and saturated $\mathscr{O}$-submodule of V_1, and hence is again ϖ-adically complete. Thinking of V and V_1 as the unit balls of the corresponding E-Banach spaces $E \otimes_{\mathscr{O}} V$ and $E \otimes_{\mathscr{O}} V_1$, we see by the Hahn-Banach theorem that if $V \neq 0$ then the image of the restriction $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V, \mathscr{O})$ is non-zero, contradicting the hypothesis of the lemma. □

A.14. Lemma. — *Let $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ be a short exact sequence of $\mathscr{O}$-modules, such that V_1 and V_2 are ϖ-adically complete and torsion free. If the cokernel of the induced map $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_2, \mathscr{O}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}}(V_1, \mathscr{O})$ is torsion, with bounded exponent, then $V_3[\varpi^\infty]$ is also of bounded exponent.*

Proof. — Let $\widetilde{V_1}$ denote the saturation in V_2 of (the image of) V_1, i.e.

$$\widetilde{V_1} = \{v \in V_2 \,|\, \varpi^i \in V_1 \text{ for some } i \geq 0\}.$$

(To simplify the notation, we identify V_1 with its image in V_2.) There is an evident isomorphism $\widetilde{V}_1/V_1 \xrightarrow{\sim} V_3[\varpi^\infty]$, and hence we must show that $\widetilde{V}_1/V_1$ has bounded exponent. By assumption, there exists $j \geq 0$ such that if $\phi : V_1 \to \mathscr{O}$, then $\varpi^j\phi$ is the restriction of some $\psi : V_2 \to \mathscr{O}$. Let $v \in \widetilde{V}_1$, and choose $i \geq 0$ minimally such that $\varpi^i v \in V_1$. Suppose that $i > j$. Since $\varpi^i v \notin \varpi V_1$ (by the minimality of i), the Hahn–Banach theorem allows us to choose $\phi : V_1 \to \mathscr{O}$ such that $\phi(\varpi^i v) = 1$. Suppose that $\varpi^j\phi$ is the restriction of ψ, as above. We compute that $\varpi^i\psi(v) = \psi(\varpi^i v) = \varpi^j\phi(\varpi^i v) = \varpi^j$, and hence that $\psi(v) = \varpi^{j-i}$. In particular we conclude that $\varpi^{j-i} \in \mathscr{O}$, and thus that $i \leq j$, a contradiction. Consequently it must be that $V_3[\varpi^\infty] = V_3[\varpi^j]$, proving the lemma. □

References

[1] L. Barthel & R. Livné – "Irreducible modular representations of GL_2 of a local field", *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[2] C. Breuil – "Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I", *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[3] W. Casselman – "Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups", unpublished notes distributed by P. Sally, draft May 1 1995, `http://www.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/p-adic-book.pdf`.

[4] P. Colmez – "Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules", *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.

[5] M. Emerton – "Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 775–839.

[6] ———, "On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms", *Invent. Math.* **164** (2006), p. 1–84.

[7] ———, "Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction", preprint `http://www.math.northwestern.edu/~emerton/pdffiles/jacquet-two.pdf`, 2007.

[8] ———, "Local-global compatibility in the p-adic langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$", in preparation.

[9] ———, "Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups", to appear in *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

[10] ———, "Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II. Derived functors", this volume.

[11] H. Hida – "Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms", *Invent. Math.* **85** (1986), p. 545–613.

[12] ———, "p-ordinary cohomology groups for $\mathrm{SL}(2)$ over number fields", *Duke Math. J.* **69** (1993), p. 259–314.

[13] ———, "Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for $\mathrm{SL}(n)$", *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), p. 425–475.

[14] M. Lazard – "Groupes analytiques p-adiques", *Publ. Math. I.H.É.S.* **26** (1965), p. 389–603.

[15] P. Schneider & J. Teitelbaum – "Banach space representations and Iwasawa theory", *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

M. Emerton, Mathematics Department, Northwestern University, 2033 Sheridan Rd., Evanston, IL 60208 • *E-mail :* emerton@math.northwestern.edu

Astérisque
331, 2010, p. 403–459

ORDINARY PARTS OF ADMISSIBLE REPRESENTATIONS OF p-ADIC REDUCTIVE GROUPS II. DERIVED FUNCTORS

by

Matthew Emerton

Abstract. — If G is a connected reductive p-adic group and P is a parabolic subgroup of G, then we extend the functor Ord_P of ordinary parts to a certain δ-functor, which we denote $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$. Using this functor, we compute certain Ext spaces in the category of admissible smooth representations of the group $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ over a finite field of characteristic p.

Résumé **(Parties ordinaires de représentations admissibles de groupes réductifs p-adiques II. Foncteurs dérivés)**

Soit G un groupe p-adique, connexe, réductif et P un sous-groupe parabolique de G ; nous étendons le foncteur Ord_P des parties ordinaires en un certain δ-foncteur, que nous notons $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$. En utilisant ce foncteur, nous calculons certains Ext-espaces dans la catégorie des représentations lisses admissibles du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur un corps fini de caractéristique p.

1. Introduction

The goal of this paper, which is a sequel to [**10**], is to extend the functors of ordinary parts introduced in that paper to certain δ-functors. On the one hand, the δ-functors that we construct are easy to compute with in many situations; on the other hand, we expect that they coincide with the derived functors of the functors of ordinary parts. Since the functors of ordinary parts are right adjoint to the functors given by parabolic induction, we expect that the δ-functors introduced here will be useful in studying homological questions involving parabolically induced representations. As some evidence for this, we close the paper by applying them to make some Ext calculations in the category of admissible smooth representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ over a finite field of characteristic p. These calculations play a role in the mod p and p-adic Langlands programme. (See [**6**] and [**9**].)

2000 Mathematics Subject Classification. — 22E50.
Key words and phrases. — Ordinary parts, representations of p-adic reductive groups, parabolic induction, derived functors, δ-functors, extensions.

The author was supported in part by NSF grants DMS-0401545 and DMS-0701315.

© Astérisque 331, SMF 2010

To describe our results more precisely, let p be a prime, and A a finite Artinian local $\mathbb{Z}_p$-algebra of residue characteristic p. Let G be a connected reductive p-adic group, and P a parabolic subgroup of G, admitting a Levi factorization $P = MN$. We define a δ-functor $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ on the category of admissible smooth G-representations over A, taking values in the category of admissible smooth M-representations over A, such that $H^0\mathrm{Ord}_P \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P$ (the functor of ordinary parts defined in [**10**, Def. 3.1.9]). The functors $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ are defined in terms of continuous N_0-cohomology, where N_0 is a compact open subgroup of N. This continuous cohomology is quite accessible to computation, and hence so are the functors $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$. For example, one finds that the functors $H^i\mathrm{Ord}_P$ vanish for $i > \dim N$, and that $H^{\dim N}\mathrm{Ord}_P$ coincides (up to a twist) with the Jacquet functor of N-coinvariants. We conjecture that $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ is in fact a universal δ-functor, and thus coincides with the derived functors of Ord_P. In an appendix to this paper [**11**], joint with V. Paškūnas, we verify this conjecture in the case when $G = \mathrm{GL}_2(F)$, for any finite extension F of $\mathbb{Q}_p$.

In the case when $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, P is a Borel subgroup of G, and $A = k$ is a field of characteristic p, we explicitly evaluate the functors $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ on all absolutely irreducible admissible smooth G-representations over k. As already mentioned, we are then able to apply the results of this calculation to compute certain Ext spaces in the category of admissible smooth G-representations over k. Some of the Ext computations that we make have also been made by Breuil and Paškūnas [**4**] and by Colmez [**6**], in both cases using different methods.

1.1. Arrangement of the paper. — Section 2 of the paper is devoted to recalling some results about injective objects in certain categories of representations, as well as describing the relationship between certain Ext functors and continuous cohomology. In Section 3 we define the δ-functors $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$, and develop some of their basic properties. In Section 4 we study the case when $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ and P is a Borel subgroup in detail. Some of the more technical aspects of the calculations, which are not directly related to the general ideas of the paper, have been placed in an appendix. A second, separate, appendix, written jointly with V. Paškūnas, establishes an important homological result which is applied in Section 4.

1.2. Notation and terminology. — Throughout the paper, we fix a prime p. We let $\mathrm{Art}(\mathbb{Z}_p)$ denote the category of Artinian local $\mathbb{Z}_p$-algebras having finite residue field. All our rings of coefficients will be objects of $\mathrm{Art}(\mathbb{Z}_p)$.

We freely employ the terminology and notation that was introduced in the paper [**10**]. In particular, if V is a representation of a p-adic analytic group G over an object A of $\mathrm{Art}(\mathbb{Z}_p)$, then we let V_{sm} (resp. $V_{\mathrm{l.adm}}$) denote the G-subrepresentation of V consisting of the smooth (resp. locally admissible) vectors in V (see [**10**, Defs. 2.2.1, 2.2.15]).

Acknowledgments. — I would like to thank Pierre Colmez, whose talk at the workshop on p-adic representations held in Montréal in September 2005 inspired me

to develop the ideas of this paper, and to undertake the calculations of Section 4. I would also like to thank Adrian Iovita and Henri Darmon, as well as the Centre de Recherches Mathématiques at the University of Montréal, for organizing and hosting this wonderful workshop, during which many of the results presented here were first worked out. I thank the referee for their careful reading of the paper, which led to several corrections and clarifications of the text, and also Florian Herzig, who provided several useful corrections to and comments on an earlier version of the paper. Finally, I thank Vytas Paškūnas for his interest in this work, and for allowing [**11**] to be included as an appendix to this paper.

2. Injective and acyclic objects

Throughout this section, we let G denote a p-adic analytic group, and A an object of $\mathrm{Art}(\mathbb{Z}_p)$.

2.1. Injective objects. — In this subsection we present some basic results regarding the existence and properties of injective objects in various categories of G-representations over A. These properties are largely standard, and presumably well-known. We recall them here, with proofs, for the sake of completeness.

2.1.1. *Proposition*. — *Each of the full subcategories* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ *and* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ *of* $\mathrm{Mod}_G(A)$ *has enough injectives.*

Proof. — Certainly the category $\mathrm{Mod}_G(A)$ has enough injectives (since it coincides with the category of left modules over the ring $A[G]$). The functor $V \mapsto V_{\mathrm{sm}}$ is right adjoint to the natural embedding $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A) \hookrightarrow \mathrm{Mod}_G(A)$. Thus it takes injective objects in $\mathrm{Mod}_G(A)$ to injective objects in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. In particular, if V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, and $V \hookrightarrow I$ an $A[G]$-linear embedding of V into an injective object of $\mathrm{Mod}_G(A)$, then the induced embedding $V \hookrightarrow I_{\mathrm{sm}}$ is an embedding of V into an injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. The proof in the case of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ proceeds similarly, using the functor $V_{\mathrm{l.adm}}$. □

2.1.2. *Proposition*. — *If I is an injective object of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$*, and H is an open subgroup of G, then I is also injective when regarded as an object of* $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$*.*

Proof. — The forgetful functor $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A) \to \mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$ is right adjoint to the exact functor $V \mapsto A[G] \otimes_{A[H]} V$. (This functor is naturally isomorphic to compact induction, $V \mapsto c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G V$, and so takes smooth H-representations to smooth G-representations.) Thus it takes injectives to injectives. □

2.1.3. *Proposition*. — *If G is compact, then an inductive limit of injective objects of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ *is again an injective object of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$*.*

Proof. — Let $\{I_i\}$ be a directed system of injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, let $V \hookrightarrow W$ be an embedding of objects of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, and suppose given a G-equivariant map

$$V \to \varinjlim_i I_i. \tag{2.1.4}$$

We must show that it extends to a map $W \to \varinjlim_i I_i$. By the usual argument with Zorn's lemma, it suffices to show that if $w \in W$, and if we write $W_0 = A[G]w$, then (2.1.4) extends to the G-subrepresentation $V+W_0$ of W. It is evidently equivalent to show that the restriction to $V_0 := V \bigcap W_0$ of (2.1.4) extends to W_0. Since G is compact and W is smooth, we see that W_0, and thus V_0, is finitely generated over A, and in particular over the completed group ring $A[[G]]$. Since $A[[G]]$ is Noetherian [**13**], V_0 is in fact finitely presented over $A[[G]]$. Thus the restriction to V_0 of (2.1.4) lifts to a map $V_0 \to I_i$ for some (sufficiently large) value of i. (See the following lemma.) We may then extend this map to W_0, since I_i is injective. Composing such an extension with the natural map $I_i \to \varinjlim_i I_i$, we obtain a G-equivariant map $W_0 \to \varinjlim_i I_i$ which extends the restriction to V_0 of (2.1.4), as required. □

The following lemma is a standard piece of algebra, whose proof we recall for the benefit of the reader.

2.1.5. *Lemma*. — *Let R be an associate ring with unit, and let M be a finitely presented left R-module. If $\{N_i\}$ is any directed system of left R-modules, then the natural map*

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \to \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_i N_i) \tag{2.1.6}$$

is an isomorphism.

Proof. — Fix a finite presentation $R^s \to R^r \to M \to 0$ of M. Applying $\mathrm{Hom}_R(-, N_i)$ to this exact sequence, and taking into account the natural isomorphism

$$\mathrm{Hom}_R(R, N) \xrightarrow{\sim} N, \tag{2.1.7}$$

which holds for any R-module N, we obtain an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \to N_i^r \to N_i^s.$$

Passing to the inductive limit over all N_i yields an exact sequence

$$0 \to \varinjlim_i \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \to \varinjlim_i N_i^r \to \varinjlim_i N_i^s.$$

Applying $\mathrm{Hom}_R(-, \varinjlim_i N_i)$ to the presentation of M, and again taking into account the natural isomorphism (2.1.7), we obtain an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_i N_i) \to (\varinjlim_i N_i)^r \to (\varinjlim_i N_i)^s.$$

The preceding two exact sequences fit into the diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varinjlim_i \mathrm{Hom}_R(M, N_i) & \longrightarrow & \varinjlim_i N_i^r & \longrightarrow & \varinjlim_i N_i^s \\ & & \downarrow{\scriptstyle (2.1.6)} & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M, \varinjlim_i N_i) & \longrightarrow & (\varinjlim_i N_i)^r & \longrightarrow & (\varinjlim_i N_i)^s, \end{array}$$

in which the second and third arrows are clearly isomorphisms. Thus so is the first, as claimed. □

2.1.8. ***Remark***. — If the transition maps in the directed system $\{N_i\}$ are injective, then the map (2.1.6) will be an isomorphism provided that M is finitely generated. One can easily strengthen Lemma 2.1.5 to show that (2.1.6) is an isomorphism for every directed system $\{N_i\}$ if and only if M is a finitely presented R-module.

2.1.9. ***Proposition***. — *If G is compact, then the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ has enough injectives, and injective objects in this category are also injective in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$.*

Proof. — If V is an admissible smooth G-representation, then its Pontrjagin dual V^* is a finitely generated $A[[G]]$-module. Fixing a surjection $A[[G]]^r \to V^*$, and dualizing, we obtain an embedding $V \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)^r$, where A^* is the Pontrjagin dual of A, thought of as an A-module, and $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)$ denotes the space of smooth A^*-valued functions on G (regarded as a smooth admissible G-representation over A via the right regular G-action). Since $A[[G]]^r$ is free of finite rank as an $A[[G]]$-module, one easily verifies that $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)$ is injective in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, and so also in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$. Thus any object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ embeds into an injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ that is also injective in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. In particular, $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ has enough injectives. The following lemma then implies that *every* injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ is injective in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. □

2.1.10. ***Lemma***. — *Let $\mathscr{C}$ and $\mathscr{C}'$ be abelian categories, and let $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ be an additive functor. Suppose that every object X of $\mathscr{C}$ admits a monomorphism $X \hookrightarrow J$ for some J such that $F(J)$ is an injective object of $\mathscr{C}'$. Then if I is any injective object of $\mathscr{C}$, the object $F(I)$ is injective in $\mathscr{C}'$.*

Proof. — Let I be an injective object of $\mathscr{C}$, and choose a monomorphism $I \hookrightarrow J$, where $F(J)$ is injective in $\mathscr{C}'$. The injectivity of I in $\mathscr{C}$ implies that this monomorphism splits, and thus that I is a direct summand of J. Consequently, $F(I)$ is a direct summand of $F(J)$, and hence is also injective in $\mathscr{C}'$. □

2.1.11. ***Proposition***. — *If H is a compact subgroup of G, then any injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ is also injective as an object of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$.*

Proof. — Since H is compact, we may find a compact open subgroup G' of G containing H. Appealing to Proposition 2.1.2, we see that we may replace G by G', and thus assume that G is also compact. We do so for the remainder of the proof.

Since G is profinite, we may find a continuous section to the quotient map $G \to G/H$, and thus find an isomorphism of right homogeneous H-spaces $G \xrightarrow{\sim} (G/H) \times H$ (where the H-action on the target is defined via its action on the second factor). Thus we obtain an H-equivariant isomorphism

$$\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G/H, A) \otimes_A \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H, A^*),$$

where A^* denotes the Pontrjagin dual of A, though of as an A-module. As we observed in the proof of Proposition 2.1.9, $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H, A^*)$ is injective in $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$, and thus so is $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G/H, A) \otimes_A \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(H, A^*)$, by Proposition 2.1.3. Thus $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)$ is injective in $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$. The proof of the preceding proposition shows that $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)$ in injective in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. It follows from Proposition 2.1.3 that a direct sum of any number of copies of $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)$ is again injective in both $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$.

As noted in the proof of the preceding proposition, any admissible smooth representation admits an embedding into $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)^r$ for some $r \geq 0$. Since any object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ is an inductive limit of admissible smooth representations (G is compact), any object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ admits an embedding into direct sum of (a possibly infinite number of) copies of $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, A^*)$. Thus any object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ admits an embedding into an injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ that is also injective in $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$. It follows that any injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ is also injective as an object of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$, by Lemma 2.1.10. □

2.2. Continuous cohomology as derived functors. — Since, by Proposition 2.1.1, the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ has enough injectives, we may define the derived functors of the functor of G-invariants on $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. Of course, these derived functors coincide with the Ext functors $\mathrm{Ext}^\bullet_G(\underline{1}, -)$ (computed in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, of course), where $\underline{1}$ denotes A equipped with the trivial G-action.

If V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, then we let $H^i(G, V)$ denote the cohomology of G computed using continuous cochains taking values in V, where V is equipped with its discrete topology. The functors $H^i(G, -)$ form a δ-functor on $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. (Since any surjection of smooth G-representations certainly admits a set-theoretic splitting, which is automatically continuous for the discrete topologies on its source and target, one sees that a short exact sequence in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ gives rise to a corresponding short exact sequence of continuous cochain complexes, and hence to a long exact sequence of continuous cohomology modules.) Of course for any object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, we have the equalities $H^0(G, V) = \mathrm{Hom}_G(\underline{1}, V) = V^G$ (the space of G-invariants), and so the universality of derived functors as δ-functors gives rise to a natural transformation of δ-functors

$$\mathrm{Ext}^\bullet_G(\underline{1}, -) \to H^\bullet(G, -). \tag{2.2.1}$$

2.2.2. *Proposition*. — *The natural transformation*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\underline{1}, -) \to H^1(G, -) \tag{2.2.3}$$

is in fact a natural equivalence.

Proof. — For any object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, the A-module $\mathrm{Ext}^1_G(\underline{1}, V)$ classifies extensions of $\underline{1}$ by V in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, while it is well-known, and easily verified, that for any object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, the A-module $H^1(G, V)$ classifies extensions of $\underline{1}$ by V in the category of Hausdorff topological G-modules over A. The map (2.2.3) is then the evident one, which maps an extension in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ to the corresponding extension in the category of topological modules (each member of the exact sequence being endowed with its discrete topology). This map is easily checked to be injective. (Alternatively, this is a general fact from the theory of δ-functors.) Furthermore, any Hausdorff topological extension is easily verified to be smooth, and to necessarily be equipped with its discrete topology. Thus (2.2.3) is also surjective. This proves the proposition. □

2.2.4. *Corollary*. — *The natural transformation* $\mathrm{Ext}^2_G(\underline{1}, V) \to H^2(G, V)$ *is injective for any object* V *of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$.

Proof. — It is a general fact from the theory of δ-functors (and is easily verified via a dimension-shifting argument) that if the map (2.2.1) is an isomorphism in degrees $i \leq n$, then it is injective in degree $i = n + 1$. The lemma follows from this together with the preceding proposition. □

Nothing is known (to the author at least) regarding the nature of the map (2.2.1) in degrees > 2 in general. The difficulty is that if V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, then the natural way to efface the completed cohomology of V is via the map

$$V \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, V), \tag{2.2.5}$$

where the target is the space of continuous (or equivalently, locally constant) V-valued functions on G, equipped with its compact-open topology, and the map sends an element v of V to the corresponding orbit function $g \mapsto gv$; see e.g. [**12, 16**]. If G is not compact, then the topological G-module $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, V)$ is neither discrete nor smooth as a G-representation; thus it does not provide an effacement of the completed cohomology of V in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. On the other hand, if G is compact, then $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, V)$ *is* a discrete, smooth G-representation, and so we obtain the following well-known result.

2.2.6. *Proposition*. — *If* G *is compact, then the natural transformation* (2.2.1) *is a natural equivalence of* δ*-functors.*

Proof. — The proof is precisely the one sketched above: namely, the reader may easily check that if V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, regarded as a discrete topological G-representation, then $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(G, V)$ is discrete and smooth when equipped with its compact-open topology. (The smoothness follows from the fact that since G is compact and V is discrete, a map from G to V is continuous if and only if it is locally constant if and only if it is uniformly locally constant.) The map (2.2.5) then effaces the higher continuous cohomology of V [**12**, §2]. Thus $H^i(G, -)$ is an effaceable δ-functor, and hence universal; the proposition follows. □

As a point of terminology, we say that an object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ is G-acyclic if $H^i(G,V)$ vanishes for $i>0$.

3. The δ-functor $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$

Throughout this section, we let G denote (the group of $\mathbb{Q}_p$-valued points of) a connected reductive linear algebraic group over $\mathbb{Q}_p$, and let P denote a parabolic subgroup of G. We also fix a Levi factorization $P=MN$, and let $\overline{P}=M\overline{N}$ denote an opposite parabolic to P, chosen so that $P\bigcap\overline{P}=M$.

Our goal in this section is to define a certain δ-functor $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ from the category of (locally) admissible G-representations to the category of (locally) admissible M-representations, for which $H^0\mathrm{Ord}_P$ is naturally isomorphic to the functor Ord_P. We conjecture that $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ is the universal δ-functor extending Ord_P (and thus coincides with the derived functor of Ord_P on the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$), although we cannot prove this. Nevertheless, $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ is quite computable in some situations (as we will see in the following section), and provides a useful tool for investigating homological questions related to the functor Ord_P.

3.1. Some properties of Z_M. — We let Z_M denote the centre of the Levi factor M of P. The group Z_M, together with certain of its submonoids, plays an important role in the definition of the functor Ord_P. In this subsection we establish some structural results about Z_M and some of its submonoids which we will need to apply later.

Let Z_0 denote the maximal compact subgroup of Z_M, and let $Z_G\subset Z_M$ denote the centre of G. Let Z_M^0 denote (the group of $\mathbb{Q}_p$-points of) the maximal connected subgroup of (the algebraic group underlying) Z_M, so that Z_M^0 is (the group of $\mathbb{Q}_p$-points of) a torus. Let S denote (the group of $\mathbb{Q}_p$-points of) the maximal split torus in Z_M^0, and write $S_0:=S\bigcap Z_0$ to denote the maximal compact subgroup of S, and $S_G:=S\bigcap Z_G$ to denote the maximal split torus in Z_G. If Δ denotes the set of positive simple restricted roots appearing in the action of S on the Lie algebra of N, then there is a natural embedding

$$S/S_0S_G\hookrightarrow\mathbb{Z}^\Delta, \tag{3.1.1}$$

with finite cokernel, given by $z\mapsto\big(\mathrm{ord}_p(\alpha(z))\big)_{\alpha\in\Delta}$. (Here ord_p denotes the p-adic ordinal on $\mathbb{Q}_p^\times$.) Since Z_M contains Z_M^0 with finite index, while Z_M^0 (like any torus) is isogenous to the product of a split torus and a compact torus, we see that the natural embedding $S/S_0S_G\hookrightarrow Z_M/Z_0Z_G$ has finite cokernel. Thus (noting that Z_M/Z_0Z_G is a finitely generated torsion-free abelian group) the embedding (3.1.1) extends to an embedding

$$Z_M/Z_0Z_G\hookrightarrow\left(\frac{1}{d}\mathbb{Z}\right)^\Delta, \tag{3.1.2}$$

for an appropriately chosen $d\geq 1$. We again denote this embedding

$$z\mapsto\big(\mathrm{ord}_p(\alpha(z))\big)_{\alpha\in\Delta}.$$

3.1.3. *Lemma*. — *Let N_0 be any compact open subgroup of N.*

1. *If $z \in Z_M$ has the property that $zN_0z^{-1} \subset N_0$, then $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \geq 0$ for all $\alpha \in \Delta$.*
2. *An element $z \in Z_M$ has the property that the conjugates $z^iN_0z^{-i}$ form a basis of neighborhoods of the identity of N if and only if $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) > 0$ for all $\alpha \in \Delta$.*
3. *There exists $C \geq 0$ such that if $z \in Z_M$ and $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \geq C$ for all $\alpha \in \Delta$, then $zN_0z^{-1} \subset N_0$.*
4. *The intersection $\bigcap_{\substack{z \text{ s.t. all} \\ \mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq 0}} zN_0z^{-1}$ (where, as indicated, the intersection is taken over all $z \in Z_M$ such that $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq 0$ for all $\alpha \in \Delta$) is an open subgroup of N_0.*

Proof. — Decompose $\mathfrak{n}$ as a sum of restricted root spaces $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{n}_\alpha$. Choose a bounded $\mathbb{Z}_p$-lattice $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}$, write $(\mathfrak{n}_1)_\alpha := \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_\alpha$ for each $\alpha \in \Delta$, and set $\mathfrak{n}_2 := \oplus_{\alpha \in \Delta}(\mathfrak{n}_0)_\alpha$; then $\mathfrak{n}_2$ is again a bounded $\mathbb{Z}_p$-lattice in $\mathfrak{n}$. For any $z \in Z_M$, it is clear that the collection $\{\mathrm{Ad}_{z^j}(\mathfrak{n}_2)\}_{j \geq 0}$ forms a uniformly bounded collection of subsets of $\mathfrak{n}$ (resp. a neighborhood basis of 0 in $\mathfrak{n}$) if and only if $z \in Z_M$ satisfies $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \geq 0$ (resp. > 0) for all $\alpha \in \Delta$, while $\bigcap_{j \geq 0} \mathrm{Ad}_{z^j}(\mathfrak{n}_2)$ is open if and only if $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq 0$ for all $\alpha \in \Delta$. If Ω is any compact open subset of $\mathfrak{n}$, then we may find integers $i \leq j$ such that $p^i\Omega \subset \mathfrak{n}_2 \subset p^j\Omega$. Thus we similarly conclude that the collection $\{\mathrm{Ad}_{z^j}(\Omega)\}_{j \geq 0}$ forms a uniformly bounded collection of subsets of $\mathfrak{n}$ (resp. a neighborhood basis of 0 in $\mathfrak{n}$) if and only if $z \in Z_M$ satisfies $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \geq 0$ (resp. > 0) for all $\alpha \in \Delta$, and that $\bigcap_{j \geq 0} \mathrm{Ad}_{z^j}(\Omega)$ is open if and only if $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq 0$ for all $\alpha \in \Delta$.

