Astérisque
331, 2010, p. 255–315

REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ORDINAIRES DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

par

Christophe Breuil & Matthew Emerton

Résumé. — On définit les représentations p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ « correspondant » aux représentations potentiellement cristallines réductibles (et éventuellement scindées) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 et on montre qu'elles apparaissent naturellement dans la cohomologie étale complétée de la tour en p des courbes modulaires.

***Abstract* (Ordinary p-adic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and local-global compatibility)**
We define p-adic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ "corresponding" to 2-dimensional reducible (and possibly split) potentially crystalline representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and we show that they naturally arise in the completed étale cohomology of the tower at p of the modular curves.

1. Introduction et notations

1.1. — Soient p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. À la suite des développements récents dans la théorie des représentations p-adiques de groupes p-adiques tels que $\mathrm{GL}_n(K)$ ([**44**], [**43**], [**45**], [**22**], [**25**], [**26**], etc.), la question s'est posée d'« associer » des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_n(K)$ aux représentations p-adiques de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ (par exemple aux représentations potentiellement semi-stables de Fontaine), dans l'esprit d'une éventuelle correspondance locale à la Langlands. Initiée par l'exemple dans [**7**] et [**8**] (mais suggérée depuis longtemps par de nombreux mathématiciens), cette problématique a déjà connu un certain nombre de développements ([**9**], [**18**], [**3**], [**19**]) et a pris le nom générique de « correspondance locale de Langlands p-adique ». Cette nouvelle correspondance s'annonce malheureusement beaucoup plus délicate que sa grande sœur locale ℓ-adique et,

***Classification mathématique par sujets* (2010).** — 11F.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes ordinaires, correspondance de Langlands p-adique, cohomologie étale complétée.

Le premier auteur remercie A. Abbes, G. Chenevier, A. Iovita, C. Khare, M. Kurihara et A. Pál pour des discussions. Le deuxième auteur a bénéficié d'un soutien partiel de la NSF (grant DMS-0401545).

pour cette raison, les résultats (ou même les conjectures) non triviaux obtenus pour l'instant se limitent tous à GL_2, et même $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Dans cet article, nous nous proposons modestement d'explorer le cas, laissé jusqu'alors en suspens, des représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ correspondant aux représentations potentiellement cristallines de dimension 2 *réductibles* (et éventuellement scindées) de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Nous définissons de telles représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour la plupart de ces représentations potentiellement cristallines. Nous montrons ensuite que, lorsque la représentation galoisienne provient d'une forme modulaire, alors la représentation associée de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ apparaît naturellement (avec la représentation galoisienne) dans la cohomologie étale complétée des courbes modulaires. C'est là le résultat de « compatibilité local-global » principal de l'article. Concrètement, il s'agit de montrer que l'on peut détecter côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans la cohomologie si la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à la forme modulaire considérée est scindée ou non en p. Pour cela, nous utilisons deux ingrédients : d'une part les théorèmes de comparaison p-adiques (pour les représentations galoisiennes associées aux formes modulaires) et d'autre part la théorie p-adique du foncteur de Jacquet de l'un d'entre nous.

Décrivons maintenant plus précisément le contenu de l'article.

Soit $\sigma_p \simeq \left(\begin{smallmatrix}\eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ une représentation potentiellement cristalline réductible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de poids de Hodge-Tate $(1-k,0)$ pour un entier $k \geq 2$ (i.e. telle que η_1 est de poids 0 et η_2 de poids $2-k$) où ε désigne le caractère cyclotomique p-adique. On suppose de plus $\eta_1 \neq \eta_2$ si $k=2$. L'extension $*$ est alors unique si elle est non-nulle. En voyant les caractères de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ comme des caractères de $\mathbb{Q}_p^\times$ via la réciprocité locale, on associe à σ_p un espace de Banach p-adique $B(\sigma_p)$ muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ comme suit :

(i) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix}\eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$, alors :

$$B(\sigma_p) = \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \oplus \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0},$$

(ii) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix}\eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}$ avec $* \neq 0$ alors $B(\sigma_p)$ est une extension non scindée :

$$0 \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0} \to B(\sigma_p) \to \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \to 0,$$

où la notation $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta \otimes \eta'\right)^{\mathscr{C}^0}$ désigne les fonctions continues f sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans une extension finie (fixée) de $\mathbb{Q}_p$ telles que $f(bg) = (\eta \otimes \eta')(b)f(g)$ (l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ étant la translation usuelle à droite sur les fonctions). Le Banach $B(\sigma_p)$ dans le cas (ii) est obtenu en prenant l'unique complété p-adique unitaire de l'induite parabolique localement analytique (au sens de [**44**]) $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1 \mid\,\mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} \otimes \eta_2 \mid\,\mid^{1-k} \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$ où $\mid\,\mid$ désigne le caractère norme (cf. §2.2). La définition de la correspondance ci-dessus peut donc se résumer par la phrase : « c'est scindé côté $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ si et seulement si c'est scindé côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ».

Considérons maintenant une forme modulaire $f = q + \sum_{n\geq 2} a_n(f)q^n$ parabolique nouvelle normalisée de poids $k \geq 2$, niveau N, caractère χ et vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $(\ell, N) = 1$ et U_ℓ pour $\ell|N$. Notons $\sigma(f)$ la représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ associée à f et $\sigma_p(f)$ sa restriction à un sous-groupe de décomposition en p. Si M est la partie première à p de N et si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle f est définie, notons $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L \stackrel{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathbb{Z}_p} \big($complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H^1_{\text{ét}}(Y_1(M;p^r)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Z}_p)\big)$ où $Y_1(M;p^r)$ est la courbe modulaire ouverte associée au groupe de congruences $\Gamma_1(M) \cap \Gamma(p^r)$. On définit la composante $\sigma(f)$-isotypique :

$$\Pi_p(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$$

qui est un espace de Banach p-adique naturellement muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On s'attend à ce que la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\Pi_p(f)$ « contienne » exactement la « même information » que la représentation p-adique $\sigma_p(f)$, c'est-à-dire contienne la théorie de Hodge p-adique de la forme f (cf. e.g. [**9**]). Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ est de la forme précédente (i.e. potentiellement cristalline et réductible). Dans ce cas, notre conjecture de compatibilité local-global est alors précisément :

Conjecture 1.1.1. — *Il y a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant d'espaces de Banach p-adiques* $B(\sigma_p(f)) \simeq \Pi_p(f)$.

Le résultat principal du texte est une version faible de cette conjecture :

Théorème 1.1.2. — *(i) On a toujours une immersion fermée* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante d'espaces de Banach p-adiques :*

$$B(\sigma_p(f)) \hookrightarrow \Pi_p(f).$$

(ii) Si $\sigma_p(f)$ *n'est pas scindée, on a de plus (avec les notations précédentes) :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B(\sigma_p(f)), \Pi_p(f)\big) &= L \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}, \Pi_p(f)\Big) &= 0. \end{aligned}$$

Nous mentionnons maintenant les étapes pour démontrer le théorème 1.1.2. Pour simplifier, nous supposons dans la suite de l'introduction que f est telle que $a_p(f)$ est une unité p-adique (pour un plongement fixé $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$). Si N est premier à p, notons α_p et β_p les racines de $X^2 - a_p(f)X + p^{k-1}\chi(p)$ avec β_p unité p-adique et posons $\widetilde{f} = f(z) - \beta_p f(pz)$. Si p^r divise exactement N avec $r > 0$, posons $\widetilde{f} = f|_{w_{p^r}}$ où w_{p^r} est l'opérateur d'Atkin (cf. §4.1). Rappelons que l'opérateur θ sur les q-développements désigne qd/dq.

Théorème 1.1.3. — *La représentation* $\sigma_p(f)$ *est scindée si et seulement s'il existe une forme surconvergente* g *(nécessairement de pente nulle et de poids* $2-k$*) telle que* $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(g)$.

Notons que le sens $\widetilde{f} = \theta^{k-1}(g) \Rightarrow \sigma_p(f)$ scindée est le plus facile (voir e.g. [**30**, Prop.11]). L'existence de g est plus subtile et est basée sur les théorèmes de comparaison p-adiques usuels combinés avec la théorie des formes modulaires surconvergentes. La forme g (lorsqu'elle existe) mérite le nom de forme compagnon surconvergente de f car le théorème 1.1.3 est un analogue en caractéristique 0 du théorème bien connu de Gross ([**33**]). Notons que les deux cas ($\sigma_p(f)$ scindée ou non) arrivent vraiment en pratique (par exemple, si f est CM, g existe toujours par [**13**, Prop.7.1] et $\sigma_p(f)$ est donc scindée). Certains cas du théorème 1.1.3 étaient déjà connus (par une méthode de relèvement à la caractéristique 0 du résultat de [**33**]) : cf. [**11**] et aussi [**30**, §6].

La preuve du deuxième résultat utilise de façon essentielle une version p-adique du foncteur de Jacquet définie et étudiée dans [**22**] et [**25**]. Disons qu'une forme surconvergente g de poids entier $k \geq 2$ est « mauvaise » si elle n'est pas dans l'image de l'opérateur θ^{k-1} (pour la définition précise de « mauvaise » voir la définition 5.4.1 et la proposition 5.4.4).

Théorème 1.1.4. — *Soit g une forme modulaire surconvergente de poids entier $k \in \mathbb{Z}$, niveau N, caractère χ, vecteur propre des opérateurs de Hecke et telle que $U_p g = \alpha_p g$ avec α_p non-nul. Supposons de plus que g n'est pas « mauvaise » lorsque $k \geq 2$. Alors on a une injection :*

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha_p^{-1})\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k} \otimes \mathrm{nr}(\alpha_p)\big)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$$

où $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$ est l'espace propre de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ pour l'action des opérateurs de Hecke (hors Np) et pour les valeurs propres de g, χ_p est la composante en p du caractère des adèles finis de $\mathbb{Q}$ déduit de χ, $\mathrm{nr}(x)$ est le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur x et « an » désigne l'induite parabolique localement analytique.

En fait, un résultat plus précis est démontré dans le texte (où l'on utilise plutôt la cohomologie à support compact, cf. §5.5). Notons qu'une injection comme dans le théorème 1.1.4 n'est pas unique à cause de la présence de la représentation galoisienne associée à g (de dimension 2) dans l'espace propre $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^g$. Le théorème 1.1.4 s'obtient de la manière suivante : à la forme surconvergente g correspond un point de la courbe de Hecke (ou « eigencurve ») de Coleman-Mazur ([**17**]). Par la théorie de [**24**], si $J_B\big(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$ est la représentation du tore de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ obtenue après application du foncteur de Jacquet p-adique J_B à $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$, à ce point est associé un sous-espace propre de $J_B\big(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big)$ pour l'action du tore et des opérateurs de Hecke (hors Mp) : dans notre cas il s'agit du sous-espace propre pour le caractère $\mathrm{nr}(\alpha_p) \mid\ \mid \otimes \mathrm{nr}(\alpha_p^{-1})\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k} \mid\ \mid^{-1}$. On déduit alors grosso-modo le théorème 1.1.4 d'une loi d'adjonction pour le foncteur J_B (sauf dans un cas essentiel qui nécessite plus de travail, cf. ci-dessous).

On démontre alors le théorème 1.1.2 comme suit.
On montre d'abord facilement que le morceau $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ est toujours contenu dans $\Pi_p(f)$. Supposons que $\sigma_p(f)$ est scindée. En appliquant le théorème 1.1.4 à la forme surconvergente g donnée par le théorème 1.1.3 et en tordant par

ε^{k-1}, on obtient une injection continue $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \Pi_p(f)$ d'où une immersion fermée $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0} \hookrightarrow \Pi_p(f)$. Ainsi $\Pi_p(f)$ contient dans ce cas la somme directe des deux induites paraboliques continues, c'est-à-dire $B(\sigma_p(f))$. Notons que l'on ne peut pas appliquer le théorème 1.1.4 à la forme surconvergente $\widetilde{f}$ car $\widetilde{f}$ est alors précisément « mauvaise ».

Supposons maintenant que $\sigma_p(f)$ n'est pas scindée. Alors, $\Pi_p(f)$ ne peut contenir le morceau $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ car en appliquant à l'inverse le raisonnement précédent et en utilisant la description cohomologique des formes surconvergentes ordinaires due à Hida, on aurait $\widetilde{f}$ dans l'image de θ^{k-1} ce qui impliquerait $\sigma_p(f)$ scindée (en fait, on montre une assertion un peu plus faible sur $\widetilde{f}$ qui suffit à entraîner $\sigma_p(f)$ scindée, cf. théorème 5.7.2). Mais le théorème 1.1.4 appliqué cette fois à la forme $\widetilde{f}$ (qui n'est plus « mauvaise ») donne une injection continue :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1 \mid\ \mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} \otimes \eta_2 \mid\ \mid^{1-k} \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \Pi_p(f)$$

d'où on déduit une immersion fermée $B(\sigma_p(f)) \hookrightarrow \Pi_p(f)$ car, par définition, $B(\sigma_p(f))$ est l'unique complété p-adique unitaire de la représentation localement analytique $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1 \mid\ \mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} \otimes \eta_2 \mid\ \mid^{1-k} \varepsilon^{k-2}\right)^{\mathrm{an}}$. Avec un peu plus de travail, on obtient la multiplicité 1 du (ii) du théorème 1.1.2. Notons que le théorème 1.1.4 est dans ce cas particulièrement délicat car on est dans une situation de « pente critique » (i.e. on sort des conditions d'application du théorème d'Amice-Vélu et Vishik) et la démonstration de ce cas prend une bonne place de la partie 5.

Le texte est divisé comme suit : après cette introduction et les notations, la partie 2, purement locale, introduit diverses induites paraboliques pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ainsi que la construction des représentations $B(\sigma_p)$. La partie 3 est consacrée à la définition et aux premières propriétés du $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique $\Pi_p(f)$ (pour une forme modulaire propre f quelconque), puis à l'énoncé de la conjecture 1.1.1. La partie 4 contient la démonstration du théorème 1.1.3. Enfin, la partie 5 est consacrée à la démonstration du théorème 1.1.4, puis à celle du théorème 1.1.2. Un appendice conclut l'article, dans lequel on démontre une proposition technique mais importante pour la preuve du théorème 1.1.4.

1.2. — On fixe p un nombre premier. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. On fixe des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. Pour $z \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, $\mathrm{val}(z) \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ est la valuation p-adique normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$ et $\mid z \mid \overset{\text{déf}}{=} p^{-\mathrm{val}(z)} \in \mathbb{R}^+$. On note $\mathbb{A}$ les adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_f = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ les adèles finis. On note aussi $\widehat{\mathbb{Z}}^p \overset{\text{déf}}{=} \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ et $\mathbb{Z}_{Mp}^\times \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n (\mathbb{Z}/Mp^n\mathbb{Z})^\times$ pour un entier M tel que $(M,p) = 1$.

On normalise l'application de réciprocité du corps de classes local en envoyant les Frobenius arithmétiques sur les inverses des uniformisantes. On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et on remarque que, via la réciprocité locale en

p, $\varepsilon(z) = z\,|z|$ si $z \in \mathbb{Q}_p^\times$. On note $\mathrm{nr}(x)$ le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur x.

On note GL_2 le schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$ usuel des matrices carrées inversibles, B (resp. $\overline{\mathrm{B}}$) le sous-schéma en groupes des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), N (resp. $\overline{\mathrm{N}}$) le sous-schéma en groupes de B (resp. $\overline{\mathrm{B}}$) des matrices unipotentes supérieures (resp. inférieures), P le sous-schéma en groupes de B des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{T} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{B}}$ le sous-schéma en groupes de GL_2 des matrices diagonales. Pour un anneau A (commutatif unitaire), on note $\mathrm{GL}_2(A)$, etc. les groupes correspondants des points à valeurs dans A (nous utiliserons essentiellement $A = \mathbb{Q}_p$ et $A = \mathbb{Z}_p$).

On note $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathfrak{t}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathfrak{n}(\mathbb{Q}_p)$ les algèbres de Lie respectives de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p)$, et $\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p)$ le centre de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. On pose :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ &\overset{\text{déf}}{=} \left\{t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p) \ \middle|\ t\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)t^{-1} \subset \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{Q}_p^\times,\ \frac{a}{d} \in \mathbb{Z}_p\right\}, \\
\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+ &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \left\{\begin{pmatrix} a & z \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{Q}_p^\times,\ \frac{a}{d}, \frac{z}{d} \in \mathbb{Z}_p\right\}
\end{aligned}$$

et on note $X_- \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Si V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action linéaire de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, si $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ et si $N_t \overset{\text{déf}}{=} \{n \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p) \ |\ t^{-1}nt \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)\}$, on note $\pi_t : V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)} \to V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ l'opérateur de Hecke défini par :

$$\pi_t v \overset{\text{déf}}{=} \#(\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)/N_t)^{-1} \sum_{n \in \mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)/N_t} nt \cdot v.$$

Si $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)$, on a $\pi_t v = t \cdot v$. Les opérateurs π_t préservent $V^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$.

Si f est une forme modulaire holomorphe (pas nécessairement parabolique) de poids $k \geq 2$ de caractère χ nouvelle pour un groupe de congruence $\Gamma_1(N)$ vecteur propre des opérateurs de Hecke et si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui contient les valeurs propres associées, on note $\sigma(f) : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(L)$ la représentation p-adique semi-simple associée à f par Deligne. Si ℓ est un nombre premier, on désigne par Frob_ℓ un Frobenius arithmétique en ℓ. Pour $\ell \nmid Np$, le polynôme caractéristique de $\sigma(f)(\mathrm{Frob}_\ell^{-1})$ est $X^2 - a_\ell X + \ell^{k-1}\chi(\ell)$ si $T_\ell f = a_\ell f$. La représentation $\sigma(f)$ est absolument irréductible si f est parabolique. Si $\pi_{p,u}(f)$ désigne la composante locale en p de la représentation admissible lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ engendrée par f (cf. [**20**, §2.4]), on pose :

$$\pi_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \pi_{p,u}(f) \otimes |\det|^{\frac{2-k}{2}}.$$

C'est une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de caractère central $|\ |^{2-k}\chi_p^{-1}$ où χ_p est la composante locale en p de χ vu comme caractère de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}^\times$. Par exemple, si

$(p,N)=1$, alors $\pi_p(f)$ est l'induite parabolique lisse de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ du caractère non ramifié $\mathrm{nr}(p^{-1}\beta_p)\otimes\mathrm{nr}(\alpha_p)$ où α_p,β_p sont les racines de $X^2-a_pX+p^{k-1}\chi(p)$.

Si A est un anneau (commutatif unitaire), on note $\mathrm{Sym}^{k-2}A^2$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(A)$ dont l'espace sous-jacent est le A-module $\oplus_{0\leq j\leq k-2}Az^j$ muni de l'action A-linéaire à gauche $(g(P))(z)\overset{\text{déf}}{=}(-cz+a)^{k-2}P(\frac{dz-b}{-cz+a})$ où $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{GL}_2(A)$ et $P\in\oplus_{0\leq j\leq k-2}Az^j$.

Si M est un entier premier à p, on note $\mathbb{T}(M)$ (ou simplement $\mathbb{T}$ si M est fixé) l'algèbre polynomiale sur $\mathbb{Z}_p$ engendrée par les variables T_ℓ et S_ℓ pour ℓ premier ne divisant pas Mp. On appelle parfois « module de Hecke » un $\mathbb{T}$-module et « système de valeurs propres de Hecke » (defini sur L) un homomorphisme $\lambda:\mathbb{T}\to L$ pour une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Si λ est un système de valeurs propres de Hecke défini sur L et X un module de Hecke, on note X_L^λ le sous-espace de $X\otimes_{\mathbb{Z}_p}L$ sur lequel $\mathbb{T}$ agit via λ. Si λ provient d'une forme modulaire f vecteur propre des T_ℓ et S_ℓ, on note aussi $X_L^f\overset{\text{déf}}{=}X_L^\lambda$. On dit qu'un système de valeurs propres λ défini sur L est Eisenstein s'il existe des caractères continus $\varepsilon_1,\varepsilon_2:\mathbb{Z}_{Mp}^\times\to L^\times$ tels que $\lambda(T_\ell)=\varepsilon_1(\ell)+\varepsilon_2(\ell)$ et $\lambda(\ell S_\ell)=\varepsilon_1(\ell)\varepsilon_2(\ell)$ pour tout $\ell\nmid Mp$. On dit qu'un module de Hecke X est Eisenstein si, pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, tout système de valeurs propres λ défini sur L tel que $X_L^\lambda\neq 0$ est Eisenstein.

Tous les espaces de Banach B de ce texte sont p-adiques et tels que $\|B\|\subseteq|L|$ où $L\subset\overline{\mathbb{Q}_p}$ désigne le corps des coefficients qui est toujours une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On appelle $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire un espace de Banach B muni d'une action à gauche L-linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ telle que les applications $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\to B$, $g\mapsto gv$ sont continues pour tout $v\in B$ et telle que, pour un choix de norme $\|\ \|$ sur B, on a $\|gv\|=\|v\|$ pour tout $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tout $v\in B$. Un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire est dit admissible (suivant [**43**, §3]) si le Banach dual est de type fini sur $L\otimes_{\mathscr{O}_L}\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ où $\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]\overset{\text{déf}}{=}\varprojlim_H\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/H]$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes de congruences principaux de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

2. Représentations ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Dans cette partie, après des préliminaires sur les induites paraboliques, nous définissons les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires $B(\sigma_p)$ de l'introduction. On fixe L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

2.1. — On commence par quelques considérations générales sur les induites paraboliques.

On note $\widehat{\mathrm{T}}$ l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ paramétrant les caractères localement analytiques (ou continus, ce qui est équivalent) $\chi_1\otimes\chi_2$ de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$. Cet espace est isomorphe au produit $(\mathscr{W}\times\mathbb{G}_m)^2$ où $\mathscr{W}$ est l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ paramétrant les caractères localement analytiques de $\mathbb{Z}_p^\times$ ([**24**, §4.4]). Un élément de $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ est donc un caractère localement analytique $\chi_1\otimes\chi_2:T(\mathbb{Q}_p)\to L^\times$.

Définition 2.1.1. — *On dit qu'un caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ de $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique k où k est un entier ≥ 2 si le caractère $\chi_2/\chi_1 : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ est produit d'un caractère localement constant par le caractère algébrique $z \mapsto z^{k-2}$. On dit qu'un caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ de $\widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique s'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $\chi_1 \otimes \chi_2$ est de poids classique k.*

Si d un entier positif ou nul, on note $\mathscr{C}^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{d}}(\mathbb{Z}_p, L)$ (resp. $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, L)$, resp. $\mathscr{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$) le L-espace vectoriel des fonctions localement polynomiales de degré $\leq d$ (resp. localement analytiques, resp. continues) $f : \mathbb{Z}_p \to L$ muni de la topologie localement convexe la plus fine (resp. de type compact définie dans [**44**], resp. associée à la norme Sup $\mid f(z) \mid$). Lorsque $d = 0$, on note aussi $\mathscr{C}^{\mathrm{lc}}(\mathbb{Z}_p, L) \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{C}^{\mathrm{lp},\leq 0}(\mathbb{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbb{Z}_p$.

Si $\chi_1 \otimes \chi_2 : T(\mathbb{Q}_p) \to L^\times$ est un caractère de poids classique k (resp. localement analytique, resp. continu), on note :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$$

(resp. $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$, resp. $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathscr{C}^0}$) l'induite parabolique localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique au sens de [**44**, §5,6], resp. continue au sens de [**43**]), c'est-à-dire le L-espace vectoriel V des fonctions $F : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to L$ telles que $g \mapsto \det(g)^{-1} F(g)$ est localement polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytique, resp. continue) et telles que :

$$F\big(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\big) = \chi_1(a)\chi_2(d)F(g)$$

muni de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ donnée par $(g \cdot F)(g') \overset{\text{déf}}{=} F(g'g)$. Cet espace est naturellement muni d'une topologie localement convexe (la plus fine dans le cas localement algébrique, de type compact dans le cas localement analytique (cf. [**44**] pour une définition précise), associée à la norme $\mathrm{Sup}_{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} \mid f(g) \mid$ dans le cas continu) pour laquelle l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times V \to V$, $(g, F) \mapsto g \cdot F$ est continue.

L'application :

$$F \in V \mapsto \Big(z \mapsto F\big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}\big)\Big)$$

identifie V au L-espace vectoriel des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k-2$ (resp. localement analytiques, resp. continues) $f : \mathbb{Q}_p \to L$ telles que $(\chi_2\chi_1^{-1})(z)f(1/z)$ se prolonge au voisinage de $z = 0$ en une fonction polynomiale de degré $\leq k-2$ (resp. analytique, resp. continue). L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ s'écrit alors :

$$\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f\Big)(z) = \chi_1(ad-bc)(\chi_2\chi_1^{-1})(-cz+a) f\Big(\frac{dz-b}{-cz+a}\Big) \tag{1}$$

et l'application :

$$f \mapsto \Big(\big(z \mapsto f(pz)\big), \big(z \mapsto (\chi_2\chi_1^{-1})(z)f(1/z)\big)\Big)$$

fournit un isomorphisme topologique avec $\mathscr{C}^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}(\mathbb{Z}_p, L)^2$ (resp. $\mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, L)^2$, resp. $\mathscr{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)^2$). Si $k=2$, on note aussi $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lc}} \stackrel{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq 0}$. Il s'agit de l'induite lisse usuelle de $1\otimes\chi_2\chi_1^{-1}$ tordue par χ_1.

Nous aurons besoin de considérer des sous-espaces non préservés par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, mais préservés par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, dans les induites localement analytiques précédentes. Nous les introduisons maintenant.

Pour $\chi_1\otimes\chi_2\in\widehat{\mathrm{T}}(L)$ et d un entier ≥ 0, on note :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$$

le sous-espace de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ des fonctions f ci-dessus à support compact dans $\mathbb{Q}_p$ et localement polynomiales de degré $\leq d$. Si $d=0$, on note aussi $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$. On pose :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{d\geq 0}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}.$$

On munit ces espaces de la topologie localement convexe la plus fine. Chacun des espaces $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ est $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-invariant et leur réunion est de plus $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-invariante. L'inclusion :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \subset \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

induit donc un morphisme $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \longrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}} \tag{2}$$

où $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$) est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$).

Les deux lemmes qui suivent sont classiques. Pour le confort du lecteur, nous incluons leur preuve.

Lemme 2.1.2. — *Si $\chi_1\otimes\chi_2$ n'est pas de poids classique, alors* (2) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit $w_i\in L$ le poids du caractère χ_i ($i=1,2$) et notons $w\stackrel{\text{déf}}{=} w_2-w_1$. Demander que $\chi_1\otimes\chi_2$ ne soit pas de poids classique est équivalent à demander que w ne soit pas un entier positif ou nul. Si $X\stackrel{\text{déf}}{=}\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $f\in\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ (vu comme fonction sur $\mathbb{Q}_p$ comme précédemment), on obtient en différentiant (1) la formule suivante pour $X\cdot f$:

$$(X\cdot f)(z) = \big(w_1(\alpha+\delta)+w(\alpha-\gamma z)\big)f(z) + \big(-\beta+(\delta-\alpha)z+\gamma z^2\big)f'(z) \tag{3}$$

où $f'(z)$ est la dérivée de f. Soit $L[z]$ le L-espace vectoriel des polynômes en z à coefficients dans L. La formule (3) définit une représentation de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $L[z]$ qui est un exemple de *module de Verma contragrédient* pour $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le sous-espace $L\subset L[z]$ des fonctions constantes est annulé par $\mathfrak{n}(\mathbb{Q}_p)$, et $\mathfrak{t}(\mathbb{Q}_p)$ agit sur L (vu comme

L-espace vectoriel de dimension 1) par la dérivée du caractère $\chi_2 \mid \mid \otimes \chi_1 \mid \mid^{-1}$, c'est-à-dire par $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \mapsto w_2\alpha + w_1\delta$. L'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $L[z]$ induit un morphisme de $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-modules :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L \to L[z], \tag{4}$$

et c'est un résultat classique de théorie des modules de Verma (qui se vérifie directement en utilisant (3)) que (4) est un isomorphisme sous l'hypothèse que w n'est pas un entier positif ou nul. Si Ω est un ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$, notons $L[z]_{|\Omega}$ l'espace des fonctions $\mathbb{Q}_p \to L$ qui sont polynomiales sur Ω et nulles sur le complémentaire de Ω. Par (3), on voit que $L[z]_{|\Omega}$ est un sous-espace de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ stable par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si $f \in L[z]$, soit $f_{|\Omega}$ l'élément de $L[z]_{|\Omega}$ défini comme étant le polynôme f sur Ω et 0 sur $\mathbb{Q}_p \setminus \Omega$. L'application $f \mapsto f_{|\Omega}$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-modules $L[z] \xrightarrow{\sim} L[z]_{|\Omega}$. Si $L_{|\Omega}$ désigne le sous-espace de $L[z]_{|\Omega}$ formé des fonctions constantes sur Ω, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(f\mapsto f_{|\Omega})"] & L[z] \arrow[d, "f\mapsto f_{|\Omega}"] \\
\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L_{|\Omega} \arrow[r] & L[z]_{|\Omega}
\end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale supérieure et les deux flèches verticales sont des isomorphismes. Il en est donc de même de la flèche horizontale inférieure. On a par ailleurs des isomorphismes de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-modules (resp. de $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-modules) :

$$\varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L[z]_{|\Omega_i} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

(resp.

$$\varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L_{|\Omega_i} \xrightarrow{\sim} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}})$$

où la limite inductive est prise sur tous les ensembles finis $\{\Omega_i\}$ d'ouverts compacts disjoints de $\mathbb{Q}_p$. Mais par le résultat ci-dessus, la flèche naturelle :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} \varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L_{|\Omega_i} \to \varinjlim_{\{\Omega_i\}} \bigoplus_i L[z]_{|\Omega_i}$$

est un isomorphisme, d'où on déduit le lemme. □

Lemme 2.1.3. — *Si $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique k, alors le sous-espace $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ est stable par $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$, et l'image de (2) est égale à ce sous-espace, tandis que le noyau de (2) est isomorphe à :*

$$X_-^{k-1}\Big(\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\Big).$$

Démonstration. — On garde les notations de la preuve du lemme précédent mais on suppose cette fois que $w = k-2$ est un entier positif ou nul. Si $L[z]^{\leq w}$ désigne le sous-espace de $L[z]$ des polynômes de degré au plus w, on voit par (3) que $L[z]^{\leq w}$ est stable sous l'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Plus précisément $L[z]^{\leq w}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont le sous-espace de plus haut poids (par rapport à la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$) est précisément le sous-espace L des constantes, sur lequel $\mathfrak{t}(\mathbb{Q}_p)$ agit par le poids dominant $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{smallmatrix}\right) \mapsto w_2\alpha + w_1\delta$ (voir preuve du Lemme 2.1.2). L'annulateur de L dans $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ est donc égal à $X_-^{w+1}\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$, et l'application (4) induit une surjection :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)} L \to L[z]^{\leq w}$$

de noyau $X_-^{w+1}\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le lemme découle alors du même argument déjà utilisé dans la preuve du lemme 2.1.2, *mutatis mutandis.* □

Le résultat suivant, de type « Amice-Vélu » est un cas particulier du résultat principal de **[25]** :

Proposition 2.1.4. — *Si V est un espace de Banach sur L muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, alors la restriction des homomorphismes induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}, V_{\mathrm{an}}\big)$$

où V_{an} est le sous-espace de V des vecteurs localement analytiques ([**45**, §7]*).*

Il s'agit bien sûr ici des homomorphismes continus (notons que, la topologie localement convexe sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ étant la plus fine, la continuité des morphismes à droite est automatique). Pour la commodité du lecteur, nous donnons en appendice une preuve complète de cette proposition importante mais technique.

Rappelons enfin qu'aux représentations $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ si $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique k et $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ si $\chi_1\otimes\chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$, on peut aussi associer leur complété unitaire universel, c'est-à-dire le complété par rapport à une semi-norme continue invariante sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ aussi « fine » que possible (cf. **[21**, §1]). C'est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire qui peut être nul. Par exemple, dans le cas localement algébrique, il s'agit simplement du complété de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ par rapport à un $\mathscr{O}_L$-réseau de type fini sur $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ (lorsqu'un tel réseau existe).

2.2. — On définit les espaces de Banach $B(\sigma_p)$ par complétion unitaire d'induites paraboliques.

On fixe un entier $k \geq 2$ et $\chi_1\otimes\chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ tel que $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique k, χ_2 est localement constant et on a $\mathrm{val}(\chi_2(p)) = k-1$ et $\mathrm{val}(\chi_1(p)) = 1-k$. Si $k=2$, on suppose de plus $\chi_1 \neq \chi_2|\ |^2$ de sorte que la représentation $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lc}}$ est irréductible et isomorphe à $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}\big)^{\mathrm{lc}}$.

On pose $\eta_1 \overset{\text{déf}}{=} \chi_1 \mid \mid^{1-k} \varepsilon^{k-2} = \chi_1 \mid \mid^{-1} z^{k-2}$ et $\eta_2 \overset{\text{déf}}{=} \chi_2 \mid \mid^{k-1} \varepsilon^{2-k} = \chi_2 \mid \mid z^{2-k}$: les caractères η_1 et η_2 sont à valeurs entières.

Proposition 2.2.1. — *Le complété unitaire universel de la représentation localement algébrique* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ *s'identifie au* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-Banach unitaire admissible et topologiquement irréductible* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$.

Démonstration. — En utilisant l'entrelacement :
$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-2}\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lc}} \simeq \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2 \mid \mid \otimes \chi_1 \mid \mid^{-1} z^{k-2}\big)^{\mathrm{lc}}$$
on obtient un isomorphisme $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2} \simeq \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$. Soit I_{k-2} le L-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to L$ nulles en dehors de $\mathbb{Z}_p$ et polynomiales de degré $\leq k-2$ en restriction à $\mathbb{Z}_p$, et choisissons une base $(f_0, \cdots, f_{k-2})$ du $\mathscr{O}_L$-réseau de I_{k-2} des fonctions à valeurs dans $\mathscr{O}_L$. Alors la sous-$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $\sum_{0\leq i\leq k-2}\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]f_i \subset \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ s'identifie au réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des fonctions de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ à valeurs dans $\mathscr{O}_L$. On voit donc que ce réseau est de type fini et que le complété unitaire universel de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ (ou de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$), c'est-à-dire le complété de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ par rapport à ce réseau, s'identifie à $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$. Ce dernier $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach est admissible car son dual s'identifie à $L\otimes(\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]\otimes_{\mathscr{O}_L[[\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)]]}\mathscr{O}_L)$ qui est de type fini sur $\mathscr{O}_L[[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)]]$ (l'application $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p) \to \mathscr{O}_L$ étant $\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \mapsto \eta_2(a)\eta_1(d)$). On peut voir l'irréductibilité comme suit : soit $B \subsetneq \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ un sous-espace fermé non-nul stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Par densité des vecteurs localement analytiques d'un Banach p-adique admissible ([**45**, Th.7.1]), B contient une sous-représentation de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{an}}$ dense (dans B), qui contient elle-même nécessairement la représentation $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$ (car celle-ci est localement polynomiale, donc *a fortiori* localement analytique). Or on a vu que cette représentation est dense dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ qui est donc aussi B. □

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{Z}_p \to L$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ si son développement de Mahler $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\binom{z}{n}$ est tel que $n^{k-1} \mid a_n(f) \mid$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}^+$ quand n tend vers $+\infty$ (où $\binom{z}{0} \overset{\text{déf}}{=} 1$ et $\binom{z}{n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}$ si $n > 0$). On note $\mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$ le L-espace vectoriel de ces fonctions. C'est un Banach pour la norme $\| f \| \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Sup}_n n^{k-1}|a_n(f)|$. On peut aussi décrire cet espace comme les fonctions $k-1$ fois dérivables de $(k-1)$-ième dérivée continue ([**42**, §54]). Les fonctions de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sont stables par somme, produit, composition, etc. (cf. [**42**, Th.77.5]).

Soit V le L-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to L$ telles que les fonctions $f_1 \overset{\text{déf}}{=} (z \mapsto f(pz))$ et $f_2 \overset{\text{déf}}{=} (z \mapsto (\chi_2\chi_1^{-1})(z)f(1/z))$ sont dans $\mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p, L)$. C'est un espace de Banach pour la norme $\mathrm{Sup}(\| f_1 \|, \| f_2 \|)$. On munit V de l'action à gauche (1) de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui est une action par automorphismes continus (cf. [**3**, §4.2]). Pour $0 \leq j \leq k-2$ et $a \in \mathbb{Q}_p$, les fonctions $f(z) = z^j$ et $f(z) = (z-a)^{-j}(\chi_2\chi_1^{-1})(z-a)$ sont dans V (la preuve est analogue à [**3**, Lem.4.2.2]). On définit $W \subset V$ comme l'adhérence dans V du sous-L-espace vectoriel engendré par toutes ces fonctions. Il est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 2.2.2. — *Le complété unitaire universel de la représentation localement analytique* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ *s'identifie au Banach quotient* V/W *avec son action induite de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *C'est un* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-Banach unitaire admissible de longueur topologique* 2, *extension non triviale de* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$ *par* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$.

Démonstration. — Posons $\alpha \overset{\text{déf}}{=} \chi_1(p)^{-1}$ et $\beta \overset{\text{déf}}{=} p^{k-1}\chi_2(p)^{-1}$, on a :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}} = \varepsilon^{2-k} \otimes \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{nr}(\alpha^{-1})\psi_1 \otimes \mathrm{nr}(p\beta^{-1})\psi_2 z^{k-2}\big)^{\mathrm{an}}$$

avec $\psi_1 = \chi_1\mathrm{nr}(\chi_1(p))^{-1}\varepsilon^{k-2}$ et $\psi_2 = \chi_2\mathrm{nr}(\chi_2(p))^{-1}$. D'après [**21**, Prop.1.21] (plus précisément la preuve de *loc. cit.*), le complété unitaire universel de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ est le complété par rapport au sous-$\mathscr{O}_L[\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)]$-module engendré par les vecteurs $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z)z^j$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}_p-\mathbb{Z}_p}(z)(\chi_2\chi_1^{-1})(z)z^{-j}$ où $\mathbf{1}_U$ est la fonction caractéristique de l'ouvert U et $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Par le même calcul que dans la preuve de [**3**, Th.4.3.1] (on a multiplié ici les caractères non-ramifiés $\mathrm{nr}(\alpha^{-1})$ et $\mathrm{nr}(p\beta^{-1})$ par les caractères entiers ψ_1 et ψ_2 et tordu la représentation par le caractère entier ε^{2-k} mais cela ne modifie pas l'argument), on trouve alors qu'une boule ouverte (de centre 0) du Banach dual du complété cherché s'identifie aux distributions μ dans le dual fort de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ telles que, pour tout $a \in \mathbb{Q}_p$, tout $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu(z) \quad \in \quad p^{n(j-k+1)}\mathscr{O}_L \tag{5}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p-(a+p^n\mathbb{Z}_p)}(z-a)^{-j}(\chi_2\chi_1^{-1})(z-a)d\mu(z) \quad \in \quad p^{n(k-1-j)}\mathscr{O}_L \tag{6}$$

en se rappelant que $\mathrm{val}(\chi_1(p)) = 1-k$. Un raisonnement analogue à celui de la preuve de [**3**, Th.4.3.1] montre que les conditions (5) et (6) sélectionnent exactement les distributions tempérées d'ordre $\leq k-1$ (c'est-à-dire les distributions de $V^\vee$) annulant les fonctions z^j et $(z-a)^{-j}(\chi_2\chi_1^{-1})(z-a)$ pour $0 \leq j \leq k-2$ (faire $n \mapsto -\infty$ dans (5) et $n \mapsto +\infty$ dans (6)), c'est-à-dire les fonctions de W. On en déduit la première partie de l'énoncé. Un raisonnement similaire (en plus simple) montre que le complété unitaire universel de l'induite $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}} = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathrm{an}}$ s'identifie à $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$ et la même preuve que pour la proposition 2.2.1 montre que ce dernier est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissible et topologiquement irréductible. Il résulte de la définition du complété unitaire universel que la surjection $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}\twoheadrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}}$ induit une surjection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $V/W\twoheadrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$. Par continuité, cette dernière surjection s'identifie encore à $f\mapsto f^{(k-1)}$ et son noyau n'est autre que N/W où $N\subset V$ est le sous-espace fermé des fonctions de dérivée $(k-1)$-ième nulle (notons que $W\subset N$). Par ailleurs, le complété unitaire universel de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ s'envoie par fonctorialité dans N/W et, via la proposition 2.2.1, on voit qu'il s'agit nécessairement d'une immersion fermée (car les caractères η_1 et η_2 étant entiers, il n'y a qu'une norme invariante à équivalence près sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq k-2}=\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$, voir e.g. [**3**],Cor.5.4.4). En utilisant le résultat d'analyse p-adique disant que l'adhérence dans $\mathscr{C}^{k-1}(\mathbb{Z}_p,L)$ du sous-espace des fonctions polynomiales de degré au plus $k-2$ s'identifie exactement aux fonctions de dérivée $(k-1)$-ième nulle (dont on trouvera une preuve pour $k=2$ dans [**42**, §68] et pour k quelconque dans [**41**, §8]), on obtient bien une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$0\to\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}\to V/W\to\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}\to 0$$

qui fait de V/W un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissible de longueur topologique 2 (en utilisant ce qui précède et la proposition 2.2.1). Enfin, cette suite est non scindée, sinon la représentation localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ serait également scindée ce qui n'est pas le cas (cf. [**44**]). $\square$

2.3. — Soit σ_p une représentation potentiellement cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ réductible et de dimension 2 sur L. On peut écrire :

$$\sigma_p\simeq\begin{pmatrix}\chi_1\,|\;|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2} & *\\ 0 & \chi_2\,|\;|^{k-1}\,\varepsilon^{1-k}\end{pmatrix}\otimes\eta$$

pour un caractère continu $\eta:\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)\to L^\times$, un unique entier k supérieur ou égal à 1 et un caractère $\chi_1\otimes\chi_2$ de poids classique k avec χ_2 localement constant tel que $\mathrm{val}(\chi_2(p))=k-1$ et $\mathrm{val}(\chi_1(p))=1-k$ (de sorte que, via la réciprocité locale, $\chi_1\,|\;|^{1-k}$ et $\chi_2\,|\;|^{k-1}$ s'étendent à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$). Notons que, lorsque $k=1$, la terminologie « de poids classique 1 » est un abus de notations et signifie ici que χ_2/χ_1 est le produit d'un caractère localement constant par le caractère $z\mapsto z^{-1}$ (cf. définition 2.1.1). Si l'extension $*$ est non-nulle, alors elle est unique. On pose $\eta_1\overset{\text{déf}}{=}\chi_1\,|\;|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2}$ et $\eta_2\overset{\text{déf}}{=}\chi_2\,|\;|^{k-1}\,\varepsilon^{2-k}$ comme au §2.2. Si $k=2$, on suppose $\eta_1\neq\eta_2$ (voir la remarque 2.3.1 pour le cas $\eta_1=\eta_2$). On « associe » alors à σ_p le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\sigma_p)$ suivant :

(i) si $\sigma_p\simeq\begin{pmatrix}\eta_1 & 0\\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\otimes\eta$, alors :

$$B(\sigma_p)\overset{\text{déf}}{=}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}\otimes\eta\oplus\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}\otimes\eta,$$

(ii) si $\sigma_p \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \otimes \eta$ avec $* \neq 0$ et si $k \geq 2$ (voir la remarque 2.3.2 pour $k = 1$), alors $B(\sigma_p)$ est le tordu par η du complété unitaire universel de l'induite parabolique localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$. Par le théorème 2.2.2, c'est une extension non scindée :

$$0 \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta \to B(\sigma_p) \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta \to 0.$$

Remarque 2.3.1. — On discute ici le cas $k = 2$ et $\eta_1 = \eta_2$. Notons qu'alors $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lc}} = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mid \mid \otimes \mid \mid^{-1}\big)^{\mathrm{lc}} \otimes \eta_1$ n'est plus isomorphe à $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2 \mid \mid \otimes \chi_1 \mid \mid^{-1}\big)^{\mathrm{lc}} = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1 \otimes 1\big)^{\mathrm{lc}} \otimes \eta_1$. Soit $B(2,\infty)$ le complété unitaire universel de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mid \mid \otimes \mid \mid^{-1}\big)^{\mathrm{lc}}$ (c'est une extension non-scindée de la représentation triviale par **St** où, comme dans [**8**], on note **St** le complété unitaire universel de la représentation de Steinberg). On est ici tenté de définir le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\sigma_p)$ associé à σ_p comme suit :
(i) si σ_p est scindée :

$$B(\sigma_p) \overset{\text{déf}}{=} B(2,\infty) \otimes \eta_1\eta \oplus \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta_1\eta,$$

(ii) si σ_p est non scindée, $B(\sigma_p)$ est défini comme le complété unitaire universel de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mid \mid \otimes \mid \mid^{-1}\big)^{\mathrm{an}} \otimes \eta_1\eta$, et on a une extension non-scindée :

$$0 \to B(2,\infty) \otimes \eta_1\eta \to B(\sigma_p) \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0} \otimes \eta_1\eta \to 0.$$

Bien sûr, ce cas « non générique » n'arrive jamais dans le contexte global des formes modulaires paraboliques, et on ne peut donc le « tester » directement. Cependant, des considérations globales indirectes devraient permettre de tester le cas non scindé, comme nous l'expliquons maintenant.

Supposons que σ_p est non scindée (avec $k = 2$ et $\eta_1 = \eta_2$) et supposons, pour simplifier, que $\eta_1 = \eta_2$ et η sont les caractères triviaux (quitte à tordre). La représentation σ_p peut se voir comme la « limite » (en un sens convenable) lorsque $\mathscr{L} \to \infty$ (i.e. $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \to -\infty$) des représentations semi-stables réductibles $V(2,\mathscr{L})$ de [**8**, Ex.1.3.5] (on peut par exemple considérer cette limite dans l'espace projectif de dimension 1 des classes d'isomorphismes d'extensions non-triviales de ε^{-1} par le caractère trivial). Pour chaque valeur (finie) de $\mathscr{L}$, considérons le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(2,\mathscr{L})$ défini dans [**8**]. Il est alors très facile de prendre la limite lorsque $\mathrm{val}(\mathscr{L}) \to -\infty$ dans la construction de $B(2,\mathscr{L})$ et de vérifier que l'on obtient le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $B(2,\infty)$ ci-dessus (dans la discussion de [**8**, §4.5], il suffit de remplacer la représentation $\sigma(2,\mathscr{L})$ par la représentation $\sigma(2,\infty)$ obtenue en remplaçant val par $\log_{\mathscr{L}}$ dans la définition de $\sigma(2,\mathscr{L})$). En remplaçant ∞ par une valeur finie de $\mathscr{L}$, on s'attend comme en (ii) ci-dessus à ce que le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(V(2,\mathscr{L}))$ correspondant à $V(2,\mathscr{L})$ donne lieu à une suite exacte courte :

$$0 \to B(2,\mathscr{L}) \to B(V(2,\mathscr{L})) \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon \otimes \varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0} \to 0$$

(bien qu'il ne soit pas clair, pour l'instant, comment construire une telle suite exacte). Le test global indirect évoqué ci-dessus consiste alors à prendre une forme modulaire nouvelle de niveau N et poids 2 telle que $\sigma_p(f) \xrightarrow{\sim} V(2,\mathscr{L})\otimes\eta$ et à se demander si $\Pi_p(f)$ (comme défini dans l'introduction) donne bien lieu à une suite exacte courte :

$$0 \to B(2,\mathscr{L})\otimes\eta \to \Pi_p(f) \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\varepsilon\otimes\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}\otimes\eta \to 0.$$

Pour le moment, il est seulement connu qu'il existe un plongement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $B(2,\mathscr{L})\otimes\eta \hookrightarrow \Pi_p(f)$ ([**9**]).

Remarque 2.3.2. — Lorsque $k=1$ et $*\neq 0$, nous ignorons comment (ou même si l'on peut) construire une extension non scindée de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$ par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$.

Remarque 2.3.3. — De même que l'extension est unique côté Galois (lorsqu'elle est non-nulle), on peut se demander s'il existe d'autres extensions de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$ par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_2\otimes\eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ dans la catégorie abélienne des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires admissibles que celle donnée par le complété unitaire universel de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$.