Recall that exponentiation provides a canonical identification of $\mathfrak{n}$ with N. This identification is Z_M-equivariant, where Z_M acts on $\mathfrak{n}$ via the adjoint map, and on N via conjugation. From the discussion of the preceding paragraph, we conclude that for any compact open subset Ψ of N, the collection $\{z^j\Psi z^{-j}\}_{j \geq 0}$ forms a uniformly bounded collection of subsets of N (resp. a neighborhood basis of the identity in N) if and only if $z \in Z_M$ satisfies $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \geq 0$ (resp. > 0) for all $\alpha \in \Delta$, and that $\bigcap_{j \geq 0} z^j\Psi z^{-j}$ is open if and only if $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq 0$ for all $\alpha \in \Delta$. The lemma follows upon taking Ψ to be N_0. □

This lemma has an evident analogue for subgroups of $\overline{N}$, which we now state, and which is proved in an identical fashion.

3.1.4. *Lemma*. — *Let $\overline{N}_0$ be any compact open subgroup of $\overline{N}$.*

1. *If $z \in Z_M$ has the property that $z\overline{N}_0z^{-1} \subset \overline{N}_0$, then $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq 0$ for all $\alpha \in \Delta$.*
2. *An element $z \in Z_M$ has the property that the conjugates $z^i\overline{N}_0z^{-i}$ form a basis of neighborhoods of the identity of $\overline{N}$ if and only if $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) < 0$ for all $\alpha \in \Delta$.*
3. *There exists $C \leq 0$ such that if $z \in Z_M$ and $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \leq C$ for all $\alpha \in \Delta$, then $z\overline{N}_0z^{-1} \subset \overline{N}_0$.*

4. *The intersection* $\bigcap_{\substack{z \text{ s.t. all} \\ \mathrm{ord}_p(\alpha(z))\geq 0}} z\overline{N}_0 z^{-1}$ *(where, as indicated, the intersection is taken over all* $z \in Z_M^+$ *such that* $\mathrm{ord}_p(\alpha(z)) \geq 0$ *for all* $\alpha \in \Delta$*) is an open subgroup of* $\overline{N}_0$*.*

3.1.5. *Lemma*. — *If* N_0 *(resp.* $\overline{N}_0$*) is a compact open subgroup of* N *(resp.* $\overline{N}$*), and if we write* $Z_M^+ := \{z \in Z_M \mid zN_0z \subset N_0\}$*, then we may choose* $z \in Z_M^+$ *so that:*

1. Z_M^+ *together with* z^{-1} *generate* Z_M *as a monoid.*
2. $z^{-1}\overline{N}_0 z \subset \overline{N}_0$*.*
3. *The descending sequence of subgroups* $z^{-i}\overline{N}_0 z^i$ *forms a neighborhood basis of the identity in* $\overline{N}$*.*

Proof. — If $z \in Z_M$ is chosen so that $\mathrm{ord}_p(\alpha(z))$ is sufficiently large for all $\alpha \in \Delta$, then it follows from Lemmas 3.1.3 (3) and 3.1.4 (2), (3) that $zN_0z^{-1} \subset N_0$, that $z^{-1}\overline{N}_0 z \subset \overline{N}_0$, and that the descending sequence of subgroups $z^{-i}\overline{N}_0 z^i$ forms a neighborhood basis of the identity in $\overline{N}$. If z' is any element of Z_M, then $\mathrm{ord}_p(\alpha(z^i z'))$ can be made arbitrarily large for all $\alpha \in \Delta$ by taking i large enough, and so, again by Lemma 3.1.3 (3), we see that $z^i z' \in Z_M^+$ if i is large enough. Thus $z' \in z^{-i}Z_M^+$ if i is large enough, and so z^{-1} and Z_M^+ together generate Z_M as a monoid. □

3.2. A review of the functor Ord_P**.** — Recall from [**10**, §3.1] that in order to define Ord_P, we must first choose an open subgroup P_0 of P. We fix such a choice, and following [**10**, §3.1], we write $M_0 := M \bigcap P_0$, $N_0 := N \bigcap P_0$, and $M^+ := \{m \in M \mid mN_0m^{-1} \subset N_0\}$. As in the preceding subsection, we let Z_M denote the centre of M, and we write $Z_M^+ := Z_M \bigcap M^+$.

If V is any object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, then there is a natural action (the "Hecke action") of M^+ on V^{N_0} [**10**, §3.1]. We then recall from [**10**, Def. 3.1.9] that

$$\mathrm{Ord}_P(V) := \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], V^{N_0})_{Z_M-\mathrm{fin}}.$$

The remainder of this subsection is devoted to showing that, in some situations, we may compute $\mathrm{Ord}_P(V)$ using a single (well-chosen) element $z \in Z_M^+$, rather than the entire monoid Z_M^+. Fix an element such that Z_M^+ together with z^{-1} generate Z_M as a monoid, as we may, by Lemma 3.1.5. Let C denote the cyclic subgroup of Z_M generated by z, and write $C^+ = Z_M^+ \bigcap C$ (so C^+ is the cyclic monoid generated by z). We regard V^{N_0} as an $A[C^+]$-module via the inclusion $C^+ \subset Z_M^+$.

We adapt the terminology and notation of [**10**, Def. 2.3.1] in an evident way to the subgroup C of Z_M; namely, we say that an element in a C-representation V is locally C-finite if the $A[C]$-module that it generates is finitely generated over A, and we write $V_{C-\mathrm{fin}}$ to denote the submodule of V consisting of locally C-finite vectors.

3.2.1. *Lemma*. — *Let* $\mathscr{X}$ *denote the full subcategory of the category of* $A[Z_M^+]$*-modules consisting of modules which may be written as the union of a collection of finitely generated* Z_M^+*-invariant* A*-modules.*

1. *For any object X of $\mathscr{X}$, the composite*

$$\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X)_{C-\mathrm{fin}} \to X \to A[C] \otimes_{A[C^+]} X,$$

where the first arrow is given by evaluation at $1 \in A[C]$, and the second arrow is the natural one, is an isomorphism, as is the composite

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], X)_{Z_M-\mathrm{fin}} \to X \to A[Z_M] \otimes_{A[Z_M^+]} X,$$

defined in the same manner.

2. *For any object X of $\mathscr{X}$, the restriction map*

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], X)_{Z_M-\mathrm{fin}} \to \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X)_{C-\mathrm{fin}}$$

is an isomorphism.

3. *The functor $X \mapsto \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], X)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ is exact on the category $\mathscr{X}$.*

Proof. — We begin by proving the first claim of (1). If X is an object of $\mathscr{X}$, then by assumption we may write it as the union of finitely generated A-modules that are Z_M^+-invariant, and so in particular C^+-invariant. The functor $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], -)$ commutes with the formation of inductive limits, by (an evident analogue for C^+ and C of) [**10**, Lem. 3.2.2], as does the functor $A[C] \otimes_{A[C^+]} -$. Thus, in proving (1), we may assume that X is finitely generated over A.

Let B denote the image of $A[C^+]$ in $\mathrm{End}_A(X)$; then B is a finite A-algebra, and the $A[C^+]$-structure on X allows us to regard it as a B-module. We may write B as a product of local factors $B = \prod_{\mathfrak{m}} B_{\mathfrak{m}}$, where $\mathfrak{m}$ runs over the finite set of maximal ideals of B. We say that a maximal ideal $\mathfrak{m}$ is ordinary if the image of z in B does not lie in $\mathfrak{m}$, and write

$$B_{\mathrm{ord}} := \prod_{\mathfrak{m} \text{ ordinary}} B_{\mathfrak{m}}, \qquad B_{\mathrm{nil}} := \prod_{\mathfrak{m} \text{ not ordinary}} B_{\mathfrak{m}},$$

so that $B = B_{\mathrm{ord}} \times B_{\mathrm{nil}}$. We also write $X_{\mathrm{ord}} := B_{\mathrm{ord}} \otimes_B X$ and $X_{\mathrm{nil}} := B_{\mathrm{nil}} \otimes_B X$, so that we have the C^+-invariant decomposition $X = X_{\mathrm{ord}} \times X_{\mathrm{nil}}$. The element z acts invertibly on X_{ord}, while some sufficiently high power of z annihilates X_{nil}. Given this, the reader may easily verify that there are isomorphisms

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X)_{C-\mathrm{fin}} = \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X_{\mathrm{ord}}) \\ &\xrightarrow{\sim} X_{\mathrm{ord}} \xrightarrow{\sim} A[C] \otimes_{A[C^+]} X_{\mathrm{ord}} \xrightarrow{\sim} A[C] \otimes_{A[C^+]} X.\end{aligned}$$

(Note that the equality is obvious, since X is finitely generated over A.) Thus the first claim of (1) is proved.

We turn to proving (2), and thus we again suppose that X is an arbitrary object of $\mathscr{X}$. Since Z_M^+ and C generate Z_M as a monoid, the natural map $A[Z_M^+] \otimes_{A[C^+]} A[C] \to A[Z_M]$ is an isomorphism, which in turn implies that the restriction map

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], X) \to \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X) \tag{3.2.2}$$

is an isomorphism, and also that the natural map

$$A[C] \otimes_{A[C^+]} X \to A[Z_M] \otimes_{A[Z_M^+]} X \tag{3.2.3}$$

is an isomorphism. By [**10**, Lem 3.1.6], together with an evident variant with C^+ and C in place of Z_M^+ and Z_M, we see that an element ϕ in the source (resp. the target) of (3.2.2) is locally Z_M-finite (resp. locally C-finite) if and only if its image is finitely generated as an A-module. Since $Z_M = Z_M^+ C$, and since X is a union of finitely generated Z_M^+-invariant A-modules, we conclude that the isomorphism (3.2.2) restricts to an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M], X)_{Z_M-\mathrm{fin}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], X)_{C-\mathrm{fin}},$$

proving (2).

We may now deduce the second claim of (1). Indeed, it follows from the first claim of (1), together with the isomorphism of (2) and the isomorphism (3.2.3). Claim (3) then follows as well, since the functor $A[Z_M] \otimes_{A[Z_M^+]} -$ is exact (as $A[Z_M]$ is a localization of $A[Z_M^+]$). □

3.3. The definition of $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$. — Fix P_0 as in the preceding subsection, and define N_0, M_0, M^+, etc., as in that subsection. Let V be an object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, and let $V \hookrightarrow I^\bullet$ be an injective resolution of V in the category $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$. Such a resolution exists, by Proposition 2.1.1, and Proposition 2.1.11 show that such a resolution is also an N_0-acyclic resolution of V (since N_0 is a compact subgroup of P). Thus $(I^\bullet)^{N_0}$ computes the N_0-cohomology $H^\bullet(N_0, V)$. The complex $(I^\bullet)^{N_0}$ is naturally a complex of $A[M^+]$-modules (via the Hecke M^+-action), and thus each cohomology module $H^\bullet(N_0, V)$ is also naturally an $A[M^+]$-module.

3.3.1. *Definition*. — For any object V of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, we define $H^\bullet \mathrm{Ord}_P(V) := \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0, V)\big)_{Z_M-\mathrm{fin}}$.

Note that we may compute the M^+-action on $H^\bullet(N_0, V)$, and hence compute $H^\bullet \mathrm{Ord}_P(V)$, using any resolution of V in the category $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$ by objects that are acyclic as N_0-representations.

Our first goal is to show that the computation of $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ is independent of the choice of P_0. To this end, suppose that P_0' is another compact open subgroup of P, giving rise to N_0', $(M^+)'$, and $(Z_M^+)'$ in analogy to N_0, M^+, and Z_M^+. Write $Y' := M^+ \bigcap (M^+)'$ and $Y := Z_M^+ \bigcap (Z_M^+)'$; then Y generates Z_M as a group [**8**, Prop. 3.3.2 (i)], and Y' and Z_M generate M [**8**, Prop. 3.3.2 (ii)].

Choose $z \in Z_M$ such that $z N_0' z^{-1} \subset N_0$. If V is an object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, and $I^\bullet$ is an injective resolution of V, then [**10**, Lem. 3.1.11] gives rise to a Y'-equivariant map

$$h_{N_0, N_0', z} : (I^\bullet)^{N_0'} \to (I^\bullet)^{N_0}.$$

Since Y generates Z_M as a group, the inclusions

$$\mathrm{Hom}_{A[(Z_M^+)']}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0', V)\big) \subset \mathrm{Hom}_{A[Y]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0', V)\big)$$

and

$$\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0, V)\big) \subset \mathrm{Hom}_{A[Y]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0, V)\big)$$

are equalities. The Y'-equivariant map $h_{N_0,N_0,z}$ induces an $M = Y'Z_M$-equivariant map

$$\mathrm{Hom}_{A[Y]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0', V)\big) \to \mathrm{Hom}_{A[Y]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0, V)\big),$$

and hence an M-equivariant map

$$\mathrm{Hom}_{A[(Z_M^+)']}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0', V)\big) \to \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0, V)\big),$$

which we denote by $H^\bullet\imath_{N_0,N_0',z}$. Now define

$$H^\bullet\imath_{N_0,N_0'} := z^{-1}H^\bullet\imath_{N_0,N_0',z} : \mathrm{Hom}_{A[(Z_M^+)']}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0', V)\big) \to \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M], H^\bullet(N_0, V)\big).$$

3.3.2. *Proposition*. — 1. *The map $H^\bullet\imath_{N_0,N_0'}$ is well-defined independently of the choice of z.*
2. *The map $H^\bullet\imath_{N_0,N_0'}$ is an M-equivariant isomorphism.*
3. *If P_0'' is another choice of compact open subgroup of P, giving rise to N_0'', etc., then $H^\bullet\imath_{N_0,N_0'}H^\bullet\imath_{N_0',N_0''} = H^\bullet\imath_{N_0,N_0''}$.*

Proof. — This is proved in an identical manner to [**10**, Prop. 3.1.12]. □

The preceding result shows that $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ is defined up to canonical isomorphism independently of the choice of P_0. It is also independent, up to a canonical isomorphism, of the choice of Levi factor M of P. Indeed, if M' is another choice of Levi factor of P, let $H^\bullet\mathrm{Ord}_P'$ denote the analogue of $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$, computed using M' in place of M. There is a uniquely determined element $n \in N$ such that $nMn^{-1} = M'$.

Let V be an object of $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$, with injective resolution $V \hookrightarrow I^\bullet$. We will compute $H^\bullet\mathrm{Ord}_P'$ using $P_0' := nP_0n^{-1}$. Write $N_0' := N \bigcap P_0' = nN_0n^{-1}$. We find that multiplication by n induces an isomorphism $(I^\bullet)^{N_0} \xrightarrow{\sim} (I^\bullet)^{N_0'}$, and hence an isomorphism $H^\bullet(N_0, V) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(N_0', V)$. One immediately verifies that this isomorphism in turn induces an isomorphism $H^\bullet\mathrm{Ord}_P(V) \xrightarrow{\sim} H^\bullet\mathrm{Ord}_P'(V)$. (See the discussion at the end of [**10**, §3.1].)

Suppose now that $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ is a short exact sequence of objects in $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$. Applying the δ-functor $H^\bullet(N_0, -)$ we obtain a long exact sequence

$$\begin{aligned}(3.3.3)\quad 0 \to H^0(N_0, V_1) &\to H^0(N_0, V_2) \to H^0(N_0, V_3) \to \cdots \\ &\to H^i(N_0, V_1) \to H^i(N_0, V_2) \to H^i(N_0, V_3) \\ &\to H^{i+1}(N_0, V_1) \to H^{i+1}(N_0, V_2) \to H^{i+1}(N_0, V_3) \to \cdots .\end{aligned}$$

Applying the functor $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M],-)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ to this long exact sequence, we obtain the complex

$$\begin{aligned}(3.3.4)\quad 0 \to \mathrm{Ord}_P(V_1) \to \mathrm{Ord}_P(V_2) \to \mathrm{Ord}_P(V_3) \to \cdots \\ \to H^i\mathrm{Ord}_P(V_1) \to H^i\mathrm{Ord}_P(V_2) \to H^i\mathrm{Ord}_P(V_3) \\ \to H^{i+1}\mathrm{Ord}_P(V_1) \to H^{i+1}\mathrm{Ord}_P(V_2) \to H^{i+1}\mathrm{Ord}_P(V_3) \to \cdots .\end{aligned}$$

Since $\mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}(A[Z_M],-)_{Z_M-\mathrm{fin}}$ is not an exact functor, we are not able to conclude that (3.3.4) is exact in general.

3.4. The main theorem. — The goal of this subsection is to prove Theorem 3.4.7 below, which establishes the key properties of $H^\bullet(N_0,V)$ and $H^\bullet\mathrm{Ord}_P(V)$ in the case when V is an admissible (or more generally, locally admissible) G-representation. In particular, it implies as a corollary that (3.3.4) *is* exact when the V_i are locally admissible G-representations. (See Corollary 3.4.8 below.)

Before proving Theorem 3.4.7, we make some preliminary constructions and prove some necessary lemmas. We fix a compact open subgroup H_0 of G, which admits an Iwahori decomposition with respect to P and $\overline{P}$, i.e., writing $M_0 := H_0 \bigcap M$, $N_0 := H_0 \bigcap N$, and $\overline{N}_0 := H_0 \bigcap \overline{N}$, such that the product map $\overline{N}_0 \times M_0 \times N_0 \to H_0$ is a bijection. We will take the open subgroup P_0 with respect to which we compute $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ to be $P_0 := H_0 \bigcap P = M_0N_0$.

Next, we apply Lemma 3.1.5 to choose an element $z \in Z_M^+$ such that Z_M is generated as a monoid by Z_M^+ together with z^{-1}. We furthermore choose z (as Lemma 3.1.5 allows us to) such that $z^{-1}\overline{N}_0 z^1 \subset \overline{N}_0$, and such that the groups $z^{-i}\overline{N}_0 z^i \subset \overline{N}_0$, which then form a descending sequence of compact open subgroups of $\overline{N}$, form a neighborhood basis of the identity in $\overline{N}$.

3.4.1. ***Lemma.*** — *There exists a descending sequence of compact open subgroups $\{H_i\}_{i\geq 1}$ of H_0, each admitting an Iwahori decomposition $\overline{N}_i \times M_i \times N_0 \xrightarrow{\sim} H_i$, so that $\overline{N}_i = z^{-i}\overline{N}_0 z^i$, and so that the descending sequence $\{M_i\}_{i\geq 1}$ forms a basis of neighborhoods of the identity in M.*

Proof. — Write $\overline{N}_i := z^{-i}\overline{N}_0 z^i$. One sees, using the fact that $z \in Z_M^+$ (so that $z^{-i}N_0 z^i \supset N_0$, while $z^{-i}M_0 z^i = M_0$), that $z^{-i}H_0 z^i \bigcap H_0 = \overline{N}_i M_0 N_0$ is a compact open subgroup of G which again admits an Iwahori decomposition. Let H_i' denote the closed subgroup of $z^{-i}H_0 z^i \bigcap H_0$ generated by $\overline{N}_i$ and N_0. If $h \in H_i'$, then, applying the Iwahori decomposition of $z^{-i}H_0 z^i \bigcap H_0$, we may write $h = \overline{n}mn$ with $\overline{n} \in \overline{N}_i$, $m \in M_0$, and $n \in N_0$. Thus $m = \overline{n}^{-1}hn^{-1} \in H_i'$, and so H_i' admits the Iwahori decomposition $H_i' = \overline{N}_i M_i' N_0$, where $M_i' := H_i' \bigcap M$ is a closed subgroup of M_0.

Fix a descending sequence of open subgroups $\{M_j\}_{j\geq 1}$ of M_0, chosen to form a neighborhood basis of the identity in M. For a fixed value of i, let $j(i)$ denote the largest value of j such that $M_i' \subset M_j$. Since the groups $\overline{N}_i$ form a neighborhood basis of the identity in $\overline{N}$, we see that the subgroups M_i' become arbitrarily small as $i \to \infty$, and so $j(i) \to \infty$ as $i \to \infty$.

If we write $H_i := \overline{N}_i M_{j(i)} N_0$, then one sees (using the fact that $M_{j(i)} \subset M_0$, so that $M_{j(i)}$ normalizes both $\overline{N}_i$ and N_0, together with the fact that $M_i' \subset M_{j(i)}$) that H_i is closed under multiplication. Since it is also an open subset of the profinite subgroup H_0, it is necessarily an open subgroup of H_0, which by construction admits an Iwahori decomposition of the form required by the lemma (once we relabel $M_{j(i)}$ as M_i). □

Since $\{\overline{N}_i\}$ (resp. M_i) forms a neighborhood basis of the identity in $\overline{N}$ (resp. M), we find that

$$\bigcap_{i\geq 0} H_i = N_0. \tag{3.4.2}$$

3.4.3. *Lemma*. — *For any smooth G-representation V, there is a natural isomorphism $\varinjlim_i H^\bullet(H_i, V) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(N_0, V)$. Furthermore, if U_i denotes the image of $H^\bullet(H_i, V)$ in $H^\bullet(N_0, V)$, then there exists $j \geq 0$ such $A[Z_M^+]U_i \subset U_{i+j}$ for all $i \geq 0$. (Here we are regarding $H^\bullet(N_0, V)$ as an $A[Z_M^+]$-module via the Hecke Z_M^+-action.)*

Proof. — Let $V \hookrightarrow I^\bullet$ be an injective resolution of V in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$. It follows from Propositions 2.1.2 that $I^\bullet$ is an injective resolution of V in $\mathrm{Mod}_{H_i}^{\mathrm{sm}}(A)$, for each $i \geq 0$. Proposition 2.1.11 shows that we may use $I^\bullet$ to compute $H^\bullet(N_0, V)$. Taking into account (3.4.2), we see that there is a natural isomorphism

$$\varinjlim_i H^\bullet\big((I^\bullet)^{H_i}\big) \xrightarrow{\sim} H^\bullet\big((I^\bullet)^{N_0}\big),$$

and consequently, a natural isomorphism

$$\varinjlim_i H^\bullet(H_i, V) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(N_0, V).$$

This proves the first claim of the lemma.

It follows from Lemmas 3.1.3 (1) and 3.1.4 (4) that $\bigcap_{z' \in Z_M^+} z' \overline{N}_0 (z')^{-1}$ is an open subgroup of $\overline{N}_0$, and thus contains $\overline{N}_j$ for some sufficiently large value of j. We then have that $\overline{N}_{i+j} \subset z' \overline{N}_i (z')^{-1}$ for every $z' \in Z_M^+$ and every $i \geq 0$, and so from [**10**, Lem 3.3.2] (applied with z_0 taken to be an arbitrary element z' of Z_M^+, I_0 taken to be $z^{-j} H_i z^j \bigcap H_i = \overline{N}_{i+j} M_i N_0$, and I_1 taken to be H_i), we conclude that $A[Z_M^+](I^\bullet)^{H_i} \subset (I^\bullet)^{(H_i \bigcap z^{-j} H_i z^j)} \subset (I^\bullet)^{H_{i+j}}$ for all $i \geq 0$. This in turn implies that $A[Z_M^+]U_i \subset U_{i+j}$, completing the proof of the lemma. □

3.4.4. *Lemma*. — *If V in admissible smooth G-representation, then the cohomology modules $H^\bullet(H_i, V)$ are finitely generated A-modules, for any $i \geq 0$.*

Proof. — Let $V \hookrightarrow J^\bullet$ be an injective resolution of V in the category $\mathrm{Mod}_{H_0}^{\mathrm{adm}}(A)$. It follows from Propositions 2.1.2 and 2.1.9 that $J^\bullet$ is an injective resolution of V in $\mathrm{Mod}_{H_i}^{\mathrm{sm}}(A)$, for each $i \geq 1$, and so there are natural isomorphisms

$$H^\bullet(H_i, V) \xrightarrow{\sim} H^\bullet\big((J^\bullet)^{H_i}\big).$$

Since $J^\bullet$ is an admissible H_i-representation, the complex $(J^\bullet)^{H_i}$ is a complex of finitely generated A-modules. Its cohomology modules are thus also finitely generated A-modules. The lemma follows. □

As in Subsection 3.2, let $C^+ \subset Z_M^+$ (resp. $C \subset Z_M$) denote the submonoid (resp. subgroup) of Z_M^+ (resp. Z_M) generated by z. If V is any smooth G-representation, then the Hecke Z_M^+-action on V^{N_0} restricts to an action of C^+ on V^{N_0}. If $i \geq 0$, then it follows from the fact that $z^{-1}\overline{N}_i z \subset \overline{N}_i$, together with [**10**, Lem. 3.3.2] (applied with $z = z_0$ and $I_0 = I_1 = H_i$) that V^{H_i} is invariant under the Hecke operator $h_{N_0,z}$, for each $i \geq 0$. Thus V^{H_i} is a C^+-submodule of V^{N_0}.

Now suppose that W is a smooth H_0-representation, and that we are given a pair of H_0-equivariant maps $\eta : V \to W$ and $\psi : W \to V$. (This situation will occur in the proof of Theorem 3.4.7 below.) The space of invariants W^{N_0} is a smooth M_0-representation, since M_0 normalizes N_0. We may define an action of C^+ on W^{N_0} by declaring z to act via the endomorphism $\eta h_{N_0,z}\psi$ of W^{N_0}. Since η and ψ are H_0-equivariant, we find that W^{H_i} is also C^+-invariant for each $i \geq 0$.

Since the C^+-action on W^{N_0} commutes with the M_0-action, the space

$$\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})_{C-\mathrm{fin}}$$

is equipped in a natural manner with an M_0-action, induced by the M_0-action on W^{N_0}. In this situation we have the following lemma.

3.4.5. ***Lemma***. — *If W is an admissible smooth H_0-representation, then the M_0-representation* $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})_{C-\mathrm{fin}}$ *is smooth and admissible.*

Proof. — As was already noted in the proof of Lemma 3.2.1, there is an evident analogue of [**10**, Lem. 3.1.6], with C and C^+ in place of Z_M and Z_M^+. Namely, if $\phi \in \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})$, then ϕ is locally C-finite if and only if $\mathrm{im}(\phi)$ is a finitely generated A-submodule of W^{N_0}. In particular, since the M_0-action on W^{N_0} is smooth, the M_0-action on $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})_{C-\mathrm{fin}}$ is also smooth.

To prove admissibility, we must show that $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})^{M_i}_{C-\mathrm{fin}}$, is finitely generated over A for each $i \geq 0$. Since the M_i-action on $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})_{C-\mathrm{fin}}$ is defined by the M_i-action on W^{N_0}, we see that the natural embedding

$$\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{M_i N_0})_{C-\mathrm{fin}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{N_0})^{M_i}_{C-\mathrm{fin}}$$

is an isomorphism. Thus we must show that $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{M_i N_0})_{C-\mathrm{fin}}$ is finitely generated over A, for $i \geq 0$.

Since W^{H_i} is a finitely generated A-module, for each $i \geq 1$, it follows from [**10**, Lem 3.1.5] (or rather, its analogue with C and C^+ in place of Z_M and Z_M^+) that $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{H_i})_{C-\mathrm{fin}}$ is finitely generated over A, for each $i \geq 0$. Thus, it suffices to show that the natural embedding

$$\mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{H_i})_{C-\mathrm{fin}} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{A[C^+]}(A[C], W^{M_i N_0})_{C-\mathrm{fin}} \tag{3.4.6}$$

is an isomorphism.

Let $\phi : A[C] \to W^{M_i N_0}$ be an element in the target of (3.4.6). Since ϕ is locally C-finite, by assumption, its image $\mathrm{im}(\phi)$ is finitely generated over A (as we noted above). Thus there is some value of $j \geq i$ such that $\mathrm{im}(\phi)$ is invariant under $\overline{N}_j := z^{-j}\overline{N}_0 z^j$, and thus under the subgroup $\overline{N}_j M_i N_0$ of H_0. It follows from [**10**, Lem 3.3.2] (taking $z_0 := z$, $I_0 := \overline{N}_{j-1} M_i N_0$, and $I_1 := \overline{N}_j M_i N_0$) that

$$h_{N_0,z}(V^{\overline{N}_j M_i N_0}) \subset V^{\overline{N}_{j-1} M_i N_0},$$

and thus that

$$z\, W^{\overline{N}_j M_i N_0} = \eta h_{N_0,z} \psi(W^{\overline{N}_j M_i N_0}) \subset W^{\overline{N}_{j-1} M_i N_0}.$$

Iterating this observation $k := j - i$ times, we find that

$$z^k\, W^{\overline{N}_j M_i N_0} = (\eta h_{N_0,z} \psi)^k (W^{\overline{N}_j M_i N_0}) \subset W^{\overline{N}_i M_i N_0} = W^{H_i}.$$

Since $\mathrm{im}(\phi) = z^k\, \mathrm{im}(\phi)$ (since $z^k \in A[C]^\times$), we find that $\mathrm{im}(\phi) \subset W^{H_i}$. This proves that (3.4.6) is an isomorphism, as required. □

We are now ready to state and prove the following key result.

3.4.7. ***Theorem***. — 1. *If V is a locally admissible smooth G-representation, then each of the M^+-representations $H^\bullet(N_0, V)$ is a union of Z_M^+-invariant finitely generated A-submodules.*

2. *If V is a (locally) admissible smooth G-representation, then each of the smooth M-representations $H^\bullet \mathrm{Ord}_P(V)$ is (locally) admissible.*

Proof. — Suppose first that V is an admissible smooth G-representation. Lemma 3.4.3 shows that $H^\bullet(N_0, V) = \bigcup_{i \geq 0} U_i$, where U_i denotes the image of the natural map $H^\bullet(H_i, V) \to H^\bullet(N_0, V)$. It also shows that $A[Z_M^+]U_i \subset U_{i+j}$, for all $i \geq 0$ and some $j \geq 0$. Lemma 3.4.4 shows that U_{i+j} is a finitely generated A-module (being the image of the finitely generated A-module $H^\bullet(H_{i+j}, V)$). Thus so is its submodule $A[Z_M^+]U_i$. Thus, we may write $H^\bullet(N_0, V) = \bigcup_{i \geq 0} A[Z_M^+]U_i$, exhibiting $H^\bullet(N_0, V)$ as a union of Z_M^+-invariant finitely generated A-submodules. This proves claim (1) for admissible V.

Continuing to assume that V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$, let $V \hookrightarrow I^\bullet$ be an injective resolution of V in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, and let $V \hookrightarrow J^\bullet$ be an injective resolution of V in the category $\mathrm{Mod}_{H_0}^{\mathrm{adm}}(A)$. It follows from Propositions 2.1.2 and 2.1.9 that $I^\bullet$ and $J^\bullet$ are both injective resolutions of V in $\mathrm{Mod}_{H_i}^{\mathrm{sm}}(A)$, for each $i \geq 0$. Thus we may find an H_0-equivariant chain homotopy $\eta : I^\bullet \to J^\bullet$, as well as a homotopy inverse $\psi : J^\bullet \to I^\bullet$.

Writing C to denote the cyclic subgroup of Z_M generated by the element z, as above, the Hecke action of M^+ on $(I^\bullet)^{N_0}$ restricts to an action of C^+, which leaves $(I^\bullet)^{H_i}$ invariant, for each $i \geq 0$. We define a corresponding action of C^+ on $(J^\bullet)^{N_0}$ by having z act via the composite $\eta h_{N_0,z} \psi$. Note that we are in the precise situation introduced in the discussion preceding Lemma 3.4.5 (taking the V and W of that discussion to be $I^\bullet$ and $J^\bullet$ respectively).

It follows from (3.4.2) that $(J^\bullet)^{N_0}$ is the union of the C^+-invariant subcomplexes $(J^\bullet)^{H_i}$, each of which is a complex of finitely generated A-modules (since $J^\bullet$ is a complex of admissible smooth H_0-representations), and so Lemma 3.2.1 shows that the natural map

$$H^\bullet\Big(\mathrm{Hom}_{A[C^+]}\big(A[C],(J^\bullet)^{N_0}\big)_{C-\mathrm{fin}}\Big)\to \mathrm{Hom}_{A[C^+]}\Big(A[C],H^\bullet\big((J^\bullet)^{N_0}\big)\Big)_{C-\mathrm{fin}}$$

is an isomorphism. We also have the sequence of isomorphisms

$$\begin{aligned}H^\bullet\mathrm{Ord}_P(V) &:= \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M],H^\bullet(N_0,V)\big)_{Z_M-\mathrm{fin}}\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\Big(A[Z_M],H^\bullet\big((I^\bullet)^{N_0}\big)\Big)_{Z_M-\mathrm{fin}}\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[C^+]}\Big(A[C],H^\bullet\big((I^\bullet)^{N_0}\big)\Big)_{C-\mathrm{fin}}\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[C^+]}\Big(A[C],H^\bullet\big((J^\bullet)^{N_0}\big)\Big)_{C-\mathrm{fin}},\end{aligned}$$

the first isomorphism following from Proposition 2.1.11 (as we noted above), the second being provided by part (2) of Lemma 3.2.1, and the third being provided by the chain homotopy η. Altogether, we obtain an M_0C-equivariant isomorphism

$$H^\bullet\mathrm{Ord}_P(V)\xrightarrow{\sim} H^\bullet\Big(\mathrm{Hom}_{A[C^+]}\big(A[C],(J^\bullet)^{N_0}\big)_{C-\mathrm{fin}}\Big).$$

Thus (since the category of admissible smooth M_0-representations is abelian [**10**, Prop. 2.2.13]), in order to prove claim (2) for V, it suffices to show that each member of the complex $\mathrm{Hom}_{A[C^+]}\big(A[C],(J^\bullet)^{N_0}\big)_{C-\mathrm{fin}}$ is an admissible M_0-representation. This follows from Lemma 3.4.5, and completes the proof of (2) for admissible V.

Suppose now that V is a locally admissible smooth G-representation. We may write V as an inductive limit, $V\xrightarrow{\sim}\varinjlim_j V_j$, where each V_j is an admissible smooth G-representation. We then obtain an M^+-equivariant isomorphism

$$\varinjlim_j H^\bullet(N_0,V_j)\xrightarrow{\sim} H^\bullet(N_0,V),$$

and hence (taking into account [**10**, Lem. 3.2.2]), an isomorphism

$$\begin{aligned}\varinjlim_j \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M],H^\bullet(N_0,V_j)\big)_{Z_M-\mathrm{fin}}&\\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M],H^\bullet(N_0,V)\big)_{Z_M-\mathrm{fin}}&.\end{aligned}$$

Claims (1) and (2) in the locally admissible case thus follow from the corresponding claims in the admissible case. □

3.4.8. ***Corollary***. — *$H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ forms a δ-functor from the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$) to the category $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{l.adm}}(A)$).*

Proof. — We have already shown in part (2) of Theorem 3.4.7 that $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$, when restricted to $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$), takes values in $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$ (resp.

$\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{l.adm}}(A)$). Part (1) of Theorem 3.4.7, together with Lemma 3.2.1, shows that the complex (3.3.4) is exact, when $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3$ is a short exact sequence in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$. The corollary follows. □

3.5. Some properties of $H^\bullet(N_0, -)$. — As its title indicates, in this subsection we prove some properties of the cohomology functors $H^\bullet(N_0, -)$, which we will need in our subsequent study of the functor $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$.

It will be convenient (in order to facilitate the arguments to come) to assume for the duration of this subsection that N is an arbitrary connected unipotent linear algebraic group over $\mathbb{Q}_p$, of dimension d, say, and that N_0 is a compact open subgroup of N.

If $\mathfrak{n}$ denotes the Lie algebra of N, then the exponential map induces an isomorphism $\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} N$. Under this isomorphism, the group operation on N is obtained from the Lie bracket on $\mathfrak{n}$, together with the Cambpell–Hausdorff formula. We let $\mathfrak{n}_0$ denote the preimage of N_0 under this isomorphism.

3.5.1. *Definition*. — We say that N_0 is a standard compact open subgroup of N, or simply standard, if $\mathfrak{n}_0$ is a $\mathbb{Z}_p$-Lie subalgebra of $\mathfrak{n}$.

3.5.2. *Lemma*. — *The identity of N admits a neighborhood basis of standard compact open subgroups.*

Proof. — Let $\mathfrak{n}_0$ be any bounded $\mathbb{Z}_p$-lattice in $\mathfrak{n}$ (i.e. $\mathfrak{n}_0$ is a finitely generated $\mathbb{Z}_p$-submodule of $\mathfrak{n}$ which spans $\mathfrak{n}$ over $\mathbb{Q}_p$). Since $\mathfrak{n}_0$ is finitely generated over $\mathbb{Z}_p$, and spans $\mathfrak{n}$ over $\mathbb{Q}_p$, one sees that

$$[\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_0] \subset p^{-m}\mathfrak{n}_0$$

for $m \geq 0$. Hence, for any integer n, there is an inclusion

$$[p^n\mathfrak{n}_0, p^n\mathfrak{n}_0] \subset p^{n-m} \cdot p^n\mathfrak{n}_0,$$

and thus the $\mathbb{Z}_p$-submodules $p^n\mathfrak{n}_0$, for $n \geq m$, form a basis of neighborhoods of 0 in $\mathfrak{n}$ consisting of $\mathbb{Z}_p$-Lie subalgebras of $\mathfrak{n}$. Since every Lie bracket in $p^n\mathfrak{n}_0$ is in fact divisible by p^{n-m}, we see that if n is sufficiently large (depending on the dimension d of N) then $p^n\mathfrak{n}_0$ will exponentiate to a standard compact open subgroup of N (i.e. applying the Campbell–Hausdorff formula to multiply elements of $\exp(p^n\mathfrak{n}_0)$ will not introduce any denominators). This proves the lemma. □

Since N is unipotent, it admits a surjective homomorphism $N \to \mathbb{Q}_p$. The kernel N' of this homomorphism is again unipotent. The image N_0'' of N_0 under this homomorphism is a compact open subgroup of $\mathbb{Q}_p$, and hence is isomorphic to $\mathbb{Z}_p$. Thus if we write $N_0' := N_0 \bigcap N$, then we have a short exact sequence

$$0 \to N_0' \to N_0 \to N_0'' \to 0, \tag{3.5.3}$$

where N_0'' is one-dimensional and N_0' is again a compact open subgroup of a unipotent group. Since any compact open subgroup of $\mathbb{Q}_p$ is standard, it is clear that if N_0 is standard, then so is N_0'.

3.5.4. *Lemma*. — *If V is any smooth N_0-representation over A, then $H^\bullet(N_0, V)$ vanishes in degrees greater than d.*

Proof. — If $d = 1$, and if we let γ denote a topologically generator of N_0, then it is well-known that $H^\bullet(N_0, V)$ can be computed by the complex

$$V \xrightarrow{\gamma - 1} V. \tag{3.5.5}$$

Thus the lemma holds in this case. The general case then follows by applying the Hochschild–Serre spectral sequence to the short exact sequence (3.5.3), and using induction on d. □

If L is any finite rank free $\mathbb{Z}_p$-module, then we write $\det L$ to denote the top non-vanishing exterior power of L (so $\det L = \bigwedge^d L$ if L has rank d), and $L^\vee$ to denote the $\mathbb{Z}_p$-dual of L, i.e. $L^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(L, \mathbb{Z}_p)$.

3.5.6. *Proposition*. — *If N_0 is standard, corresponding to the Lie subalgebra $\mathfrak{n}_0$ of $\mathfrak{n}$, then for V any smooth N_0-representation over A, there is a natural isomorphism*

$$H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee.$$

Proof. — Suppose first that N_0 is one-dimensional, topologically generated by an element γ. In this case the Lie bracket on $\mathfrak{n}_0$ is trivial, and the exponential map $\mathfrak{n}_0 \xrightarrow{\sim} N_0$ is in fact an isomorphism of groups (with the source being given the group structure underlying its structure as a $\mathbb{Z}_p$-module). The choice of γ induces isomorphisms $\mathfrak{n}_0 \xrightarrow{\sim} N_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$, and hence a dual isomorphism $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathfrak{n}_0^\vee$, while the complex (3.5.5) gives rise to an isomorphism

$$H^1(N_0, V) \xrightarrow{\sim} V/(\gamma - 1)V \xrightarrow{\sim} V_{N_0}.$$

Combining this isomorphism with the preceding one, we obtain an isomorphism

$$H^1(N_0, V) \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathfrak{n}_0^\vee,$$

which the reader may verify is independent of the choice of γ.

We now turn to the general case. Applying the Hochschild–Serre spectral sequence to (3.5.3), and taking into account Lemma 3.5.4, we obtain an isomorphism

$$H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} H^1\big(N_0'', H^{d-1}(N_0', V)\big).$$

If we let $\mathfrak{n}_0'$ (resp. $\mathfrak{n}_0''$) denote the preimage of N_0' (resp. N_0'') under the exponential map, then by induction we have a natural isomorphism

$$H^{d-1}(N_0', V) \xrightarrow{\sim} V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det(\mathfrak{n}_0')^\vee, \tag{3.5.7}$$

and hence an isomorphism

$$H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} \big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det(\mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_0''} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathfrak{n}_0'')^\vee.$$

Since $\det(\mathfrak{n}_0')^\vee$ is a rank one free $\mathbb{Z}_p$-module, the N_0''-action on it is necessarily trivial, and hence

$$\big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det(\mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_0''} \xrightarrow{\sim} (V_{N_0'})_{N_0''} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det(\mathfrak{n}_0')^\vee \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det(\mathfrak{n}_0')^\vee.$$

Thus we may rewrite (3.5.7) as an isomorphism

$$H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det(\mathfrak{n}_0')^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathfrak{n}_0'')^\vee. \tag{3.5.8}$$

The short exact sequence (3.5.3) gives rise to a short exact sequence

$$0 \to \mathfrak{n}_0' \to \mathfrak{n}_0 \to \mathfrak{n}_0'' \to 0,$$

and thus there is an isomorphism

$$\det(\mathfrak{n}_0')^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathfrak{n}_0'')^\vee \xrightarrow{\sim} \det \mathfrak{n}_0^\vee.$$

Combining this isomorphism with (3.5.8) gives the isomorphism of the lemma. We leave to the reader the task of verifying that this isomorphism is natural (and, in particular, is independent of the choice of dévissage (3.5.3)). □

Let $N_1 \subset N_0$ be an inclusion of standard compact open subgroups of N, corresponding under exponential map to the inclusion $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_0$ of $\mathbb{Z}_p$-Lie subalgebras of $\mathfrak{n}$. This inclusion induces an embedding of rank one free $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\det \mathfrak{n}_0^\vee \hookrightarrow \det \mathfrak{n}_1^\vee,$$

whose cokernel has order equal to the index $[\mathfrak{n}_0 : \mathfrak{n}_1]$. Thus this embedding induces an isomorphism

$$\det \mathfrak{n}_0^\vee \xrightarrow{\sim} [\mathfrak{n}_0 : \mathfrak{n}_1] \det \mathfrak{n}_1^\vee.$$

Multiplication by $[\mathfrak{n}_0 : \mathfrak{n}_1]$, composed with the inverse of this isomorphism, thus induces an isomorphism

$$\det \mathfrak{n}_1^\vee \xrightarrow{\sim} \det \mathfrak{n}_0^\vee. \tag{3.5.9}$$

3.5.10. *Lemma*. — *If V is a smooth N_0-module, then we have the following commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} H^d(N_1, V) & \xrightarrow{\sim} & V_{N_1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_1^\vee \\ \downarrow{\scriptstyle \text{cores}} & & \downarrow \\ H^d(N_0, V) & \xrightarrow{\sim} & V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee, \end{array}$$

in which the horizontal arrows are the isomorphisms of Proposition 3.5.6*, the left-hand vertical arrow is given by corestriction, and the right-hand vertical arrow is the tensor product of the natural surjection $V_{N_1} \to V_{N_0}$ and the isomorphism* (3.5.9).

Proof. — To begin with, suppose that N_0, and hence N_1, has dimension one. Write $I := [N_0 : N_1]$. Let γ denote a topological generator of N_0, so that γ^I is a topological generator of N_1. The explicit description of the isomorphism of Proposition 3.5.6

given in the proof of that proposition shows that we may rewrite the diagram in the statement of the lemma in the form

$$\begin{array}{ccc} H^1(N_1, V) & \longrightarrow & V/(\gamma - 1)V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{cores}} & & \Big\downarrow \\ H^1(N_0, V) & \longrightarrow & V/(\gamma^I - 1)V, \end{array} \tag{3.5.11}$$

in which the left-hand vertical arrow is given by corestriction, the right-hand vertical arrow is given by the natural surjection, and the horizontal isomorphisms are given by using the complexes

$$V \xrightarrow{\gamma - 1} V$$

and

$$V \xrightarrow{\gamma^I - 1} V$$

to compute N_0 cohomology and N_1 cohomology respectively. Now $1, \gamma, \dots, \gamma^{I-1}$ serve as coset representatives for N_0 in N_1, and so cores : $V^{N_1} \to V^{N_0}$ is given by multiplication by $\sum_{i=0}^{I-1} \gamma^i$. The diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma - 1} & V \\ {\scriptstyle 1 + \cdots + \gamma^{I-1}}\Big\downarrow & & \Big\| \\ V & \xrightarrow{\gamma^I - 1} & V \end{array}$$

evidently commutes, and so we see that cores : $H^1(N_1, V) \to H^1(N_0, V)$ corresponds to the natural surjection $V/(\gamma - 1)V \to V/(\gamma^I - 1)V$. Thus (3.5.11) does indeed commute.

We now consider the general case. Intersecting the members of the short exact sequence (3.5.3) induces a short exact sequence

$$0 \to N_1' \to N_1 \to N_1'' \to 0. \tag{3.5.12}$$

If (3.5.3) is the image under the exponential map of

$$0 \to \mathfrak{n}_0' \to \mathfrak{n}_0 \to \mathfrak{n}_0'' \to 0, \tag{3.5.13}$$

then (3.5.12) is the image of

$$0 \to \mathfrak{n}_1' \to \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_1'' \to 0,$$

obtained by intersecting (3.5.13) with $\mathfrak{n}_1$.

The Hochschild–Serre spectral sequence induces isomorphisms

$$H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} H^1\big(N_0'', H^{d-1}(N_0', V)\big)$$

and

$$H^d(N_1, V) \xrightarrow{\sim} H^1\big(N_1'', H^{d-1}(N_1', V)\big),$$

in terms of which corestriction may be written as the composite

$$H^1\big(N_1'', H^{d-1}(N_1', V)\big) \to H^1\big(N_1'', H^{d-1}(N_0', V)\big) \to H^1\big(N_0'', H^{d-1}(N_0', V)\big), \tag{3.5.14}$$

in which the first arrow is induced by applying the functor $H^1(N_1'', -)$ to the corestriction map $H^{d-1}(N_1', V) \to H^{d-1}(N_0', V)$, and the second arrow is given by corestriction from N_1'' to N_0''.

As noted in the proof of Proposition 3.5.6, there are isomorphisms

$$\big(V_{N_1'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_1')^\vee\big)_{N_1''} \otimes (\mathfrak{n}_1'')^\vee \xrightarrow{\sim} V_{N_1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_1^\vee$$

and

$$\big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_0''} \otimes (\mathfrak{n}_0'')^\vee \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee.$$

One easily sees that with respect to these isomorphisms, the right-hand vertical column of the diagram in the statement of the lemma coincides with the composite

$$\big(V_{N_1'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_1')^\vee\big)_{N_1''} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathfrak{n}_1'')^\vee \to \big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_1''} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathfrak{n}_1'')^\vee \to \big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_0''} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathfrak{n}_0'')^\vee, \tag{3.5.15}$$

where the first arrow is induced from the map

$$V_{N_1'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_1')^\vee \to V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee,$$

obtained by tensoring the natural surjection with the analogue of the isomorphism (3.5.9) for the inclusion $\mathfrak{n}_1' \subset \mathfrak{n}_0'$, by passing to N_1''-invariants and tensoring with $(\mathfrak{n}_1'')^\vee$, while the second arrow is the tensor product of the natural surjection

$$\big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_1''} \to \big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_0''}$$

with the analogue of the isomorphism (3.5.9) for the inclusion $\mathfrak{n}_1'' \subset \mathfrak{n}_0''$.

Consider now the diagram

$$\begin{array}{ccc}
H^1\big(N_1'', H^{d-1}(N_1', V)\big) & \xrightarrow{\sim} & \big(V_{N_1'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_1')^\vee\big)_{N_1''} \otimes (\mathfrak{n}_1'')^\vee \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1\big(N_1'', H^{d-1}(N_0', V)\big) & \xrightarrow{\sim} & \big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_1''} \otimes (\mathfrak{n}_1'')^\vee \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1\big(N_0'', H^{d-1}(N_0', V)\big) & \xrightarrow{\sim} & \big(V_{N_0'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathfrak{n}_0')^\vee\big)_{N_0''} \otimes (\mathfrak{n}_0'')^\vee,
\end{array}$$

in which the horizontal isomorphisms are provided by Proposition 3.5.6 (applied variously to N_1'', N_1', N_0', and N_0''), the left-hand column is equal to (3.5.14), and the right-hand column is equal to (3.5.15).