Remarque 2.3.4. — Une version des résultats et définitions du §2.2 et du §2.3 se trouve déjà dans [**4**, §7] (qui ne sera pas publié).

3. La conjecture de compatibilité local-global

À toute forme modulaire parabolique propre f de poids $k\geq 2$, on associe un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire admissible $\Pi_p(f)$ construit dans la cohomologie des courbes modulaires. Lorsque la représentation galoisienne p-adique associée à f est potentiellement cristalline réductible en p, on conjecture que $\Pi_p(f)$ est exactement le Banach du §2.3.

3.1. — On commence par quelques rappels et préliminaires sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ et $\widehat{H}^1(K_1^p(M))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ de [**24**] et [**9**].

Pour tout sous-groupe compact K_f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, on note :

$$Y(K_f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/\mathbb{C}^\times K_f$$

où l'on voit $\mathbb{C}^\times$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par $a+ib\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a & -b\\ b & a\end{smallmatrix}\right)$. Pour tout entier positif M premier à p et tout entier positif ou nul r, on pose :

$$\begin{aligned} K_1^p(M) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p),\ (c,d)\equiv(0,1)\bmod M\right\},\\ K_p(r) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\bmod p^r\right\}\end{aligned}$$

et $K_1(M;p^r) \overset{\text{déf}}{=} K_1^p(M)K_p(r)$. Il s'agit de sous-groupes ouverts respectivement de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$. On note $Y_1(M;p^r) \overset{\text{déf}}{=} Y(K_1(M;p^r))$ la courbe modulaire (ouverte) classifiant les courbes elliptiques avec structure de niveau $\Gamma_1(M)$ en dehors de p et structure de niveau $\Gamma(p^r)$ en p.

Le complété p-adique d'un $\mathbb{Z}_p$-module X est par définition le $\mathbb{Z}_p$-module :

$$\widehat{X} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n X/p^nX.$$

Pour $i \in \{0,1\}$ (resp. $i \in \{1,2\}$), on note $\widehat{H}^i(K_1^p(M))$ (resp. $\widehat{H}_c^i(K_1^p(M))$) le complété p-adique du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H^i(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$ (resp. du $\mathbb{Z}_p$-module $\varinjlim_r H_c^i(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$) et, pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, $\widehat{H}^i(K_1^p(M))_L \overset{\text{déf}}{=} \widehat{H}^i(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$ (resp. $\widehat{H}_c^i(K_1^p(M))_L \overset{\text{déf}}{=} \widehat{H}_c^i(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$). Les $\mathbb{Z}_p$-modules $\widehat{H}^i(K_1^p(M))$ et $\widehat{H}_c^i(K_1^p(M))$ sont sans torsion et munis d'actions naturelles de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$ induites par leurs actions sur $\varinjlim_r H^i(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$ et $\varinjlim_r H_c^i(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ fait de $\widehat{H}^i(K_1^p(M))_L$ et $\widehat{H}_c^i(K_1^p(M))_L$ des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires qui sont admissibles ([**24**, Th.2.2.13]).

Si $i=1$, par [**9**, Lem.2.2.1] ou [**24**, Prop.4.3.9], l'application naturelle de la cohomologie à support compact vers la cohomologie :

$$\widehat{H}_{\mathrm{c}}^1(K_1^p(M)) \longrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M)) \tag{7}$$

est surjective et on note $\widehat{M}$ son noyau. Il est encore muni des actions induites de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$. Ce noyau admet une description explicite simple que nous donnons maintenant.

Si K_f est un sous-groupe ouvert compact quelconque de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, rappelons que l'ensemble des pointes de la courbe modulaire $Y(K_f)$ admet la description adélique :

$$C(K_f) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \times \pi_0 \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f))/K_f \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K_f$$

où $\mathrm{T}(\mathbb{Q})^+$ est le sous-groupe de $\mathrm{T}(\mathbb{Q})$ des matrices diagonales de déterminant positif et π_0 le groupe des composantes connexes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Passant à la limite projective sur K_f, on obtient la description suivante de l'ensemble profini $\widehat{C} \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{K_f} C(K_f)$:

$$\widehat{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} (\pm\mathrm{N}(\widehat{\mathbb{Z}}))\backslash\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}). \tag{8}$$

L'application « déterminant » induit une surjection :

$$\widehat{C} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}_{>0}^\times\backslash\mathbb{A}_f^\times \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{Z}}^\times \tag{9}$$

qui s'identifie à la limite projective de la surjection $C(K_f) \to \pi_0(Y(K_f))$ envoyant une pointe vers la composante connexe qui la contient. Comme $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ normalise

$\mathrm{T}(\mathbb{Q})^{+}\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)$, la multiplication à gauche par $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ induit (via (8)) une action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$. On définit un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ par :

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{cyclo}(\sigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et cyclo : $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ est le caractère cyclotomique adélique. Cet homomorphisme et l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$ induisent une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{C}$ qui s'identifie à la limite projective de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $C(K_f)$.

On note $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)$ (resp. $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}, \mathbb{Z}_p)$) l'espace des fonctions de $\widehat{C}$ (resp. de $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$) dans $\mathbb{Z}_p$ qui sont continues en les variables p-adiques et localement constantes en les autres. L'action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$ fait de $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)$ une $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$-représentation. Via (9), $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}, \mathbb{Z}_p)$ s'identifie à un sous-$\mathbb{Z}_p$-module invariant de $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)$ et on pose :

$$\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)/\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}, \mathbb{Z}_p).$$

C'est un $\mathbb{Z}_p$-module sans torsion muni des actions de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ induites par leurs actions sur $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)$ (elles-mêmes déduites de l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\widehat{C}$). Ces actions commutent avec celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

Proposition 3.1.1. — *Le $\mathbb{Z}_p$-module $\widehat{M}$ muni des actions de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et de $\mathbb{T}$ est isomorphe au sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ de $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)$ muni des actions induites ci-dessus de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *et* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *et où l'action de T_ℓ (resp. S_ℓ) pour $\ell \nmid Mp$ est l'action de la double classe* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ *(resp.* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\left(\begin{smallmatrix} \ell & 0 \\ 0 & \ell \end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$*) dans l'algèbre de Hecke de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ *dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

Démonstration. — C'est un résultat bien connu, qui s'obtient par exemple en passant à la limite projective sur n dans la suite exacte (1) de [**9**, §2.1]. Pour la comparaison de l'action classique de $\mathbb{T}$ sur $\widehat{M}$ avec l'action de l'algèbre de Hecke (en les premiers ℓ, $(\ell, M) = 1$) sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$, cf. la preuve de [**24**, Prop.4.4.2]. □

Il va être nécessaire de décrire explicitement l'action de $\mathbb{T}$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$. Si $a \in \mathbb{Z}_{Mp}^{\times}$, on note $a_p \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ l'image de a par la projection naturelle $\mathbb{Z}_{Mp}^{\times} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p^{\times}$ et $\hat{a} \in \widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ un élément quelconque de $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ qui s'envoie sur a par la projection naturelle $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{Mp}^{\times}$. Comme l'action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ sur $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)$ commute avec l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, elle préserve le sous-module $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$. Nous allons utiliser cette action de $\mathrm{T}(\mathbb{A}_f)$ pour définir deux actions de $\mathbb{Z}_{Mp}^{\times}$ sur $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{Mp}^{\times}$, $f \in \mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C}, \mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ et $\hat{c} \in \widehat{C}$, posons :

$$(\langle a \rangle_1 f)(\hat{c}) \stackrel{\text{déf}}{=} a_p f\left(\left(\begin{smallmatrix} \hat{a}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\hat{c}\right)$$

(ici a_p agit simplement par la multiplication par $a_p \in \mathbb{Z}_p^\times$) et :

$$(\langle a\rangle_2 f)(\hat{c}) \overset{\text{déf}}{=} f\Big(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{a}^{-1}\end{pmatrix}\hat{c}\Big).$$

Ces actions sont bien définies indépendamment du choix du relevé $\hat{a}$, ce que l'on peut vérifier en utilisant l'identification :

$$\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)} = \mathscr{C}^0(\widehat{C}/K_1^p(M),\mathbb{Z}_p), \tag{10}$$

où le module de droite est le module des fonctions continues sur $\widehat{C}/K_1^p(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(\mathbb{Q})^+\mathrm{N}(\mathbb{A}_f)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K_1^p(M)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$. Chacune de ces actions préserve le sous-module $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{\mathbb{Z}}^\times,\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ de $\mathscr{C}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ et induit donc une action (notée de la même manière) de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$.

Lemme 3.1.2. — *Si ℓ ne divise pas Mp, l'action de T_ℓ (resp. de ℓS_ℓ) sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ est donnée par $\langle\ell\rangle_1+\langle\ell\rangle_2$ (resp. par $\langle\ell\rangle_1\langle\ell\rangle_2$).*

Démonstration. — C'est un calcul facile en utilisant (10) et la description adélique de $\widehat{C}$ donnée par (8). □

Corollaire 3.1.3. — *Le module de Hecke $\widehat{M}$ est Eisenstein.*

Démonstration. — Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et λ un système de valeurs propres de Hecke tel que $\widehat{M}_L^\lambda \neq 0$. Par la proposition 3.1.1, on peut transférer les deux actions $\langle\,\rangle_1$ et $\langle\,\rangle_2$ de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$ sur $\widetilde{\mathscr{C}}^{0,\mathrm{lc}}(\widehat{C},\mathbb{Z}_p)^{K_1^p(M)}$ en actions sur $\widehat{M}$, et donc sur $\widehat{M}\otimes_{\mathbb{Z}_p} L$. Ces actions préservent $\widehat{M}_L^\lambda \neq 0$ et, par le lemme 3.1.2, vérifient les égalités :

$$\langle\ell\rangle_1+\langle\ell\rangle_2=\lambda(T_\ell),\quad \langle\ell\rangle_1\langle\ell\rangle_2=\ell\lambda(S_\ell). \tag{11}$$

Les automorphismes $\langle\ell\rangle_i$ ($i=1,2$) de $\widehat{M}_L^\lambda$ satisfont donc $\langle\ell\rangle_i^2-\lambda(\ell)\langle\ell\rangle_i+\ell\lambda(S_\ell)=0$. Quitte à agrandir L, on peut factoriser ces équations quadratiques sur L (pour tout ℓ), et conclure que $\widehat{M}_L^\lambda$ contient un sous-espace non-nul sur lequel $\langle\,\rangle_1$ et $\langle\,\rangle_2$ agissent par un caractère de $\mathbb{Z}_{Mp}^\times$. De plus, ces caractères sont forcément continus car tel est le cas des automorphismes $\langle\,\rangle_1$ and $\langle\,\rangle_2$. Par (11), le système de valeurs propres est bien Eisenstein. □

3.2. — On définit le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach p-adique $\Pi_p(f)$ associé à une forme modulaire f.

Pour tout $k\geq 2$ et tout (M,r) comme au §3.1, on note $\mathscr{V}_{k-2}$ le système local sur $Y_1(M;p^r)$ associé à la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}\,\mathbb{Q}_p^2$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ et on pose :

$$\begin{aligned} H^1(K_1^p(M),\mathscr{V}_{k-2}) &\overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r H^1(Y_1(M;p^r),\mathscr{V}_{k-2}),\\ H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M),\mathscr{V}_{k-2}) &\overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^r),\mathscr{V}_{k-2}).\end{aligned}$$

Ces espaces sont naturellement munis d'actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$ qui commutent entre elles. De plus, l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est lisse. Par [**24**, §4.3], pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$, on a une injection commutant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}$:

$$(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^1_*(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2}) \hookrightarrow \widehat{H}^1_*(K_1^p(M))_L, \tag{12}$$

(où $* \in \{\varnothing, c\}$) dont l'image est exactement le sous-espace de $\widehat{H}^1_*(K_1^p(M))_L$ des vecteurs $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee$-localement algébriques.

Soit f une forme modulaire parabolique normalisée de poids $k \geq 2$, niveau N et caractère $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On suppose f vecteur propre des opérateurs de Hecke T_ℓ pour $\ell \nmid N$ et on note $a_\ell \in L$ la valeur propre associée. Si $N = Mp^r$ ($r \geq 0$, $(M,p) = 1$), on a par Eichler-Shimura un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$- et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\sigma(f) \otimes_L \pi_p(f) \otimes_L \pi^p(f)^{K_1^p(M)} \xrightarrow{\sim} H^1_*(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2})^f \tag{13}$$

où $* \in \{\varnothing, c\}$ et où le L-espace vectoriel non-nul $\pi^p(f)^{K_1^p(M)}$ est de dimension 1 exactement lorsque f est nouvelle en M. Combinant (13) et (12), on obtient une injection compatible aux actions de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\sigma(f) \otimes_L \big((\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f) \otimes_L \pi^p(f)^{K_1^p(M)}\big) \hookrightarrow \widehat{H}^1_*(K_1^p(M))^f. \tag{14}$$

Supposons f nouvelle en M, notons $\widehat{\pi}_p(f)$ l'adhérence dans $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L$ de la représentation localement algébrique $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$ via un plongement issu de (14) (c'est indépendant du plongement) et posons :

$$\Pi_p(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L\big)$$

que l'on munit de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induite par l'action sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_L$. Les deux L-espaces vectoriels $\widehat{\pi}_p(f)$ et $\Pi_p(f)$ sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires admissibles et on a une immersion fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\widehat{\pi}_p(f) \hookrightarrow \Pi_p(f)$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\widehat{\pi}_p(f)$ est aussi l'adhérence de $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$ dans $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ ([**9**, Prop.2.2.3]). Montrer que la composante $\sigma(f)$-isotypique de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ redonne encore $\Pi_p(f)$ requiert quelques préliminaires.

Lemme 3.2.1. — *L'ensemble des nombres premiers ℓ ne divisant pas Mp tels que l'image de* Frob_ℓ *par $\sigma(f)$ est scalaire est de densité nulle.*

Démonstration. — Si $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble de tous les nombres premiers et $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}$ un sous-ensemble quelconque, rappelons que la densité de $\mathscr{S}$ (lorsqu'elle existe) est par définition :

$$d(\mathscr{S}) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} \leq 1.$$

Soit $\sigma(f)^0 : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ un $\mathscr{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\sigma(f)$ et $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_n$ pour $n \in \mathbb{Z}_{>0}$) l'ensemble des nombres premiers ℓ ne divisant pas Mp

tels que l'image de Frob_ℓ par $\sigma(f)$ (resp. $\sigma(f)^0 \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L$) est scalaire. Notons $G_n \subseteq \mathrm{PGL}_2(\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L)$ l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ par la représentation projective :

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sigma(f)^0} \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L)$$

et $K_n \subset \overline{\mathbb{Q}}$ l'extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}$ telle que $\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} G_n$. Le théorème de Čebotarev (voir e.g. [**46**, §2.1]) appliqué à l'extension $K_n/\mathbb{Q}$ implique que $d(\mathscr{S}_n)$ existe et vaut :

$$d(\mathscr{S}_n) = \frac{1}{\#\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})} = \frac{1}{\#G_n}.$$

Or, par [**39**, Th.4.3], l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathscr{O}_L)$ donnée par la représentation $\sigma(f)^0$ « projectivisée » est infinie, donc le cardinal de G_n tend vers $+\infty$ avec n, d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} d(\mathscr{S}_n) = 0. \tag{15}$$

Mais pour tout n, on a :

$$0 \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S}_n \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} = d(\mathscr{S}_n)$$

d'où avec (15) en faisant $n \to +\infty$:

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\#\{\ell \in \mathscr{S} \mid \ell \leq x\}}{\#\{\ell \in \mathscr{P} \mid \ell \leq x\}} = d(\mathscr{S})$$

ce qui achève la preuve. □

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de nombres premiers ne divisant pas Mp et X un module de Hecke, on note :

$$X_L^{\mathscr{S},f} \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in X \otimes_{\mathbb{Z}_p} L \mid \forall\ \ell \in \mathscr{S},\ T_\ell x = a_\ell x,\ S_\ell x = \ell\chi(\ell)x\}.$$

Lemme 3.2.2. — *Soit $\mathscr{S}$ un ensemble de nombres premiers ne divisant pas Mp de densité 1, les injections $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f} \hookrightarrow \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^f$ et $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f} \hookrightarrow \widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^f$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Notons $(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_L)^{\mathscr{S},f} \stackrel{\text{déf}}{=} (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_L) \cap \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f}$ et soit $x = (x_n) \in (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathscr{O}_L)^{\mathscr{S},f}$ où :

$$x_n \in H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M), \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L) \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_m H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m), \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L).$$

Il suffit de montrer que, $\forall\ n$, $T_\ell x_n = a_\ell x_n$ et $S_\ell x_n = \ell\chi(\ell)x_n$ pour *tout* ℓ premier ne divisant pas Mp. Soit m tel que $x_n \in H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m), \mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L)$, ℓ un nombre premier ne divisant pas Mp, $\hat{x}_n$ un relevé de x_n dans $H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m), \mathscr{O}_L)$ et $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres premiers dans $\mathscr{S}$ telle que, dans le groupe de Galois de l'extension maximale de $\mathbb{Q}$ non-ramifiée en dehors de Mp, on ait $\mathrm{Frob}_{\ell_i} \to \mathrm{Frob}_\ell$ quand $i \to +\infty$ (notons que cela implique ℓ_i tend vers ℓ dans $\mathbb{Z}_p^\times$). Une telle suite existe par le théorème de Čebotarev puisque $\mathscr{S}$ est de densité 1. Par les relations d'Eichler-Shimura (et la structure galoisienne connue de $H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m),\mathscr{O}_L)\otimes L)$, on a alors aussi $T_{\ell_i}\to T_\ell$ et $S_{\ell_i}\to S_\ell$ comme endomorphismes de $H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(M;p^m),\mathscr{O}_L)$. En particulier, pour $i\gg 0$, on a $T_{\ell_i}x_n=a_{\ell_i}x_n=a_\ell x_n$ et $T_{\ell_i}x_n=T_\ell x_n$ d'où $T_\ell x_n=a_\ell x_n$. De même pour $i\gg 0$, on a $S_{\ell_i}x_n=\ell_i\chi(\ell_i)x_n=\ell\chi(\ell)x_n$ et $S_{\ell_i}x_n=S_\ell x_n$ d'où $S_\ell x_n=\ell\chi(\ell)x_n$. La preuve pour $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ est la même. □

Proposition 3.2.3. — *On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^f\big)\xrightarrow{\sim}\Pi_p(f).$$

Démonstration. — Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas Mp tels que Frob_ℓ n'est pas scalaire sur $\sigma(f)$. Par le lemme 3.2.1, $\mathscr{S}$ est de densité 1 et par le lemme 3.2.2, il suffit de montrer l'énoncé avec $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^{\mathscr{S},f}$ au lieu de $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^f$. Munissons $\Pi_p(f)$ de l'action des opérateurs de Hecke induite par leur action sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L$ (qui commute avec celle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$). Il suffit de montrer que, pour tout $x\in\Pi_p(f)$ et tout $\ell\in\mathscr{S}$, on a $T_\ell(x)=a_\ell x$ et $S_\ell(x)=\ell^{k-2}\chi(\ell)x$. On a une injection canonique Galois- et Hecke-équivariante :

$$\begin{array}{rcl}\sigma(f)\otimes_{\mathscr{O}_L}\Pi_p(f) & \hookrightarrow & \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L\\ v\otimes x & \mapsto & x(v)\end{array}$$

(l'injection résultant de l'irréductibilité de $\sigma(f)$). Soit $(v,x)\in\sigma(f)\times\Pi_p(f)$, les relations d'Eichler-Shimura $\mathrm{Frob}_\ell^{-2}-T_\ell\circ\mathrm{Frob}_\ell^{-1}+\ell S_\ell=0$ (encore valables sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ par passage à la limite sur les relations à niveau fini) et les propriétés de $\sigma(f)|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)}$ impliquent l'égalité :

$$-\mathrm{Frob}_\ell^{-1}(v)\otimes(T_\ell-a_\ell)(x)+v\otimes(\ell S_\ell-\ell^{k-1}\chi(\ell))(x)=0$$

dans $\sigma(f)\otimes_L\Pi_p(f)$ pour tout $v\in\sigma(f)$ et tout $x\in\Pi_p(f)$. Comme Frob_ℓ n'est pas scalaire sur $\sigma(f)$, en fixant x et en faisant varier v dans $\sigma(f)$, on en déduit aisément $(T_\ell-a_\ell)(x)=0$ et $(S_\ell-\ell^{k-2}\chi(\ell))(x)=0$. □

Proposition 3.2.4. — *On a :*

$$\Pi_p(f)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L^f\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\big).$$

Démonstration. — L'isomorphisme de gauche se prouve exactement comme celui de la proposition 3.2.3 grâce aux lemmes 3.2.1 et 3.2.2. Il suffit donc de montrer que l'application naturelle :

(16)
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),(\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f\big)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f\big)$$

est un isomorphisme. Notons $\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}\overset{\text{déf}}{=}\mathbb{T}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathscr{O}_L$ et $I\subset\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}$ l'idéal engendré par $T_\ell-a_\ell$ et $S_\ell-\ell^{k-2}\chi(\ell)$. La surjection (7) induit une suite exacte :

$$0\longrightarrow\widehat{M}_L\longrightarrow\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L\longrightarrow\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L\longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I,-)$, on obtient une suite exacte :

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow (\widehat{M}_L)^f \longrightarrow (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f &\longrightarrow (\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L).\end{aligned}$$

On a $(\widehat{M}_L)^f = 0$ par le corollaire 3.1.3 car f est parabolique, d'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f \longrightarrow (\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L),$$

qui induit une nouvelle suite exacte :

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}&\big(\sigma(f), (\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L)^f\big) \\ &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), (\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L)^f\big) \\ &\qquad\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L)\big).\end{aligned}$$

Par la proposition 3.1.1, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\widehat{M}_L$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^{\mathrm{ab}}$ et il en est donc de même de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L)$. Comme $\sigma(f)$ est une $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-représentation absolument irréductible, on en déduit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f), \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}}(\mathbb{T}_{\mathscr{O}_L}/I, \widehat{M}_L)\big) = 0$$

d'où l'isomorphisme recherché. □

3.3. — On énonce la conjecture de compatibilité local-global 1.1.1 de l'introduction.

On fixe une forme modulaire comme au §3.2 avec f nouvelle sur $\Gamma_1(Mp^r)$ et on suppose de plus que $\pi_p(f)$ est une série principale de sorte que l'on peut écrire :

$$(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f) = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp}, \leq \mathrm{k}-2}$$

où $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ est de poids classique k, χ_2 est localement constant et $\chi_1\chi_2 = \varepsilon^{2-k}\chi_p^{-1}$ (χ_p est la composante locale en p de χ vu comme caractère de $\mathbb{A}_f^\times$). On pose $\sigma_p(f) \overset{\text{déf}}{=} \sigma(f)\,|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$. Dans ce cas, par **[40]** $\sigma_p(f)$ devient cristalline sur l'extension abélienne totalement ramifiée $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$. On suppose enfin $\sigma_p(f)$ réductible ou, ce qui est équivalent quitte à modifier χ_1 et χ_2 en utilisant l'entrelacement sur les induites lisses, $\mathrm{val}(\chi_2(p)) = k-1$ et $\mathrm{val}(\chi_1(p)) = 1-k$. On pose $\eta_1 \overset{\text{déf}}{=} \chi_1\,|\;|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2}$, $\eta_2 \overset{\text{déf}}{=} \chi_2\,|\;|^{k-1}\,\varepsilon^{2-k}$ et on a comme au §2.3 :

$$\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \chi_1\,|\;|^{1-k}\,\varepsilon^{k-2} & * \\ 0 & \chi_2\,|\;|^{k-1}\,\varepsilon^{1-k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}.$$

La nullité ou non de $*$ (rappelons que si $*$ est non-nul, il n'y a qu'une seule extension possible) est liée au paramètre de la filtration de Hodge sur le φ-module filtré $D_p(f) \overset{\text{déf}}{=}$

$D_{\mathrm{pcris}}(\sigma_p(f))$. On montre en effet facilement (cf. [**31**]) :

$$\begin{array}{rcl} D_p(f) & = & Le_1 \oplus Le_2 \\ \varphi(e_1) & = & \chi_2(p)e_1 \\ \varphi(e_2) & = & p^{k-1}\chi_1(p)e_2 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} & = & D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})},\ i \leq 0 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} & = & \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \cdot (e_1 + \delta x e_2),\ 1 \leq i \leq k-1 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} & = & 0,\ i \geq k \end{array}$$

où $D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})} \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_p(f)$, $x \in (\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^\times$ ne dépend que des caractères $\chi_1 z^{k-2}$ et χ_2 et $\delta \in \{0,1\}$ est le « paramètre » de la filtration de Hodge. Il y a aussi une action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})/\mathbb{Q}_p)$ sur $D_p(f)$ préservant $\mathrm{Fil}^{k-1}D_p(f)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ que l'on ne donne pas ici (voir [**31**]). On voit que $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement si $\delta = 0$.