By induction on d, each of the squares commutes, and thus so does the outer square. On the other hand, we have already identified the two columns of this outer

square with two vertical arrows of the diagram in the statement of the lemma. The explicit description of the isomorphism of Proposition 3.5.6 given in the proof of that proposition further allows us to identify the horizontal arrows of this diagram with the horizontal arrows in the diagram in the statement of the lemma. Thus the diagram in the statement of the lemma commutes, as claimed. □

3.6. An application to Jacquet modules. — We employ our standard notation (G, P, M, N, etc.). Let d denote the dimension of N.

3.6.1. *Proposition*. — *The functors $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ on $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(A)$ vanish in degrees greater than d.*

Proof. — This follows immediately from Lemma 3.5.4 together with the definition of $H^\bullet\mathrm{Ord}$. □

In the remainder of this subsection we demonstrate a relation between the functor $H^d\mathrm{Ord}_P$ and the so-called Jacquet module functor associated to P. Recall that if V is a smooth G-representation, then the Jacquet module of V with respect to P is defined to be the space of coinvariants V_N. It is naturally an M-representation (since M normalizes N), and is characterized by the adjunction formula

$$\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_P^G U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_M(V_N, U)$$

for any smooth representation U of M.

The action by conjugation of M on N induces an action (the so-called adjoint action) of M on $\mathfrak{n}$, the Lie algebra of N. Passing to top exterior powers, we obtain an action of M on $\det\mathfrak{n}$. Since $\det\mathfrak{n}$ is one-dimensional, this action is given by a character $\alpha : M \to \mathbb{Q}_p^\times$. If we let $|\quad| : \mathbb{Q}_p^\times \to p^{\mathbb{Z}}$ denote the p-adic absolute value (normalized so that $|p| = p^{-1}$), then we write $\alpha^u := \alpha|\alpha| : M \to \mathbb{Z}_p^\times$ for the unit part of α. Of course, we can and do also regard α^u as an A-valued character of M, by composing it with the natural map $\mathbb{Z}_p^\times \to A^\times$.

Choose N_0 to be a standard compact open subgroup of N, so that $N_0 = \exp\mathfrak{n}_0$, as in the setting of Proposition 3.5.6. If we set $M_0 := \{m \in M \mid mN_0m^{-1} = N_0\}$, then M_0 is a compact open subgroup of M, and so $P_0 := M_0N_0$ is a compact open subgroup of P with respect to which we may compute the functor $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$.

Under the exponential map $\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} N$, the action of M on N by conjugation corresponds to the adjoint action of M on $\mathfrak{n}$. In particular, if $m \in M^+$ (so that by definition $mN_0m^{-1} \subset N_0$) then Ad_m restricts to an injective endomorphism of $\mathfrak{n}_0$, and hence $\det\mathrm{Ad}_m$ induces an injective endomorphism

$$\det\mathrm{Ad}_m : \det\mathfrak{n}_0 \hookrightarrow \det\mathfrak{n}_0.$$

Of course, this action is given simply by multiplication by $\alpha(m)$. Since its source and target are free of rank one over $\mathbb{Z}_p$, its cokernel is cyclic of order $|\alpha(m)|^{-1}$. Thus composing $\det\mathrm{Ad}_m$ with multiplication by $|\alpha(m)|$, we obtain an isomorphism

$$\det\mathfrak{n}_0 \xrightarrow{\sim} \det\mathfrak{n}_0,$$

which is given by multiplication by $\alpha^u(m)$.

3.6.2. *Proposition*. — *There is a natural isomorphism of functors*

$$V_N \xrightarrow{\sim} H^d\mathrm{Ord}_P(V) \otimes \alpha^u$$

on the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$.

Proof. — We compute $H^d\mathrm{Ord}_P$ with respect to the subgroup P_0 constructed above. Proposition 3.5.6 gives a natural isomorphism $H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee$. Via this isomorphism we may transfer the Hecke M^+-action on the left-hand side of this isomorphism to the right-hand side, and we will begin by describing this action explicitly.

If $m \in M^+$ then the Hecke action of m on $H^d(N_0, V)$ is the equal to the composite $H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} H^d(mN_0m^{-1}, V) \to H^d(N_0, V)$, in which the first isomorphism is induced by conjugation by m, and the second by corestriction. We may make this composite into the left-hand column of the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc}
H^d(N_0, V) & \xrightarrow{\sim} & V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee \\
\downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
H^d(mN_0m^{-1}, V) & \xrightarrow{\sim} & V_{mN_0m^{-1}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det \mathrm{Ad}_m)(\det \mathfrak{n}_0)^\vee \\
\downarrow \mathrm{cores} & & \downarrow \\
H^d(N_0, V) & \xrightarrow{\sim} & V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee,
\end{array}$$

in which the horizontal isomorphisms are those of Proposition 3.5.6, the upper right-hand vertical arrow is given by the tensor product of the isomorphism

$$V_{N_0} \xrightarrow{\sim} V_{mN_0m^{-1}} \tag{3.6.3}$$

induced by multiplication by m and the inverse of the isomorphism

$$\det \mathrm{Ad}_m^\vee : (\det \mathrm{Ad}_m)(\det \mathfrak{n}_0)^\vee \xrightarrow{\sim} \det \mathfrak{n}_0^\vee,$$

and the lower right-hand vertical arrow is given by the tensor product of the natural surjection

$$V_{mN_0m^{-1}} \to V_{N_0}, \tag{3.6.4}$$

and the isomorphism (3.5.9) (taking $\mathfrak{n}_1$ to be $\mathrm{Ad}_m(\mathfrak{n}_0)$). The commutativity of the upper square is immediate, while the commutativity of the lower square follows from Lemma 3.5.10.

We may equip V_{N_0} with an M^+-representation by defining the action of m on V_{N_0} to be the composite of (3.6.4) and (3.6.3). We may equip $\det \mathfrak{n}_0^\vee$ with an M^+-representation by defining the action of m on $\det \mathfrak{n}_0^\vee$ to be the composite of the isomorphism (3.5.9), with $\mathfrak{n}_1$ taken to be $\mathrm{Ad}_m(\mathfrak{n}_0)$, and the isomorphism

$$(\det \mathrm{Ad}_m^\vee)^{-1} : \det \mathfrak{n}_0^\vee \xrightarrow{\sim} \big((\det \mathrm{Ad}_m)(\det \mathfrak{n}_0)\big)^\vee.$$

The discussion preceding the statement of the proposition shows that this action of M^+ on $\det \mathfrak{n}_0^\vee$ is given by the character $(\alpha^u)^{-1}$.

By construction, the composite of the two vertical arrows of the above diagram coincides with the tensor product action of m on $V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee$, and thus this commutative diagram exhibits a natural M^+-equivariant isomorphism

$$H^d(N_0, V) \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det \mathfrak{n}_0^\vee \xrightarrow{\sim} V_{N_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\alpha^u)^{-1},$$

which we may rewrite as an isomorphism

$$V_{N_0} \xrightarrow{\sim} \alpha^u \otimes H^d(N_0, V). \tag{3.6.5}$$

Now fix an element $z \in Z_M^+$ such that z^{-1} and Z_M^+ generate Z_M as a monoid, as we may be Lemma 3.1.5. We may then form the increasing chain of compact open subgroups

$$N_0 \subset z^{-1} N_0 z \subset \cdots \subset z^{-i} N_0 z^i \subset \cdots;$$

Lemma 3.1.3 (2) shows that $N = \bigcup_{i=0}^\infty z^{-i} N_0 z^i$. Thus there is a natural isomorphism $\varinjlim_i V_{z^{-i} N_0 z^i} \xrightarrow{\sim} V_N$, with the transition map $V_{z^{-i} N_0 z^i} \to V_{z^{-(i+1)} N_0 z^{i+1}}$ being the natural projection. If we let C^+ (resp. C) denote the submonoid (resp. subgroup) of Z_M generated by z, then we may rewrite the preceding isomorphism more succinctly in the form

$$A[C] \otimes_{A[C^+]} V_{N_0} \xrightarrow{\sim} V_N. \tag{3.6.6}$$

Part (1) of Theorem 3.4.7, implies that $H^d(N_0, V)$ is a union of finitely generated, Z_M^+-invariant A-modules. Thus Lemma 3.2.1 shows that

$$\begin{aligned} H^d \mathrm{Ord}_P(V) &:= \mathrm{Hom}_{A[Z_M^+]}\big(A[Z_M], H^d(N_0, V)\big) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A[C_M^+]}\big(A[C_M], H^d(N_0, V)\big) \xrightarrow{\sim} A[C_M] \otimes_{A[C_M^+]} H^d(N_0, V). \end{aligned}$$

Combining this with the isomorphism (3.6.5), we find that

$$A[C] \otimes_{A[C^+]} V_{N_0} \xrightarrow{\sim} \alpha^u \otimes H^d \mathrm{Ord}_P(V).$$

Combining this in turn with the isomorphism (3.6.6) proves the proposition. □

3.6.7. *Corollary*. — *If V is a (locally) admissible (finitely generated) smooth G-representation over A, then V_N is a (locally) admissible (finitely generated) smooth M-representation over A.*

Proof. — The (local) admissibility of V_N follows from part (2) of Theorem 3.4.7, which shows that $H^d \mathrm{Ord}_P(V)$ is (locally) admissible if V is. If V is finitely generated over $A[G]$, then writing $G = \Omega P$ for some compact open subset Ω of G, we see that V is in fact finitely generated over $A[P]$, and thus that V_N is finitely generated over $A[M]$. □

3.6.8. ***Remark***. — In the representation theory of p-adic reductive groups on complex vector spaces, locally admissible smooth representations were introduced by Harish-Chandra under the name of quasi-admissible smooth representations (see [**7**]), and it is shown in [**7**] that in this context, the Jacquet functor takes quasi-admissible smooth G-representations to quasi-admissible smooth M-representations. In [**5**] the corresponding result is proved for admissible smooth representations.

3.7. The relation to derived functors. — We write $R^\bullet\mathrm{Ord}_P$ to denote the derived functors of the functor Ord_P on the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Since the derived functors may be characterized as the universal δ-functor whose 0th term is equivalent to Ord_P, there is a natural transformation (of δ-functors)

$$R^\bullet\mathrm{Ord}_P \to H^\bullet\mathrm{Ord}_P \tag{3.7.1}$$

extending the equivalence $R^0\mathrm{Ord}_P \xrightarrow{\sim} H^0\mathrm{Ord}_P \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P$. We make the following conjecture regarding this transformation.

3.7.2. ***Conjecture***. — *The natural transformation* (3.7.1) *is a natural equivalence.*

The derived functors are also characterized by their effaceability. Thus Conjecture 3.7.2 is equivalent to conjecturing that the functors $H^{\geq 1}\mathrm{Ord}_P$ are effaceable.

In an appendix, joint with Paškūnas [**11**], we prove Conjecture 3.7.2 in the case when $G = \mathrm{GL}_2(F)$, for some finite extension F of $\mathbb{Q}_p$, and P is a Borel subgroup of G.

3.7.3. ***Remark***. — The natural transformation $R^1\mathrm{Ord}_P \to H^1\mathrm{Ord}_P$ is an injection. (This is a general property of the natural transformation from a universal δ-functor to any other δ-functor which is an equivalence on 0th terms.)

In [**10**, Thm. 4.4.6], we proved that $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$ is right adjoint to the functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G : \mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A) \to \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$. (Note that $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ does indeed induce a functor between these categories, by [**10**, Lem 4.1.7].) Since both functors commute with the formation of inductive limits [**10**, Lems. 3.2.2, 4.1.4], the same statement is true with $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{adm}}(A)$ replaced by $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Since $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ is furthermore exact [**10**, Prop. 4.1.5], we find that Ord_P takes injective objects in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ to injective objects in $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Thus the adjointness between Ord_P and $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ extends to a derived adjointness, i.e., for any two objects U of $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{l.adm}}(A)$ and V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$, there is a natural quasi-isomorphism

$$R\mathrm{Hom}_M\big(U, R\mathrm{Ord}_P(V)\big) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V).$$

More concretely, there is a spectral sequence

$$E_2^{i,j} := \mathrm{Ext}_M^i\big(U, R^j\mathrm{Ord}_P(V)\big) \Rightarrow \mathrm{Ext}_G^{i+j}(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V). \tag{3.7.4}$$

(Here the $R\mathrm{Hom}$ and Ext functors are computed in the categories of locally admissible representations.)

The spectral sequence (3.7.4) gives rise in particular to an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_M\big(U, \mathrm{Ord}_P(V)\big) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V) \to \mathrm{Hom}_M\big(U, R^1\mathrm{Ord}_P(V)\big) \to \mathrm{Ext}^2_M\big(U, \mathrm{Ord}_P(V)\big) \to \mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V). \tag{3.7.5}$$

As we noted in Remark 3.7.3, there is a natural injection

$$R^1\mathrm{Ord}_P(V) \hookrightarrow H^1\mathrm{Ord}_P(V),$$

and so from (3.7.5) we obtain an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_M\big(U, \mathrm{Ord}_P(V)\big) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V) \to \mathrm{Hom}_M\big(U, H^1\mathrm{Ord}_P(V)\big), \tag{3.7.6}$$

which one can combine with a computation of $H^1\mathrm{Ord}_P(V)$ in various cases to obtain an upper bound on the size of $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V)$.

3.7.7. ***Remark***. — The maps in (3.7.6) have a concrete interpretation. Given an extension of locally admissible smooth M-representations

$$0 \to \mathrm{Ord}_P(V) \to E \to U \to 0,$$

applying the exact functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ yields an extension of smooth G-representations

$$0 \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \mathrm{Ord}_P(V) \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G E \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U \to 0,$$

which we may push forward along the canonical map $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \mathrm{Ord}_P(V) \to V$ to obtain an extension

$$0 \to V \to E' \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U \to 0.$$

Thus we have constructed a map

$$\mathrm{Ext}^1_M(U, \mathrm{Ord}_P(V)) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V),$$

which, up to a sign, coincides with the first non-trivial arrow in (3.7.6).

On the other hand, given an extension

$$0 \to V \to E' \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U \to 0$$

of locally admissible smooth G-representations, we may apply the δ-functor $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ to obtain an exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ord}_P(V) \longrightarrow \mathrm{Ord}_P(E') \longrightarrow \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \xrightarrow{\delta} H^1\mathrm{Ord}_P(V) \to \cdots.$$

In particular, the boundary map δ yields a map

$$\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \to H^1\mathrm{Ord}_P(V).$$

Composing this with the canonical isomorphism $U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)$ of [**10**, Cor. 4.3.5] we obtain an M-equivariant map $U \to H^1\mathrm{Ord}_P(V)$. Thus we have constructed a map

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V) \to \mathrm{Hom}_M\big(U, H^1\mathrm{Ord}_P(V)\big),$$

which, up to a sign, coincides with the second non-trivial arrow in (3.7.6).

3.7.8. ***Remark***. — An unfortunate complication in studying the homological algebra of admissible smooth G-representations is that there are (at least) three relevant categories in which one might compute the Ext spaces of a pair of admissible smooth representations: namely $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$, $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$, and $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ (in the first, via Yoneda Exts, and in the second and third either via Yoneda Exts, or equivalently, via derived functors). While working in the first of these categories might seem to be the most natural choice, working in the second has the advantage of putting at ones disposal the formalism of derived functors (since, by Proposition 2.1.1, it has enough injectives), and certain useful results, such as Frobenius reciprocity, are most naturally available when one works in the category of all smooth representations. It follows from [**10**, Prop. 2.2.13] that one obtains the same value of Ext^1, no matter which of the three categories one computes in. One might hope that this is true for all Ext^i, but one does not know this at present. Thus we will be careful below to specify in which categories any values of Ext^i $(i > 1)$ are computed.

4. The case of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

In this section we set $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, and we work in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$, where k is a finite field of characteristic p. We take P (resp. $\overline{P}$) to be the Borel subgroup of G consisting of upper triangular (resp. lower triangular) matrices, so that M is the maximal torus consisting of diagonal matrices. We will compute $H^\bullet \mathrm{Ord}_P(V)$ for all absolutely irreducible objects V of this category, and then, as an application, we will compute the spaces $\mathrm{Ext}^1_G(V_1, V_2)$ for various pairs of absolutely irreducible objects V_1, V_2. As we remarked in the introduction, similar computations have been performed by Breuil and Paškūnas [**4**] (who in fact consider the case of $\mathrm{GL}_2(F)$ for any finite extension F of $\mathbb{Q}_p$) and Colmez [**6**], using different methods. Furthermore, in [**15**] Paškūnas completes the computation of the spaces $\mathrm{Ext}^1_G(V_1, V_2)$ for absolutely irreducible V_1 and V_2 (at least for $p > 2$), by treating the cases when V_1 is supersingular and V_2 is supersingular or a twist of the Steinberg (cases which are not treated here, nor in [**4**] or [**6**].)

4.1. Absolutely irreducible representations. — We begin with some generalities regarding irreducible and absolutely irreducible admissible smooth representations of a p-adic analytic group H over the finite field k.

4.1.1. ***Lemma***. — *If H is a p-adic analytic group and V is a non-zero irreducible object of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$*, then* $\mathrm{End}_{k[H]}(V)$ *is a finite field extension of k.*

Proof. — If V is irreducible, then in particular it is finitely generated, and hence (being smooth) is generated by V^{H_0} for some compact open subgroup H_0 of V. Thus restriction induces an embedding $\mathrm{End}_{k[H]}(V) \hookrightarrow \mathrm{End}_k(V^{H_0})$. Since V is admissible, the space V^{H_0} is finite dimensional over k, and hence the target of the above embedding is finite dimensional. Thus $\mathrm{End}_{k[H]}(V)$ is finite dimensional k. It is also a division ring (since V is irreducible), and thus is a finite dimensional division algebra

over k. Since k is finite, so is $\mathrm{End}_{k[H]}(V)$, and so it is in fact commutative, and hence is a field. □

4.1.2. *Lemma*. — *If H is a p-adic analytic group, and V is an irreducible admissible smooth representation of H over k, then for any field extension l of k, the H-representation $l \otimes_k V$ is a direct sum of finitely many irreducible H-representations over l, and the natural map $l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V) \to \mathrm{End}_{l[H]}(l \otimes_k V)$ is an isomorphism.*

Proof. — Since V is irreducible, it is in particular finitely generated over $k[H]$, and so the functor $\mathrm{Hom}_{k[H]}(V, -)$ commutes with the formation of inductive limits with respect to an inductive system having injective transition maps. Thus we see that

$$\mathrm{Hom}_{l[H]}(l \otimes_k V, l \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k[H]}(V, l \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} l \otimes_k \mathrm{Hom}_{k[H]}(V, V),$$

proving the second claim of the lemma.

Now suppose that W is an $l[H]$-submodule of $l \otimes_k V$. The inclusion of W into $l \otimes_k V$ induces an $l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V)$-linear embedding

$$\mathrm{Hom}_{k[H]}(V, W) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{k[H]}(V, l \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V). \tag{4.1.3}$$

Tensoring on the right with V over $\mathrm{End}_{k[H]}(V)$, we obtain an $l[H]$-linear map

$$\mathrm{Hom}_{k[H]}(V, W) \otimes_{\mathrm{End}_{k[H]}(V)} V \to l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V) \otimes_{\mathrm{End}_{k[H]}(V)} V \xrightarrow{\sim} l \otimes_k V, \tag{4.1.4}$$

which is again an embedding, since by the previous lemma $\mathrm{End}_{k[H]}(V)$ is a field. The image of this map is precisely the image of the natural evaluation map

$$\mathrm{Hom}_{k[H]}(V, W) \otimes_{\mathrm{End}_{k[H]}(V)} V \to W. \tag{4.1.5}$$

Since $l \otimes_k V$ is semi-simple as a $k[H]$-representation, and is in fact just a direct sum of copies of the irreducible representation V, we see that as a $k[H]$-representation, W is also isomorphic to a direct sum of copies of V. Hence (4.1.5) is surjective, and thus the image of (4.1.4) is equal to W. Thus we may factor (4.1.4) as

$$\mathrm{Hom}_{k[H]}(V, W) \otimes_{\mathrm{End}_{k[H]}(V)} V \xrightarrow{\sim} W \hookrightarrow l \otimes_k V. \tag{4.1.6}$$

Since k is finite, and so separable, the l-algebra $l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V)$ is separable, and so (4.1.3) must split as a map of $l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V)$-modules. Thus the embedding (4.1.4) must be split as a map of $l[H]$-modules. A consideration of (4.1.6) then shows that W must be a direct summand of $l \otimes_k V$ as an $l[H]$-module.

Clearly, if $W_1 \subsetneq W_2$ is a strict inclusion of $l[H]$-submodules of $l \otimes_k V$, then we have a corresponding inclusion $\mathrm{Hom}_{k[H]}(V, W_1) \subset \mathrm{Hom}_{k[H]}(V, W_2)$ of ideals in $l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V)$, which, by a consideration of (4.1.6), is seen to also be strict. Since $l \otimes_k \mathrm{End}_{k[H]}(V)$ is a finite dimensional l-algebra, any strictly increasing chain of ideals in this algebra is of some uniformly bounded length. Another consideration of (4.1.6) then shows that any strictly increasing chain of $l[H]$-submodules of $l \otimes_k V$ must be of finite length. Combining this with the conclusion of the preceding paragraph, we infer that $l \otimes_k V$ is indeed the direct sum of finitely many irreducible $l[H]$-modules, completing the proof of the lemma. □

4.1.7. *Lemma*. — *Let H be a p-adic analytic group. If V is a non-zero irreducible object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$, then the following are equivalent:*

1. $\mathrm{End}_{k[H]}(V) = k$.
2. *$l \otimes_k V$ is irreducible (as a representation of H over l) for any finite field extension l of k.*
3. *$l \otimes_k V$ is irreducible (as a representation of H over l) for any field extension l of k.*

Proof. — Suppose that (1) holds, and that l is an extension of k. Lemma 4.1.2 implies that $l \otimes_k V$ is a semi-simple representation of H over l, and that $\mathrm{End}_{l[H]}(l \otimes_k V) = l$. It follows that in fact $l \otimes_k V$ is irreducible, and thus that (3) holds.

On the other hand, if (1) does not hold, then Lemma 4.1.1 shows that $\mathrm{End}_{k[H]}(V)$ is a proper finite extension l of k. Lemma 4.1.2 then shows that $\mathrm{End}_{l[H]}(l \otimes_k V) = l \otimes_k l$, which is not a field. Thus (2) does not hold either. Since clearly (3) implies (2), the lemma follows. □

4.1.8. *Definition*. — If H is a p-adic analytic group, then we say that an object V of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(k)$ is absolutely irreducible if it is irreducible, and furthermore satisfies the equivalent conditions of Lemma 4.1.7.

The following lemma shows that the study of irreducible admissible smooth representations may always be reduced to the study of absolutely irreducible ones by making a finite extension of scalars.

4.1.9. *Lemma*. — *If V is an irreducible object of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(k)$, then there is a finite extension l of k such $l \otimes_k V$ is a finite direct sum of absolutely irreducible objects of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{adm}}(l)$.*

Proof. — If we write $l = \mathrm{End}_{k[H]}(V)$, then Lemma 4.1.1 shows that l is a finite extension of k, and Lemma 4.1.2 shows that $l \otimes_k V$ is a semi-simple H-representation and that $\mathrm{End}_{l[H]}(l \otimes_k V) \xrightarrow{\sim} l \otimes_k l$. Now $l \otimes_k l \xrightarrow{\sim} \prod_i l_i$, where each l_i is an isomorphic copy of l. We conclude that $l \otimes_k V = \prod_i V_i$, where each V_i is irreducible and satisfies $\mathrm{End}_{l[H]}(V_i) = l$. Thus each V_i is in fact absolutely irreducible, and the lemma is proved. □

We now recall a result from [**1**], which provides a (partial) classification of the absolutely irreducible objects of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$. (Recall that $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.)

4.1.10. *Proposition*. — *If V is a non-zero absolutely irreducible object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$, then V has precisely one of the following forms:*

1. *$V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2$, where $\chi_1 \neq \chi_2$ are distinct characters $\mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ that are uniquely determined by V.*
2. *$V \xrightarrow{\sim} (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$, where St denotes the Steinberg representation and $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ is a uniquely determined character.*
3. *$V \xrightarrow{\sim} \chi \circ \det$ for some uniquely determined character $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$.*

4. *V is supersingular, which is to say, V is neither a quotient nor a subobject of any representation of the form $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U$, with U an object of $\mathrm{Mod}_{M}^{\mathrm{l.adm}}(k)$.*

Proof. — The paper [**1**] is set in a slightly different context to the one that we are working in; they classify smooth irreducible representations over the algebraically closed field $\overline{k}$ which furthermore admit a central character.

If V is an absolutely irreducible object of $\mathrm{Mod}_{G}^{\mathrm{adm}}(k)$, then Lemma 4.1.7 (1) implies that V admits a central character, while part (3) of the same lemma implies that $\overline{k} \otimes_k V$ remains irreducible. The results of [**1**] then imply that precisely one of the following holds:

(1′) $\overline{k} \otimes_k V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2$, where $\chi_1 \neq \chi_2$ are distinct characters $\mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{k}^{\times}$ that are uniquely determined by V.

(2′) $\overline{k} \otimes_k V \xrightarrow{\sim} (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$, where St denotes the Steinberg representation and $\chi : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{k}^{\times}$ is a uniquely determined character.

(3′) $\overline{k} \otimes_k V \xrightarrow{\sim} \chi \circ \det$ for some uniquely determined character $\chi : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{k}^{\times}$.

(4′) $\overline{k} \otimes_k V$ is supersingular, which is to say, V is neither a quotient nor a subobject of any representation of the form $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2$ for any pair of characters $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \overline{k}^{\times}$.

Since in each of cases (1′), (2′), and (3′) the characters are uniquely determined, a simple descent argument then shows that in fact these characters take values in $k^{\times}$, and that V satisfies the corresponding condition (1), (2), or (3) of the Proposition.