Proposition 3.3.1. — *On a un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant :*

$$\widehat{\pi}_p(f) \simeq \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\right)^{\mathscr{C}^0}.$$

En particulier $\widehat{\pi}_p(f)$ *est topologiquement irréductible et s'identifie au complété de* $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes \pi_p(f)$ *par rapport à un (quelconque)* $\mathscr{O}_L$*-réseau de type fini sur* $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$.

Démonstration. — La deuxième partie de l'énoncé, c'est-à-dire la description et les propriétés du complété de $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$ par rapport à un $\mathscr{O}_L$-réseau de type fini stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, est le contenu de la proposition 2.2.1. La première résulte du fait que tous les $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f)$, et en particulier celui induit par l'intersection avec $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))$, induisent des normes équivalentes, ce qui découle facilement de la deuxième partie (voir e.g. [**3**],Cor.5.4.4). □

Par ailleurs, on a associé au §2.3 à la représentation réductible $\sigma_p(f)$ un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $B(\sigma_p(f))$ de longueur 2, extension de $\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\right)^{\mathscr{C}^0}$ par $\widehat{\pi}_p(f)$ et scindé (comme représentation topologique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) si et seulement si $\sigma_p(f)$ l'est (comme représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$).

Conjecture 3.3.2. — *L'immersion fermée* $\widehat{\pi}_p(f) \hookrightarrow \Pi_p(f)$ *se prolonge en un isomorphisme topologique* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant :*

$$B(\sigma_p(f)) \xrightarrow{\sim} \Pi_p(f).$$

Cette conjecture, dont nous montrons une version faible dans la suite, doit être vue comme une compatibilité local-global dans le cadre d'une « correspondance de Langlands p-adique ». En effet, elle affirme que la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induite par la théorie globale (la représentation $\Pi_p(f)$) est une représentation locale « au sens de

Fontaine » (la représentation $B(\sigma_p(f))$. Comme dans le cas semi-stable ([**8**],[**9**],[**18**]), la composante $\sigma(f)$-isotypique du Banach $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L$ devrait donc contenir une information exactement « équivalente » à la donnée de $\sigma_p(f)$, ou de son module filtré.

Lorsque $\sigma_p(f)$ est scindée, nous verrons que le deuxième morceau qui apparaît dans $\Pi_p(f)$, à savoir le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\eta_1\varepsilon\otimes\eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$, est une manifestation de l'existence dans ce cas d'une forme modulaire surconvergente *compagnon* de la forme classique f. Sa réduction modulo p est d'ailleurs exactement une forme compagnon de f au sens de Serre ([**33**], [**37**], [**29**]).

4. Formes compagnons surconvergentes

On montre que, lorsque f est une forme ordinaire en p (et donc en particulier comme au §3.3), la représentation $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement si une certaine forme modulaire de pente $k-1$ associée à f est de la forme $\theta^{k-1}(g)$ où g est une forme surconvergente ordinaire de poids $2-k$ (théorème 1.1.3 de l'introduction).

4.1. — On rappelle brièvement l'interprétation en termes de théorie des représentations des notions classiques de « pente finie » et de « valeur propre de U_p ».

Supposons que f est une forme nouvelle comme au §3.3, et donc que $\pi_p(f)$ est une série principale. Avec les notations du §3.3, rappelons que l'on a :

$$\pi_p(f)=\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1z^{k-2}\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{lc}}.$$

La forme nouvelle f est de pente finie si et seulement si l'un au moins des caractères χ_1z^{k-2} ou χ_2 est non-ramifié. Si les deux sont non-ramifiés, alors f est de conducteur premier à p et est vecteur propre de T_p de polynôme de Hecke en p $X^2-(\chi_1(p)p^{k-1}+\chi_2(p))X+\chi(p)p^{k-1}$ (utiliser $\chi_1\chi_2=\chi_p^{-1}$ et $\chi_p(p)^{-1}=\chi(p)$). La forme f donne alors lieu à deux formes « p-stabilisées » vieilles en p, de pente finie et vecteurs propres de U_p pour les valeurs propres $\alpha_p\overset{\text{déf}}{=}\chi_2(p)$ et $\beta_p\overset{\text{déf}}{=}p^{k-1}\chi_1(p)$. Par exemple, $f(z)-\beta_pf(pz)$ est la vieille forme de valeur propre α_p (et de pente $k-1$).

Si un seul des deux caractères χ_1z^{k-2} ou χ_2 est non-ramifié, quitte à appliquer un entrelacement comme au §3.3 si nécessaire, on peut supposer que χ_1z^{k-2} est non-ramifié. Dans ce cas, p divise le conducteur de f et f est vecteur propre de U_p, de valeur propre $p^{k-1}\chi_1(p)$.

Soit χ_0 la p-partie de χ (un caractère de $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$) et notons $\widetilde{f}$ la forme nouvelle attachée à la forme modulaire tordue $f\otimes\chi_0^{-1}$ (qui n'est pas nouvelle, cf. ci-dessous). Alors, on a :

$$\pi_p(\widetilde{f})=\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1z^{k-2}\chi_0\otimes\chi_2\chi_0\big)^{\mathrm{lc}}=\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2|\,|\chi_0\otimes\chi_1z^{k-2}|\,|^{-1}\chi_0\big)^{\mathrm{lc}}$$

(où l'on a étendu χ_0 en un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$ en posant $\chi_0(p)=1$). Le caractère $\chi_2|\,|\chi_0$ étant non-ramifié, la discussion précédente montre que $\widetilde{f}$ est de pente finie $(=k-1)$ pour la valeur propre $\chi_2(p)$ de U_p (il est alors clair que $\widetilde{f}\neq f\otimes\chi_0^{-1}$ puisque cette dernière forme est annulée par U_p). Dans la suite, nous utiliserons la formule bien connue pour $\widetilde{f}$:

$$\widetilde{f}(z) = (f|_{w_{p^r}})(z) \stackrel{\text{déf}}{=} (Ncz + p^r d)^k f\Big(\frac{p^r az + b}{Ncz + p^r d}\Big)$$

où $w_{p^r} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} p^r a & b \\ Nc & p^r d \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \equiv 1 \bmod p^r$, $a \equiv 1 \bmod M$ et $p^r ab - Mcd = 1$ (on vérifie cette formule par un calcul adélique, on peut aussi utiliser les formules explicites de [**30**, §6] par exemple).

4.2. — On donne quelques préliminaires sur la connexion de Gauss-Manin pour les courbes modulaires et l'opérateur θ^{k-1} (voir [**13**] et le début de [**12**] par exemple).

Dans tout ce qui suit, on utilise sans commentaire le fait que la cohomologie d'un faisceau cohérent sur un schéma propre X sur $\mathbb{Q}_p$ est la même que celle du faisceau « image inverse » sur la variété rigide analytique déduite de X (GAGA rigide).

On fixe d'abord un entier $N > 4$ et on note $\pi : E \to X_1(N)$ la courbe elliptique généralisée universelle au-dessus de la courbe modulaire usuelle $X_1(N)$ (associée au groupe de congruence $\Gamma_1(N)$) propre sur le corps $\mathbb{Q}_p$, $C \subset X_1(N)$ le sous-schéma fermé des pointes, $\tilde{C} \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^{-1}(C)$, $\omega \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_*\Omega^1_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})$ et :

$$\mathscr{H}_{k-2} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Sym}^{k-2}\big(\mathrm{R}^1\pi_*\Omega^{\cdot}_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})\big)$$

(avec $\mathscr{H}_0 = \mathscr{O}_{X_1(N)}$). Rappelons que le faisceau ω est inversible sur $X_1(N)$, le faisceau $\mathrm{R}^1\pi_*\Omega^{\cdot}_{E/X_1(N)}(\log \tilde{C})$ localement libre de rang 2 et le faisceau $\mathscr{H}_{k-2}$ localement libre de rang $k-1$. On a de plus une filtration canonique décroissante $(\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2})_{i\in\mathbb{Z}}$ sur $\mathscr{H}_{k-2}$ par des sous-$\mathscr{O}_{X_1(N)}$-modules $\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2}$ localement facteurs directs (la filtration de Hodge) tels que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2} = \mathscr{H}_{k-2},\ i \leq 0\\
&\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2} \text{ localement libre de rang } k-1-i,\ 1 \leq i \leq k-2\\
&\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2} = 0,\ i \geq k-1.
\end{aligned}$$

Cette filtration se détermine à partir de $\mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_1 = \omega$ et $\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_r \cdot \mathrm{Fil}^j\mathscr{H}_s = \mathrm{Fil}^{i+j}\mathscr{H}_{r+s}$ pour $0 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq s$. On a donc $\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2} = \omega^{k-2}$ et, plus généralement, on montre que, pour $0 \leq i \leq k-2$, $\mathrm{gr}^i\mathscr{H}_{k-2} \simeq \omega^{2i-k+2}$. La connexion de Gauss-Manin s'étend en un complexe de de Rham logarithmique :

$$\mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log) : \mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{H}_{k-2} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)$$

et vérifie la transversalité de Griffiths, i.e. définit des sous-complexes pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Fil}^i\mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Fil}^{i-1}\mathscr{H}_{k-2} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C).$$

De plus, elle induit des isomorphismes sur les gradués pour $0 \leq i \leq k-2$:

$$\omega^{2i-k+2} \overset{\nabla}{\xrightarrow{\sim}} \omega^{2i-k} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C) \tag{17}$$

(si $k = 2i$, il s'agit simplement de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer $\omega^2 \simeq \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)$). Si l'on note $\mathrm{Fil}^i\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ le groupe de cohomologie :

$$\mathbb{H}^1\Big(X_1(N), \mathrm{Fil}^i \mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathrm{Fil}^{i-1}\mathscr{H}_{k-2} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)\Big),$$

on vérifie par un calcul cohomologique évident à partir de (17) que l'on a une injection $\mathrm{Fil}^1\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big) \hookrightarrow \mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$, que $\mathrm{Fil}^i\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ est constant si $1 \leq i \leq k-1$ et que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Fil}^{k-1}\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big) &\simeq H^0\big(X_1(N), \omega^{k-2} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1(N)}} \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)\big)\\ &\simeq H^0(X_1(N), \omega^k)\end{aligned}$$

(via Kodaira-Spencer). Rappelons enfin que l'application composée :

$$\psi \ : \ \mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_{k-2} \hookrightarrow \mathscr{H}_{k-2} \xrightarrow{\nabla} \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^1(\log C) \twoheadrightarrow (\mathscr{H}_{k-2}/\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}) \otimes \Omega^1(\log C)$$

est un isomorphisme (utiliser (17)) qui induit un morphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire canonique de faisceaux sur $X_1(N)$:

$$\begin{aligned}\omega^{-k+2} \simeq \mathrm{gr}^0\mathscr{H}_{k-2} &\longrightarrow \mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C) \simeq \omega^k\\ \overline{s} &\longmapsto \nabla\big(s - \psi^{-1}(\overline{\nabla(s)})\big)\end{aligned}$$

où s est un relevé quelconque de $\overline{s}$ dans $\mathscr{H}_{k-2}$ et $\overline{\nabla(s)}$ l'image de $\nabla(s)$ dans $(\mathscr{H}_{k-2}/\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}) \otimes \Omega^1_{X_1(N)/\mathbb{Q}_p}(\log C)$. Si $U \subset X_1(N)$ est un ouvert connexe quelconque de la variété rigide associée à $X_1(N)$ et contenant la pointe à l'infini, l'application induite $H^0(U, \omega^{2-k}) \to H^0(U, \omega^k)$ s'identifie à $\frac{(-1)^k}{k!}\theta^{k-1}$ sur les q-développements où θ est l'opérateur $q(d/dq)$ sur $\mathbb{Q}_p[[q]]$ (voir [**12**, §9] pour plus de détails). Par abus de notation, pour tout ouvert rigide $U \subset X_1(N)$ (pas forcément connexe) on note encore $\theta^{k-1} : H^0(U, \omega^{2-k}) \to H^0(U, \omega^k)$ l'application précédente multipliée par $k!(-1)^k$.

Lemme 4.2.1. — *Soit U un ouvert quasi-Stein de $X_1(N)$ vue comme variété rigide sur $\mathbb{Q}_p$. L'injection :*

$$H^0(U, \omega^k) \simeq H^0(U, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \hookrightarrow H^0(U, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^1(\log C))$$

induit un isomorphisme :

$$\begin{aligned}\frac{H^0(U, \omega^k)}{\theta^{k-1}\big(H^0(U, \omega^{2-k})\big)} &\xrightarrow{\sim} \frac{H^0\big(U, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)\big)}{\nabla\big(H^0(U, \mathscr{H}_{k-2})\big)}\\ &\simeq \mathbb{H}^1\big(U, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big).\end{aligned}$$

Démonstration. — Le deuxième isomorphisme résulte du fait que $H^q(U, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur U. On a une suite exacte de faisceaux sur

$X_1(N)$ (avec les notations ci-dessus) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^0\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \overline{s} & \mapsto & s-\psi^{-1}(\overline{\nabla(s)}) & & & & \\ & & & & t & \mapsto & \psi^{-1}(\overline{\nabla(t)}) & & \end{array}$$

qui s'inscrit dans une suite exacte de complexes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^0\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^1\mathscr{H}_{k-2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \frac{(-1)^k}{k!}\theta^{k-1}\downarrow & & \downarrow\nabla & & \downarrow\psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C) & \longrightarrow & \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^1(\log C) & \longrightarrow & \frac{\mathscr{H}_{k-2}}{\mathrm{Fil}^{k-2}\mathscr{H}_{k-2}}\otimes\Omega^1(\log C) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le $\mathbb{H}^1$ du complexe de gauche s'identifie à $\frac{H^0(U,\omega^k)}{\theta^{k-1}(H^0(U,\omega^{2-k}))}$ car U est quasi-Stein. La suite exacte longue de cohomologie associée donne alors le résultat puisque la cohomologie du complexe de droite est nulle. □

Soit maintenant un entier N tel que $1 \leq N \leq 4$. La discussion précédente ne s'applique pas telle quel car la courbe $X_1(N)$ n'est plus un espace de modules fin. Nous suivons dans ce cas la méthode décrite dans l'appendice de **[10]**. On choisit un nombre premier $q > 2$, $q \nmid Np$ et on considère la courbe modulaire $X_1(N;q)$ associée au sous-groupe de congruence $\Gamma_1(N) \cap \Gamma(q)$. Le choix de q est tel que cette courbe est maintenant un espace de modules fin pour le problème de modules paramétrant les courbes elliptiques E munies d'un point d'ordre exact N et d'un isomorphisme $\imath : E[q] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$. L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des isomorphismes $\imath$ induit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sur $X_1(N;q)$ dont le quotient est $X_1(N)$. Comme $X_1(N;q)$ est un espace de modules fin, la discussion précédente s'applique *mutatis mutandis* à $X_1(N;q)$. De plus, tous les faisceaux et connexions en considération sont naturellement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-équivariants. En particulier, si on suppose dans l'analogue du lemme 4.2.1 pour $X_1(N;q)$ que l'ouvert quasi-Stein U est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-invariant, alors l'isomorphisme de ce lemme est aussi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-équivariant.

4.3. — On montre le théorème 1.1.3 lorsque $(N,p)=1$.

On conserve les notations du §4.2 et on suppose ici de plus $(N,p)=1$. On fixe f une forme modulaire comme au §3.3, de sorte que $\sigma_p(f)$ est en particulier cristalline. Dans ce cas, χ_p est le caractère non-ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur $\chi(p)^{-1}$, χ_2 est non-ramifié et on pose $\alpha_p \overset{\text{déf}}{=} \chi_2(p)$, $\beta_p \overset{\text{déf}}{=} p^{k-1}\chi_1(p)$. On a $\mathrm{val}(\beta_p)=0$, $\alpha_p\beta_p = \chi(p)p^{k-1}$

et, d'après le §3.3 :

$$\begin{aligned} D_p(f) &= Le_1 \oplus Le_2 \\ \varphi(e_1) &= \alpha_p e_1 \\ \varphi(e_2) &= \beta_p e_2 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &= D_p(f),\ i \leq 0 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &= L(e_1 + \delta e_2),\ 1 \leq i \leq k-1 \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &= 0,\ i \geq k \end{aligned}$$

avec $\delta = 0$ si et seulement si $\sigma_p(f)$ est scindée.

Supposons d'abord $N > 4$. Le φ-module filtré $D_p(f)$ admet alors la description géométrique suivante (voir e.g. [**29**, §1]) :

$$\begin{aligned} D_p(f) &\simeq \big(\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big)^f \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &\simeq \big(H^0(X_1(N), \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big)^f,\ 1 \leq i \leq k-1 \\ &= L \cdot f \end{aligned}$$

(en se rappelant que f est nouvelle) où le Frobenius φ sur $D_p(f)$ provient du Frobenius cristallin φ sur $\mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$.

Soit $\mathscr{X}$ le modèle propre et lisse de $X_1(N)$ sur $\mathbb{Z}_p$ et soit $A \in H^0\big(\mathscr{X} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p, \omega^{p-1}\big)$ l'invariant de Hasse. Rappelons que A s'annule à l'ordre 1 en chaque point supersingulier de $\mathscr{X} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ (et ne s'annule pas aux autres points). Si $x \in X_1(N)(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, notons $\overline{x}$ la spécialisation de x dans $(\mathscr{X} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p)(\overline{\mathbb{F}_p})$. Comme il est expliqué dans l'appendice de [**10**], pour chaque $\eta \in p^{\mathbb{Q}}$ avec $p^{-1} \leq \eta < 1$, on peut définir un ouvert rigide analytique quasi-Stein $W(\eta)$ de $X_1(N)$ via :

$$x \in W(\eta) \Leftrightarrow |A(\overline{x})| > \eta.$$

Si $p > 3$, alors $W(\eta) \subset X_1(N)$ est l'ouvert rigide analytique des points fermés x de $X_1(N)$ vérifiant :

$$x \in W(\eta) \Leftrightarrow |E_{p-1}(x)| > \eta$$

où $E_{p-1} \in H^0(X_1(N), \omega^{p-1})$ est la série d'Eisenstein de poids $p-1 \geq 4$ et niveau 1 (voir [**13**, §1 et §2]).

Soit $W_1 \overset{\text{déf}}{=} W(p^{-p/(p+1)})$. Comme W_1 est quasi-Stein, on a :

$$\mathbb{H}^1\big(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big) = \frac{H^0\big(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)\big)}{\nabla\big(H^0(W_1, \mathscr{H}_{k-2})\big)}$$

et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(W_1, \omega^k) & \rightarrow & \mathbb{H}^1\big(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(X_1(N), \omega^k) & \hookrightarrow & \mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big) \end{array} \tag{18}$$

où les deux flèches verticales sont injectives (pour la deuxième, cela se déduit facilement de [**2**, Th.2.1 et Th.2.4]). Soit $W_2 \overset{\text{déf}}{=} W(p^{-1/(p+1)}) \subset W_1$. Notons E_2 et E_1 les courbes elliptiques généralisées universelles au-dessus de W_2 et W_1, alors on dispose d'un diagramme commutatif (cf. [**13**, §2]) :

$$
\begin{array}{ccc}
E_2 & \xrightarrow{\Phi} & E_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
W_2 & \xrightarrow{\phi} & W_1
\end{array}
\tag{19}
$$

qui induit par fonctorialité des applications « Frobenius » :

$$
\begin{aligned}
\phi : H^0(W_1, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) &\longrightarrow H^0(W_2, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \\
\Phi : \mathbb{H}^1(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) &\longrightarrow \mathbb{H}^1(W_2, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)).
\end{aligned}
$$

D'un point de vue « espaces de modules », l'application $\phi : W_2 \to W_1$ envoie (E, P) (où E est une courbe elliptique généralisée au-dessus d'un point de W_2 et P un point rationnel sur E d'ordre « exact » N) sur $(E/\mathrm{can}, \overline{P})$ où $\mathrm{can} \subset E$ est le sous-groupe canonique de E ([**35**, §3]) et $\overline{P}$ l'image de P dans le quotient E/can.

Lemme 4.3.1. — *Le diagramme :*

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \hookrightarrow & \mathbb{H}^1(W_1, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \leftarrow & H^0(W_1, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \\
\varphi \downarrow & & \Phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \hookrightarrow & \mathbb{H}^1(W_2, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) & \leftarrow & H^0(W_2, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C))
\end{array}
$$

est commutatif.

Démonstration. — La commutation du carré de droite est évidente. Donnons l'essentiel des arguments pour montrer celle du carré de gauche. Pour alléger les notations, on note $X \overset{\text{déf}}{=} X_1(N)$, $\mathscr{X}$ le modèle propre et lisse de X sur $\mathbb{Z}_p$, $\widehat{\mathscr{X}}$ son complété p-adique formel, $\overline{X}$ leur fibre spéciale sur $\mathbb{F}_p$, $\overline{Z} \subset \overline{X}$ l'ouvert des points ordinaires et $Z \subset X$ le tube $]\overline{Z}[_{\widehat{\mathscr{X}}}$ de $\overline{Z}$ dans X au sens de [**5**, §1]. C'est un affinoïde de X. En considérant la courbe elliptique (généralisée) universelle au-dessus de $\widehat{\mathscr{X}}$, on voit que le faisceau cohérent $\mathscr{H}_{k-2}$ sur la variété propre X provient d'un faisceau cohérent sur $\widehat{\mathscr{X}}$, évaluation sur l'épaississement $\overline{X} \hookrightarrow \widehat{\mathscr{X}}$ d'un cristal $\mathscr{E}_{k-2}$ sur le site cristallin $(\overline{X}/\mathbb{F}_p)_{\mathrm{cris}}$ (plus précisément, il faut tenir compte de log-structures aux pointes et définir plutôt $\mathscr{E}_{k-2}$ comme un log-cristal sur le site log-cristallin de $\overline{X}/\mathbb{F}_p$ avec log-structure triviale sur $\mathbb{F}_p$, mais pour alléger la rédaction, nous ignorons partout dans cette preuve ce point qui ne pose pas de problèmes). Le groupe $\mathbb{H}^1(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ n'est autre que $H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{X}, \mathscr{E}_{k-2}) \otimes \mathbb{Q}_p$. En fait, $\mathscr{E}_{k-2}$ est un F-cristal non dégénéré au sens de [**5**, §2.4.1] (utiliser le Frobenius sur la courbe elliptique universelle au-dessus de $\overline{X}$) et induit, par restriction, un F-isocrystal surconvergent le long de $\overline{X} - \overline{Z}$ que l'on note $\mathscr{E}^{\dagger}_{k-2}$ (voir [**5**, §2.3]). Pour $\eta \in p^{\mathbb{Q}}$ tel que $p^{-1/(p+1)} < \eta \leq 1$, soit $Z(\eta) \subset W_2$ l'affinoïde de X dont les points fermés x sont tels que $|A(\overline{x})| \geq \eta$. On a $Z(1) = Z$ et les $(Z(\eta))_{\eta<1}$ forment un système fondamental de voisinages stricts de Z dans X au sens de [**5**, §1.2]. De plus, on a $\phi(Z(\eta)) \subset Z(\eta^p) \subset W_2$ pour $\eta > p^{-1/p(p+1)}$. Par [**2**, Th.2.4], les restrictions $\mathbb{H}^1(Z(\eta), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) \to \mathbb{H}^1(Z(\eta'), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ sont des isomorphismes pour $\eta \leq \eta'$. Posons :

$$H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{Z}, \mathscr{E}^{\dagger}_{k-2}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{\eta<1} \mathbb{H}^1(Z(\eta), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$$

muni de son endomorphisme de Frobenius Φ induit par les Frobenius $\phi : Z(\eta) \to Z(\eta^p)$ (et les Frobenius sur les courbes elliptiques universelles). La commutation du carré de gauche revient donc à montrer que la restriction :

$$H^1_{\mathrm{cris}}(\overline{X}, \mathscr{E}_{k-2}) \otimes \mathbb{Q}_p \to H^1_{\mathrm{rig}}(\overline{Z}, \mathscr{E}^{\dagger}_{k-2})$$

commute aux Frobenius, mais ceci est évident car du côté cristallin comme du côté rigide, l'endomorphisme de Frobenius s'obtient par fonctorialité en calculant les deux cohomologies grâce à un complexe de de Rham double sur un recouvrement ouvert de $\widehat{\mathscr{X}}$ muni de relevés locaux du Frobenius. □

Rappelons que toute section $g \in H^0(W_1, \omega^k)$ admet un q-développement $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(g)(c)q^n \in \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[[q]]$ en chaque pointe c de W_1 donné par l'évaluation de g en la courbe elliptique généralisée universelle au-dessus du complété formel de W_1 en la pointe c.

Lemme 4.3.2. — *Soit $g \in H^0(X_1(N), \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C)) \simeq H^0(X_1(N), \omega^k)$ et notons $\varphi(g) \in \mathbb{H}^1\big(X_1(N), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ l'image de g par le Frobenius cristallin. Alors, $\varphi(g)$ provient, via le diagramme (18), d'une section dans $H^0(W_1, \omega^k)$ dont le q-développement à l'infini est donné par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\varphi(g))(\infty)q^n = p^{k-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\langle p \rangle g)(\infty)q^{pn}.$$

En particulier, si $\langle p \rangle g = \chi(p)g$, alors $\varphi(g)$ est l'image de $p^{k-1}\chi(p)g(pz)|_{W_1}$.

Démonstration. — Par le lemme 4.3.1, il suffit de vérifier que, si g est une forme dans $H^0(W_1, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C))$ et si l'on note $g(\infty)(q)$ le q-développement de g à l'infini, alors $\phi(g) \in H^0(W_2, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1(\log C))$ est tel que :

$$\phi(g)(\infty)(q) = p^{k-1} g(\langle p \rangle \infty)(q^p)$$

(car $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\langle p \rangle g)(\infty)q^{pn} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g)(\langle p \rangle \infty)q^{pn}$). Pour cela, on évalue la section $\phi(g)$ sur la courbe de Tate $(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}, \zeta_N)$ (avec son point d'ordre N) au-dessus du complété en la pointe à l'infini, ce qui donne, avec les notations (standard) de [**29**, Prop.3.1.3(1)] et sachant que $\mathrm{can}(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}) = \langle\zeta_p\rangle$:

$$\begin{aligned}\phi(g)(\infty)(q)\frac{dq}{q}\otimes\left(\frac{dt}{t}\right)^{k-2} &= \phi(g)\big(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}},\zeta_N\big)(q)\frac{dq}{q}\otimes\left(\frac{dt}{t}\right)^{k-2}\\ &= g\big(\mathbb{G}_m/\langle\zeta_p,q^{\mathbb{Z}}\rangle,\zeta_N\big)(q)\frac{dq}{q}\otimes\left(\frac{dt}{t}\right)^{k-2}\\ &= g\big(\mathbb{G}_m/q^{p\mathbb{Z}},\zeta_N^p\big)(q)\frac{dq^p}{q^p}\otimes\left(\frac{dt^p}{t^p}\right)^{k-2}\\ &= p^{k-1}g(\langle p\rangle\infty)(q^p)\frac{dq}{q}\otimes\left(\frac{dt}{t}\right)^{k-2}\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Rappelons que l'on a $\theta^{k-1} : H^0(W_1,\omega^{2-k}) \to H^0(W_1,\omega^k)$ (cf. §4.2) et que $f(z)-\beta_p f(pz)$ est de niveau $\Gamma_1(Np)$ et vecteur propre de U_p de valeur propre α_p (cf. §4.1).

Théorème 4.3.3. — *Soit f une forme parabolique propre de poids $k \geq 2$ nouvelle pour le groupe $\Gamma_1(N)$ avec $(N,p) = 1$ et telle que la représentation locale $\sigma_p(f)$ est réductible. Si $N > 4$, alors $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in H^0(W_1,\omega^{2-k})\otimes L$ tel que $f(z)-\beta_p f(pz) = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1,\omega^k)\otimes L$. Si $N \leq 4$, soit $q \nmid Mp$ un nombre premier suffisamment grand, alors (en travaillant avec $X_1(N;q)$ au lieu de $X_1(N)$, cf. §4.2) $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in H^0(W_1,\omega^{2-k})^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ tel que $f(z)-\beta_p f(pz) = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1,\omega^k)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$.*

Démonstration. — La représentation $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement si, dans la description précédente de $D_p(f)$, on a $\mathrm{Fil}^{k-1}D_p(f) = Le_1$ et $\varphi(e_1) = \alpha_p e_1$. Supposons d'abord $N > 4$. Dans la réalisation géométrique de $D_p(f)$, cela est équivalent à :

$$\varphi(f)-\alpha_p f = 0$$

dans $\mathbb{H}^1\big(X_1(N),\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)\otimes L$, donc dans $\mathbb{H}^1\big(W_1,\mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)\otimes L$ (car la restriction est injective). Par le Lemme 4.3.2 et le lemme 4.2.1 appliqué à l'ouvert quasi-Stein W_1, c'est aussi équivalent à :

$$p^{k-1}\chi(p)f(pz)-\alpha_p f(z) = 0$$

dans $\big(H^0(W_1,\omega^k)/\theta^{k-1}\big(H^0(W_1,\omega^{2-k})\big)\big)\otimes L$ soit finalement :

$$f(z)-\beta_p f(pz) \in \theta^{k-1}\big(H^0(W_1,\omega^{2-k})\otimes L\big).$$

Supposons maintenant $1 \leq N \leq 4$. Comme au §4.2, on fixe un nombre premier auxiliaire $q > 2$, $q \nmid Np$ et on travaille avec la courbe $X_1(N;q)$. Le φ-module filtré

$D_p(f)$ admet alors la description géométrique suivante :

$$\begin{aligned} D_p(f) &\simeq \left(\mathbb{H}^1(X_1(N;q), \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\right)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} \\ \mathrm{Fil}^i D_p(f) &\simeq \left(H^0(X_1(N;q), \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\right)^{f,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})},\ 1 \leq i \leq k-1 \\ &= L \cdot f \end{aligned}$$

(car le théorème de comparaison de **[29]** est fonctoriel pour l'action des automorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$). En travaillant avec $X_1(N;q)$ au lieu de $X_1(N)$, on montre alors comme précédemment que $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in \left(H^0(W_1, \omega^{2-k}) \otimes L\right)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}$ tel que $f(z) - \beta_p f(pz) = \theta^{k-1}(g)$ dans $\left(H^0(W_1, \omega^k) \otimes L\right)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}$. □

4.4. — On montre le théorème 1.1.3 lorsque $(N, p) > 1$.

On conserve les notations et hypothèses du §4.3, à ceci près que l'on suppose maintenant $N = Mp^r$ avec $(M, p) = 1$ et $r \geq 1$. On fixe f une forme modulaire nouvelle comme au §3.3, de sorte que $\sigma_p(f)$ devient cristalline sur $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$. Comme $r > 0$, f est vecteur propre de U_p et on suppose de plus que f est de pente nulle, i.e. que la valuation p-adique de la valeur propre associée est 0. Rappelons que, dans ce cas, $\chi_1 z^{k-2}$ est non-ramifié et $U_p f = p^{k-1}\chi_1(p) f$ (cf. §4.1). Si U est une variété (algébrique ou rigide) définie sur un corps et K une extension finie de ce corps, on note U_K le changement de base à K. On note encore $\mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)$ le changement de base à $X_1(N)_K$ du complexe défini au §4.2.

Soit $W_r \subset X_1(M)$ l'ouvert rigide analytique des points fermés x de $X_1(M)$ vérifiant $|A(\overline{x})| > p^{-1/p^{r-2}(p+1)}$ (si $r = 1$ ou $r = 2$, on retrouve bien W_1 et W_2, cf. §4.3). Si E correspond à un point de W_r (en oubliant la structure de niveau en M), on peut définir par récurrence $E^{(0)} \overset{\text{déf}}{=} E$ et $E^{(i+1)} \overset{\text{déf}}{=} E^{(i)}/\mathrm{can}$ pour $0 \leq i \leq r-1$. On définit $W_1(p^r) \subset X_1(Mp^r)$ comme l'ouvert rigide de $X_1(Mp^r)$ des points fermés correspondants aux couples (E, Q_M, P) (où Q_M (resp. P) est un point rationnel sur E d'ordre exact M (resp. p^r)) tels que (E, Q_M) correspond à un point fermé de $X_1(M)$ qui est dans W_r et tels que l'image de $p^{r-1-i}P$ dans $E^{(i)}$ engendre le sous-groupe canonique de $E^{(i)}$ pour $0 \leq i \leq r-1$.

Supposons d'abord $M > 4$ et notons $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ le modèle propre, plat et régulier de $X_1(Mp^r)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ sur $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ construit dans **[36]** représentant le problème de modules $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}])$. Par **[36**, §13.12], la fibre spéciale de $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ est réduite, union disjointe se coupant aux points supersinguliers de courbes d'Igusa sur $\mathbb{F}_p$. Il y a exactement deux composantes irréductibles isomorphes à $\mathrm{Ig}(Mp^r)$ (courbes d'Igusa représentant le problème de modules $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{Ig}(p^r)])$ sur $\mathbb{F}_p$ au sens de **[36**, §12]). On vérifie facilement que l'une d'entre elles, que l'on note Ig_∞, contient l'image de $W_1(p^r)_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})}$ par la flèche de spécialisation. On note Ig_0 l'autre composante.

Supposons de plus M suffisamment grand pour que $X_1(Mp^r)$ et les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ soient de genre ≥ 2. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^r})$ sur laquelle $X_1(Mp^r)_K$ admet un modèle stable et $\mathbb{F}_K$ son corps résiduel. On note $X \overset{\text{déf}}{=} X_1(Mp^r)_K$, $\mathscr{X}$ le changement de base de $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ à $\mathscr{O}_K$ de $\mathscr{X}_1(Mp^r)$ et $\widetilde{\mathscr{X}}$ le modèle régulier minimal (donc stable) de X_K sur $\mathscr{O}_K$. Puisqu'il n'y a pas de contraction possible dans la fibre spéciale de $\mathscr{X}$, on a un morphisme $\widetilde{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$ qui est une succession d'éclatements sur la fibre spéciale. On note encore Ig_∞ (resp. Ig_0) l'unique composante irréductible de $\widetilde{\mathscr{X}} \times_{\mathscr{O}_K} \mathbb{F}_K$ qui s'envoie bijectivement sur $\mathrm{Ig}_\infty \times \mathbb{F}_K$ (resp. $\mathrm{Ig}_0 \times \mathbb{F}_K$) et $W_\infty \subset X$ (resp. $W_0 \subset X$) l'image inverse (i.e. le tube) de Ig_∞ (resp. Ig_0) par la flèche de spécialisation via $\widetilde{\mathscr{X}}$. On note res_∞ (resp. res_0) la restriction $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big) \to \mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ (resp. avec W_0).

Lemme 4.4.1. — *Les groupes $\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ et $\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ sont naturellement munis d'une action des opérateurs de Hecke T_ℓ et S_ℓ pour $\ell \nmid Mp$ qui commute avec celle sur $\mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ via* res_∞ *et* res_0.

Démonstration. — Par unicité du modèle régulier minimal, les automorphismes $\langle \ell \rangle$ ($\ell \nmid Mp$) de $\mathscr{X}$ s'étendent canoniquement en des automorphismes de $\widetilde{\mathscr{X}}$ et de sa fibre spéciale qui préservent Ig_∞ et Ig_0 (car tel est le cas sur la fibre spéciale de $\mathscr{X}$). Ainsi, l'automorphisme $\langle \ell \rangle$ de X préserve W_∞ et W_0 d'où l'énoncé pour S_ℓ puisque $S_\ell = \ell^{k-2}\langle \ell \rangle$. Notons $\mathscr{X}(\ell)$ le schéma régulier propre et plat sur $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^r}]$ construit dans **[36]** représentant le problème de module $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}], [\Gamma_0(\ell)])$ des isogénies $E \twoheadrightarrow E'$ de degré ℓ entre courbes elliptiques (généralisées) avec structures de niveau de type $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}])$ sur E. Soit pr_1 (resp. pr_2) la projection $\mathscr{X}(\ell) \to \mathscr{X}$ envoyant $(E \twoheadrightarrow E')$ sur E (resp. sur E' avec structures de niveau $([\Gamma_1(M)], [\mathrm{bal}.\Gamma_1(p^r)^{\mathrm{can}}])$ induites). On montre comme dans **[40]** que les deux produits fibrés $\mathscr{X}(\ell) \times_{\mathscr{X}} \widetilde{\mathscr{X}}$ (pour pr_1 et pr_2) sont isomorphes, car isomorphes au modèle régulier minimal (et stable) de $\mathscr{X}(\ell)$ sur $\mathscr{O}_K$. Notons $\widetilde{\mathrm{pr}}_1$ et $\widetilde{\mathrm{pr}}_2$ les deux projections $\mathscr{X}(\ell) \times_{\mathscr{X}} \widetilde{\mathscr{X}} \to \widetilde{\mathscr{X}}$, alors $\widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\mathrm{Ig}_\infty)$ (resp. $\widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\mathrm{Ig}_0)$) est l'unique composante irréductible de la fibre spéciale du modèle stable de $\mathscr{X}(\ell)$ dont l'image dans $\mathscr{X}(\ell)$ est la courbe d'Igusa se projetant sur $\mathrm{Ig}_\infty \times \mathbb{F}_K$ (resp. $\mathrm{Ig}_0 \times \mathbb{F}_K$) dans $\mathscr{X} \times_{\mathscr{O}_K} \mathbb{F}_K$ (par pr_1 ou pr_2). On a donc $\widetilde{\mathrm{pr}}_2(\widetilde{\mathrm{pr}}_1^{-1}(\mathrm{Ig}_\infty)) = \mathrm{Ig}_\infty$ dans $\widetilde{\mathscr{X}} \times_{\mathscr{O}_K} \mathbb{F}_K$, d'où $\mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1^{-1}(W_\infty)) = W_\infty$ dans X (resp. avec Ig_0 et W_0). C'est la condition qu'il faut pour définir par restriction un endomorphisme T_ℓ sur $\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ (resp. avec W_0) de la même manière qu'est défini T_ℓ sur $\mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ (voir **[12**, §8]). $\square$

Comme X a réduction semi-stable sur $\mathscr{O}_K$, le K-espace vectoriel $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ possède une K_0-structure canonique $\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}}$ (où $K_0 \subseteq K$ est le plus grand sous-corps absolument non-ramifié) munie d'un Frobenius semi-linéaire encore noté φ et d'un opérateur de monodromie N satisfaisant $N\varphi = p\varphi N$. Par **[27]** et **[28]** (voir aussi **[16]**), on a un isomorphisme de φ-modules filtrés à coefficients dans L :

$$\big(D_p(f)_{K_0}, \varphi, \mathrm{Fil}^{k-1} D_p(f)_K\big) \simeq \big((\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^f, \varphi \otimes 1, (H^0(X, \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^f\big). \tag{20}$$

Soit $d \overset{\text{déf}}{=} [K_0 : \mathbb{Q}_p]$ et φ^d l'automorphisme K-linéaire de $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ défini par extension des scalaires de K_0 à K de l'automorphisme φ^d sur $\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}}$. Les K-espaces vectoriels $\mathbb{H}^1\big(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ et $\mathbb{H}^1\big(W_0, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log)\big)$ sont canoniquement munis d'un Frobenius K-linéaire Φ commutant aux opérateurs T_ℓ et S_ℓ ($\ell \nmid Mp$) et tel que les restrictions res_∞ et res_0 commutent à Φ et φ^d (voir [**16**]).

Lemme 4.4.2. — *Les restrictions* res_∞ *et* res_0 *induisent un isomorphisme :*

$$\big(\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)\otimes L\big)^f \overset{\sim}{\to} \big(\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log))\otimes L\big)^f \oplus\big(\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log))\otimes L\big)^f.$$

Démonstration. — Sachant que le caractère de f en p est de conducteur exactement p^r, on a une inclusion :

$$\big(\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^{\cdot}(\log)\big)\otimes L\big)^f \subset H^1(X, \mathrm{Sym}^{k-2})^{\mathrm{prim}}\otimes L$$

où $H^1(X, \mathrm{Sym}^{k-2})^{\mathrm{prim}}$ est le groupe introduit dans [**14**, §2]. L'isomorphisme se déduit alors facilement de l'isomorphisme :

$$H^1(X, \mathrm{Sym}^{k-2})^{\mathrm{prim}}\otimes L \simeq H^1(W_\infty, \mathrm{Sym}^{k-2})^*\otimes L \oplus H^1(W_0, \mathrm{Sym}^{k-2})^*\otimes L$$

de [**14**, Th.2.1] (déduit lui-même d'une suite exacte de Mayer-Vietoris). $\square$

Soit ζ une racine primitive p^r-ième de 1. Rappelons que $\mathscr{X}$ classifie les données $(E, Q_M, \pi, (P, Q))$ où E est une courbe elliptique généralisée sur un $\mathscr{O}_K$-schéma S, Q_M un point de $E(S)$ d'ordre exact M (au sens de [**36**, §1.4]), $\pi : E \twoheadrightarrow E'$ une S-isogénie de degré p^r, $P \in \mathrm{Ker}(\pi)(S)$ un générateur (au sens « Drinfel'd ») de $\mathrm{Ker}(\pi)$ et $Q \in \mathrm{Ker}(\pi^*)(S)$ un générateur de $\mathrm{Ker}(\pi^*)$ (π^* est l'isogénie duale de π) tel que $\langle P, Q\rangle_\pi = \zeta$ où $\langle\cdot\rangle_\pi$ est l'accouplement alterné canonique entre $\mathrm{Ker}(\pi)$ et $\mathrm{Ker}(\pi^*)$ (cf. [**36**, §2.8]). On définit un automorphisme w_ζ de $\mathscr{X}$ (qui préserve X) en envoyant $(E, Q_M, \pi, (P, Q))$ sur $(E', \pi(Q_M), \pi^*, (Q, -P))$.

Lemme 4.4.3. — *L'automorphisme* w_ζ *de* X *induit des isomorphismes* $w_\zeta : W_\infty \overset{\sim}{\to} W_0$ *et* $w_\zeta : W_0 \overset{\sim}{\to} W_\infty$.

Démonstration. — Par unicité du modèle régulier minimal, w_ζ s'étend canoniquement de $\mathscr{X}$ à $\widetilde{\mathscr{X}}$ et on vérifie facilement qu'il échange Ig_∞ et Ig_0 dans $\mathscr{X}\times_{\mathscr{O}_K}\mathbb{F}_K$, d'où le résultat. $\square$

On dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{w_\zeta} & X \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est la composée :

$$E \twoheadrightarrow E/\mathrm{Ker}(\pi) \simeq X\times_{w_\zeta, X} E \to E$$

qui induit un automorphisme encore noté w_ζ sur $\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)$. Par le lemme 4.4.3, on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big) & \overset{\mathrm{res}_0}{\longrightarrow} & \mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)) \\ w_\zeta \downarrow \wr & & \wr \downarrow w_\zeta \\ \mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big) & \overset{\mathrm{res}_\infty}{\longrightarrow} & \mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)). \end{array} \tag{21}$$

Lemme 4.4.4. — *Soit* $s \in \mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)$ *tel que* $\mathrm{res}_0(s) = 0$, *alors* $\mathrm{res}_\infty(w_\zeta(s)) = 0$.

Démonstration. — Découle immédiatement de (21). □

Soit $\widetilde{W} \overset{\text{déf}}{=} W_1(p^r)_K \cap W_\infty \subset X$, c'est encore un voisinage strict dans X du lieu de spécialisation ordinaire car intersection de deux voisinages stricts. Il existe donc un affinoïde $W \subset \widetilde{W}$ qui est encore voisinage strict de ce lieu ([**5**, §1.2]) et on a un morphisme de restriction :

$$\mathbb{H}^1\big(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big) \longrightarrow \mathbb{H}^1\big(W, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big). \tag{22}$$

Remarque 4.4.5. — Par le même argument que dans [**13**, §8] utilisant [**2**], on peut montrer que la restriction (22) est en fait un isomorphisme. Nous n'aurons pas besoin de ce fait.

Notons $\mathrm{res}_\infty(f)$ (resp. $\mathrm{res}_0(f)$) l'image de la droite :

$$K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L\cdot f \subset \Big(\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\otimes L\Big)^f$$

dans $\big(\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$ (resp. $\big(\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$) par l'application res_∞ (resp. res_0).

Proposition 4.4.6. — *Supposons que la représentation* $\sigma_p(f)$ *est scindée, alors* $\mathrm{res}_0(f) = 0$.

Démonstration. — On a toujours $\mathrm{res}_\infty(f) \neq 0$ car sinon, via la restriction (22) et le lemme 4.2.1 appliqué à l'affinoïde W, f serait dans l'image de θ^{k-1} (agissant sur l'espace des formes surconvergentes de poids $2-k$) ce qui est impossible car f est de pente nulle en p (procéder comme dans [**13**, Lem.6.3]). Supposons $\mathrm{res}_0(f)$ non-nul. Alors les deux $K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$-modules libres $\big(\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$ et $\big(\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f$ sont non-nuls. Comme $\Big(\mathbb{H}^1\big(X, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log)\big)\otimes L\Big)^f$ est libre de rang 2 sur $K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ (Eichler-Shimura), ils sont forcément de rang 1 par la proposition 4.4.2. Comme ils sont stables par φ^d, on a forcément par (20) et la description de $D_p(f)$ donnée au §3.3, quitte à inverser peut-être e_1 et e_2 :

$$\begin{aligned} \big(\mathbb{H}^1(W_\infty, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f &\simeq K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L\cdot e_1 \\ \big(\mathbb{H}^1(W_0, \mathscr{H}_{k-2}\otimes\Omega^\cdot(\log))\otimes L\big)^f &\simeq K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L\cdot e_2. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{res}_0(f) \neq 0$ et $\mathrm{res}_\infty(f) \neq 0$, on voit bien que $\delta \neq 0$ dans la description de $\mathrm{Fil}^{k-1}D_p(f)_K \simeq K\otimes_{\mathbb{Q}_p} L\cdot f$ (cf. §3.3) ce qui entraîne que $\sigma_p(f)$ est non scindée. □

Rappelons que $f|_{w_{p^r}}$ a été défini au §4.1.

Proposition 4.4.7. — *Si $\sigma_p(f)$ est scindée, il existe $g \in H^0(W, \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ telle que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W, \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$.*

Démonstration. — Par la proposition 4.4.6, on a $\mathrm{res}_0(f) = 0$. Or, on sait que w_{p^r} est induit (à multiplication près par une constante non-nulle) par l'automorphisme w_ζ sur $\mathbb{H}^1(X, \mathscr{H}_{k-2} \otimes \Omega^{\cdot}(\log))$ (voir e.g. [**33**, §6] pour le cas $r = 1$, $k = 2$). Par le lemme 4.4.4, on a donc $\mathrm{res}_\infty(f|_{w_{p^r}}) = 0$, ce qui entraîne $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ par (22) et le lemme 4.2.1 appliqué à W. □

Supposons maintenant M quelconque et fixons comme au §4.2 un nombre premier auxiliaire $q > 2$, $q \nmid Mp$ suffisamment grand pour que le genre de $X_1(M; q)$ et des composantes irréductibles de sa fibre spéciale soit au moins 2. On a un isomorphisme de φ-modules filtrés :

$$\begin{aligned}&\big(D_p(f)_{K_0}, \varphi, \mathrm{Fil}^{k-1} D_p(f)_K\big)\\ &\qquad\simeq \big((\mathbb{H}^1_{\log-\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^{f, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}, \varphi \otimes 1, (H^0(X, \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)^{f, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}\big).\end{aligned}$$

Les propositions 4.4.2 et 4.4.6 s'étendent alors facilement en remplaçant partout $(\cdot)^f$ par $(\cdot)^{f, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})}$. On en déduit alors l'analogue de la proposition 4.4.7 : $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W, \omega^{2-k})^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} \otimes L$ lorsque $\sigma_p(f)$ est scindée.