Suppose then that $\overline{k} \otimes_k V$ satisfies condition (4′), and consider a map

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U \to V,$$

where U lies in $\mathrm{Mod}_{M}^{\mathrm{l.adm}}(k)$; we will show that this map necessarily vanishes. Since U is the inductive limit of finitely generated admissible smooth M-representations, and since parabolic induction commutes with the formation of inductive limits, it is no loss of generality to assume that U is fact finitely generated and admissible, and hence finite dimensional (since M is a torus). Extending scalars to $\overline{k}$, we obtain a map

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}(\overline{k} \otimes_k U) \to \overline{k} \otimes_k V, \tag{4.1.11}$$

and it suffices to show that (4.1.11) vanishes. Since $\overline{k} \otimes_k U$ is finite dimensional representation of M over $\overline{k}$, it is a successive extension of characters, and thus $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}(\overline{k} \otimes_k U)$ is a successive extension of inductions of characters. The vanishing of (4.1.11) thus follows from condition (4′).

A similar argument shows that any map $V \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} U$, with U an object of $\mathrm{Mod}_{M}^{\mathrm{l.adm}}(k)$, must vanish. Thus if $\overline{k} \otimes_k V$ satisfies condition (4′), then V satisfies condition (4) of the lemma. □

4.1.12. ***Remark***. — The absolutely irreducible supersingular representations are completely classified in [**3**], but we will not need this classification for our computations.

4.2. Computations of $H^\bullet \mathrm{Ord}_P(V)$. — Fix a ring of coefficients A in $\mathrm{Art}(\mathbb{Z}_p)$, with residue field k. Suppose that U is a locally admissible smooth representation of M over A. We may also regard U as a P-representation via the natural surjection $P \to P/N \xrightarrow{\sim} M$. We equip $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A)$ with the P-action described in [**10**, §4.1], and equip $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A) \otimes_A U$ with the tensor product P-action (making it a smooth P-representation).

4.2.1. *Remark*. — There is a natural isomorphism of P-representations

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N) \otimes_A U \xrightarrow{\sim} c\text{–}\mathrm{Ind}_M^P U. \tag{4.2.2}$$

To construct this isomorphism, note first that restricting functions from P to N induces an isomorphism

$$c\text{–}\mathrm{Ind}_M^P U \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U). \tag{4.2.3}$$

Secondly, there is a natural isomorphism

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A) \otimes_A U \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, U). \tag{4.2.4}$$

Composing the inverse of (4.2.3) with (4.2.4) yields the desired isomorphism (4.2.2).

We let w denote the involution of M induced by the non-trivial element of the Weyl group of M in G; concretely, $w\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. If U is an M-representation, we let U^w denote the twist of the representation U by w, i.e. the U^w has the same underlying A-module as U, and writing $\overset{U}{\cdot}$ to denote the action on U, and $\overset{U^w}{\cdot}$ to denote the action on U^w, we have $m \overset{U^w}{\cdot} u := w(m) \overset{U}{\cdot} u$ for all $m \in M$ and $u \in U$.

If $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$ are two smooth characters, we write $\chi_1 \otimes \chi_2$ to denote the character of M defined by $\left(\chi_1 \otimes \chi_2\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) := \chi_1(a)\chi_2(d)$. If $\alpha^u : M \to A^\times$ denotes the character defined in Subsection 3.6, then $\alpha^u = \varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}$, where ε denotes the cyclotomic character (thought of as taking values in A): concretely,

$$\varepsilon : \mathbb{Q}_p^\times = p^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times \to A^\times,$$

where the first arrow is given by projection onto the second factor, and the second arrow arises from the fact that A is a $\mathbb{Z}_p$-algebra.

4.2.5. *Proposition*. — *If U is a locally admissible smooth M-representation over A, then there are isomorphisms:*

$$\mathrm{Ord}_P\big(U \otimes \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A)\big) \xrightarrow{\sim} U, \tag{4.2.6}$$

$$\mathrm{Ord}_P(U) = 0, \tag{4.2.7}$$

$$H^1\big(N_0, U \otimes \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A)\big) = 0, \tag{4.2.8}$$

and

$$H^1(N_0, U) \xrightarrow{\sim} (\alpha^u)^{-1} \otimes U, \tag{4.2.9}$$

Proof. — The isomorphism (4.2.6) is constructed in [**10**, Prop. 4.2.7]. The isomorphism (4.2.7) follows from the fact that if $m \in M^+$ is chosen so that mN_0m^{-1} is strictly contained in N_0, then the operator $h_{N_0,m}$ is locally nilpotent on U. The isomorphism (4.2.8) follows from the isomorphism of N_0-representations

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \in N/N_0} \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(N_0, A),$$

while the isomorphism (4.2.9) follows from (3.6.5). □

4.2.10. ***Corollary***. — *For any locally admissible smooth representation U of M over A, there are isomorphisms* $\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \xrightarrow{\sim} U$ *and* $H^1\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \xrightarrow{\sim} (\alpha^u)^{-1} \otimes U^w$.

Proof. — Let $G = \overline{P}N \coprod \overline{P}w$ denote the Bruhat decomposition of G. (Here w denotes some representative of the non-trivial element of the Weyl group of M in G, e.g. one can take $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.) Evaluation of elements of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$ at w yields a P-equivariant surjection

$$\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U \to U^w,$$

where P acts on U^w via the natural quotient map $P \to M$. The kernel of this surjection is precisely $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)(N)$, the P-invariant submodule of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$ consisting of functions whose support lies in $\overline{P}N$. As noted in [**10**, §4.1], there is a P-equivariant isomorphism

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A) \otimes_A U \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U)(N).$$

Altogether, we find that as a P-representation, $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$ sits in a short exact sequence

$$0 \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, A) \otimes_A U \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U \to U^w \to 0. \tag{4.2.11}$$

Applying Ord_P, and taking into account its left exactness, together with the isomorphisms (4.2.6) and (4.2.7), we find that

$$\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \xrightarrow{\sim} U,$$

while forming the long exact sequence of continuous N_0-cohomology, and taking into account the isomorphisms (4.2.8) and (4.2.9), we find that $H^1(N_0, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \xrightarrow{\sim} (\alpha^u)^{-1} \otimes U^w$, and thus also that

$$H^1\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U) \xrightarrow{\sim} (\alpha^u)^{-1} \otimes U^w.$$

This proves the corollary. □

4.2.12. ***Theorem***. — *Let V be an absolutely irreducible admissible representation of G over k.* (*Recall that these are classified by Proposition* 4.1.10.)

1. *If* $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2$, *for a pair of smooth characters* $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$, *then* $\mathrm{Ord}_P(V) \xrightarrow{\sim} \chi_1 \otimes \chi_2$, *while* $H^1\mathrm{Ord}_P(V) \xrightarrow{\sim} \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1\overline{\varepsilon}$.
2. *If* $V \xrightarrow{\sim} (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$, *for some smooth character* $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$, *then* $\mathrm{Ord}_P(V) \xrightarrow{\sim} \chi \otimes \chi$, *while* $H^1\mathrm{Ord}_P(V) = 0$.
3. *If* $V \xrightarrow{\sim} \chi \circ \det$ *for some smooth character* $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$, *then* $\mathrm{Ord}_P(V) = 0$, *while* $H^1\mathrm{Ord}_P(V) = \chi \otimes \chi$.

4. *If V is a supersingular absolutely irreducible admissible smooth representation of G, then* $\mathrm{Ord}_P(V) = H^1\mathrm{Ord}_P(V) = 0$.

Proof. — Claim (1) is a special case of Corollary 4.2.10. By definition, the representation $(\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$ sits in the short exact sequence

$$0 \to \chi \circ \det \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \to (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St} \to 0.$$

Comparing this with the short exact sequence (4.2.11) (in the case when $U = \chi \otimes \chi$), we find that $\mathrm{St} \xrightarrow{\sim} (\chi \otimes \chi) \otimes_A \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)$ as P-representations. Thus claim (2) follows from Proposition 4.2.5. As a P-representation, the representation $\chi \circ \det$ is isomorphic to the M-representation $\chi \otimes \chi$. Thus claim (3) also follows from Proposition 4.2.5. Claim (4) follows from Proposition 3.6.2, and the adjointness properties of $V \mapsto \mathrm{Ord}_P(V)$ and $V \mapsto V_N$. (Recall from Proposition 4.1.10 (4) that if V is supersingular, then it is neither a subrepresentation of nor a quotient of a representation induced from P or $\overline{P}$.) □

4.2.13. *Remark*. — If V is supersingular, then, using the description of V in terms of (φ, Γ)-modules provided by [**2**, Thm. 2.2.1], one can show that in fact $H^1(N_0, V)$ (which up to a twist is isomorphic to the space of N_0-coinvariants V_{N_0}) vanishes for any compact open subgroup N_0 of N.

Thus we see that for any absolutely irreducible object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ the natural surjection $V_{N_0} \to V_N$ is in fact an isomorphism. It then follows that this surjection is an isomorphism for any object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Indeed, beginning with the absolutely irreducible case, one uses Lemma 4.1.9 to extend to the irreducible case, and then proceeds by induction on length to prove it for any finite length object. Since any object $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ is the inductive limit of finitely generated admissible – and hence finite length [**10**, Thm. 2.3.8] – objects, and since the formation of coinvariants commutes with the formation of inductive limits, we conclude that it holds for arbitrary such V. We don't know whether or not the analogous result holds for other groups G.

We conclude this subsection by presenting an application of the preceding computations.

4.2.14. *Proposition*. — *Let V be an object of* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ *which is faithful as an A-module, and for which $k \otimes_A V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2$, where $\overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ are smooth characters for which $\overline{\chi}_1\overline{\chi}_2^{-1} \neq \underline{1}, \overline{\varepsilon}$. Then $V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2$, where χ_1 and χ_2 are lifts of $\overline{\chi}_1$ and $\overline{\chi}_2$ to smooth characters $\mathbb{Q}_p^\times \to A^\times$.*

Proof. — We prove this by induction on the length of A. Let $\mathfrak{m}$ denote the maximal ideal of A, let $A[\mathfrak{m}]$ denote the ideal in A consisting of elements annihilated by $\mathfrak{m}$ (note that is it non-zero, since A is Artinian), and let $I \subset A$ be the ideal generated by some non-zero element $a \in A[\mathfrak{m}]$. By our inductive hypothesis, there is an isomorphism $V/IV \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1' \otimes \chi_2'$, for some lifts χ_1', χ_2' of $\overline{\chi}_1$ and $\overline{\chi}_2$ to $(A/I)^\times$-valued characters. Since V is a faithful A-module, $IV \neq 0$, and thus $IV \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2$. (The latter

representation is irreducible, since $\overline{\chi}_1 \neq \overline{\chi}_2$ by assumption.) Thus V sits in the short exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 \to V \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1' \otimes \chi_2' \to 0. \tag{4.2.15}$$

Applying $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ to (4.2.15), and taking into account Corollary 4.2.10, we obtain the exact sequence

$$0 \to \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 \to \mathrm{Ord}_P(V) \to \chi_1' \otimes \chi_2' \to \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1 \overline{\varepsilon}^{-1}. \tag{4.2.16}$$

Since $\chi_1 \neq \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1}$ by assumption, we find that the final arrow in (4.2.16) vanishes, and thus that $\mathrm{Ord}_P(V)$ is an extension of $\chi_1' \otimes \chi_2'$ by $\overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2$. Now consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \mathrm{Ord}_P(V) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1' \otimes \chi_2' & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

induced by the adjointness between $\mathrm{Ord}_P(V)$ and $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}$. Since the outer two vertical arrows are isomorphisms, so is the middle isomorphism. We conclude that $\mathrm{Ord}_P(V)$ is given by an $A^\times$-valued character $\chi_1 \otimes \chi_2$, and that $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2 \xrightarrow{\sim} V$. □

4.2.17. ***Remark***. — The preceding result shows that if $\overline{\chi}_1, \overline{\chi}_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ are smooth characters for which $\overline{\chi}_1 \overline{\chi}_2^{-1} \neq \underline{1}, \overline{\varepsilon}^{-1}$, then the map from the deformation functor of $\overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2$ to the deformation functor of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2$ induced by $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ is an equivalence.

4.3. Extension computations. — In this subsection we let k denote a finite field of characteristic p. Our goal is to compute the spaces $\mathrm{Ext}^1_G(V_1, V_2)$, where V_1 and V_2 are absolutely irreducible objects of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$. We do this for every possible choice of V_1 and V_2 other than for the cases when V_1 and V_2 are both supersingular, when V_1 is a character and V_2 is a twist of Steinberg or supersingular (although we do treat the extensions of a character by Steinberg in one particular case, originally considered by Colmez – see the second isomorphism of claim (2) of Proposition 4.3.22), and when V_1 is a supersingular and V_2 is a twist of Steinberg. We also omit certain cases when V_1 is a twist of Steinberg and V_2 is a character when $p = 2$ or 3. Breuil and Paškūnas, and Colmez, have each found a different approach to many of the Ext calculations that we make; see Remark 4.3.35 below.

Our basic tool will be the exact sequence (3.7.5), together with the computations of the preceding subsection, and of course Corollary 3.12 of [**11**], verifying that Conjecture 3.7.2 holds in our context, which we will apply without further mention. We also require some additional technical computations which we have relegated to an

appendix. [1] We will also exploit the short exact sequence

$$0 \to \chi \circ \det \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \to (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St} \to 0, \tag{4.3.1}$$

which gives rise to an exact sequence

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(\chi \circ \det, V) \to \mathrm{Ext}^1_G\big((\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}, V\big) \\ \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi, V) \to \mathrm{Ext}^1_G(\chi \circ \det, V), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

for any object V of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$. Finally, we will utilize the following lemmas:

4.3.3. *Lemma*. — *If V is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$, and W is an object of $\mathrm{Mod}_{\overline{P}}^{\mathrm{sm}}(k)$, then there are natural isomorphisms*

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{\overline{P}}(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{\bullet}_G(V, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} W).$$

(*Here the* Ext *spaces are computed in* $\mathrm{Mod}_{\overline{P}}^{\mathrm{sm}}(k)$ *and* $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$, *respectively.*)

Proof. — If $W \hookrightarrow I^{\bullet}$ is an injective resolution in $\mathrm{Mod}_{\overline{P}}^{\mathrm{sm}}(k)$, then $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} W \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} I^{\bullet}$ is an injective resolution in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$. (Indeed, the functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ is right adjoint to the exact forgetful functor $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k) \to \mathrm{Mod}_{\overline{P}}^{\mathrm{sm}}(k)$, and hence preserves injectives, and is furthermore exact [**10**, Prop. 4.1.5].) The adjunction property of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ gives an isomorphism $\mathrm{Hom}_P(V, I^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} I^{\bullet})$. Passing to cohomology, and taking into account the preceding discussion, we obtain the isomorphism in the statement of the lemma. □

4.3.4. *Lemma*. — *If V_1 and V_2 are smooth P-representation over k, with V_1 being finite-dimensional over k, then restricting from P to M induces an isomorphism $\mathrm{Hom}_P(V_1, V_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_M(V_1, V_2)$, and consequently an embedding $\mathrm{Ext}^1_P(V_1, V_2) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1_M(V_1, V_2)$.* (*Here the* Ext^1 *spaces are computed in the categories of smooth representations over k.*)

Proof. — Let $\phi \in \mathrm{Hom}_M(V_1, V_2)$. Since V_1 and $\phi(V_1)$ are both finite-dimensional smooth representations of P, we may find a compact open subgroup N_1 of N which acts trivially on each of V_1 and $\phi(V_1)$. The map ϕ is then both M-equivariant and N_1-equivariant. Since M and N_1 together generate P, the map ϕ is in fact P-equivariant. This proves the first statement of the lemma. The claim regarding Ext spaces follows, either by a general argument with δ-functors, or more directly by noting that any M-equivariant section to an extension of V_1 by V_2 is then necessarily P-equivariant. □

[1] In an earlier version of this paper, these computations were quite extensive, and were largely necessitated by the fact that we didn't know Conjecture 3.7.2, and so were forced to rely on the weaker exact sequence (3.7.6), rather than (3.7.5). With the results of [**11**] available, this complication has been obviated, and the computations of the appendix have become correspondingly shorter and comparatively less technical.

4.3.5. *Lemma*. — *If V_1 and V_2 are two objects of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$, and if V_1 is finite-dimensional over k, then the restriction map $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \to \mathrm{Hom}_P(V_1, V_2)$ is an isomorphism, and consequently, the restriction map $\mathrm{Ext}^1_G(V_1, V_2) \to \mathrm{Ext}^1_P(V_1, V_2)$ (in which the* Hom *and* Ext *spaces are computed in the categories $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$ and $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(k)$ respectively) is injective.*

Proof. — This can be proved in a similar manner to the preceding lemma. (In particular, the claim regarding Ext^1 spaces follows formally from the claim regarding Hom spaces.) Namely, let $\phi \in \mathrm{Hom}_P(V_1, V_2)$. Since V_1 is finite-dimensional over k, so is $\phi(V_1)$, and so there is some open subgroup G_0 of G which fixes both V_1 and $\phi(V_1)$ element-wise. The map ϕ is then both G_0 and P-equivariant. Since G_0 and P generate G as a group, we see that ϕ is in fact G-equivariant.

Alternatively, one can argue directly from (an obvious variant, with P replaced by $\overline{P}$, of) the preceding lemma: if ϕ is P-equivariant, then it is in particular M-equivariant, and hence also $\overline{P}$-equivariant. Since P and $\overline{P}$ generated G, we see that ϕ is G-equivariant, as claimed. □

4.3.6. *Remark*. — The main theorem of [**14**] shows that the analogue of the preceding result holds for any absolutely irreducible object V_1 of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$ which is not a twist of St.

We also have the following variant of Lemma 4.3.4.

4.3.7. *Lemma*. — *If W_1 and W_2 are two objects of $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(k)$ that are finite dimensional over k, then restriction from P to M induces isomorphisms*

$$\mathrm{Ext}^i_P(W_1, W_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_M(W_1, W_2).$$

for $0 \leq i \leq 2$. (In the source, the Ext *space is computed in the category $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(k)$, and W_1 and W_2 are regarded as P-representations via the surjection $P \to M$, while in the target, the* Ext *space is computed in $\mathrm{Mod}_M^{\mathrm{sm}}(k)$.)*

Proof. — When $i = 0$ this is a special case of Lemma 4.3.4. To treat the case when $i = 1$, note that Lemma 4.3.8 below shows that N acts trivially on W_1 and W_2, and on any extension of W_1 by W_2 in the category $\mathrm{Mod}_P^{\mathrm{sm}}(k)$. Thus computing extensions of W_1 by W_2 as P-representations is the same as computing extensions of W_1 by W_2 as $M = P/N$-representations.

The argument in the case when $i = 2$ is slightly more involved. (We also note that this case is required only in Section A.1 of the appendix.) We begin by showing that if V is a finite-dimensional representation of M over k, regarded as a P-representation by having N act trivially, then the inflation map $H^i(M, V) \to H^i(P, V)$ is an isomorphism. Indeed, by the Hochschild–Serre spectral sequence for continuous cohomology, it suffices to verify that $H^i(N, V) = 0$ for $i > 0$ when V is regarded as a trivial N-representation.

Of course there is an isomorphism $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} N$; for each $j \geq 0$, write N^j to denote the image of $p^{-j}\mathbb{Z}_p$ under this isomorphism. We then have that $N = \bigcup N^j$, and for

each $i \geq 1$ there is a short exact sequence

$$0 \to R^1 \varprojlim_j H^{i-1}(N_j, V) \to H^i(N, V) \to \varprojlim_j H^i(N_j, V) \to 0.$$

Since each $H^{i-1}(N_j, V)$ is finite-dimensional (as V is), the projective system of $H^{i-1}(N_j, V)$ satisfies the Mittag–Leffler condition, and so $R^1 \varprojlim_j H^{i-1}(N_j, V) = 0$. Thus in fact $H^i(N, V) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_j H^i(N_j, V)$. Now $H^i(N_j, V) = 0$ if $i > 1$, and thus $H^i(N, V) = 0$ for such i. On the other hand, $H^1(N_j, V) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(N_j, V) \xrightarrow{\sim} V$ (since N, and so N_j, acts trivially on V). As $[N^{j+1} : N^j] = p$, we see that the transition map $H^1(N_{j+1}, V) \to H^1(N_j, V)$ vanishes (since V is a k-vector space, and k has characteristic p); thus in fact $H^1(N, V) = 0$ as well.

We now return to proving that the map $\mathrm{Ext}^2_P(W_1, W_2) \to \mathrm{Ext}^2_M(W_1, W_2)$ is an isomorphism. Since W_1 is finite-dimensional, we see that if $W_1^\vee$ denotes the contragredient representation to W_1, then there is a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_P(W_1, W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_M(W_1, W_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^1_P(\underline{1} \otimes \underline{1}, W_1^\vee \otimes W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_M(\underline{1} \otimes \underline{1}, W_1^\vee \otimes W_2). \end{array}$$

Thus it suffices to consider the case when W_1 is the trivial representation.

Now consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}, W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_P(\underline{1}, W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}, W_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^2(M, W_2) & \longrightarrow & H^2(P, W_2) & \longrightarrow & H^2(M, W_2), \end{array}$$

where the first horizontal arrows are given by inflation from M to P, the second horizontal arrows are given by restriction from P to M, and the vertical arrows are given by (2.2.1). Composing either the upper or lower horizontal arrows yields the identity, and we showed above that the first of the lower horizontal arrows is an isomorphism. Thus both lower horizontal arrows are isomorphisms. On the other hand, it follows from Corollary 2.2.4 that the vertical arrows are injective. From these facts we conclude that the upper horizontal arrows are injective; since they compose to give the identity, they must be isomorphisms. This completes the proof of the lemma for $i = 2$. □

The following lemma is proved in [**6**, Lem. III.1.3]. For the reader's convenience, we give a proof here.

4.3.8. ***Lemma***. — *Any smooth N-action on a finite-dimensional k-vector space is trivial.*

Proof. — Suppose that W is finite-dimensional over k and equipped with a smooth N-action. Write $N = \bigcup N^i$, where each N^i is a compact open subgroup. Since N^i is in particular pro-p, we see that $W^{N^i} \neq 0$. Since W is finite-dimensional, we find that $W^N = \bigcap W^{N^i} \neq 0$. (A nested intersection of non-zero subspaces of a finite-dimensional space is non-zero.) Thus, proceeding by induction, we find that the Jordan–Hölder factors of W, as N-representation, are copies of the trivial representation. The lemma then follows from the fact that

$$\mathrm{Ext}^1_N(\underline{1}, \underline{1}) \xrightarrow{\sim} H^1(N, \underline{1}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(N, k) = 0.$$

(Here the isomorphism is provided by Proposition 2.2.2, the first equality is the standard description of H^1 with coefficients in the trivial representations as a space of homomorphisms, and the second equality holds since N is a divisible group, while k is of characteristic p.) □

We also have the following closely related lemma.

4.3.9. *Lemma*. — *Any smooth* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-action on a finite-dimensional* k*-vector space is trivial.*

Proof. — If V is a finite-dimensional k-vector space equipped with a smooth $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-action, then there exists an open subgroup H of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ which acts trivially on V. Since by the preceding lemma N also acts trivially on V, and N and H together generate $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, the present lemma follows. (Alternatively, one can combine the preceding lemma with its obvious analogue for $\overline{N}$ to conclude that both N and $\overline{N}$ act trivially on V, and then note that N and $\overline{N}$ together generate $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$.) □

4.3.10. *Lemma*. — *If* $\alpha, \alpha', \beta, \beta' : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ *are smooth characters, then* $\mathrm{Ext}^i_M(\alpha \otimes \beta, \alpha' \otimes \beta') = 0$ *for all* $i \geq 0$*, unless* $\alpha = \alpha'$ *and* $\beta = \beta'$*.* (*Here the* Ext^i *are computed in the category* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_M(k)$.)

Proof. — Since M is commutative, for any two smooth M-representations U and V, there is a natural M-action on the space $\mathrm{Hom}_M(U, V)$ (induced by the M-action on either U or V), and hence (by passing to derived functors) a natural M-action on $\mathrm{Ext}^i_M(U, V)$, for each $i \geq 0$. If now we take $U = \alpha \otimes \beta$ and $V = \alpha' \otimes \beta'$, we see that this M-action is simultaneously given by the character $\alpha \otimes \beta$ and by the character $\alpha' \otimes \beta'$. Thus, unless these characters coincide, the space $\mathrm{Ext}^i_M(\alpha \otimes \beta, \alpha' \otimes \beta')$ must vanish. □

4.3.11. *Remark*. — We also remark that if $\alpha, \beta : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ are smooth characters, so that $\alpha \otimes \beta$ is a smooth character of M, then

$$\mathrm{Ext}^1_M(\alpha \otimes \beta, \alpha \otimes \beta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}, \underline{1}) \xrightarrow{\sim} H^1(M, \underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(M, \underline{1}),$$

by Proposition 2.2.2.

We are now ready to begin our calculation of Ext spaces for G-representations. We present the calculations in a series of propositions. We begin with the case of extensions by a principal series.

4.3.12. *Proposition*. — *Let $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be a smooth character.*

1. *If $\chi_1 \otimes \chi_2 \neq \chi \otimes \chi$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}\big) = 0$.*
2. *There is a natural isomorphism*

$$\mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi, \chi \otimes \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_G\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi \otimes \chi, (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}\big).$$

Proof. — This is a direct application of (3.7.5), setting $U = \chi_1 \otimes \chi_2$ and $V = (\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$, and taking into account part (2) of Theorem 4.2.12. □

4.3.13. *Proposition*. — *Let $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be a smooth character.*

1. *If $\chi_1 \otimes \chi_2 \neq \chi\overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi\overline{\varepsilon}$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, (\chi \circ \det)\big) = 0$.*
2. *The space $\mathrm{Ext}^1_G\big(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi\overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi\overline{\varepsilon}, (\chi \circ \det)\big)$ is one-dimensional.*

Proof. — These claims follow directly from (3.7.5), together with part (3) of Theorem 4.2.12. □

4.3.14. *Proposition*. — *The space $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, V)$ vanishes for any pair of smooth characters $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$, and any supersingular absolutely irreducible admissible smooth representation V of G over k.*

Proof. — This follows directly from (3.7.5) (taking $U = \chi_1 \otimes \chi_2$), together with part (4) of Theorem 4.2.12. □

4.3.15. *Proposition*. — *Let $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be a pair of smooth characters.*

1. *If $\chi_1', \chi_2' : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ is a second pair of smooth characters, then*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1' \otimes \chi_2')$$

   vanishes unless either $\chi_1 = \chi_1'$ and $\chi_2 = \chi_2'$, or else $\chi_1 = \chi_2'\overline{\varepsilon}^{-1}$ and $\chi_2 = \chi_1'\overline{\varepsilon}$.
2. *If $\chi_1 \neq \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}$, then*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1\overline{\varepsilon})$$

   is one-dimensional over k.
3. *If either $\chi_1 \neq \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}$ or $p \neq 2$, then the natural map*

$$\mathrm{Ext}^1_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_1 \otimes \chi_2) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2)$$

   given by applying $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ is an isomorphism.
4. *If $p = 2$ and $\chi_1 = \chi_2\,(= \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1})$, then the natural map*

$$\mathrm{Ext}^1_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_1 \otimes \chi_2) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2)$$

   given by applying $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ is injective, with a one-dimensional cokernel.

Proof. — We apply the exact sequence (3.7.5), taking U to be $\chi_1 \otimes \chi_2$, and V to be $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1' \otimes \chi_2'$. Taking into account Theorem 4.2.12 (1), we obtain an exact sequence

$$\begin{aligned}(4.3.16)\quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_1' \otimes \chi_2') \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1' \otimes \chi_2') \\ \to \mathrm{Hom}_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_2' \overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1' \overline{\varepsilon}) \to \mathrm{Ext}^2_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_1' \otimes \chi_2') \\ \to \mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1' \otimes \chi_2').\end{aligned}$$

Claim (1) is now seen to follow immediately from the exactness of (4.3.16) together with Lemma 4.3.10.

If we set $\chi_1' = \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1}$ and $\chi_2' = \chi_1 \overline{\varepsilon}$, and assume that $\chi_1' \neq \chi_1$ (or equivalently, that $\chi_2' \neq \chi_2$), then the exact sequence (4.3.16), together with Lemma 4.3.10, gives rise to an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1 \overline{\varepsilon}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_1 \otimes \chi_2),$$

whose target is one-dimensional. This establishes claim (2).

If we set $\chi_1' = \chi_1$ and $\chi_2' = \chi_2$, then the exact sequence (4.3.16) includes the subsequence

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Ext}^1_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_1 \otimes \chi_2) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2) \\ \to \mathrm{Hom}_M(\chi_1 \otimes \chi_2, \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1 \overline{\varepsilon}).\end{aligned}$$

If in addition $\chi_1 \neq \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1}$ (or equivalently, $\chi_2 \neq \chi_1 \overline{\varepsilon}$), we find that the last term in this exact sequence vanishes, and so claim (3) follows in this case. To complete the proof of (3), suppose that $p \neq 2$ and that $\chi_1 = \chi_2 \overline{\varepsilon}^{-1}$. In this case the exact sequence (4.3.16) takes the form

$$\begin{aligned}(4.3.17)\quad 0 \to \mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}, \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}) \\ \to \mathrm{Hom}_M\big(\chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}, R^1 \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon})\big) \to \mathrm{Ext}^2_M\big(\chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}, \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}\big) \\ \to \mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon}).\end{aligned}$$

We show in Subsection A.1 of the appendix that the final arrow in this exact sequence is *not* injective. On the other hand, we have shown in Theorem 4.2.12 that $R^1 \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi \overline{\varepsilon})$ is one-dimensional, and so we conclude that the first non-trivial arrow in (4.3.17) is an isomorphism, as required.

We now turn to claim (4). Thus we assume that $p = 2$, and that $\chi_1 = \chi_2 = \chi$. To simplify the notation, we apply, as we may, a twist by $\chi^{-1} \circ \det$, and thus in fact assume that $\chi = \underline{1}$. The short exact sequence (4.3.1) gives rise to a long exact sequence

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}, \underline{1}) \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}) \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}, \mathrm{St}) \\ \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}, \underline{1}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \underline{1}, \mathrm{St}).\end{aligned}$$

Since (4.3.1) is non-split, this long exact sequence induces an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}, \mathrm{St}). \tag{4.3.18}$$

We claim that the last arrow is surjective; indeed, it is easily checked that the composite

$$\mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}\otimes\underline{1}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}) \to \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}, \mathrm{St}),$$

with the first arrow being induced by the functor $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$, coincides with the isomorphism of Proposition 4.3.12 (2). Thus not only have we shown that (4.3.18) extends to a short exact sequence, but in fact we have provided a splitting, and thus have established an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}) \oplus \mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}\otimes\underline{1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\underline{1}).$$

Since Proposition 4.3.13 (2) shows that the first summand is one-dimensional (recall that $p=2$, so that $\overline{\varepsilon}=\underline{1}$), claim (4) follows. □

We now consider the case of extensions by Steinberg and by characters.

4.3.19. *Proposition*. — *Let $\chi,\chi_1,\chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be smooth characters.*

1. *If $\chi_1\otimes\chi_2 \neq \chi\otimes\chi$ or $\chi\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi\overline{\varepsilon}$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1\otimes\chi_2\big)$ vanishes.*
2. *If $p\neq 2$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi\overline{\varepsilon}\big)$ is one-dimensional.*

Proof. — Claim (1) follows directly from a consideration of (4.3.2), together with Proposition 4.3.15. Claim (2) follows in a similar manner, since

$$\mathrm{Ext}^1_G(\chi\circ\det, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi\overline{\varepsilon}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi, \chi\overline{\varepsilon}\otimes\chi\overline{\varepsilon}^{-1})$$

by Lemma 4.3.3 and (the analogue for $\overline{P}$ of) Lemma 4.3.7, and the latter Ext space vanishes, by Lemma 4.3.10, since $\chi\otimes\chi$ and $\chi\overline{\varepsilon}\otimes\chi\overline{\varepsilon}^{-1}$ are distinct characters of M (as $p\neq 2$). □

Recall that in Subsection 4.2 we defined the action of the Weyl group element w on the category of smooth M-representations. Clearly, if $\chi_1,\chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ are smooth characters, then $(\chi_1\otimes\chi_2)^w = \chi_2\otimes\chi_1$. In particular, if $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ is a smooth character, then $(\chi\otimes\chi)^w = \chi\otimes\chi$, and hence the action of w on M-representations induces an involution of $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)$. We let $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^w$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}$) denote the fixed space under this involution (resp. the anti-fixed space of the involution w).

4.3.20. *Lemma*. — 1. *The subspace of $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^w$ of $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)$ consists of extensions which are trivial when restricted to $M\bigcap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$.*

2. *The subspace $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}$ of $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)$ consists of extensions which are trivial when restricted to the centre Z_G of G.*

Proof. — Under the composition of the isomorphisms

$$\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_M(\underline{1},\underline{1})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(M,\underline{1})$$

discussed in Remark 4.3.11, the action of w on the source corresponds to the w-action $\phi\mapsto\Big(\phi^w : m\mapsto\phi\big(w(m)\big)\Big)$ on the target. Also, an element of the source is trivial when restricted to $M\bigcap\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (resp. Z_G) precisely when the corresponding homomorphism ϕ is trivial on $M\bigcap\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (resp. Z_G). An elementary computation shows that this latter condition holds if and only if $\phi^w=\phi$ (resp. $\phi^w=-\phi$), and so the lemma follows. □

We note that $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}$ is linearly independent of (resp. coincides with) $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^w$ when $p\neq 2$ (resp. $p=2$).

4.3.21. *Proposition*. — *Let $\chi_1,\chi_2:\mathbb{Q}_p^\times\to k^\times$ be smooth characters.*

1. *If $\chi_1\neq\chi_2$, then $\mathrm{Ext}^1_G(\chi_1\circ\det,\chi_2\circ\det)$ vanishes.*
2. *If $\chi_1=\chi_2=\chi$ (say), then restricting to M induces an isomorphism*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\chi\circ\det,\chi\circ\det)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^w.$$

Proof. — Note that Lemma 4.3.9 shows that any extension of $\chi_1\circ\det$ by $\chi_2\circ\det$ is trivial on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, and so factors through det. Thus the natural map

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p^\times}(\chi_1,\chi_2)\to\mathrm{Ext}^1_G(\chi_1\circ\det,\chi_2\circ\det),$$

given by pulling back $\mathbb{Q}_p^\times$ representations along $\det: G\to\mathbb{Q}_p^\times$, is an isomorphism. Now det also induces an isomorphism $M/\big(M\bigcap\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)\big)\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}_p^\times$, and so we see that restriction to M induces an isomorphism between $\mathrm{Ext}^1_G(\chi_1\circ\det,\chi_2\circ\det)$ and the subspace of extensions of $\mathrm{Ext}^1_M(\chi_1\otimes\chi_1,\chi_2\otimes\chi_2)$ which are trivial when restricted to $M\bigcap\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Claim (1) now follows from Lemma 4.3.10 (which shows that $\mathrm{Ext}^1_M(\chi_1\otimes\chi_1,\chi_2\otimes\chi_2)=0$ when $\chi_1\neq\chi_2$), while claim (2) follows from Lemma 4.3.20 (1). □

4.3.22. *Proposition*. — *Let $\chi_1,\chi_2:\mathbb{Q}_p^\times\to k^\times$ be smooth characters.*

1. *If $\chi_1\neq\chi_2$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi_1\circ\det)\otimes\mathrm{St},(\chi_2\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big)$ vanishes.*
2. *If $\chi_1=\chi_2=\chi$ (say), then there are natural isomorphisms*

$$\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^w\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St},(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big) \tag{4.3.23}$$

and

$$\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_G\big(\chi\circ\det,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big). \tag{4.3.24}$$

Proof. — Claim (1) follows from (4.3.2) and the vanishing result of Proposition 4.3.12. To prove claim (2), we again consider the exact sequence (4.3.2) (taking $V=(\chi\circ$

$\det) \otimes \mathrm{St}$), and place it into the following commutative diagram, as the left-hand column:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \\
\downarrow & & \\
\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St},(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big) & & \\
\downarrow & & \\
\mathrm{Ext}^1_G\big(\mathrm{Ind}_P^G\chi\otimes\chi,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ext}^1_G\big(\chi\circ\det,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1},
\end{array}$$

in which the upper horizontal arrow is given by part (2) of Proposition 4.3.12, the lower horizontal arrow will be specified below, and the right-hand vertical arrow is defined to make the diagram commute.

Let us now specify the lower horizontal arrow. There is a P-equivariant isomorphism

$$\mathrm{St} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes_k(\chi\otimes\chi).$$

Evaluation at the identity of N induces an M-equivariant surjection

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes_k(\chi\otimes\chi)\to\chi\otimes\chi.$$

Composing these two, we obtain an M-equivariant surjection

$$(\chi\otimes\chi)\otimes\mathrm{St}\to\chi\otimes\chi,$$

which induces a map

$$\mathrm{Ext}^1_P\big(\chi\circ\det,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big)\to\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}. \tag{4.3.25}$$

(Note that it does indeed land in $\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}$, by Lemma 4.3.20 (2), because any P-equivariant extension of $\chi\circ\det$ by $(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}$ must have a central character, there being no P-equivariant maps from the former representation to the latter.) We take the lower horizontal arrow to be the map

$$\mathrm{Ext}^1_P\big(\chi\circ\det,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big)\to\mathrm{Ext}^1_M(\chi\otimes\chi,\chi\otimes\chi)^{w=-1}. \tag{4.3.26}$$

obtained by composing of (4.3.25) with the restriction map

$$\mathrm{Ext}^1_G\big(\chi\circ\det,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big)\to\mathrm{Ext}^1_P\big(\chi\circ\det,(\chi\circ\det)\otimes\mathrm{St}\big). \tag{4.3.27}$$

The map (4.3.26) was first constructed by Colmez, who proved that it is an isomorphism [**6**, Thm. VII.4.19]. We will give another proof of this fact in the course of the present argument.

Corollary A.2.4 of the appendix shows that (4.3.25) is injective. Lemma 4.3.5 shows that (4.3.27) in also injective. Thus their composite (4.3.26) is again injective. A computation shows that (up to a sign) the right-hand vertical arrow in our diagram

is given by the formula $\phi \mapsto \phi - \phi^w$. Thus this arrow is surjective. Since the lower horizontal arrow is injective, we discover that it is in fact an isomorphism. Thus we obtain the isomorphism (4.3.24). Also, restricting the upper horizontal arrow to $\mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi, \chi \otimes \chi)^w$, we obtain the isomorphism (4.3.23). □

4.3.28. *Remark*. — The isomorphism (4.3.23) has a concrete interpretation. Namely, if U is an extension of $\chi \otimes \chi$ by itself, corresponding to an element of $\mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi, \chi \otimes \chi)^w$, then Proposition 4.3.21 shows that U extends uniquely to a G-representation. The induction $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U$ then contains a copy of U as a subrepresentation, and the corresponding quotient is an extension V of $(\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$ by itself. This map $U \mapsto V$ gives rise to the isomorphism (4.3.23) (up to a possible sign).

4.3.29. *Remark*. — As was observed above, $\mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi, \chi \otimes \chi)^{w=-1}$ is linearly independent of (resp. coincides with) $\mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi, \chi \otimes \chi)^w$ when $p \neq 2$ (resp. $p = 2$). Thus if $p \neq 2$, then we find that *none* of the non-trivial extensions of $(\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$ by $(\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}$ constructed in the preceding proposition admit a central character, while if $p = 2$, then they all do.

4.3.30. *Proposition*. — *Let $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be smooth characters.*

1. *If $\chi_1 \neq \chi_2$, and furthermore either $\chi_1 \neq \chi_2 \overline{\varepsilon}$ or else $p \neq 3$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi_1 \circ \det) \otimes \mathrm{St}, \chi_2 \circ \det\big)$ vanishes.*
2. *If $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ (say), and if $p \neq 2$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}, \chi \circ \det\big)$ is one-dimensional.*

Proof. — Both claims follow directly from a consideration of (4.3.2), together with Proposition 4.3.13.

□

4.3.31. *Proposition*. — *If $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ is smooth and V is a supersingular absolutely irreducible object of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_G(k)$, then $\mathrm{Ext}^1_G\big((\chi \circ \det) \otimes \mathrm{St}, V\big)$ vanishes.*

Proof. — This follows directly from a consideration of (4.3.2), together with the vanishing result of Proposition 4.3.14 (in the case $\chi_1 = \chi_2 = \chi$). □

4.3.32. *Proposition*. — *Let $\chi, \chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be smooth characters.*

1. *If $\chi_1 \otimes \chi_2 \neq \chi \otimes \chi$, then $\mathrm{Ext}^1_G(\chi \circ \det, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2)$ vanishes.*
2. *There is a natural isomorphism*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\chi \circ \det, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi \otimes \chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_M(\chi \otimes \chi, \chi \otimes \chi).$$

Proof. — This follows directly from Lemmas 4.3.3 and 4.3.7 (or rather, the analogue of the latter for $\overline{P}$). □

4.3.33. *Proposition*. — *Let $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be smooth characters, with $\chi_1 \neq \chi_2$. If V is a supersingular absolutely irreducible object of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_G(k)$, then the space $\mathrm{Ext}^1_G(V, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \chi_1 \otimes \chi_2)$ vanishes.*

Proof. — Let $0 \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2 \to E \to V \to 0$ be an extension. Applying $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$, and taking into account Theorem 4.2.12, we find that

$$H^1\mathrm{Ord}_P(E) \xrightarrow{\sim} H^1\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2) \xrightarrow{\sim} \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1} \otimes \chi_1\overline{\varepsilon},$$

and hence, by Proposition 3.6.2, we obtain an isomorphism of Jacquet modules

$$E_N \xrightarrow{\sim} \chi_2 \otimes \chi_1.$$

From the adjointness between Jacquet modules and induction, we find that there exists a map $E \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2$ extending the identity map from $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi_1 \otimes \chi_2$ to itself. Thus E is a split extension, as claimed. □

4.3.34. *Proposition*. — *Let $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ be a smooth character. If V is a supersingular absolutely irreducible object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$, then $\mathrm{Ext}_G^1(V, \chi \circ \det)$ vanishes.*

Proof. — This is proved in an analogous manner to the preceding proposition. Namely, if $0 \to \chi \circ \det \to E \to V \to 0$ is an extension, then applying $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$, and taking into account Theorem 4.2.12 and Proposition 3.6.2, we obtain an isomorphism of Jacquet modules $E_N \xrightarrow{\sim} \chi \otimes \chi$. Thus, from the adjointness between Jacquet modules and induction, we obtain a map $E \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi$ that extends the embedding $\chi \circ \det \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \chi \otimes \chi$ Thus E is a split extension, as claimed. □

4.3.35. *Remark*. — In his paper [**6**], Colmez constructs a functor from the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$ consisting of finitely generated objects to the category of continuous $G_{\mathbb{Q}_p}$-representations on k-vector spaces. Using this functor, Colmez has found another approach to many of the preceding computations, and some of the above computations were first made by him. In particular, Claim (3) of the Proposition 4.3.15 (under the additional assumption that $\chi_1 \neq \chi_2$) is originally due to Colmez [**6**, Prop. VII.4.15], as is the isomorphism (4.3.24) [**6**, §VII.4.3]. In [**6**, §VII.4.2] Colmez gives another proof of (most of) Proposition 4.3.15, and in [**6**, Prop. 7.5.4], he gives alternative proofs of Propositions 4.3.14, 4.3.31, 4.3.33, and 4.3.34.

In the paper [**4**], Breuil and Paškūnas study the functor of passage to pro-p-Iwahori invariants (in the context of representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, for a finite extension F of $\mathbb{Q}_p$), as well as its first derived functor, and in this way obtain results regarding extensions by principal series representations. In particular they recover (most of) Proposition 4.3.15 [**4**, Cor. 8.2, Cor. 8.3], as well as Proposition 4.3.33 [**4**, Cor. 8.4].

Appendix A

In this appendix we present some technical calculations needed to complete the computations of Subsection 4.3. We have placed these calculations in an appendix, since they are of a more *ad hoc* nature than the computations using the functors $H^\bullet \mathrm{Ord}_P$ that we have presented in the main body of the text. Throughout the appendix, G, P, etc. have the same meanings as in Section 4 (i.e. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, P is the Borel subgroup of upper triangular matrices, etc.).

A.1. — We maintain the notation of the preceding subsection. Our goal now is to consider those aspects of the situation when $\chi_1 = \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}$ needed to complete the proof of part (3) of Proposition 4.3.15. To simplify the notation, we make a twist by $\chi_1^{-1} \circ \det$, and assume that in fact $\chi_1 = \underline{1}$ from now on (so that $\chi_2 = \overline{\varepsilon}$). We also assume that $p \neq 2$. We must prove that the map

$$\mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}) \to \mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}) \tag{A.1.1}$$

induced by applying $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G$ is *not* an injection. Here, the Ext^2 spaces are understood to be computed in the space of locally admissible representations.

In fact, we will prove that a specific line in the source lies in the kernel. To describe this line, we will have to describe some of the Ext spaces under discussion more explicitly. To begin with, note that we have isomorphisms

$$\mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}\otimes\underline{1}) \xrightarrow{\sim} H^1(M,\underline{1}\otimes\underline{1}), \tag{A.1.2}$$

the first being given by twisting, and the second by Proposition 2.2.2, together with the fact that Ext^1_M between admissible smooth representations is the same whether computed in the category $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_M(k)$ or $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_M(k)$.

Now write $M' = M/Z_G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p^\times$. Since $p \neq 2$, this group admits the following description:

$$M' \cong \mathbb{Q}_p^\times \cong \Delta \times \Gamma \times A,$$

where Δ has order $p-1$, $\Gamma = 1 + \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$, and $A = p^{\mathbb{Z}}$ is the cyclic group generated by p. Since Δ has prime-to-p order, it has no cohomology above degree 0; of course $H^0(\Delta,\underline{1})$ is one-dimensional. Simple computations in continuous cohomology show that $H^0(\Gamma,\underline{1})$, $H^1(\Gamma,\underline{1})$, $H^0(A,\underline{1})$, and $H^1(A,\underline{1})$ are all one-dimensional, and that the continuous cohomology of Γ and A in degrees > 1 vanishes. Each of the tensor products $H^0(\Delta,\underline{1}) \otimes_k H^0(\Gamma,\underline{1}) \otimes_k H^0(A,\underline{1})$ and $H^0(\Delta,\underline{1}) \otimes_k H^1(\Gamma,\underline{1}) \otimes_k H^0(A,\underline{1})$ is thus one-dimensional; let α and β respectively denote basis vectors. The Künneth formula then shows that $H^1(M',\underline{1})$ is two-dimensional, spanned by α and β, and that $H^2(M',\underline{1})$ is one-dimensional, spanned by the Yoneda product (which in this context coincides with the cup product) $\alpha \cup \beta$. Another application of the Künneth formula (applied to the evident isomorphism $M \xrightarrow{\sim} Z_G \times M'$) shows that the pull-back maps $H^i(M',\underline{1}) \to H^i(M,\underline{1}\otimes\underline{1})$ are injective, for all i. We may thus regard α and β as elements of $H^1(M,\underline{1}\otimes\underline{1})$, and hence they give rise to corresponding elements α' and β' of $\mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}\otimes\underline{1})$ and α'' and β'' of $\mathrm{Ext}^1_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$, via the isomorphisms (A.1.2).

A.1.3. ***Lemma.*** — *The Yoneda product $\alpha'' \cup \beta'' \in \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$ is non-zero.*

Proof. — By twisting, it is equivalent to show that Yoneda product $\alpha' \cup \beta' \in \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}\otimes\underline{1},\underline{1}\otimes\underline{1})$ is non-zero. Passing from the category $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_M(k)$ to the category $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_M(k)$ induces a corresponding map on Ext^2 spaces, which we may then compose with the map to $H^2(M,\underline{1}\otimes\underline{1})$ given by (2.2.1). Under this composite, $\alpha' \cup \beta'$ maps to $\alpha \cup \beta$, which is non-zero by the Künneth formula for continuous cohomology. □

We will show that the Yoneda product $\alpha'' \cup \beta'' \in \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$, which by the preceding lemma is non-zero, has zero image under (A.1.1). The first step in the argument is to show that it suffices to check the corresponding fact with Ext^2 computed in the category of locally admissible representations replaced by Ext^2 computed in the category of smooth representations. To see this, we first note that applying $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}$ to the extension classes α' and β' gives rise to extension classes X and Y lying in $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$, and the image of $\alpha'\cup\beta'$ under (A.1.1) coincides with $X \cup Y$. The following Lemma then shows that the cup product of X and Y vanishes when computed in $\mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$ for the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(k)$ if and only if it vanishes when computed in $\mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$ for the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$.

A.1.4. *Lemma*. — *Let U, V, and W be admissible smooth G-representations over k. If we are given extensions $0 \to U \to X \to V \to 0$ and $0 \to V \to Y \to W \to 0$, then the resulting 2-extension $0 \to U \to X \to Y \to W \to 0$ given by forming the Yoneda product of X with Y is trivial in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(k)$ if and only if it is trivial in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$.*

Proof. — Let $\mathscr{C}$ denote either of the categories $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(k)$ or $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$. As is well-known, the Yoneda product of X with Y is trivial in the category $\mathscr{C}$ if and only there exists an extension $0 \to X \to Z \to W \to 0$, in the category $\mathscr{C}$, such that the extension $0 \to V \to Z' \to W \to 0$ obtained by pushing forward Z along the surjection $X \to V$ is isomorphic (as an extension of W by V) to Y. However, such an object Z, being a successive extension of admissible representations, is necessarily admissible [**10**, Prop. 2.2.13]. Thus trivializing the Yoneda product of X with Y in $\mathscr{C}$ is equivalent to trivializing it in the category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(k)$, for either choice of $\mathscr{C}$. □

From now on we compute all Ext^2 spaces in the appropriate category of smooth representations (as opposed to the category of locally admissible representations). As already noted, by the preceding lemma, we are reduced to showing that $\alpha''\cup\beta'' \in \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$ has vanishing image in $\mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$. Our strategy for proving this will be to exhibit an explicit element of $\mathrm{Ext}^2_M(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$ which *does* vanish when mapped to $\mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}, \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G}\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon})$, and then to show that this element is equal to a non-zero scalar multiple of $\alpha''\cup\beta''$.