Théorème 4.4.8. — *Soit f une forme parabolique propre de poids $k \geq 2$ nouvelle pour le groupe $\Gamma_1(Mp^r)$ avec $(M, p) = 1$ et $r > 0$. Supposons que f est de pente nulle en p. Si $Mp^r > 4$, alors la représentation $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in H^0(W_1(p^r), \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ tel que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1(p^r), \omega^k) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$. Si $Mp^r \leq 4$, soit $q \nmid Mp$ un nombre premier suffisamment grand, alors (en travaillant avec $X_1(N; q)$ au lieu de $X_1(N)$) $\sigma_p(f)$ est scindée si et seulement s'il existe $g \in H^0(W_1(p^r), \omega^{2-k})^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ tel que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ dans $H^0(W_1(p^r), \omega^k)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$.*

Démonstration. — S'il existe g comme dans l'énoncé, alors il est connu que $\sigma_p(f)$ est scindée (voir e.g. [**30**, Prop.11]).
Supposons que $\sigma_p(f)$ est scindée et supposons d'abord qu'il n'y a pas besoin de nombre premier auxiliaire (i.e. tous les genres sont au moins 2). Alors on a déjà $g \in H^0(W, \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ tel que $f|_{w_{p^r}} = \theta^{k-1}(g)$ par la proposition 4.4.7. Il suffit de montrer que g s'étend (de façon nécessairement unique) en une section de $H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ (qui sera en fait dans $H^0(W_1(p^r), \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$). Si $k > 2$, alors θ^{k-1} est injectif et la relation $p\theta \circ U_p = U_p \circ \theta$ (dans l'espace des formes surconvergentes) entraîne $U_p g = \lambda g$ avec $\mathrm{val}(\lambda) = 0$ puisque $f|_{w_{p^r}}$ est de pente $k-1$. L'injection continue $H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k}) \otimes L \hookrightarrow H^0(W, \omega^{2-k}) \otimes L$ est d'image dense (noter que l'espace de gauche est un Fréchet et celui de droite un Banach). Soit $(g_n)_n \in H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k}) \otimes L$ tel que $g_n \to g$ dans $H^0(W, \omega^{2-k}) \otimes L$ et $e \stackrel{\text{déf}}{=} \lim U_p^{n!}$ le projecteur de Hida défini sur l'espace des formes surconvergentes. On

a $e(H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k}) \otimes L)$ fermé dans $H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k}) \otimes L$ car de dimension finie sur K (car U_p est un opérateur compact sur $H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k})$, cf. [**15**]). Or $e(g_n) \to e(g) = g$, donc $g \in H^0(W_1(p^r)_K, \omega^{2-k}) \otimes L$. Si $k = 2$, on a seulement *a priori* $U_p g = \lambda g +$ Cste mais le même argument s'applique car on a encore $e(g) = g$. Dans les cas où nous avons introduit un nombre premier auxiliaire q, la même preuve est valable par la discussion précédente en travaillant avec la courbe $X_1(Mp^r; q)$. Supposons finalement $Mp^r > 4$, de telle sorte que $X_1(Mp^r)$ est un espace de modules fin et, pour éviter toute confusion, notons $W_1(p^r; q)$ l'ouvert rigide analytique de $X_1(Mp^r; q)$ noté jusqu'alors simplement $W_1(p^r)$. Ce sous-espace est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$-invariant et son quotient par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'ouvert $W_1(p^r)$ de $X_1(Mp^r)$. On a de plus des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\big(H^0(W_1(p^r;q), \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} &\simeq H^0(W_1(p^r), \omega^{2-k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \\ \big(H^0(W_1(p^r;q), \omega^{k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\big)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})} &\simeq H^0(W_1(p^r), \omega^{k}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L\end{aligned}$$

(cf. l'appendice de [**10**]). Dans cette situation, on peut donc supprimer toute mention du nombre premier auxiliaire q, comme dans l'énoncé. □

5. Les résultats principaux

On démontre les théorèmes 1.1.4 et 1.1.2 de l'introduction.

5.1. — On commence par des résultats préliminaires sur les espaces $\widehat{H}^1(K_1^p(M))$ et $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ du §3.1.

Soit $M \geq 1$ un entier premier à p et, pour $r \geq 1$, $Y_1(Mp^r)$ la courbe modulaire ouverte correspondant au sous-groupe de congruences $\Gamma_1(Mp^r)$. On note :

$$\widehat{H}_c \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \Big(\varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Mp^r), \mathbb{Z}_p)/p^n \varinjlim_r H^1_{\mathrm{c}}(Y_1(Mp^r), \mathbb{Z}_p)\Big).$$

C'est naturellement un $\mathbb{Z}_p$-module de Hecke qui est aussi muni d'une action de l'opérateur U_p et $\widehat{H}_c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est un espace de Banach. La projection $Y_1(M; p^r) \to Y_1(Mp^r)$ induit une application continue $\mathbb{T}$-équivariante :

$$\widehat{H}_c \to \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)} \tag{23}$$

qui entrelace l'action de U_p sur $\widehat{H}_c$ avec l'action de $p\pi_{\wp}$ sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$ où $\wp \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Pour tout $r \geq 1$, on note G_r le noyau de la réduction $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$.

Proposition 5.1.1. — *L'application* (23) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'argument est analogue à la preuve de [**24**, Th.2.1.12]. Soit r_0 suffisamment grand pour que $\Gamma_1(Mp^{r_0})$ soit sans torsion et soit X_{r_0} un sous-complexe simplicial de dimension 1 de $Y_1(Mp^{r_0})$ qui est un rétract par déformation de $Y_1(Mp^{r_0})$. Posons :

$$G^1_{r_0} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \mid (c,d) \equiv (0,1) \bmod p^{r_0} \right\},$$

pour $r > r_0$, $Y_1(M;p^r)$ est un revêtement galoisien de $Y_1(Mp^{r_0})$ de groupe de Galois $G^1_{r_0}/G_r$ (agissant à droite). Soit X_r l'image inverse de X_{r_0} dans $Y_1(M;p^r)$, c'est encore un revêtement galoisien de X_{r_0} de groupe de Galois $G^1_{r_0}/G_r$. On note $T_\bullet(r_0)$ la triangulation de X_{r_0} (où $T_i(r_0)$ est l'ensemble des simplexes de degré i, avec $i \in \{0,1\}$) et $T_\bullet(r)$ la triangulation de X_r image inverse de $T_\bullet(r_0)$. L'action à droite de $G^1_{r_0}/G_r$ sur X_r au-dessus de X_{r_0} induit une action à droite sur $T_\bullet(r_0)$.

Pour $r \geq r_0$, soit $S_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le complexe de chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ associé à la triangulation $T_\bullet(r)$: c'est un complexe de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})[G^1_{r_0}/G_r]$-modules. On a un système inductif de complexes de chaînes $\big(S_\bullet(r,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})\big)_r$ quand r varie et on note :

$$S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r S_\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

Passant à la limite projective sur n, on obtient un complexe de $\mathbb{Z}_p[[G^1_{r_0}]]$-modules :

$$\widetilde{S}_\bullet \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

De manière similaire, soit $X_{1,r}$ l'image inverse de X_{r_0} dans $Y_1(Mp^r)$ et $T_\bullet(1,r)$ la triangulation de $X_{1,r}$ image inverse de $T_\bullet(r_0)$. Pour $r \geq r_0$, soit $R_\bullet(r,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le complexe de chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ associé à la triangulation $T_\bullet(1,r)$ et posons $R_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_r R_\bullet(r,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et $\widetilde{R}_\bullet \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_n R_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Comme la triangulations $T_\bullet(r)$ ne fait intervenir que des simplexes de dimensions 0 et 1, le complexe $S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ a des termes seulement en degrés 0 et 1, et on a donc une suite exacte :

$$0 \to H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to S_1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \to S_0(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}).$$

Le foncteur limite projective étant exact à gauche, on en déduit une suite exacte :

$$0 \to \varprojlim_n H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) \to \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_0$$

et donc un isomorphisme :

$$H_1(\widetilde{S}_\bullet) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})). \tag{24}$$

Le foncteur limite inductive étant exact, on a :

$$\begin{aligned} H_1(S_\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})) &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_r H_1(Y_1(M;p^r), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ &\xrightarrow{\sim} \big(\varinjlim_r H_1(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{25}$$

En combinant (24) et (25), on déduit que $H_1(\widetilde{S}_\bullet)$ est isomorphe au complété p-adique de $\varinjlim_r H_1(Y_1(M;p^r),\mathbb{Z}_p)$, donc à $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))$ par dualité de Poincaré. C'est en fait un isomorphisme de $G^1_{r_0}$-modules si l'on fait agir $g \in G^1_{r_0}$ à gauche sur $H_1(\widetilde{S}_\bullet)$ par l'action à droite de g^{-1}.

Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe ci-dessus, on obtient que $H_1(\widetilde{R}_\bullet)$ est isomorphe à $\widehat{H}_c$. Par ailleurs, il est clair sur les complexes que l'on a un isomorphisme $\widetilde{R}_\bullet \xrightarrow{\sim} (\widetilde{S}_\bullet)^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$, et donc, comme le foncteur des $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)$-invariants est exact à gauche, en prenant les $\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)$-invariants sur la suite exacte $0 \to H_1(\widetilde{S}_\bullet) \to \widetilde{S}_1 \to \widetilde{S}_0$ on obtient un isomorphisme $H_1(\widetilde{R}_\bullet) \xrightarrow{\sim} H_1(\widetilde{S}_\bullet)^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$. En combinant les conclusions de ce paragraphe avec celles du précédent, on obtient l'isomorphisme recherché $\widehat{H}_c \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1_c(K^p_1(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$. □

On étudie maintenant les espaces d'extensions $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ où ψ est un caractère de $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ et où $\widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}$ et $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}$ désignent les vecteurs localement analytiques des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach admissibles $\widehat{H}^1(K^p_1(M))_L$ et $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_L$ (cf. [**45**, §7]).

Proposition 5.1.2. — *Pour tout caractère ψ comme ci-dessus, on a :*
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big) = 0.$$

Démonstration. — L'argument est basé sur les constructions de la preuve de [**24**, Th.2.1.5]. Soit r_0 tel que $\Gamma_1(M) \cap \Gamma(p^{r_0})$ est sans torsion et X_{r_0} un sous-complexe simplicial de dimension 1 de $Y_1(M;p^{r_0})$ qui est un rétract par déformation de $Y_1(M;p^{r_0})$. Si $r \geq r_0$, $Y_1(M;p^r)$ est un revêtement galoisien de $Y_1(M;p^{r_0})$ de groupe de Galois G_{r_0}/G_r (agissant à droite). Soit X_r l'image inverse de X_{r_0} dans $Y_1(M;p^r)$, alors X_r est un revêtement galoisien de X_{r_0} de groupe de Galois G_{r_0}/G_r. On définit alors des triangulations $T_\bullet(r_0)$ et $T_\bullet(r)$ exactement comme dans la preuve du lemme 5.1.1. Pour $r \geq r_0$, soit $S^\bullet(r, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ le complexe de cochaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ associé à $T_\bullet(r)$. On définit de manière similaire à la preuve précédente les complexes $S^\bullet(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ et $\widetilde{S}^\bullet$. En particulier, ce dernier est un complexe de $\mathbb{Z}_p[[G_{r_0}]]$-modules. Par [**24**, Th.2.1.5], chacun des espaces $\widetilde{S}^i$ est isomorphe à un G_{r_0}-module $\mathscr{C}^0(G_{r_0}, \mathbb{Z}_p)^{s_i}$ pour un entier $s_i \geq 0$ et on a des isomorphismes $H^i(\widetilde{S}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^i(K^p_1(M))$ ($i \in \{0,1\}$). Comme le foncteur « vecteurs localement analytiques » est exact ([**45**, Th.7.1]), on obtient donc une suite exacte :
$$0 \to \widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}} \to \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G_{r_0}, L)^{s_0} \to \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(G_{r_0}, L)^{s_1} \to \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}} \to 0.$$
Comme les termes du milieu sont $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-acycliques et invariants par torsion par le caractère $-\psi$, une chasse au diagramme facile fournit un isomorphisme :
$$\begin{aligned}(26)\quad \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}\big) &= H^1\big(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), \widehat{H}^1(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)\big)\\ &\xrightarrow{\sim} H^3\big(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), \widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)\big).\end{aligned}$$
(où « $(-\psi)$ » désigne la torsion par $-\psi$.) Mais $\widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p^\times, L)$, d'où $H^1(\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p), \widehat{H}^0(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)) = 0$. Par ailleurs $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$ est la somme directe de $\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p)$

et d'une algèbre de Lie $\mathfrak{l}(\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2 (l'algèbre de Lie formée des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$). Rappelons que la cohomologie d'une algèbre de Lie de dimension d est nulle en degré $> d$. Comme $\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p)$ est de dimension 1 et $\mathfrak{l}(\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2, la formule de Künneth pour la cohomologie des algèbres de Lie entraîne alors que, pour tout $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-module M, on a $H^3(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), M) \simeq H^1(\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p), M) \otimes H^2(\mathfrak{l}(\mathbb{Q}_p), M)$ (seul terme éventuellement non-nul). En prenant $M = \widehat{H}^0(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}(-\psi)$, on voit que l'on obtient bien $H^3(\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p), M) = 0$ puisque $H^1(\mathfrak{z}(\mathbb{Q}_p), M) = 0$, d'où le résultat par (26). $\square$

Corollaire 5.1.3. — *Pour tout caractère ψ comme ci-dessus, le module de Hecke $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ est Eisenstein.*

Démonstration. — Par exactitude du foncteur « vecteurs localement analytiques » ([**45**, Th.7.1]), la surjectivité de (7) et la proposition 5.1.2, on voit que le module de Hecke $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}\big)$ est un quotient de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\psi, \widehat{M}_{L,\mathrm{an}}\big)$. Le corollaire suit alors du même argument que celui dans la preuve du corollaire 3.1.3 en utilisant le lemme 3.1.2. $\square$

5.2. — On donne ici quelques rappels sur le foncteur de Jacquet de [**22**] et [**25**] et sur les résultats de [**24**] pour le groupe GL_2 sur $\mathbb{Q}$.

Soit V un L-espace vectoriel topologique localement convexe (où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$) muni d'une action localement analytique de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$. Dans [**22**, Def.3.4.5] est défini un L-espace vectoriel topologique localement convexe de type compact $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V)$ muni d'une représentation localement analytique de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ appelé module de Jacquet de V. Nous ne rappelons pas sa définition ici, mais simplement que si $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \widehat{\mathrm{T}}(L)$ (§2.1) et si $J^{\chi_1\otimes\chi_2}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V)$ est le sous-espace de $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V)$ sur lequel $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ agit par $\chi_1 \otimes \chi_2$, il y a un isomorphisme naturel (cf. [**22**, Prop.3.4.9]) :

$$J^{\chi_1\otimes\chi_2}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}(V) \xrightarrow{\sim} V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_1\otimes\chi_2} \tag{27}$$

où $V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_1\otimes\chi_2}$ est le sous-espace de $V^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ sur lequel π_t agit par la multiplication par $(\chi_1 \otimes \chi_2)(t)$ pour tout $t \in \mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$.

Le module de Jacquet $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{\mathrm{an}}\big)$ est une représentation localement analytique essentiellement admissible de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ au sens de [**21**], et donc correspond à un faisceau cohérent sur $\widehat{\mathrm{T}}$ noté $\mathscr{E}_c$ (cf. [**24**, §4.4]). L'action des opérateurs de Hecke T_ℓ et $S_\ell^{\pm1}$ sur $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))$ (pour $\ell \nmid Mp$) induit une action sur $\mathscr{E}_c$. On note, comme dans [**24**, §4.4], $\mathscr{A}_c \subset \mathscr{E}\mathrm{nd}(\mathscr{E}_c)$ le sous-faisceau cohérent d'algèbres engendré par T_ℓ et $S_\ell^{\pm1}$ et $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ le Spec relatif de $\mathscr{A}_c$ sur $\widehat{\mathrm{T}}$. Donc $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$ est un espace rigide analytique muni d'une injection continue :

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c \hookrightarrow \widehat{\mathrm{T}} \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}_p[\{T_\ell, S_\ell^{\pm1}\}_{\ell\nmid Mp}]& \\ \simeq (\mathscr{W} \times \mathbb{G}_m)^2 \times \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}_p[\{T_\ell, S_\ell^{\pm1}\}_{\ell\nmid Mp}]&.\end{aligned}$$

On notera typiquement $(\chi_2 \,|\;| \otimes \chi_1 \,|\;|^{-1}, \lambda)$ un point de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ où $\chi_2 \,|\;| \otimes \chi_1 \,|\;|^{-1}$ désigne le point correspondant de $\widehat{\mathrm{T}}$ et λ le système correspondant de valeurs propres de Hecke (le choix de tordre par $|\;| \otimes |\;|^{-1}$ s'expliquera au §5.5). L'espace $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ est invariant par torsion « diagonale » par les éléments de $\mathscr{W}$ (cf. [**24**],(4.4.8)) : le tordu du point $(\chi_2 \,|\;| \otimes \chi_1 \,|\;|^{-1}, \lambda)$ par $\chi \in \mathscr{W}$ est le point $(\chi\chi_2 \,|\;| \otimes \chi\chi_1 \,|\;|^{-1}, \chi\lambda)$.

On déduit par ailleurs de (27) :

Proposition 5.2.1. — *On a un isomorphisme Hecke-équivariant :*

$$J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\;|\otimes\chi_1|\;|^{-1}}(\widehat{H}_c^1(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}})^{\lambda} \xrightarrow{\sim} \widehat{H}_c^1(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\;|\otimes\chi_1|\;|^{-1},\lambda}.$$

Comme l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\widehat{H}_c^1(K_1^p(M))$ est unitaire, on remarque que l'on a pour tout point $(\chi_2 \,|\;| \otimes \chi_1 \,|\;|^{-1}, \lambda)$ de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ (cf. [**22**, Lem.4.4.2]) :

$$|\chi_2(p)| \leq 1 \text{ et } |\chi_1(p)| = |\chi_2(p)|^{-1}. \tag{28}$$

5.3. — On rappelle brièvement le lien entre l'espace rigide $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ et la courbe (ou surface) de Hecke de Coleman et Mazur ([**17**]).

Soit f une forme modulaire comme au §3.2 (i.e. parabolique, normalisée, de poids $k \geq 2$ et niveau $N = p^r M$ pour un entier $r \geq 0$, définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$) de système de valeurs propres hors niveau λ et telle que $(\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^{\vee} \otimes \pi_p(f) = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp},\leq \mathrm{k}-2}$. Par (14) et la compatibilité entre foncteurs de Jacquet classique et localement analytique ([**22**, Prop.4.3.6]), on voit que les deux points $(\chi_2 \,|\;| \otimes \chi_1 \,|\;|^{-1}, \lambda)$ et $(\chi_1 z^{k-2} \otimes \chi_2 z^{2-k}, \lambda)$ sont alors dans $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$. On peut construire aussi des points dans $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ à partir de formes f telles que $\pi_p(f)$ est une série spéciale et à partir des séries d'Eisenstein. On dit que les points de $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ obtenus par torsion par des caractères arbitraires dans $\mathscr{W}$ des points précédents sont des *points classiques* (noter une légère différence avec la définition de [**24**] où l'on n'autorisait que des torsions par des caractères *localement algébriques* de $\mathbb{Z}_p^{\times}$. Ceci ne portera pas à conséquence dans la suite car les caractères localement algébriques de $\mathbb{Z}_p^{\times}$ sont Zariski-dense dans $\mathscr{W}$). La clôture zariskienne (au sens rigide analytique) des points classiques dans $\operatorname{Spec} \mathscr{A}_c$ est par définition la *surface de Hecke* de niveau M (cf. [**24**, Prop.4.4.15]). C'est une variété rigide analytique équidimensionnelle de dimension 2 stable sous l'action des éléments de $\mathscr{W}$. Les points $(\chi_2 \,|\;| \otimes \chi_1 \,|\;|^{-1}, \lambda)$ de la surface de Hecke correspondent aux formes modulaires p-adiques f de niveau M qui sont des tordues par des éléments de $\mathscr{W}$ de formes modulaires surconvergentes de pente finie, niveau modéré M et vecteurs propres de Hecke. Plus précisément, si f est une forme surconvergente de pente finie, poids entier k, niveau $N = Mp^r$ (pour $(M,p) = 1$ et $r \geq 0$), définie sur une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ (i.e. dont le q-développement vit dans $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L[[q]]$), de caractère $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times} \to L^{\times}$, vecteur propre de U_p de valeur propre α et vecteur propre des T_ℓ, S_ℓ de système de valeurs propres λ, alors f correspond au point :

$$\big(\mathrm{nr}(\alpha/p) \otimes \mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}, \lambda\big)$$

de $(\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c)(L)$. Par exemple, si f est une forme classique comme au §4.3 nouvelle pour $\Gamma_1(M)$ et si λ est le système de valeurs propres de Hecke associé, alors le point correspondant à $f(z)-\alpha_p f(pz)$ est $(\chi_1 z^{k-2}\otimes\chi_2 z^{2-k},\lambda)$ et celui correspondant à $f(z)-\beta_p f(pz)$ est $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$. De même, si f est nouvelle pour $\Gamma_1(Mp^r)$ avec $r>0$ et de pente nulle en p comme au §4.4, le point correspondant à f est $(\chi_1 z^{k-2}\otimes\chi_2 z^{2-k},\lambda)$ et celui correspondant à $f\mid_{w_{p^r}}$ est le tordu par χ_0 du point $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$.

La surface de Hecke est en fait une union de composantes connexes de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ et son complémentaire dans $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ est une union disjointe de composantes irréductibles de dimension 1 dont chacune est juste une orbite sous l'action de $\mathscr{W}$ (cf. la discussion suivant la preuve de [**24**, Prop.4.4.14], le point étant que toute composante de dimension 2 contient un ensemble Zariski-dense de points classiques). En fait, on s'attend à ce que $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ coïncide avec la surface de Hecke, au moins hors du lieu d'Eisenstein (cf. [**23**, Thm.7.5.8]).

On dit qu'un point $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ est de poids classique si $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique au sens de la définition 2.1.1. Tout point classique de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ est de poids classique mais la réciproque est fausse (par exemple, les formes surconvergentes de pente finie et de poids entier qui ne sont pas des formes modulaires classiques donnent des points de poids classique non classiques).

Définition 5.3.1. — *On dit qu'un point $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ de* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ *est ordinaire si chacun des caractères χ_1 et χ_2 est unitaire (i.e. entier).*

Proposition 5.3.2. — *Tout point ordinaire $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ de* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ *se trouve sur la surface de Hecke.*

Démonstration. — Quitte à tordre par $\chi_{2|\mathbb{Z}_p^\times}^{-1}$, on peut supposer χ_2 non-ramifié. Tout élément de $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}(\widehat{H}^1(K_1^p(M))_{\mathrm{an}})^\lambda$ correspond alors en particulier à un élément de $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\mathrm{P}(\mathbb{Z}_p)}$ par la proposition 5.2.1, donc à un élément de $\widehat{H}_c$ par la proposition 5.1.1. Mais, par [**34**], tout système de valeurs propres de Hecke dans la partie ordinaire de $\widehat{H}_c$ provient d'une forme modulaire p-adique. Il est alors montré dans [**32**] (voir aussi [**11**] pour $p=2$) que toute forme modulaire p-adique ordinaire est surconvergente (même principe que la fin de la preuve du théorème 4.4.8). $\square$

5.4. — On définit et on étudie les « mauvais » points sur la surface de Hecke.

Définition 5.4.1. — *Un point $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ de* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ *est mauvais s'il est de poids classique k et si le point $(\chi_2\mid\ \mid z^{1-k}\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1}z^{k-1},\lambda)$ est aussi dans* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$.

De manière équivalente par la proposition 5.2.1, $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ est mauvais s'il est de poids classique k et si l'espace :

$$\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |z^{1-k}\otimes\chi_1|\ |^{-1}z^{k-1},\lambda}$$

est non-nul (où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle le point est défini). La définition 5.4.1 est une extension aux points de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ de la notion de mauvais point sur la courbe de Hecke définie dans [**24**, Def.4.5.5]. Notons que l'ensemble des mauvais points sur $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ est invariant sous l'action de $\mathscr{W}$.

Lemme 5.4.2. — *Si* $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)\in(\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c)(L)$ *est de poids classique et s'il y a des éléments de* $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}$ *qui ne sont pas localement algébriques sous l'action de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *alors* $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ *est un mauvais point de* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$.

Démonstration. — Supposons que $\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1}$ est de poids classique k. Si $v\in\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}$ n'est pas localement algébrique, alors $X_-^{k-1}v$ est non-nul. Par [**22**, Prop.4.4.4], il appartient à

$$\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |z^{1-k}\otimes\chi_1|\ |^{-1}z^{k-1},\lambda}$$

et donc $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ est un mauvais point. □

Proposition 5.4.3. — *Soit* $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)\in(\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c)(L)$ *de poids classique* k. *Si* $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ *n'est pas un point classique, alors il est mauvais. Réciproquement, si* $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ *est mauvais, alors soit ce n'est pas un point classique, soit* $|\chi_2(p)|=|p^{k-1}|$.

Démonstration. — Étant donné que tout vecteur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-localement algébrique dans $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}$ est le tordu d'un élément de l'image de (12) pour un $k\geq 2$, on voit que si $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ n'est pas un point classique, alors aucun vecteur dans $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}$ ne peut être $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-localement algébrique. Donc $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ est mauvais par le lemme 5.4.2. Si par contre $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1}$ $,\lambda)$ est classique, on sait que $|p^{k-1}|\leq|\chi_2(p)|\leq 1$ (valable pour tout point classique). Si la première inégalité est stricte, alors par (28) appliqué à $(\chi_2\,|\ |\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\ |^{-1}$ $z^{k-1},\lambda)$ on déduit :

$$\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |z^{1-k}\otimes\chi_1|\ |^{-1}z^{k-1},\lambda}=0$$

et donc $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)$ n'est pas mauvais. □

Grâce à la proposition 5.4.3, on peut donner un critère simple et utile permettant de reconnaître les mauvais points sur la surface de Hecke.

Proposition 5.4.4. — *Si* f *est une forme surconvergente non-nulle de poids entier* $k\geq 2$, *de niveau* $N=Mp^r$ $(r\geq 0)$, *vecteur propre pour* U_p, $\mathbb{T}$ *et pour l'action de* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$, *alors le point correspondant sur la surface de Hecke est un mauvais point de* $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ *si et seulement s'il existe une forme surconvergente* g *non-nulle de poids* $2-k$, *de niveau* N, *vecteur propre pour* U_p, $\mathbb{T}$ *et pour l'action de* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ *telle que* f *et* $\theta^{k-1}(g)$ *ont même valeur propre de* U_p, *même système de valeurs propres de Hecke et même caractère de* $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ *(cf. §4 pour* θ^{k-1}*).*

Démonstration. — Avec les notations du §5.3, rappelons que f correspond au point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p)\otimes\mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k},\lambda\big)$ de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Supposons d'abord qu'il existe une telle forme g. Il est facile de voir que g correspond au point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p^k)\otimes\mathrm{nr}(p^k/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^k,\varepsilon^{k-1}\lambda\big)$ de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Quitte à tordre par $\varepsilon^{1-k}\in\mathscr{W}$, on voit que le point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p)z^{1-k}\otimes\mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}z^{k-1},\lambda\big)$ est aussi dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$, ce qui montre que le point associé à f est mauvais. Réciproquement, supposons que le point associé à f est mauvais, i.e. que $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p)z^{1-k}\otimes\mathrm{nr}(p/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^{2-k}z^{k-1},\lambda\big)$ est aussi dans $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Quitte à tordre cette fois par ε^{k-1}, on voit que $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p^k)\otimes\mathrm{nr}(p^k/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^k,\varepsilon^{k-1}\lambda\big)$ est un point de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$. Si f n'est pas classique, on sait déjà que $f=\theta^{k-1}(g)$ par [**13**] et [**14**]. On peut donc supposer f classique. Par la proposition 5.4.3 appliquée à f, on a $|\alpha|=p^{k-1}$ et le point $\big(\mathrm{nr}(\alpha/p^k)\otimes\mathrm{nr}(p^k/\alpha)\chi_p^{-1}\varepsilon^k,\varepsilon^{k-1}\lambda\big)$ est ordinaire. Par la proposition 5.3.2, il correspond à une forme modulaire surconvergente non-nulle g de poids $2-k$ et niveau N, de valeur propre de U_p égale à α/p^{k-1}, de système de valeurs propres de Hecke égal à $\varepsilon^{k-1}\lambda$ et de caractère de p-composante χ_p. On voit que g satisfait les conditions de l'énoncé. □

5.5. — On énonce maintenant et on commence à démontrer un résultat important de l'article qui est le :

Théorème 5.5.1. — *Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ n'est pas mauvais au sens de la définition 5.4.1, alors on a un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}},\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))^{\lambda}_L\Big)\xrightarrow{\sim}\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}.$$

On voit que la torsion par $|\ |\otimes|\ |^{-1}$ à droite permet de considérer l'induite parabolique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ plutôt que l'induite $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1}\big)^{\mathrm{an}}$. Cet énoncé est essentiellement une conséquence de [**24**, Lem.4.5.13] et du résultat principal de [**25**]. Pour la commodité du lecteur, nous donnons maintenant une preuve complète du théorème 5.5.1.

Proposition 5.5.2. — *Si $(\chi_2\,|\ |\otimes\chi_1\,|\ |^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$, il y a un isomorphisme naturel :*

$$J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}(\widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\Big(\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}},\widehat{H}^1_c(K^1_p(M)^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\Big).\tag{29}$$

Démonstration. — Par [**22**, Th.3.5.6], on a un isomorphisme :

$$(30)\quad J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}(\widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big).$$

En combinant (30) avec la propriété universelle des produits tensoriels, on a le résultat. □

Lorsque $(\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1},\lambda)$ n'est pas de poids classique, le théorème 5.5.1 découle immédiatement des propositions 2.1.4 et 5.5.2, du lemme 2.1.2 et de la proposition 5.2.1. Supposons maintenant que $(\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1},\lambda)$ est de poids classique. Comme on suppose de plus que ce n'est pas un mauvais point de $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c$, c'est un point classique par la proposition 5.4.3.

Lemme 5.5.3. — *Si $(\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1},\lambda)$ est un point classique qui n'est pas mauvais, alors chaque flèche dans l'image de (29) se factorise par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}$ (vu comme quotient de $\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$ par l'application (2)).*

Démonstration. — Les éléments de $\widehat{H}^1_c(K^p_1(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1},\lambda}$ sont tous $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$-localement algébriques par le lemme 5.4.2. Comme $\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1}$ est de poids classique k, ils sont en fait localement $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$-algébriques. Comme X_-^{k-1} annule ces vecteurs, l'image de chaque flèche dans l'image de l'isomorphisme (30) est annulée par X_-^{k-1}, et donc chaque flèche dans l'image de l'isomorphisme (29) a un noyau qui contient $X_-^{k-1}\Big(\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\Big)$. Le résultat découle alors du lemme 2.1.3. □

Le lemme 5.5.3 montre que, si $(\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1},\lambda)\in(\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}_c)(L)$ est de poids classique k et n'est pas mauvais, alors on a un isomorphisme :

$$J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\chi_2|\ |\otimes\chi_1|\ |^{-1}}(\widehat{H}^1_c(K^1_p(M))_{L,\mathrm{an}})^{\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big).$$

Il n'est pas possible d'obtenir plus d'informations en appliquant la théorie générale des modules de Jacquet au caractère $\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1}$ de poids classique k. Pour terminer la preuve du théorème 5.5.1 dans le cas de poids classique k, on doit montrer que la restriction :

$$(31)\quad \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big) \to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq k-2}, \widehat{H}^1_c(K^1_p(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)$$

est un isomorphisme (puis utiliser comme précédemment les propositions 2.1.4 et 5.2.1). Lorsque $\chi_2 \mid\ \mid \otimes\chi_1 \mid\ \mid^{-1}$ est de pente non critique, c'est-à-dire lorsque $|\chi_2(p)|>|p^{k-1}|$, (31) découle du théorème classique de Amice-Vélu et Vishik (cf. le lemme A.2.1 et aussi la preuve de [**25**, Prop.2.5]). Lorsque $\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1}$ est de pente critique (qui est le cas intéressant utilisé dans la suite), (31) découle du résultat suivant, démontré au §5.6 :

Proposition 5.5.4. — *Si* $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)\in(\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c)(L)$ *est un point classique qui n'est pas mauvais et si* λ *n'est pas Eisenstein, alors tout élément de* $\operatorname{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-2},\widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)$ *s'étend de manière unique en un élément de* $\operatorname{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-1},\widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}}\big)$.

En effet, on observe que l'inclusion :

$$\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-1}\subset\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

induit une surjection :

$$\mathrm{U}\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)\otimes_{\mathrm{U}\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)}\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-1}\twoheadrightarrow\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$$

dont le noyau coïncide avec le noyau de (2). Si λ n'est pas Eisenstein, la proposition 5.5.4 entraîne alors que (31) est un isomorphisme. Si λ est Eisenstein, le point classique $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ de poids k provient nécessairement d'une série d'Eisenstein. Cette série d'Eisenstein est soit ordinaire, mais alors on n'est pas dans le cas critique, soit de pente $k-1$. Mais une telle série d'Eisenstein est toujours dans l'image de θ^{k-1}. Ce cas est donc impossible par la proposition 5.4.4 lorsque $(\chi_2\mid\ \mid\otimes\chi_1\mid\ \mid^{-1},\lambda)$ n'est pas mauvais.

5.6. — On montre la proposition 5.5.4.

En faisant agir $\mathbb{T}$ via le système de valeurs propres λ, on munit $\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-1}$ d'une structure de module de Hecke. La dérivation $k-1$ fois induit un isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned}\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-1}/\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-2}&\\ \xrightarrow{\sim}\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1z^{k-1}\otimes\chi_2z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}.&\end{aligned}$$

Supposons donné un morphisme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\big(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-2}\to\widehat{H}^1_c(K_p^1(M))^{\lambda}_{L,\mathrm{an}},\tag{32}$$

et considérons le diagramme cartésien de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-représentations avec une action équivariante de Hecke :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-2} & \overset{(32)}{\longrightarrow} & \widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\le k-1} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} & \equiv & \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}.$$

Comme l'espace $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$ est muni de sa topologie localement convexe la plus fine, on voit que la suite exacte verticale de droite est scindée en tant que suite exacte d'espaces vectoriels topologiques. Donc E est un L-espace vectoriel localement convexe de type compact. Par hypothèse, le système de valeurs propres λ n'est pas Eisenstein. De plus, $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}$ par la dérivée du caractère $\chi_2 z^{1-k}\otimes\chi_1 z^{k-1}$ de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$. Le corollaire 5.1.3 implique alors que la surjection :

$$E \twoheadrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \tag{33}$$

est scindée comme application de $\mathfrak{b}(\mathbb{Q}_p)$-modules, donc aussi comme application de $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$-modules.

Notons U (resp. V, resp. W) le sous-espace fermé de $\widehat{H}^1_c(K_1^p(M))_{L,\mathrm{an}}^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$ (resp. de $E^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$, resp. de $\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\big)^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p)}$) sur lequel $\mathrm{T}(\mathbb{Z}_p)$ agit par le caractère $\chi_2\,|\;|\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\;|^{-1}\,z^{k-1}$. Comme la surjection (33) est scindée comme application de $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$-représentations, on a encore une suite exacte de L-espaces vectoriels de type compact :

$$0\to U\to V\to W\to 0. \tag{34}$$

Les opérateurs de Hecke π_t pour $t\in\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ et l'algèbre de Hecke $\mathbb{T}$ agissent sur U, V, W et les morphismes dans la suite exacte sont équivariants pour ces actions. Par [**22**, Lem.3.5.2] le L-espace vectoriel $J_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\big)$ est la représentation de dimension 1 de $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)$ donnée par le caractère $\chi_2\,|\;|\,z^{1-k}\otimes\chi_1\,|\;|^{-1}\,z^{k-1}$ et il s'identifie par (27) à :

$$\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}}\big)^{\mathrm{N}(\mathbb{Z}_p),\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+=\chi_2|\;|z^{1-k}\otimes\chi_1|\;|^{-1}z^{k-1}}.$$

Notons W_0 cet espace de dimension 1 et V_0 l'image inverse de W_0 dans V. La suite exacte (34) induit une suite exacte $0\to U\to V_0\to W_0\to 0$. D'après la preuve de [**22**, Prop.4.2.33], l'action de $\pi_\wp$ induit un opérateur compact sur U, et aussi sur V_0 puisque

W_0 est de dimension 1. La théorie des opérateurs compacts entraîne alors que le sous-espace caractéristique de V_0 pour $(\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \chi_2 \mid\mid z^{1-k} \otimes \chi_1 \mid\mid^{-1} z^{k-1}, \mathbb{T} = \lambda)$ est de dimension finie, et donc que tout sous-espace de cet espace qui est stable par $\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+$ et $\mathbb{T}$ contient un vecteur propre non-nul pour $(\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \chi_2 \mid\mid z^{1-k} \otimes \chi_1 \mid\mid^{-1} z^{k-1}, \mathbb{T} = \lambda)$. Comme $(\chi_2 \mid\mid \otimes \chi_1 \mid\mid^{-1}, \lambda)$ n'est pas un mauvais point par hypothèse, cet espace caractéristique est donc d'intersection nulle avec U. Il est par suite isomorphe à W_0 et coïncide aussi avec l'espace propre pour $(\mathrm{T}(\mathbb{Q}_p)^+ = \chi_2 \mid\mid z^{1-k} \otimes \chi_1 \mid\mid^{-1} z^{k-1}, \mathbb{T} = \lambda)$. Par la formule d'adjonction de [**22**, Th.3.5.6], on en déduit une section de (33) de la forme :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lc}} \hookrightarrow E^\lambda \subset E$$

d'où on tire facilement la proposition 5.5.4.

Remarque 5.6.1. — La preuve du théorème 5.5.1 donnée ici dans le cas de poids classique est différente de celle donnée dans [**24**, Lem.4.5.13]. Dans *loc.cit.*, on ne montre pas directement que (31) est un isomorphisme. À la place, on montre le théorème 5.5.1 « pour tous les poids à la fois » et on utilise de façon cruciale les propriétés géométriques de la surface de Hecke. On peut résumer la situation en disant que l'on y démontre que (31) est un isomorphisme par passage à la limite à partir des poids non-classiques. Ici, on travaille plutôt poids par poids et la géométrie de la surface de Hecke est remplacée par le résultat de la proposition 5.1.2.

Remarque 5.6.2. — En utilisant la proposition 5.1.2 au lieu du corollaire 5.1.3 dans le cas critique, on démontre par les mêmes méthodes que, si $(\chi_2 \mid\mid \otimes \chi_1 \mid\mid^{-1}, \lambda)$ n'est pas mauvais (où « mauvais » est ici défini comme au §5.4 mais avec le faisceau d'algèbres $\mathscr{A}$, et pas $\mathscr{A}_c$, agissant sur le faisceau cohérent associé au module de Jacquet de $\widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}$), alors tout élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}, \leq k-2}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big)$$

s'étend de manière unique en un élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}, \leq k-1}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big)$$

puis que tout élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}, \leq k-1}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big)$$

s'étend de manière unique en un élément de :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}, \widehat{H}^1(K_p^1(M))_{L,\mathrm{an}}^\lambda\big).$$

Noter qu'il n'y a pas besoin ici de l'hypothèse « λ non Eisenstein » dans l'analogue de la proposition 5.5.4.

Remarque 5.6.3. — Notons que la proposition 5.4.4 est encore valable si l'on définit « mauvais » en termes de $\mathscr{A}$ plutôt que $\mathscr{A}_c$ (cf. remarque précédente). La raison en est que, même si l'analogue de la proposition 5.1.1 ne marche pas avec H^1 au lieu de H_c^1, il marche encore à condition de se restreindre aux parties ordinaires (pour l'action de U_p sur la source et l'action de $p\pi_\wp$ sur le but). On aurait pu ainsi tout aussi bien travailler avec H^1 plutôt que H^1_c.

5.7. — On démontre maintenant le résultat principal de l'article qui est une version faible de la conjecture 3.3.2.

Pour toute représentation continue H de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on note $H^\pm$ les espaces propres de H sous l'action d'une conjugaison complexe dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Lemme 5.7.1. — *Soit f une forme parabolique de niveau $N = Mp^r$ nouvelle en M comme au §3.2. On a :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big((\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes_L \pi_p(f), \widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L^{f,\pm}\big) \simeq L.$$

Démonstration. — Par [**24**, §4.3], le terme de gauche s'identifie à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big((\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes \pi_p(f), (\mathrm{Sym}^{k-2}L^2)^\vee \otimes H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2})^{f,\pm}\big)$$

qui est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\pi_p(f), H^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M), \mathscr{V}_{k-2})^{f,\pm}\big) \simeq L$. □

On fixe f une forme parabolique nouvelle de niveau $N = Mp^r$ comme au §3.3 et on conserve les notations du §3.3. Rappellons que, par définition (cf. §2.3) :

(i) si $\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, alors :

$$B(\sigma_p(f)) \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0} \oplus \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0},$$

(ii) si $\sigma_p(f) \simeq \begin{pmatrix} \eta_1 & * \\ 0 & \eta_2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ avec $* \neq 0$, alors $B(\sigma_p(f))$ est une extension non scindée :

$$0 \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0} \to B(\sigma_p(f)) \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0} \to 0,$$

cette extension s'identifiant au complété unitaire universel B de l'induite parabolique localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ (théorème 2.2.2). On pose dans la suite $B_1 \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_2 \otimes \eta_1\big)^{\mathscr{C}^0}$ et $B_2 \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$. Notons que B_2 est aussi le complété unitaire universel de l'induite localement analytique $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 z^{k-1} \otimes \chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}} = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathrm{an}}$ (voir preuve du théorème 2.2.2). Rappelons enfin que $\Pi_p(f)$ est par définition la composante $\sigma(f)$-isotypique de $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))_L$ ou de $\widehat{H}^1(K_1^p(M))_L$ (§3.3).

Théorème 5.7.2. — *On a $\sigma_p(f)$ scindée si et seulement si $\Pi_p(f)$ contient la représentation $B_2 = \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \eta_1\varepsilon \otimes \eta_2\varepsilon^{-1}\big)^{\mathscr{C}^0}$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de p et à remplacer f par la forme nouvelle « sous-jacente » au tordu de f, on peut supposer $\chi_1 z^{k-2}$ non-ramifié et soit $r = 0$, soit $r > 0$ et f de pente nulle. Si $r = 0$ (resp. $r > 0$), on dit que $f(z) - \beta_p f(pz)$ (resp. $f\,|_{w_{p^r}}$) est la forme de pente $k-1$ associée à f (avec les notations du §4.1). Supposons $\sigma_p(f)$ non scindée.

Par la proposition 5.4.4 et la même preuve que dans [**30**, Prop.11], on voit que le point de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ correspondant à la forme de pente $k-1$ associée à f n'est pas mauvais (définition 5.4.1). Par le théorème 5.5.1, on en déduit que $\Pi_p(f)$ ne contient pas $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}}$ et donc *a fortiori* B_2. Supposons $\sigma_p(f)$ scindée et posons $W \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_2,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))^f_L\big)$ c'est-à-dire :

$$W=\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 z^{k-1}\otimes\chi_2 z^{1-k}\big)^{\mathrm{an}},\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(N))^f_L\Big).$$

Par les théorèmes 4.3.3 et 4.4.8, la forme de pente $k-1$ associée à f est dans l'image de θ^{k-1} d'où on déduit que W est non-nul par le théorème 5.5.1 appliqué à la forme g telle que $f(z)-\beta_p f(pz)=\theta^{k-1}(g)$ (resp. $f\,|_{w_{p^r}}=\theta^{k-1}(g)$). Par [**24**, §4], le théorème 5.5.1 et la proposition 5.2.1, W est un L-espace vectoriel de dimension finie. Il est muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ déduite de l'action sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))$. Toute sous-représentation absolument irréductible non-nulle de W est nécessairement isomorphe à $\sigma(f)$ par les relations d'Eichler-Shimura sur $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))\otimes L$ et un argument bien connu dû à Mazur (voir [**38**, p.115]). On a donc $\sigma(f)\overset{\iota}{\hookrightarrow}W$ d'où une application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $B_2\to\Pi_p(f)$, $x\mapsto(v\mapsto\iota(v)(x))$ (où $v\in\sigma(f)$). Cette application est une injection fermée car B_2 est topologiquement irréductible et car les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach B_2 et $\Pi_p(f)$ sont admissibles. □

Théorème 5.7.3. — *Si $\sigma_p(f)$ est non scindée, alors il existe une unique (à multiplication près par une constante non-nulle) injection fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $B(\sigma_p(f))\hookrightarrow\Pi_p(f)$.*

Démonstration. — Quitte à tordre, on se ramène à la situation de la preuve du théorème 5.7.2. On a alors vu que, si $\sigma_p(f)$ est non scindée, le point de $\operatorname{Spec}\mathscr{A}_c$ correspondant à la forme de pente $k-1$ associée à f n'est pas mauvais. La suite exacte courte $0\to B_1\to B\to B_2\to 0$ induit une suite exacte :

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_2,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)$$
$$\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_1,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big).$$

Le premier terme est nul par le théorème 5.7.2 et le dernier de dimension 1 par la proposition 2.2.1 et le lemme 5.7.1. Mais celui du milieu est non-nul par ce qui précède et les théorèmes 2.2.2 et 5.5.1. On a donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B_1,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L\big)\simeq L.$$

De plus, le morphisme correspondant $B\to\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L$ est une injection fermée. En effet, il est injectif par le théorème 2.2.2 et le fait que l'application induite sur le sous-objet B_1 est non-nulle, et c'est une application fermée car les deux $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach B et $\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^{f,\pm}_L$ sont admissibles. On en déduit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^f_L\big)\simeq L^2\simeq\sigma(f)$ (par Eichler-Shimura) d'où avec la proposition 3.2.3 :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(B,\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\sigma(f),\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^f_L)\big)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\Pi_p(f))\neq 0.$$

On a aussi une injection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\Pi_p(f)) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}\big(\sigma(f),\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(B,\widehat{H}^1_{\mathrm{c}}(K_1^p(M))^f_L)\big) \simeq L$$
$$F \mapsto \big(v \mapsto (x \mapsto F(x)(v)\big)$$

d'où le résultat. □

Corollaire 5.7.4. — *La représentation $\Pi_p(f)$ contient toujours $B(\sigma_p(f))$ comme sous-représentation fermée.*

Appendice A
Preuve de la proposition 2.1.4

A.1. — Commençons par quelques préliminaires topologiques. Soit $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ (resp. $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$) le sous-espace fermé de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ des fonctions localement analytiques $f:\mathbb{Q}_p\to L$ (cf. §2.1) qui sont à support compact (resp. à support dans $\mathbb{Z}_p$). Il est stable par $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$ (resp. $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)$) et l'application naturelle :

$$(35)\quad L[\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p)]\otimes_{L[N(\mathbb{Z}_p)]}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}} \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$$

est un isomorphisme. On note aussi $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$ et $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ les sous-espaces fermés de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}}$ et $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ formés des fonctions à support dans $\mathbb{Z}_p$. Ce sont encore des sous-espaces stables par $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)$ et les applications analogues à (35) sont des isomorphismes.