We begin by writing down the diagram of Fig. 1 (p. 452), whose right-hand column is obtained by applying $\mathrm{Hom}_P(-, \chi_1\overline{\varepsilon}\otimes\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1})$ to (4.2.11) (taking $U = \underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}$), and whose horizontal arrows are provided by Lemmas 4.3.3 and 4.3.7. Both squares commute (possibly up to a sign). (Of course, all the Ext spaces in this diagram are computed in the category of smooth representations.) Note that we have labelled by δ the boundary map

$$\delta : \mathrm{Ext}^1_P(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}), \overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}) \to \mathrm{Ext}^2_P(\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}, \overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}).$$

A.1.6. *Lemma*. — *The space $\mathrm{Ext}^1_P(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}), \overline{\varepsilon}\otimes\underline{1})$ is non-zero.*

(A.1.5)
$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1_M(\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1},\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^1_P(\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1},\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}) \\
{\scriptstyle U\mapsto \mathrm{Ind}_P^G U^w}\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_P^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\mathrm{Ind}_P^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^1_P(\mathrm{Ind}_P^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}) \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathrm{Ext}^1_P\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes(\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}),\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}\big) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\
\mathrm{Ext}^2_M(\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1},\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^2_P(\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1},\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}) \\
{\scriptstyle U\mapsto \mathrm{Ind}_P^G U^w}\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Ext}^2_G(\mathrm{Ind}_P^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\mathrm{Ind}_P^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^2_P(\mathrm{Ind}_P^G\underline{1}\otimes\overline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}\otimes\underline{1}),
\end{array}$$

FIGURE 1.

Proof. — A simple descent argument shows that the formation of this space is compatible with extension of scalars, and thus we may enlarge k if necessary so that we can choose smooth characters $\chi_1,\chi_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ such that $\chi_1 \neq \chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}$. Proposition 4.3.15 (2) and its proof then shows that there is an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{Ind}_P^G\chi_1\otimes\chi_2,\mathrm{Ind}_P^G\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi_1\overline{\varepsilon}) \to \mathrm{Hom}_M(\chi_1\otimes\chi_2,\chi_1\otimes\chi_2),$$

which, according to the discussion of Remark 3.7.7, is given by mapping an extension

$$0 \to \mathrm{Ind}_P^G\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi_1\overline{\varepsilon} \to V \to \mathrm{Ind}_P^G\chi_1\otimes\chi_2 \to 0 \tag{A.1.7}$$

to the corresponding boundary map

$$\delta_E : \mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_P^G\chi_1\otimes\chi_2) \to H^1\mathrm{Ord}_P(\mathrm{Ind}_P^G\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi_1\overline{\varepsilon}),$$

obtained by applying $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ to (A.1.7).

As is explained in the proof of Corollary 4.2.10, there is a P-equivariant embedding

$$\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes(\chi_1\otimes\chi_2) \hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G\chi_1\otimes\chi_2 \tag{A.1.8}$$

and a P-equivariant surjection

$$\mathrm{Ind}_P^G\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}\otimes\chi_1\overline{\varepsilon} \to \chi_1\overline{\varepsilon}\otimes\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}. \tag{A.1.9}$$

If we pull E back along the first of these maps, and then push the resulting extension forward along the second, we obtain an extension

$$0 \to \chi_1\overline{\varepsilon}\otimes\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1} \to E' \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes(\chi_1\otimes\chi_2) \to 0. \tag{A.1.10}$$

We may apply $H^\bullet\mathrm{Ord}_P$ to this short exact sequence to obtain a complex of the form (3.3.4). In particular, we obtain a map

$$\mathrm{Ord}_P\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\otimes(\chi_1\otimes\chi_2)\big) \to H^1\mathrm{Ord}_P(\chi_1\overline{\varepsilon}\otimes\chi_2\overline{\varepsilon}^{-1}). \tag{A.1.11}$$

It is shown in the course of the proof of Corollary 4.2.10 that (A.1.8) induces an isomorphism upon applying Ord_P, and that (A.1.9) induces an isomorphism upon applying $H^1\mathrm{Ord}_P$. It follows from this that the map (A.1.11) coincides with the map δ_E (after identifying their respective domains and codomains via these isomorphisms).

Combining the results of the preceding two paragraphs, we find that if E is non-trivial, so that δ_E is non-trivial, then the map (A.1.11) is non-trivial, and hence (A.1.10) is non-split. Twisting this extension by $\chi_1^{-1} \otimes \chi_2^{-1}\overline{\varepsilon}$, we obtain a non-trivial extension of the form required to establish the lemma. □

If $c \in \mathrm{Ext}^1_P\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k) \otimes (\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}), \overline{\varepsilon} \otimes \underline{1}\big)$ is non-zero, then applying first the third horizontal isomorphism in (A.1.5), and then the automorphism w, to $\delta(c)$, we see from a consideration of (A.1.5) (in particular, using the fact that its right-hand column is exact) that $\delta(c)$ gives rise to an element $\gamma \in \mathrm{Ext}^2_M(\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}, \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})$ whose image under Ind_P^G vanishes. We will be done once we prove the following result.

A.1.12. ***Proposition***. — *The element γ is a non-zero scalar multiple of $\alpha'' \cup \beta''$ in* $\mathrm{Ext}^2_M(\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}, \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})$.

Proof. — If we let $d \in \mathrm{Ext}^1_P\big(\overline{\varepsilon} \otimes \underline{1}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k) \otimes (\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})\big)$ be the extension class corresponding to the short exact sequence (4.2.11) (with U taken to be $\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}$), then $\delta(c) = \pm c \cup d$ (we don't concern ourselves with the precise value of the sign), and so to prove the lemma, we have to show that $c_{|M} \cup d_{|M} = (c \cup d)_{|M}$ is a non-zero scalar multiple of $\alpha'' \cup \beta''$. (Here the subscript "$|M$" denotes the restriction of a class from P to M.)

We identify N with $\mathbb{Q}_p$ in the usual fashion, via $\mathbb{Q}_p \ni x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in N$, and we identify $M' = M/Z_G$ both with $\mathbb{Q}_p^\times$ and with a subgroup of M via $\mathbb{Q}_p^\times \ni a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M' \subset M$. With these identifications we obtain isomorphisms $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$, and $M' = \mathbb{Q}_p^\times$ acts via the formula

$$(\langle a \rangle f)(x) = f(a^{-1}x),$$

if $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ and $x \in \mathbb{Q}_p$, where we have written $\langle a \rangle$ to denote a thought of as an element of M' (to avoid any possible confusion with the element a thought of as a scalar).

As already observed above, $M' \times Z_G \xrightarrow{\sim} M$. Since c and d are both trivial when restricted to Z_G, so is their Yoneda product. Thus it suffices to verify that $(c \cup d)_{|M'}$ is a non-zero scalar multiple of $(\alpha'' \cup \beta'')_{|M'}$, and this is what we will do.

Evaluation at $0 \in \mathbb{Q}_p$ gives an M'-equivariant short exact sequence

$$0 \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k) \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k) \to \underline{1} \to 0. \tag{A.1.13}$$

Now $(\overline{\varepsilon} \otimes \underline{1})_{|M'} = \overline{\varepsilon}$, while $(\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})_{|M'} = \underline{1}$. Thus $c_{|M'} \in \mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\overline{\varepsilon}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)\big)$. Since $p \neq 2$, the character $\overline{\varepsilon}$ is non-trivial, and thus the long exact sequences of Exts arising from the short exact sequence (A.1.13) gives rise to an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, \underline{1}), \overline{\varepsilon}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, \underline{1}), \overline{\varepsilon}\big).$$

We let $c' \in \mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, \underline{1}), \overline{\varepsilon}\big)$ denote the element which corresponds to $c_{|M'}$ via this isomorphism. Similarly, there is an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\overline{\varepsilon}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\overline{\varepsilon}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k)\big),$$

and we let $d' \in \mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\overline{\varepsilon}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k)\big)$ denote the element which corresponds to $d_{|M'}$ via this isomorphism. There are equalities $c' \cup d' = c_{|M'} \cup d_{|M'} = (c \cup d)_{|M'}$.

As above, write $A = p^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}_p^\times$, so that $\mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Z}_p^\times \times A$. There is an isomorphism of M'-representations $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k) \xrightarrow{\sim} c\text{–}\mathrm{Ind}_A^{M'} \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k)$, and hence an isomorphism

$$\mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k), \overline{\varepsilon}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p^\times}\big(\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k), \overline{\varepsilon}\big).$$

We let $c'' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p^\times}\big(\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k), \overline{\varepsilon}\big)$ denote the element which corresponds to c' via this isomorphism. If c'' is given by the extension

$$0 \to \overline{\varepsilon} \to E \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k) \to 0,$$

then we in fact regard c'' as an extension of M'-representations, by having A act trivially on all the terms of this extension. The extension class c' is then obtained by first tensoring E with $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(A, k)$ (regarded as an M'-representation by having $\mathbb{Z}_p^\times$ act trivially) to obtain an extension

$$0 \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(A, k) \otimes_k \overline{\varepsilon} \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(A, k) \otimes_k E \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k) \to 0,$$

and then pushing forward via the map $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(A) \otimes_k \overline{\varepsilon} \to \overline{\varepsilon}$, obtained by tensoring the M'-equivariant map $I : \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(A, k) \to \underline{1}$ (given by "integrating with respect to Haar measure" on the discrete group A) with the character $\overline{\varepsilon}$.

Now tensoring I with the identity automorphism of $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k)$ (the latter being regarded as an M'-representation by having A act trivially) similarly induces an M'-equivariant map

$$J : \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^\times, k) \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k),$$

and we write $d'' := J_* d$ (the pushforward of d with respect to J), an element of $\mathrm{Ext}^1_{M'}\big(\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k), \overline{\varepsilon}\big)$. It follows from the description of the relationship between c' and c'' in the preceding paragraph that $c' \cup d' = c'' \cup d''$.

The inclusion of the scalar multiples of the character $\overline{\varepsilon}_{|\mathbb{Z}_p^\times}$ in the space of all locally constant functions gives an embedding $\imath : \overline{\varepsilon} \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\Gamma, k)$, and Lemma A.1.14 below shows that $d'' = \imath_* d'''$ for some class $d''' \in \mathrm{Ext}^1_{M'}(\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$ which is non-trivial when restricted to A. We then compute that

$$c'' \cup d'' = c'' \cup \imath_* d''' = (\imath^* c'') \cup d'''.$$

Lemma A.1.20 below shows that $\imath^* c'' \in \mathrm{Ext}^1_{M'}(\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$ is non-trivial when restricted to $\mathbb{Z}_p^\times$ (or equivalently, when restricted to Γ). It follows that indeed $(\imath^* c'') \cup d'''$ is a non-zero multiple of $\alpha''_{|M'} \cup \beta''_{|M'}$, and the proposition is proved. □

A.1.14. ***Lemma.*** — *If $\imath : \overline{\varepsilon} \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k)$ denotes the inclusion of the scalar multiples of the character $\overline{\varepsilon}$ into the space of locally constant functions on $\mathbb{Z}_p^\times$, then there exists a class $d''' \in \mathrm{Ext}^1_{M''}(\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon})$, whose restriction to A is non-trivial, and such that $d'' = \imath_* d'''$.*

Proof. — To see this, we begin by recalling the construction of d'', beginning with the class d, which corresponds to the extension

$$0 \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k) \to \mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon} \to \overline{\varepsilon} \otimes \underline{1} \to 0. \tag{A.1.15}$$

We extend the identification of N with $\mathbb{Q}_p$ to an identification of $\overline{P}\backslash G$ with $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \cup \{\infty\}$. Any element f of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}$ has a support in G, which is invariant under left translation by $\overline{P}$, and so projects to a compact open subset of $\overline{P}\backslash G$, which as in [**10**, §4] we again refer to as the support of f. If we write

$$\Omega = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \setminus \{0\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \overline{P} \setminus G,$$

and let $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})(\Omega)$ denote the subspace of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}$ consisting of elements whose support is contained in Ω, then the class d' corresponds to (the restriction to M' of) the extension of M-representations

$$0 \to \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^{\times}, k) \to (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})(\Omega) \to \overline{\varepsilon} \otimes \underline{1} \to 0 \tag{A.1.16}$$

induced by (A.1.15). The class $d'' := I_* d'$ then corresponds to the extension

$$0 \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^{\times}, k) \to F \to \overline{\varepsilon} \otimes \underline{1} \to 0 \tag{A.1.17}$$

obtained by pushing (A.1.16) forward via the map $J : \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^{\times}, k) \to \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^{\times}, k)$ given by "integrating along the fibres" (the fibres of the projection $\mathbb{Q}_p^{\times} \xrightarrow{\sim} A \times \mathbb{Z}_p^{\times} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$ being cosets of A, and hence discrete).

Let

$$U := (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})(\Omega)^{\mathbb{Z}_p^{\times} = \overline{\varepsilon}} \subset (\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})(\Omega)$$

denote the subspace consisting of elements which transform under $\mathbb{Z}_p^{\times}$ via the character $\overline{\varepsilon}$. This is clearly an M-invariant subspace of $(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})(\Omega)$. Certainly, the image of $U \bigcap \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^{\times}, k)$ under J is one-dimensional. Thus there are two possibilities for the image V of U under the projection

$$(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})(\Omega) \to F, \tag{A.1.18}$$

namely: either V is one-dimensional (or equivalently, U is contained in $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^{\times}, k)$), or else V is two-dimensional, and thus gives a subextension

$$0 \to \overline{\varepsilon} \otimes \underline{1} \to V \to \overline{\varepsilon} \otimes \underline{1} \to 0 \tag{A.1.19}$$

of (A.1.17).

Let f denote the characteristic function of $\mathbb{Z}_p$, thought of as an element of $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k) \otimes (\underline{1} \otimes \overline{\varepsilon})$. Then f is an element of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^{G} \underline{1} \otimes \overline{\varepsilon}$, and one easily verifies that $wf \in U$ (where $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$), and that wf does not lie in $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p^{\times}, k)$, and hence has a non-trivial projection onto $\overline{\varepsilon} \otimes \underline{1}$. Thus in fact V is two-dimensional, and gives rise to the subextension (A.1.19) of (A.1.17). If we let d''' denote the class of this subextension, then indeed $d'' = \imath_* d'''$.

It remains to be shown that d''' is non-trivial when restricted to A. To see this, one explicitly computes $J\big(\langle p \rangle (wf) - wf\big)$, and checks that the result is non-zero. We leave this straightforward computation to the sufficiently interested reader. □

A.1.20. ***Lemma***. — *If $\imath : \bar{\varepsilon} \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k)$ is as in the statement of Lemma* A.1.14, *and if $e \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p^\times}(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Z}_p^\times, k), \bar{\varepsilon})$ is a non-trivial class, then the same is true of $\imath^* e$.*

Proof. — Recall that $\mathbb{Z}_p^\times = \Delta \times \Gamma$, where Δ has order prime to p. We may thus verify the assertion of the lemma after passing to $\bar{\varepsilon}$-eigenspaces for the action of Δ in all the representations and extensions considered, and so reduce to checking the analogous statement for $\jmath^* e$, where $e \in \mathrm{Ext}^1_\Gamma(\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\Gamma, k), \underline{1})$ is non-trivial, and $\jmath : \underline{1} \hookrightarrow \mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(\Gamma, k)$. We do this by passing to k-duals, under which admissible smooth Γ-representations become finitely generated modules for the completed group ring $k[[\Gamma]]$.

We must then verify that if $e' \in \mathrm{Ext}^1_{k[[\Gamma]]}(\underline{1}, k[[\Gamma]])$ is non-trivial, and if $\pi : k[[\Gamma]] \to \underline{1}$ is the canonical surjection given by taking the quotient by the augmentation ideal, then the pushforward $\pi_* e'$ is again non-trivial. This is easily verified by the reader, using the well-known isomorphism $k[[\Gamma]] \xrightarrow{\sim} k[[t]]$ (whose target is a power series ring in one variable). □

A.2. — Our goal in this subsection is to prove that the map (4.3.25) is injective. We begin by recalling that $P = MN$ acts on $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)$ via the formula

$$(mnf)(n') = f(m^{-1} n' m n),$$

for $m \in M$, $n, n' \in N$, and $f \in \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)$. The same formula defines an action of P on the space $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(N, k)$ of all smooth (i.e. locally constant) k-valued functions on N. The P-action on this space is not smooth, and we denote by $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)$ the subspace of P-smooth vectors in $\mathscr{C}^{\mathrm{sm}}(N, k)$. (The subscript u is for *uniform*; a function is P-smooth if and only if it is N-smooth, and so the elements of $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)$ are precisely the uniformly locally constant functions on N.) Evaluation at the identity of N gives a T-equivariant map

$$\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k) \to \underline{1},$$

which by Frobenius reciprocity induces an isomorphism

$$\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_M^P \underline{1}. \tag{A.2.1}$$

By construction the embedding $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k) \subset \mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)$ is P-equivariant. Thus if $\psi : \mathbb{Q}_p^\times \to k$ is a smooth character, then we obtain a long exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)\big) &\to \mathrm{Hom}_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)\big) \\ \to \mathrm{Hom}_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)\big) &\to \mathrm{Ext}^1_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)\big) \\ &\to \mathrm{Ext}^1_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)\big). \end{aligned}$$

(Here and below, all Ext^1 spaces are computed in the category of smooth representations.) Clearly $\mathrm{Hom}_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N, k)\big)$ must vanish, while Frobenius reciprocity together with the isomorphism (A.2.1) yields isomorphisms

$$\mathrm{Hom}_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_M\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \underline{1}\big)$$

and

$$\mathrm{Ext}^1_P\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N, k)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_M\big(\psi \otimes \psi^{-1}, \underline{1}\big).$$

(The latter isomorphism is proved in a manner identical to Lemma 4.3.3.) Finally, Lemma 4.3.4 yields an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_P\big(\psi\otimes\psi^{-1},\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_M\big(\psi\otimes\psi^{-1},\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big).$$

Thus we may rewrite the above long-exact sequence as

$$\begin{aligned}(\text{A.2.2})\quad 0\to\mathrm{Hom}_M\big(\psi\otimes\psi^{-1},\underline{1}\big)\to\mathrm{Hom}_M\big(\psi\otimes\psi^{-1},\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big)\\ \to\mathrm{Ext}^1_P\big(\psi\otimes\psi^{-1},\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big)\to\mathrm{Ext}^1_M\big(\psi\otimes\psi^{-1},\underline{1}\big).\end{aligned}$$

A.2.3. *Proposition*. — $\mathrm{Hom}_M\big(\psi\otimes\psi^{-1},\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big)$ *is one-dimensional.*

Proof. — We identify N with $\mathbb{Q}_p$, and so identify $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)$ with $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$. We similarly identify $\mathbb{Q}_p^\times$ with a subgroup of M, and observe that since both $\psi\otimes\psi^{-1}$ and $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$ are acted on trivially by Z, restricting from M-representations to $\mathbb{Q}_p^\times$-representations induces an isomorphism

$$\mathrm{Hom}_M\big(\psi\otimes\psi^{-1},\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times}\big(\psi,\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(N,k)/\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big).$$

If $a\in\mathbb{Q}_p^\times$ and $f\in\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$ then we will write $\langle a\rangle f$ to denote the action of a on f. (This should prevent any possible confusion with the element a thought of as a scalar.) Explicitly, the action of $\mathbb{Q}_p^\times$ on $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$ is given by the formula

$$(\langle a\rangle f)(x):=f(a^{-1}x),$$

for $a\in\mathbb{Q}_p^\times$, $x\in\mathbb{Q}_p$, and $f\in\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$.

If $f\in\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$, then corresponding to the decomposition

$$\mathbb{Q}_p=\mathbb{Z}_p\sqcup\coprod_{n=1}^{\infty}p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times,$$

we may write $f=f_0+\sum_{i=1}^{\infty}\langle p^{-i}\rangle f_i$, where f_i is a smooth function supported on $\mathbb{Z}_p^\times$, so that $\langle p^{-i}\rangle f_i$ is supported on $p^{-i}\mathbb{Z}_p^\times$. Since f is uniformly smooth, there is an $r>0$ such that every f_i is constant on the cosets of $1+p^r\mathbb{Z}_p$ in $\mathbb{Z}_p^\times$.

Suppose that f mod $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p,k)$ transforms via the character ψ with respect to the action of $\mathbb{Q}_p^\times$. Let $\{a_j\}$ denote a set of coset representatives for $1+p^r\mathbb{Z}_p$ in $\mathbb{Z}_p^\times$. By assumption $\langle a_j\rangle f-\psi(a_j)f$ is compactly supported. We compute that

$$\langle a_j\rangle f-\psi(a_j)f=\langle a_j\rangle f_0-\psi(a_j)f_0+\sum_{i=1}^{\infty}\langle p^{-i}\rangle\big(\langle a_j\rangle f_i-\psi(a_j)f_i\big).$$

Thus for each j, if i is sufficiently large, we find that $\langle a_j\rangle f_i=\psi(a_j)f_i$. Since the number of a_j is finite, we may choose i_0 so that if $i>i_0$ then $\langle a_j\rangle f_i=\psi(a_j)f_i$ for all j. Since f_i is constant on $1+p^r\mathbb{Z}_p$ cosets, we see that then in fact $\langle a\rangle f_i=\psi(a)f_i$ for all $a\in\mathbb{Z}_p^\times$, and thus that $f_i=c_i\psi^{-1}_{|\mathbb{Z}_p^\times}$, for some scalar $c_i\in k$, if $i>i_0$. Thus we may write $f=\sum_{i=0}^{i_0}\langle p^{-i}\rangle f_i+\sum_{i>i_0}c_i\langle p^{-i}\rangle\psi^{-1}_{|\mathbb{Z}_p^\times}$.

By assumption we also have that $\langle p\rangle f - \psi(p)f$ is compactly supported. Since

$$\begin{aligned}\langle p\rangle f - \psi(p)f &= \langle p\rangle f_0 + \sum_{i=0}^{i_0-1}(\langle p^{-i}\rangle f_{i+1} - \psi(p)\langle p^{-i}\rangle f_i) - \psi(p)\langle p^{-i_0}\rangle f_{i_0} + c_{i_0+1}\langle p^{-i_0}\rangle \psi_{|\mathbb{Z}_p^\times} \\ &\qquad + \sum_{i>i_0}(c_{i+1} - \psi(p)c_i)\langle p^{-i}\rangle\psi_{|\mathbb{Z}_p^\times},\end{aligned}$$

we find that $c_{i+1} - \psi(p)c_i = 0$ for sufficiently large i, and hence, enlarging i_0 if necessary, we may write

$$f = \sum_{i=0}^{i_0}\langle p^{-i}\rangle f_i + c\sum_{i>i_0}\psi(p)^i\langle p^{-i}\rangle\psi^{-1}_{|\mathbb{Z}_p^\times} = \sum_{i=0}^{i_0}\langle p^{-i}\rangle f_i + c\sum_{i>i_0}\psi^{-1}_{|p^{-i}\mathbb{Z}_p^\times},$$

for some $c \in k$. Thus we see that, away from a compact subset $\mathbb{Q}_p$, the function f coincides with a scalar multiple of ψ^{-1}. On the other hand, any function f with this property certainly lies in $\mathscr{C}_u^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k)$, and $f \mod \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k)$ transforms via ψ with respect to the action of $\mathbb{Q}_p^\times$. The space of $\mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(\mathbb{Q}_p, k)$-cosets of such f is clearly one-dimensional, and so the proposition follows. □

A.2.4. ***Corollary***. — *The map* (4.3.25) *is injective.*

Proof. — Take ψ to be trivial. The map (4.3.25) is then given by the final arrow in the exact sequence (A.2.2). Clearly $\mathrm{Hom}_M(\underline{1}\otimes\underline{1}, \underline{1}\otimes\underline{1})$ is one-dimensional. It thus follows from Proposition A.2.3 that the second arrow of (A.2.2) is an isomorphism. Thus the final arrow is an embedding, as claimed. □

A.2.5. ***Remark***. — If ψ is non-trivial, then it follows from a Proposition A.2.3 and a consideration of (A.2.2) that $\mathrm{Ext}^1_P\big(\psi\otimes\psi^{-1}, \mathscr{C}_c^{\mathrm{sm}}(N,k)\big)$ is one-dimensional. A non-trivial such extension may obtained from the restriction to P of $\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G \underline{1}\otimes\psi$ by applying a twist by $\underline{1}\otimes\psi^{-1}$.

References

[1] L. Barthel & R. Livné – "Irreducible modular representations of GL_2 of a local field", *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[2] L. Berger – "Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2", *Astérisque* **330** (2010), p. 263–279.

[3] C. Breuil – "Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I", *Compositio Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[4] C. Breuil & V. Paškūnas – "Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2", to appear in *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

[5] W. Casselman – "Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups", `http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/research.html`, 1993.

[6] P. Colmez – "Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules", *Astérisque* **330** (2010), p. 281–509.

[7] G. VAN DIJK – "Quasi-admissible representations of p-adic groups", in *Lie groups and their representations* (I. M. Gelfand, ed.), Halsted, 1975, p. 65–75.

[8] M. EMERTON – "Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 775–839.

[9] ———, "Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$", in preparation.

[10] ———, "Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties", this volume.

[11] M. EMERTON & V. PAŠKŪNAS – "On the effaceability of certain δ-functors", this volume.

[12] G. HOCHSCHILD & G. D. MOSTOW – "Cohomology of Lie groups", *Illinois J. Math.* **6** (1962), p. 367–401.

[13] M. LAZARD – "Groupes analytiques p-adiques", *Publ. Math. I.H.É.S.* **26** (1965), p. 389–603.

[14] V. PAŠKŪNAS – "On the restriction of representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ to a Borel subgroup", *Compos. Math.* **143** (2007), p. 1533–1544.

[15] ———, "Extensions for supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$", preprint arXiv:0710.1053.

[16] D. WIGNER – "Algebraic cohomology of topological groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* **178** (1973), p. 83–93.

M. EMERTON, Mathematics Department, Northwestern University, 2033 Sheridan Rd., Evanston, IL 60208 • *E-mail :* emerton@math.northwestern.edu

Astérisque
331, 2010, p. 461–469

ON THE EFFACEABILITY OF CERTAIN δ-FUNCTORS

by

Matthew Emerton & Vytautas Paškūnas

Abstract. — We prove a conjecture of the first author for $\mathrm{GL}_2(F)$, where F is a finite extension of $\mathbb{Q}_p$.