Si $r\geq 1$, on note $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ l'espace de Banach des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ et analytiques sur chaque disque fermé $D(z,r)\overset{\text{déf}}{=}\{x\in\overline{\mathbb{Q}}_p\mid\|x-z\|\leq|p^r|\}$ pour tout $z\in\mathbb{Z}_p$. Si $\mathscr{O}(D(z,r))$ désigne l'espace de Banach des fonctions rigides analytiques sur $D(z,r)$ à valeurs dans L, il y a un isomorphisme topologique naturel :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r \xrightarrow{\sim} \oplus_{z\in\mathbb{Z}_p/p^r}\mathscr{O}(D(z,r))$$

(attention : la topologie sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ induite par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$ est plus grossière que la topologie ci-dessus d'espace de Banach). Si l'on choisit $r_0\geq 1$ de telle sorte que $\chi_2\chi_1^{-1}$ est analytique sur $1+p^{r_0}\mathbb{Z}_p$, on voit que $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ est stable par $K_p(r)$ dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$ pour tout $r\geq r_0$ (voir §3.1 pour $K_p(r)$). De plus, on vérifie facilement que l'action de $K_p(r)$ est continue pour la topologie d'espace de Banach de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$. En fait, on a plus : si $\mathbb{K}_p(r)$ désigne le sous-groupe affinoïde du groupe algébrique GL_2 sur $\mathbb{Q}_p$ défini par les conditions $|a-1|,|b|,|c|,|d-1|\leq|p^r|$, alors $K_p(r)$ est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points de $\mathbb{K}_p(r)$, et l'action de $K_p(r)$ est en fait induite par une action rigide analytique de $\mathbb{K}_p(r)$ sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ (l'action de $K_p(r)$ est « $\mathbb{K}_p(r)$-analytique » au sens de [**26**]). En particulier, on peut différentier cette action pour obtenir une action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ (pour $r\geq r_0$). L'application naturelle :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow\\ r\geq r_0}}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\longrightarrow\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}\tag{36}$$

est alors un isomorphisme topologique $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant.

Pour $d\geq 0$ et $r\geq 1$, on pose :

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}\\&\qquad\overset{\text{déf}}{=}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\bigcap\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d},\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}&\overset{\text{déf}}{=}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\bigcap\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}\\&=\bigcup_{d\geq 0}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}.\end{aligned}$$

Chacun des espaces $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}$ est de dimension finie et leur réunion est dense dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}$ (pour sa topologie de Banach). Si d est suffisamment grand, alors $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp},\leq d}$ engendre $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{lp}}$ comme $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-module (en fait, si $\chi_1\otimes\chi_2$ n'est pas de poids classique, tout $d\geq 0$ convient, mais si $\chi_1\otimes\chi_2$ est de poids classique $k\geq 2$, il faut prendre $d\geq k-1$, cf. le lemme 2.1.2 et le lemme 2.1.3).

On reprend maintenant le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach V de la proposition 2.1.4. Pour $r\geq 1$, soit $V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ le sous-espace de V des vecteurs v tels que l'application « orbite » : $g\to g\cdot v$, lorsque restreinte à $K_p(r)$, est (la restriction à $K_p(r)$ d') une fonction rigide analytique sur $\mathbb{K}_p(r)$ à valeurs dans V. Si $\mathscr{O}(\mathbb{K}_p(r),V)$ est l'espace de Banach des fonctions rigides analytiques sur $\mathbb{K}_p(r)$ à valeurs dans V, alors la flèche qui envoie $v\in V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ sur son application orbite identifie $V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ à un sous-espace fermé de $\mathscr{O}(\mathbb{K}_p(r),V)$ ([**26**, Prop.3.3.3]). On munit $V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}$ de la topologie de Banach induite par celle de $\mathscr{O}(\mathbb{K}_p(r),V)$ (qui est plus fine que la topologie induite par le Banach V). On a alors un isomorphisme topologique $\lim\limits_{\substack{\longrightarrow\\ r}}V_{\mathbb{K}_p(r)-\mathrm{an}}\xrightarrow{\sim}V_{\mathrm{an}}$.

Remarque A.1.1. — On utilise ici la définition des vecteurs localement analytiques donnée dans [**26**, Def.3.5.3] qui diffère de celle de [**45**] : les deux définitions donnent le même espace sous-jacent V_{an}, mais la topologie de V_{an} définie dans [**26**] est en général plus fine que celle définie dans [**45**] (cf. [**26**, Th.3.5.7]). On démontrera la proposition 2.1.4 lorsque V_{an} est muni de la topologie de [**26**], ce qui implique immédiatement l'énoncé correspondant lorsque V_{an} est muni de la topologie plus grossière de [**45**]. Notons que, dans les applications, V sera toujours un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach (unitaire) admissible, et dans ce cas les deux topologies sur V_{an} sont alors les mêmes (utiliser [**26**, Prop.6.2.4] et [**45**, Th.7.1]).

A.2. — On démontre la proposition 2.1.4. On conserve les notations du §A.1.

Lemme A.2.1. — *La restriction :*

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+}\big((\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}},V\big) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+}\big((\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}},V\big) \tag{37}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Puisque $(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$ est dense dans l'espace $(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$, toute application linéaire continue :

$$(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}\to V \tag{38}$$

est nulle (resp. est $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+$-équivariante) si et seulement s'il en est de même de sa restriction à $(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$. Il suffit donc de montrer que tout élément dans l'image de (37) s'étend en une application linéaire continue (38). Si $f(X)\in\mathbb{Q}_p[X]$, notons $||f(X)||$ le sup des valeurs absolues p-adiques de ses coefficients. Notons $||{-}||_V$ une norme sur V donnant sa topologie de Banach. On choisit $||{-}||_V$ invariante sous $N(\mathbb{Z}_p)$ (ce qui est possible car $N(\mathbb{Z}_p)$ est compact). Soit $A>0$ tel que $||\wp v||_V\leq A||v||_V$ pour tout $v\in V$ où $\wp \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Soit ϕ dans l'image de (37) et, pour chaque $d\geq 0$, soit $C(d)>0$ tel que $||\phi(f(X))||_V\leq C(d)||f(X)||$ pour les $f(X)$ de degré au plus d. Pour chaque $z\in\mathbb{Z}_p$ et $r\geq 0$, on a (cf. (1)) :

$$f(\tfrac{X-z}{p^r})|_{z+p^r\mathbb{Z}_p}=\chi_2(p)^{-r}\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\wp^r\cdot f(X).$$

En utilisant l'invariance sous $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+$ de ϕ, on obtient :

$$\begin{aligned}||\phi(f(\tfrac{X-z}{p^r}))||_V &= |\chi_2(p)|^{-r}||\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix}\wp^r\cdot\phi(f(X))||_V\\ &\leq (|\chi_2(p)|^{-1}A)^r||\phi(f(X))||_V\leq(|\chi_2(p)|^{-1}A)^rC(d)||f(X)||.\end{aligned}$$

Soit h tel que $|\chi_2(p)|^{-1}A\leq|p^{-h}|$, on voit que, pour chaque $d\geq 0$, la restriction de ϕ à $(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}$ est tempérée d'ordre $\leq h$. Par le théorème d'Amice-Vélu ([**1**]) et Vishik ([**47**]), si $d>h-1$ la restriction s'étend de manière unique en une application linéaire continue $\widetilde{\phi}_d : (\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}\to V$ qui est tempérée d'ordre $\leq h$. L'unicité montre alors que l'extension $\widetilde{\phi}_d$ ne dépend pas du choix de $d>h-1$ et définit l'extension cherchée de ϕ à $(\operatorname{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}$. □

Lemme A.2.2. — *La restriction :*

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}},V_{\mathrm{an}}\big)$$
$$\to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{lp}},V_{\mathrm{an}}\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme la flèche (35) et son analogue en remplaçant « an » par « lp » sont des isomorphismes et comme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+$ engendre le groupe $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, il suffit de montrer que la restriction :

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}},V_{\mathrm{an}}\big)$$
$$\to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)^+)}\big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}},V_{\mathrm{an}}\big) \tag{39}$$

est un isomorphisme. Compte tenu du lemme A.2.1, il suffit de montrer que si ϕ : $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}\to V$ est une application continue dont la restriction ϕ^{lp} à $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}$ se factorise comme le composé d'une application continue $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}\to V_{\mathrm{an}}$ avec l'injection naturelle $V_{\mathrm{an}}\to V$, alors ϕ admet aussi une factorisation analogue. Soit $r\geq r_0$, ϕ_r la restriction de ϕ à $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ et d un entier assez grand pour que $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}_r$ engendre $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ sous $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Comme $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp},\leq d}_r$ est de dimension finie, son image par ϕ^{lp} dans V_{an} est de dimension finie et tombe donc dans $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ pour un $s\geq r$. Comme ϕ^{lp} est $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant et $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ est stable par $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$, on voit que l'image de $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}_r$ tombe encore dans $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$. Considérons maintenant l'application continue :

$$\begin{array}{rcl}\Phi : K_p(s)\times(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r & \to & V\\ (g,f) & \mapsto & \phi_r(g\cdot f)-g\cdot\phi_r(f).\end{array}$$

Soit $f\in(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}_r$, alors l'application $g\mapsto\Phi(g,f)$ est (la restriction à $K_p(s)$ d') une fonction rigide analytique sur $\mathbb{K}_p(s)$ (car l'action de $K_p(s)$ sur f et $\phi_r(f)$ provient d'une action rigide analytique de $\mathbb{K}_p(s)$). De plus, toutes ses dérivées sont nulles car ϕ^{lp} est $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant. On voit donc que Φ est nul sur $K_p(s)\times(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{lp}}_r$. Mais cet espace est dense dans $K_p(s)\times(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$, donc Φ est identiquement nul et l'application ϕ_r est $K_p(s)$-équivariante. Comme l'action de $K_p(s)$ sur $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r$ est $\mathbb{K}_p(s)$-rigide analytique, on voit que ϕ_r se factorise par une application continue $K_p(s)$-équivariante :

$$(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Z}_p)^{\mathrm{an}}_r\to V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}},$$

et donc en particulier par une application continue $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Z}_p)_r^{\mathrm{an}}\to V_{\mathrm{an}}.$$

Passant à la limite inductive sur $r\geq r_0$ et utilisant (36), on obtient le résultat. $\square$

Lemme A.2.3. — *Soit* $f\in\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ *et* $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *tels que* $g\cdot f$ *est encore dans* $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$, *alors pour tout élément* ϕ *de* $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}},V_{\mathrm{an}}\big)$, *on a* $\phi(g\cdot f)=g\cdot\phi(f)$.

Démonstration. — Soit $\Omega\subset\mathbb{Q}_p$ le support de f. Il suffit de montrer que, pour tout $z\in\Omega$ et tout voisinage ouvert compact $\Omega_z\subset\Omega$ de z, on a :

$$\phi\big(g\cdot(f_{|\Omega_z})\big)\overset{?}{=}g\cdot\phi(f_{|\Omega_z}). \tag{40}$$

Fixons $z\in\Omega$ et $n\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}1&-z\\0&1\end{pmatrix}\in\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p)$ (donc z est le translaté par n du point $0\in\mathbb{Q}_p$, cf. (1)). Comme le support de $g\cdot f$ est contenu dans $\mathbb{Q}_p$ par hypothèse, l'image de z par g vit dans $\mathbb{Q}_p$ et donc ng^{-1} envoie $0\in\mathbb{Q}_p$ vers un point de $\mathbb{Q}_p$. On peut donc écrire :

$$ng^{-1}=\overline{n}^{-1}b^{-1}$$

pour un $\overline{n}\in\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p)$ et un $b\in\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$. Par l'invariance de ϕ sous $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$, on obtient pour tout voisinage ouvert compact $\Omega_z\subset\Omega$ de z :

$$\begin{aligned}\phi\big(g\cdot(f_{|\Omega_z})\big)&=\phi\big(b\overline{n}n\cdot(f_{|\Omega_z})\big)=b\cdot\phi\big(\overline{n}n\cdot(f_{|\Omega_z})\big)\\ g\cdot\phi(f_{|\Omega_z})&=b\overline{n}n\cdot\phi(f_{|\Omega_z})=b\overline{n}\cdot\phi\big(n\cdot(f_{|\Omega_z})\big).\end{aligned}$$

Quitte à remplacer f par $n\cdot f$ et z par 0, on est donc ramené à montrer que, pour $\overline{n}\in\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p)$ et Ω_0 un voisinage suffisamment petit de 0 dans Ω, on a :

$$\phi(\overline{n}\cdot f)\overset{?}{=}\overline{n}\cdot\phi(f). \tag{41}$$

Fixons r tel que f est analytique sur $D(0,r)$ et $s\geq r$ suffisamment grand pour avoir $\phi(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}))\subset V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ (un tel s existe car $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$ est un espace de Banach et V_{an} est réunion des Banach $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$, cf. [**6**, Prop.1 p.I.20] par exemple). Soit $t_0\geq 0$ tel que $\wp^{-t_0}\overline{n}\wp^{t_0}\in K_p(s)\cap\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p)$ (rappelons que $\wp=\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}$), on a aussi pour tout $t\geq t_0$:

$$\wp^{-t}\overline{n}\wp^{t}\in K_p(s)\cap\overline{\mathrm{N}}(\mathbb{Q}_p) \tag{42}$$

et notons que $(\wp^{-t}\cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\in\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$ pour $t\geq 0$. Comme l'action de $K_p(s)$ sur $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1\otimes\chi_2)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$ et $V_{\mathbb{K}_p(s)-\mathrm{an}}$ provient d'une action rigide analytique de $\mathbb{K}_p(s)$ et comme ϕ est $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant, on obtient :

$$\phi(k\cdot f')=k\cdot\phi(f') \tag{43}$$

pour tout $k \in K_p(s)$ et $f' \in \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)_r^{\mathrm{an}}$. Un calcul donne alors pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}\phi(\overline{n} \cdot f_{|p^{r+t}\mathbb{Z}_p}) &= \wp^t\wp^{-t} \cdot \phi\big(\overline{n}\wp^t \cdot (\wp^{-t} \cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big) = \wp^t \cdot \phi\big(\wp^{-t}\overline{n}\wp^t \cdot (\wp^{-t} \cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big)\\ &= \wp^t(\wp^{-t}\overline{n}\wp^t) \cdot \phi\big((\wp^{-t} \cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big) = \overline{n} \cdot \phi\big(\wp^t(\wp^{-t} \cdot f)_{|p^r\mathbb{Z}_p}\big)\\ &= \overline{n} \cdot \phi(f_{|p^{r+t}\mathbb{Z}_p})\end{aligned}$$

où les deuxième et quatrième égalités découlent de la $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariance de ϕ et la troisième de (43) et (42). On obtient bien (41) pour $\Omega_0 = p^{r'}\mathbb{Z}_p$ avec $r' \geq r + t$. □

Lemme A.2.4. — *La restriction :*

$$\begin{aligned}(44)\quad &\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\Big)\\ &\qquad\qquad \to \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\Big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\Big)\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ engendre $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, l'application (44) est injective. On doit montrer sa surjectivité. Munissons $L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ de sa topologie localement convexe la plus fine et considérons le produit tensoriel $L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)] \otimes_L \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ muni de sa topologie produit tensoriel inductive (cet espace est isomorphe à une somme directe de copies de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ indexées par les éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et cette topologie n'est autre que la topologie somme directe). L'inclusion $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$ induit une application continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$(45)\qquad L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)] \otimes_L \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}} \to \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}.$$

Si $w \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on a une immersion fermée :

$$\begin{aligned}(46)\quad &\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}} \oplus \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\\ &\qquad\qquad \hookrightarrow L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)] \otimes_L \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}\end{aligned}$$

définie par $(f_1, f_2) \mapsto 1 \otimes f_1 + w \otimes f_2$. Comme $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \cup w\mathbb{Q}_p$, le composé de (45) et (46) est une surjection continue. Comme son but et sa source sont de plus des espaces localement convexes de type compact, le théorème de l'image ouverte entraîne qu'il s'agit d'une surjection topologique. Il en est donc de même de (45). Puisque V_{an} est muni d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, toute application linéaire continue $\phi : \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}} \to V_{\mathrm{an}}$ induit une application continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\Phi : L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)] \otimes_L \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}} \to V_{\mathrm{an}}.$$

Nous allons montrer que, si ϕ est de plus $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$-équivariant, alors le noyau de Φ contient le noyau de (45). Comme (45) est une surjection topologique, cela montrera que Φ se factorise par une application continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante $\overline{\Phi}$: $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}} \to V_{\mathrm{an}}$ dont la restriction à $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$ coïncide avec ϕ (et $\overline{\Phi}$ sera un antécédent de ϕ, d'où la surjectivité voulue). Soit donc $\phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p),\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\big)$ et $g_1 \otimes f_1 + \cdots + g_r \otimes f_r$ un élément dans le noyau de (45) où $g_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $f_i \in \big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)(\mathbb{Q}_p)^{\mathrm{an}}$. On a donc dans $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$:

$$\sum_{i=1}^{r} g_i \cdot f_i = 0 \tag{47}$$

et on doit montrer que :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i \cdot \phi(f_i) \stackrel{?}{=} 0. \tag{48}$$

Il suffit de montrer que, si $z \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}_p)$ et Ω_z est un voisinage ouvert suffisamment petit de z dans $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p)$, alors :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i \cdot \phi(f_{i|\Omega_z g_i^{-1}}) \stackrel{?}{=} 0 \tag{49}$$

(on peut en effet écrire $\mathbb{P}(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{j=1}^{s} \Omega_{z_j}$, $f_i = \sum_{j=1}^{s} f_{i|\Omega_{z_j} g_i^{-1}}$ et on a bien alors :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i \cdot \phi(f_i) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} g_i \cdot \phi(f_{i|\Omega_{z_j} g_i^{-1}}) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} g_i \cdot \phi(f_{i|\Omega_{z_j} g_i^{-1}}) = 0).$$

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\frac{dz-b}{-cz+a} = 0$, quitte à remplacer $g_1 \otimes f_1 + \cdots + g_r \otimes f_r$ par $g_1 g^{-1} \otimes f_1 + \cdots + g_r g^{-1} \otimes f_r$, il suffit de traiter le cas $z = 0$. Si 0 n'est pas dans le support de $g_i \cdot f_i$, alors on peut supposer de même pour Ω_0 (quitte à le rapetisser) et le i-ième terme dans (49) est déjà nul. On peut donc supposer que 0 est dans le support de chaque $g_i \cdot f_i$, que Ω_0 est à support dans $\mathbb{Q}_p$ et donc que chaque $g_i \cdot f_i$ est aussi à support dans $\mathbb{Q}_p$ (puisque l'on ne regarde que $f_{i|\Omega_0 g_i^{-1}}$). Le lemme A.2.3 entraîne alors avec (47) :

$$\sum_{i=1}^{r} g_i \cdot \phi(f_{i|\Omega_0 g_i^{-1}}) = \sum_{i=1}^{r} \phi\big(g_i \cdot (f_{i|\Omega_0 g_i^{-1}})\big) = \sum_{i=1}^{r} \phi\big((g_i \cdot f_i)_{|\Omega_0}\big) = \phi\big(\big(\sum_{i=1}^{r} g_i \cdot f_i\big)_{|\Omega_0}\big) = 0.$$

□

La proposition 2.1.4 découle des lemmes A.2.2 et A.2.4 et de l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V_{\mathrm{an}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}, V\big)$.

Remarque A.2.5. — La preuve précédente de la proposition 2.1.4 est la spécialisation au cas considéré des arguments de [**25**] et est assez analogue à la preuve de [**21**, Prop.2.5] : les lemmes A.2.1 et A.2.2 correspondent à [**21**, Lem.3.23] et les lemmes A.2.3 et A.2.4 à [**21**, Lem.3.1]. La différence clef est la suivante : dans le contexte de [**21**, Prop.2.5], on suppose que $\chi_1 \otimes \chi_2$ est de poids classique k et de pente non critique (i.e. $|\chi_1(p)| > |p^{k-2}|$), et aussi que V est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire. Cela permet de se restreindre à $d = k-2$ dans la preuve du lemme A.2.1. De plus, l'espace $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{lp}, \leq k-2}$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-invariant (pas seulement $(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p))$-invariant). Cela permet d'énoncer et de démontrer un résultat qui évite de considérer les vecteurs localement analytiques dans V et l'action de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2\big)^{\mathrm{an}}$.

Références

[1] Y. Amice & J. Vélu – Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, *Astérisque* **24-25** (1975), p. 119–131.

[2] F. Baldassarri & B. Chiarellotto – Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients, in *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991)*, Perspect. Math., vol. 15, Academic Press, 1994, p. 11–50.

[3] L. Berger & C. Breuil – Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 155–211.

[4] ———, Towards a p-adic langlands programme, cours au C.M.S. de Hangzhou (2004) `http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html`.

[5] P. Berthelot – Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie, `http://www.maths.univ-rennes1.fr/~berthelo/`.

[6] N. Bourbaki – *Topological vector spaces. Chapters 1–5*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer, 1987.

[7] C. Breuil – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[8] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[9] ———, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, ce volume.

[10] K. Buzzard & F. Calegari – Slopes of overconvergent 2-adic modular forms, *Compos. Math.* **141** (2005), p. 591–604.

[11] K. Buzzard & R. Taylor – Companion forms and weight one forms, *Ann. of Math.* **149** (1999), p. 905–919.

[12] R. F. Coleman – A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, in *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991)*, Contemp. Math., vol. 165, Amer. Math. Soc., 1994, p. 21–51.

[13] ———, Classical and overconvergent modular forms, *Invent. Math.* **124** (1996), p. 215–241.

[14] ———, Classical and overconvergent modular forms of higher level, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **9** (1997), p. 395–403.

[15] ———, p-adic Banach spaces and families of modular forms, *Invent. Math.* **127** (1997), p. 417–479.

[16] R. F. Coleman & A. Iovita – Hidden structures on semi-stable curves, ce volume.

[17] R. F. Coleman & B. Mazur – The eigencurve, in *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, 1998, p. 1–113.

[18] P. Colmez – Une correspondance de Langlands p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication, 2004.

[19] ______, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Astérisque* **330** (2010), p. 213–262.

[20] P. Deligne – Formes modulaires et représentations de GL(2), in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 55–105. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[21] M. Emerton – p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups, *Duke Math. J.* **130** (2005), p. 353–392.

[22] ______, Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 775–839.

[23] ______, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), p. 279–393.

[24] ______, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, *Invent. Math.* **164** (2006), p. 1–84.

[25] ______, Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction, à paraître dans *J. Institut Math. Jussieu.*

[26] ______, Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups, à paraître dans *Memoirs of the AMS.*

[27] G. Faltings – Crystalline cohomology of semistable curve—the $\mathbf{Q}_p$-theory, *J. Algebraic Geom.* **6** (1997), p. 1–18.

[28] ______, Almost étale extensions, *Astérisque* **279** (2002), p. 185–270.

[29] G. Faltings & B. W. Jordan – Crystalline cohomology and $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Q})$, *Israel J. Math.* **90** (1995), p. 1–66.

[30] E. Ghate – Ordinary forms and their local Galois representations, à paraître dans les *Actes de la conférence à Hyderabad 2003.*

[31] E. Ghate & A. Mézard – Filtered modules attached to modular forms, prépublication, 2006.

[32] F. Q. Gouvêa – *Arithmetic of p-adic modular forms*, Lecture Notes in Math., vol. 1304, Springer, 1988.

[33] B. H. Gross – A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod p), *Duke Math. J.* **61** (1990), p. 445–517.

[34] H. Hida – Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), p. 545–613.

[35] N. M. Katz – p-adic properties of modular schemes and modular forms, in *Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350.

[36] N. M. Katz & B. Mazur – *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Math. Studies, vol. 108, Princeton Univ. Press, 1985.

[37] M. Kurihara – A tameness criterion, in *Volume à la mémoire d'O. Hyodo*, université de Tokyo, 1993, p. 27–36.

[38] B. Mazur – Modular curves and the Eisenstein ideal, *Publ. Math. I.H.É.S.* **47** (1977), p. 33–186.

[39] K. A. Ribet – Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus, in *Modular functions of one variable, V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, Springer, 1977, p. 17–51. Lecture Notes in Math., Vol. 601.

[40] T. Saito – Modular forms and p-adic Hodge theory, *Invent. Math.* **129** (1997), p. 607–620.

[41] W. H. Schikhof – *Non-Archimedean calculus*, Lecture notes, vol. 7812, Katholieke Universiteit Mathematisch Instituut, 1978.

[42] ———, *Ultrametric calculus*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 4, Cambridge Univ. Press, 1984.

[43] P. Schneider & J. Teitelbaum – Banach space representations and Iwasawa theory, *Israel J. Math.* **127** (2002), p. 359–380.

[44] ———, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 443–468.

[45] ———, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[46] J-P. Serre – Quelques applications du théorème de Čebotarev, *Publ. Math. I.H.É.S.* (1981), p. 123–201.

[47] M. Vishik – Nonarchimedean measures connected with Dirichlet series, *Math. USSR Sb.* **28** (1976), p. 216–228.

C. Breuil, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `breuil@ihes.fr`

M. Emerton, Mathematics Department, Northwestern University, 2033 Sheridan Road, Evanston, IL 60208, U.S.A. • *E-mail :* `emerton@math.northwestern.edu`