***Résumé* (Sur l'effaçabilité de certains δ-foncteurs).** — On démontre une conjecture du premier auteur pour $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

1. Introduction

Let F be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ and let $\mathfrak{o}$ be its ring of integers. Let $G := \mathrm{GL}_2(F)$, let $K := \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$, and let Z be the centre of G. Let A be a finite local Artinian $\mathbb{Z}_p$-algebra with residue field k (necessarily finite, of characteristic p). Recall that a representation V of G on an A-module is said to be *smooth* if for all $v \in V$ the stabilizer of v is an open subgroup of G. Let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ denote the category of smooth G-representations. Further recall that a smooth G-representation V is *admissible* if for every open subgroup J of G the space V^J of J-invariants is a finite A-module. Let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ consisting of admissible representations. The categories $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ and $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ are abelian. In practice, one is interested in admissible representations, but $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$ does not have enough injectives. The category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ has enough injectives, but it is too big. To remedy this the first author, in **[2]**, **[3]**, has introduced an intermediate category of locally admissible representations $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$. We recall the definition: If V is a smooth A-representation of G, a vector $v \in V$ is called *locally admissible* if the $A[G]$-submodule of V generated by v is admissible; a smooth representation V of G over A is then called *locally admissible* if every $v \in V$ is locally admissible. We let $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ denote the full subcategory of

2010 Mathematics Subject Classification. — 22E50.
Key words and phrases. — Ordinary parts, representations of p-adic reductive groups, δ-functors.

The first author was supported in part by the NSF grant DMS-0701315.

© Astérisque 331, SMF 2010

$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ consisting of locally admissible representations. The category $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$ is abelian and has enough injectives [**2**, Prop. 2.2.18], [**3**, Prop. 2.1.1].

We introduce some variants of the preceding categories:

If $\zeta : Z \to A^\times$ is a smooth character, then we denote by $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{adm}}(A)$, $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{l.adm}}(A)$, and $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{sm}}(A)$ the full subcategories of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)$, $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$, and $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ respectively, consisting of representations admitting ζ as a central character. We also let $\mathrm{Mod}_{K,\zeta}^{\mathrm{sm}}(A)$ denote the full subcategory of $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$ consisting of K-representations admitting $\zeta_{|Z\cap K}$ as a central character. The categories $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{adm}}(A)$, $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{l.adm}}(A)$, $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{sm}}(A)$, and $\mathrm{Mod}_{K,\zeta}^{\mathrm{sm}}(A)$ are abelian, and the last three have enough injectives. (See Lemma 2.4 below.)

In this note we show that the restriction to K of an injective object in $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{l.adm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)$) is an injective object in $\mathrm{Mod}_{K,\zeta}^{\mathrm{sm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$). This implies that certain δ-functors defined in [**3**] are effaceable, and remain effaceable when restricted to $\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{l.adm}}(A)$. In particular, it proves Conjecture 3.7.2 of [**3**] for $\mathrm{GL}_2(F)$.

Acknowledgments. The authors would like to thank Florian Herzig for useful comments, which have improved the exposition. The second author's work on this note was undertaken while he was visiting Université Paris-Sud, supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft, and he would like to thank these institutions.

2. Injectives

We establish some simple results about injective objects in various contexts. In this section we change our notational conventions from those of the introduction, and let G denote an arbitrary p-adic analytic group. We let $\mathfrak{m}$ denote the maximal ideal of the ring of coefficients A.

2.1. Lemma. — *If G is compact, if V is an injective object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(k)$, and if W is an injective envelope of V in $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, then the inclusion $V \hookrightarrow W$ induces an isomorphism $V \xrightarrow{\sim} W[\mathfrak{m}]$.*

Proof. — Certainly the inclusion $V \hookrightarrow W$ factors through an inclusion $V \hookrightarrow W[\mathfrak{m}]$. Since the source is injective, this inclusion splits. If C denotes a complement to the inclusion, then $V \cap C = 0$, and thus $C = 0$ (as W is an essential extension of V). This proves the lemma. □

2.2. Lemma. — *Let H be a finite index open subgroup of G.*

(i) *An object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$ is admissible (resp. locally admissible) as a G-representation if and only if it is so as an H-representation.*

(ii) *If V is an object of $\mathrm{Mod}_H^{\mathrm{sm}}(A)$, so that $\mathrm{Ind}_H^G V$ ($\xrightarrow{\sim} A[G]\otimes_{A[H]} V$) is an object of $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)$, then $\mathrm{Ind}_H^G V$ is admissible (resp. locally admissible) as a G-representation if and only if V is admissible (resp. locally admissible) as an H-representation.*

Proof. — The admissibility claim of part (i) is clear, since H contains a cofinal collection of open subgroups of G. Since H has finite index in G, the group ring $A[G]$ is finitely generated as an $A[H]$-module, and thus an $A[G]$-module is finitely generated if and only if it is finitely generated as an $A[H]$-module. The local admissibility claim of part (i) follows from this, together with the admissibility claim, since an $A[G]$-module (resp. $A[H]$-module) is locally admissible if and only if every finitely generated submodule is admissible.

To prove the if direction of claim (ii), suppose first that V is an admissible H-representation. If we write G as a union of finitely many left H-cosets, say $G=\bigcup_{i=1}^n g_i H$, if H' is an open subgroup of H, and if we write $H'':=H'\cap\bigcap_{i=1}^n g_i H g_i^{-1}$, then

$$(\mathrm{Ind}_H^G V)^{H'} \subset (\mathrm{Ind}_H^G V)^{H''} \xrightarrow{\sim} (A[G]\otimes_{A[H]} V)^{H''} \xrightarrow{\sim} \oplus_{i=1}^n (g_i V)^{H''} = \oplus_{i=1}^n g_i V^{g_i^{-1}H''g_i}.$$

Since $g_i^{-1}H''g_i$ is an open subgroup of H, each of the summands appearing on the right-hand side is a finite A-module, and thus so is their direct sum. Thus $\mathrm{Ind}_H^G V$ is admissible as claimed. If we suppose that V instead is locally admissible, or equivalently, is the inductive limit of its admissible subrepresentations, we see that the same is true of $\mathrm{Ind}_H^G V$, since Ind_H^G commutes with the formation of induction limits (being naturally isomorphic to $A[G]\otimes_{A[H]} -$).

To prove the other direction of (ii), note first that the inclusion $A[H]\subset A[G]$ gives rise to an H-equivariant embedding $V\hookrightarrow A[G]\otimes_{A[H]} V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_H^G V$. Thus if $\mathrm{Ind}_H^G V$ is (locally) admissible as a G-representation, and hence also (locally) admissible as an H-representation, by part (i), the same is true of its H-subrepresentation V. □

2.3. Definition. — If Z denotes the centre of G, if $\zeta : Z\to A^\times$ is a smooth character and V is a representation of G over A, then we let

$$V^{Z=\zeta} := \{v\in V \mid z\cdot v = \zeta(z)v \text{ for all } z\in Z\}.$$

Since the subrepresentation of a smooth admissible (resp. smooth locally admissible, resp. smooth) representation is again smooth admissible (resp. smooth locally admissible, resp. smooth), we see, in the context of the preceding definition, that the construction $V\mapsto V^{Z=\zeta}$ induces a functor $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{adm}}(A)\to\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{adm}}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(A)\to\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{l.adm}}(A)$, resp. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(A)\to\mathrm{Mod}_{G,\zeta}^{\mathrm{sm}}(A)$) that is right adjoint to the forgetful functor. In particular, the functor $V\mapsto V^{Z=\zeta}$ preserves injectives.

2.4. Lemma. — *If $\zeta : Z \to A^\times$ is a smooth character, then each of the categories $\mathrm{Mod}^{\mathrm{adm}}_{G,\zeta}(A)$, $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$, and $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\zeta}(A)$ are abelian, and the last two have enough injectives.*

Proof. — The abelianess claims are evident. To establish the claim regarding injectives, let V be an object of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\zeta}(A)$) and let $V \hookrightarrow W$ be an $A[G]$-linear embedding of V into an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G}(A)$). This embedding then factors through an embedding $V \hookrightarrow W^{Z=\zeta}$, and the latter object is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\zeta}(A)$), as was noted above. □

2.5. Lemma. — *Let G be a compact p-adic analytic group, let H be a closed subgroup containing the centre of G and let $\zeta : Z \to A^\times$ be a smooth character. If V is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\zeta}(A)$, then it is also injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{H,\zeta}(A)$.*

Proof. — Let $\iota : V \hookrightarrow J$ be an injective envelope of V in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G}(A)$. Since V is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{G,\zeta}(A)$ and ι is essential we deduce that $\iota(V) = J^{Z=\zeta}$. Proposition 2.1.11 in **[3]** implies that J is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{H}(A)$ and thus $J^{Z=\zeta}$ is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{H,\zeta}(A)$. □

3. Main result

We introduce notation for some subgroups of $G := \mathrm{GL}_2(F)$ that we will need to consider, namely: we write $G^+ := \{g \in G : \mathrm{val}_F(\det g) \equiv 0 \pmod 2\}$ and $G^0 := \{g \in G : \mathrm{val}_F(\det g) = 0\}$, write $I := \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \varpi\mathfrak{o} & \mathfrak{o}^\times \end{smallmatrix}\right)$ (an Iwahori subgroup of K) and let I_1 denote the maximal pro-p subgroup of I, let $N_G(I)$ denote the normalizer in G of I, set $\Pi := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{smallmatrix}\right) \in N_G(I)$, and write $N_0 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathfrak{o} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

3.1. Lemma. — *If $\iota : V \hookrightarrow J$ is an injective envelope of V in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{I}(A)$, then any isomorphism $\psi : V \xrightarrow{\cong} V^\Pi$ extends to an isomorphism $J \cong J^\Pi$.*

Proof. — Since $\iota^\Pi : V^\Pi \hookrightarrow J^\Pi$ is an injective envelope of V^Π in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{I}(A)$, the assertion follows from the fact that injective envelopes are unique up to isomorphism. □

3.2. Lemma. — *For an injective admissible object J in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{I}(A)$ the following are equivalent:*

(i) $J \cong J^\Pi$;
(ii) $J[\mathfrak{m}]^{I_1} \cong (J[\mathfrak{m}]^{I_1})^\Pi$;
(iii) $\dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi, J[\mathfrak{m}]^{I_1}) = \dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi^\Pi, J[\mathfrak{m}]^{I_1})$, $\forall \chi \in \mathrm{Irr}_I(k)$.

Proof. — Since $J[\mathfrak{m}]^{I_1} \hookrightarrow J$ is essential the equivalence of (i) and (ii) follows from Lemma 3.1. Since J is admissible $J[\mathfrak{m}]^{I_1}$ is a finite dimensional k-vector space. Since the order of I/I_1 is prime to p we may write $J[\mathfrak{m}]^{I_1} \cong \oplus_{\chi \in \mathrm{Irr}_I(k)} \chi^{\oplus m_\chi}$ and thus $J[\mathfrak{m}]^{I_1} \cong (J[\mathfrak{m}]^{I_1})^\Pi$ if and only if $m_\chi = m_{\chi^\Pi}$. Hence, (ii) is equivalent to (iii). □

3.3. Lemma. — *If J is an admissible injective object in $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$, then*

$$\dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi, J[\mathfrak{m}]^{I_1}) = \dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi^\Pi, J[\mathfrak{m}]^{I_1}), \quad \forall \chi \in \mathrm{Irr}_I(k).$$

Proof. — Since $J[\mathfrak{m}]$ is injective in $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(k)$ we may assume that $A = k$ so that $J[\mathfrak{m}] = J$. Further, it is enough to prove the statement for $J = \mathrm{Inj}\,\sigma$ an injective envelope of an irreducible K-representation σ, since any admissible injective object of $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$ is isomorphic to a finite direct sum of such representations. If $k = \overline{\mathbb{F}}_p$ then the assertion for $J = \mathrm{Inj}\,\sigma$ follows from [**4**, Lem. 6.4.1, 4.2.19, 4.2.20], see also the proof of [**1**, Lem. 9.6]. (It is enough to assume that k contains the residue field of F, in which case every irreducible k-representation of K or I is absolutely irreducible.) The result for general k follows by Galois descent. □

3.4. Theorem. — *If V is an object in $\mathrm{Mod}_{G^0}^{\mathrm{adm}}(A)$ such that $V \cong V^\Pi$, then there exists a G^0-equivariant injection $V \hookrightarrow \Omega$ in $\mathrm{Mod}_{G^0}^{\mathrm{adm}}(A)$ such that $V|_K \hookrightarrow \Omega|_K$ is an injective envelope of $V|_K$ in $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$.*

Proof. — The proof is a variation on constructions of [**1**] and [**5**]. It relies on the fact that G^0 is an amalgam of K and K^Π along $I = K \cap K^\Pi$. Let $\iota_0 : V|_K \hookrightarrow J_0$ be an injective envelope of V in $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$ and let $\iota_1 : V|_{K^\Pi} \hookrightarrow J_1$ be an injective envelope of V in $\mathrm{Mod}_{K^\Pi}^{\mathrm{sm}}(A)$. We claim that there exists an I-equivariant isomorphism $\varphi : J_0 \xrightarrow{\cong} J_1$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xhookrightarrow{\iota_0} & J_0 \\ \| & & \cong \downarrow \varphi \\ V & \xhookrightarrow{\iota_1} & J_1. \end{array}$$

commutes. Granting the claim we may using φ transport the action of K^Π on J_0 such that the two actions of I on J_0 via embeddings $I \hookrightarrow K$, $I \hookrightarrow K^\Pi$ coincide. Since G^0 is an amalgam of K and K^Π along $I = K \cap K^\Pi$ we obtain an action of G^0 on J_0 and since the diagram is commutative $\iota_0 : V \hookrightarrow J_0$ is G^0-equivariant.

To prove the claim we closely follow the proof of Theorem 9.8 [**1**]. Since I is an open subgroup of K, $J_0|_I$ is an injective object in $\mathrm{Mod}_I^{\mathrm{sm}}(A)$ and thus there exists an idempotent $e \in \mathrm{End}_{A[I]}(J_0)$ such that $e \circ \iota_0 = \iota_0$ and $\iota_0 : V \hookrightarrow eJ_0$ is an injective envelope of V in $\mathrm{Mod}_I^{\mathrm{sm}}(A)$. By Lemma 3.1 there exists an isomorphism $\beta : eJ_0 \xrightarrow{\cong} (eJ_0)^\Pi$ extending the given isomorphism $\alpha : V \xrightarrow{\cong} V^\Pi$. Lemma 3.2 implies that

$$\dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi, eJ_0[\mathfrak{m}]^{I_1}) = \dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi^\Pi, eJ_0[\mathfrak{m}]^{I_1}), \quad \forall \chi \in \mathrm{Irr}_I(k). \tag{3.5}$$

Since the order of I/I_1 is prime to p, Lemma 3.3 combined with (3.5) implies

$$\dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi, (1-e)J_0[\mathfrak{m}]^{I_1}) = \dim_k \mathrm{Hom}_I(\chi^\Pi, (1-e)J_0[\mathfrak{m}]^{I_1}), \quad \forall \chi \in \mathrm{Irr}_I(k). \tag{3.6}$$

Thus Lemma 3.2 implies that there exists an I-equivariant isomorphism $\gamma : (1-e)J_0 \xrightarrow{\cong} ((1-e)J_0)^\Pi$. Letting $\delta = \beta \oplus \gamma : J_0 \xrightarrow{\cong} J_0^\Pi$, we obtain a commutative diagram of $A[I]$-modules:

$$\begin{array}{ccc} V & \xhookrightarrow{\iota_0} & J_0 \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\delta} \\ V^\Pi & \xhookrightarrow{\iota_0^\Pi} & J_0^\Pi. \end{array}$$

Since $\iota_0^\Pi : V^\Pi \hookrightarrow J_0^\Pi$ is an injective envelope of V^Π in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{K^\Pi}(A)$, and injective envelopes are unique up to isomorphism, there exists a commutative diagram of $A[K^\Pi]$-modules:

$$\begin{array}{ccc} V^\Pi & \xhookrightarrow{\iota_0^\Pi} & J_0^\Pi \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\alpha^{-1}} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ V & \xhookrightarrow{\iota_1} & J_1. \end{array}$$

Letting $\varphi = \psi \circ \delta$ proves the claim. □

3.7. Remark. — The proof of Theorem 3.4 works in any reasonable subcategory of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0}(A)$. For example if we fix a smooth character $\zeta : Z \to A^\times$ and rework the proof of Theorem 3.4 by considering only objects with central character ζ we obtain the same statement with $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0}(A)$ replaced by $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0,\zeta}(A)$ and $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_K(A)$ replaced by $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{K,\zeta}(A)$.

3.8. Corollary. — *If V is an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0}(A)$, then V is also an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_K(A)$.*

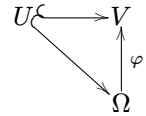
Proof. — It is enough to show that V is a direct summand of an object which is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_K(A)$. By replacing V with $V \oplus V^\Pi$ we may assume that there exists $\psi \in \mathrm{End}_A(V)$ such that $\psi^2 = 1$ and $\psi \circ g = g^\Pi \circ \psi$ for all $g \in G^0$.

Let $\mathscr{A}$ be the set of admissible subrepresentations of V. The set $\mathscr{A}$ is naturally ordered by inclusion. Moreover, it is filtered, since if $U_1, U_2 \in \mathscr{A}$ then $U_1 + U_2$ is a quotient of an admissible representation $U_1 \oplus U_2$, and hence is admissible, see [**2**, Prop. 2.2.13]. Hence, we have an injection

$$\varinjlim_{U \in \mathscr{A}} U \hookrightarrow V.$$

Since V is locally admissible every $v \in V$ is contained in some admissible subrepresentation U, hence the map is surjective. Let $\mathscr{I}$ be a subset of $\mathscr{A}$ consisting of those U such that $U|_K$ is an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_K(A)$. We claim that $\mathscr{I}$ is cofinal in $\mathscr{A}$.

To see this, choose $U \in \mathscr{A}$. After replacing U by $U + \psi(U)$ we may assume that $U = \psi(U)$ and, in particular, that ψ induces an isomorphism $U \cong U^{\Pi}$. Let $U \hookrightarrow \Omega$ be as in Theorem 3.4. Since V is injective and Ω is admissible there exists $\varphi : \Omega \to V$ making the following diagram of G^0-representations commute:



Since $U|_K \hookrightarrow \Omega|_K$ is an injective envelope of $U|_K$ we deduce that φ is an injection. Since $\varphi(\Omega)$ lies in $\mathscr{I}$ we obtain the claim. Hence, we obtain an isomorphism

$$\varinjlim_{\Omega \in \mathscr{I}} \Omega \cong V.$$

Since $V|_K$ is an inductive limit of injective objects, **[3]** Proposition 2.1.3 implies that $V|_K$ is an injective object in $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$. □

3.9. Corollary. — *If V is an injective object in $\mathrm{Mod}_{G^+}^{\mathrm{l.adm}}(A)$ then V is also an injective object in $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$.*

Proof. — We consider ϖ as an element of Z via $F^\times \cong Z$ and note that $G^+ = G^0\varpi^{\mathbb{Z}}$. Let $B = A[\varpi^{\pm 1}] \xrightarrow{\sim} A[t^{\pm 1}]$. If U is any locally admissible G^+-representation, then $U = \bigoplus_{\mathfrak{n}} U_{\mathfrak{n}}$, where $\mathfrak{n}$ runs over the maximal ideals of B and $U_{\mathfrak{n}}$ denotes the localization of U at $\mathfrak{n}$. Furthermore,

$$U_{\mathfrak{n}} = U[\mathfrak{n}^\infty] := \bigcup_{i \geq 1} U[\mathfrak{n}^i],$$

where $U[\mathfrak{n}^i]$ denotes the subspace of U consisting of elements annihilated by $\mathfrak{n}^i$. Each maximal ideal $\mathfrak{n}$ is of the form $(\mathfrak{m}, f)$, where $\mathfrak{m}$ is the maximal ideal of A, and $f \in A[t]$ is a monic polynomial. Since A is Artinian, so that $\mathfrak{m}$ is a nilpotent ideal, we see that the $\mathfrak{n}$-adic topology and f-adic topology on A coincide. Thus we may equally well write

$$U_{\mathfrak{n}} = \bigcup_{i \geq 1} U[f^i],$$

where of course $U[f^i]$ denotes the subspace of U consisting of elements annihilated by f^i.

Suppose now that V is an injective object of $\mathrm{Mod}_{G^+}^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Since, by the discussion of the preceding paragraph, V is the inductive limit of the $V[f^i]$ (where f^i runs over the various powers of the various monic polynomials associated to the various maximal ideals $\mathfrak{n}$ of B), in order to show that V is injective as an object of $\mathrm{Mod}_K^{\mathrm{sm}}(A)$, it suffices, by **[3**, Prop. 2.1.3**]** together with Corollary 3.8, to show that each $V[f^i]$ is an injective object of $\mathrm{Mod}_{G^0}^{\mathrm{l.adm}}(A)$. Note that $V[f^i]$ is injective in $\mathrm{Mod}_{G^0}^{\mathrm{l.adm}}(A)[f^i]$.

If we write $C := B/(f^i)$ then the category $\mathrm{Mod}_{G^+}^{\mathrm{l.adm}}(A)[f^i]$ is naturally equivalent to the category $\mathrm{Mod}_{G^0}^{\mathrm{l.adm}}(C)$. Since f is monic C is free of finite rank over A and hence

the forgetful functor $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0}(C) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0}(A)$ is right adjoint to the exact functor $C \otimes_A -$, and so preserves injectives. Thus $V[f^i]$ is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^0}(A)$. □

3.10. Corollary. — *If V is an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A)$ then V is also injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_K(A)$.*

Proof. — Since G^+ is open of finite index in G, Lemma 2.2 and [**3**, Prop. 2.1.2] show that V is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G^+}(A)$ and the assertion follows from Corollary 3.9. □

3.11. Corollary. — *If V is injective in either of the categories $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$ (for some smooth character $\zeta : Z \to A^\times$), or $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A)$, then $V|_{N_0}$ is an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{N_0}(A)$.*

Proof. — In the latter case, the claim of the present corollary follows from Corollary 3.10 together with [**3**, Prop. 2.1.11]. In the case of $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$, it follows from Remark 3.7 and Lemma 2.5 that V is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{(K\cap Z)N_0,\zeta}(A)$. Since the intersection of N_0 and Z is trivial restriction to N_0 induces an equivalence of categories between $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{(K\cap Z)N_0,\zeta}(A)$ and $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{N_0}(A)$. Thus V is injective in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{N_0}(A)$. □

Let G be the group of $\mathbb{Q}_p$-valued points of a connected reductive linear algebraic group over $\mathbb{Q}_p$. Let P be a parabolic subgroup of G with a Levy subgroup M and let $\overline{P}$ be the parabolic subgroup of G opposite to P with respect to M. In [**2**], the first author defined a left exact functor $\mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_M(A)$ such that for all U in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_M(A)$ and V in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A)$ one has

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_{\overline{P}}^G U, V) \cong \mathrm{Hom}_M(U, \mathrm{Ord}_P(V)).$$

Further, for $i \geq 0$ in [**3**] there are defined functors $H^i \mathrm{Ord}_P : \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_M(A)$ such that $H^0 \mathrm{Ord}_P = \mathrm{Ord}_P$ and $\{H^i \mathrm{Ord}_P : i \geq 0\}$ is a δ-functor. It is conjectured there that for $i \geq 1$ the functors $H^i \mathrm{Ord}_P$ are effaceable, which would imply that they are universal, and hence coincide with the derived functors of Ord_P.

3.12. Corollary. — *If $G = \mathrm{GL}_2(F)$ and if V is an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A)$ (resp. $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$), then $H^i \mathrm{Ord}_P(V) = 0$ for all $i \geq 1$.*

Proof. — Since by Corollary 3.11, $V|_{N_0}$ is an injective object in $\mathrm{Mod}^{\mathrm{sm}}_{N_0}(A)$ we have that $H^i(N_0, V) = 0$ for all $i \geq 1$. The claim follows from the definition of $H^i \mathrm{Ord}_P$, see [**3**, Def.3.3.1]. □

Since $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_G(A)$ and $\mathrm{Mod}^{\mathrm{l.adm}}_{G,\zeta}(A)$ each have enough injectives, we conclude that the $H^i \mathrm{Ord}_P$ are effaceable for $i \geq 1$ on any of these categories. In particular, we have verified [**3**, Conj. 3.7.2] in the case $G = \mathrm{GL}_2(F)$.

3.13. Remark. — The authors of this note strongly believe that an analogue of Theorem 3.4 holds for other groups than $\mathrm{GL}_2(F)$. If this is the case, then our proof should go through to establish [**3**, Conj. 3.7.2] for these groups.

References

[1] C. Breuil & V. Paškūnas – "Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2", to appear in *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

[2] M. Emerton – "Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties", this volume.

[3] ———, "Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups II. Derived functors", this volume.

[4] V. Paškūnas – "Coefficient systems and supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$", *Mémoires de la SMF* **99** (2004).

[5] ———, "Admissible unitary completions of locally $\mathbb{Q}_p$-rational representations of $\mathrm{GL}_2(F)$", to appear in *Represent. Theory.*

M. Emerton, Mathematics Department, Northwestern University, 2033 Sheridan Rd., Evanston, IL 60208 • *E-mail :* emerton@math.northwestern.edu

V. Paškūnas, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 100131, D-33501 Bielefeld *E-mail :* paskunas@math.uni-bielefeld.de