Revue d'Histoire des Mathématiques

Les fondements de la géométrie selon Friedrich Schur

Jean-Daniel Voelke

Tome 16 Fascicule 2

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2010 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
16 (2010), p. 217–286

LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE SELON FRIEDRICH SCHUR

Jean-Daniel Voelke

Résumé. — Friedrich Schur (1856-1932) a accompli d'importantes recherches sur les fondements de la géométrie à la même époque que Hilbert. Elles ont trouvé leur aboutissement dans un livre publié en 1909 et intitulé, comme celui de Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. La construction axiomatique exposée par Schur est originale et différente de celle de Hilbert. Elle trouve son origine dans les travaux de Pasch et Peano. Elle prend comme point de départ la géométrie projective et accorde une place centrale à la notion de déplacement. Elle repousse le plus loin possible l'utilisation de l'axiome d'Archimède et permet de fonder simultanément plusieurs géométries. L'article retrace d'abord la genèse des recherches de Schur. Il présente ensuite en détail les différentes étapes de sa construction axiomatique. Il essaie enfin d'expliquer pourquoi le livre de Schur est aujourd'hui presque oublié alors que celui de Hilbert est toujours étudié.

Abstract (Foundations of geometry after Friedrich Schur)

Friedrich Schur (1856-1932) carried out important research on the foundations of geometry in the same period as Hilbert. Schur's conclusions were published in 1909 in a book entitled, as Hilbert's, *Grundlagen der Geometrie*. The axiomatic construction exposed by Schur is original and different from Hilbert's. Its roots lie in projective geometry and it gives an essential place to the notion of displacement. As far as possible it avoids the use of the postulate of Archimedes and allows a simultaneous foundation of several geometries. This paper first

Texte reçu le 26 janvier 2008, révisé le 2 octobre 2009.

J.-D. Voelke, Chemin de Primerose 47, CH-1007 Lausanne, Suisse.
Courrier électronique : `jd.voelke@citycable.ch`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 51-03.

Mots clefs : Friedrich Schur, David Hilbert, géométrie projective, géométrie non euclidienne, fondements de la géométrie.

Key words and phrases. — Friedrich Schur, David Hilbert, projective geometry, non euclidean geometry, foundations of geometry.

gives an account of the genesis of Schur's research. It then presents in detail the different steps of his axiomatic construction. Finally it tries to explain why today Schur's book is nearly forgotten while Hilbert's is still studied.

INTRODUCTION

Friedrich Schur est né en 1856 à Maciejewo (entre Poznan et Wroclaw, à l'époque Posen et Breslau). Il étudia à Breslau puis à Berlin où il suivit notamment les cours de Gustav Kirchhoff, Leopold Kronecker, Karl Weierstrass et Ernst Kummer. C'est à ce dernier qu'il dédia sa dissertation soutenue en 1879 et intitulée *Geometrische Untersuchungen über Strahlenkomplexe ersten und zweiten Grades*. L'année d'après, il présenta son habilitation à Leipzig. Il enseigna dans cette ville jusqu'en 1888, d'abord comme privat-docent puis comme professeur extraordinaire ; il y fut collègue de Felix Klein puis de Sophus Lie. Il poursuivit ensuite sa carrière comme professeur à Dorpat (actuellement Tartu en Estonie), Aachen, Karlsruhe, Strasbourg et Breslau. Il est mort dans cette ville le 18 mars 1932.

Schur a effectué des recherches dans trois domaines principaux : la géométrie, la théorie des groupes de transformations de Lie et les fondements de la géométrie. Les premières années de sa carrière (depuis sa dissertation jusqu'à son départ à Dorpat en 1888) sont caractérisées par plusieurs publications importantes dans le domaine de la géométrie (projective et différentielle). L'arrivée de Lie à Leipzig en 1886 permit à Schur de s'initier à la théorie des groupes de transformations et d'entreprendre à son tour des recherches sur ce sujet ; elles donnèrent lieu à plusieurs articles publiés entre 1888 et 1893. Les recherches sur les fondements de la géométrie sont plus tardives. Elles comportent divers articles publiés entre 1891 et 1904 et se concluent par un ouvrage intitulé *Grundlagen der Geometrie* [Schur 1909]. Ce livre obtint le prix Lobatchevski, décerné par la Société mathématique de Kasan, en 1912 [1]. Cette distinction témoigne de

[1] Ce prix fut attribué pour la première fois en 1897 à Lie pour le troisième volume de sa *Theorie der Transformationsgruppen* [Lie 1893]. Il fut ensuite décerné en 1900 à Wilhelm Killing pour son livre *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* [Killing 1893] et en 1903 à David Hilbert pour ses *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899].

l'importance accordée par les contemporains au livre de Schur et montre que celui-ci fut placé par certains d'entre eux dans la même catégorie que l'ouvrage homonyme de Hilbert [Hilbert 1899]. Plusieurs comptes rendus soulignent aussi sa valeur [2]. La postérité en a cependant jugé différemment. Si le livre de Hilbert est aujourd'hui encore régulièrement réédité et étudié, celui de Schur est presque oublié. Ses recherches sur les fondements de la géométrie effectuées à une époque pourtant cruciale dans le développement de cette discipline n'ont guère retenu l'attention des historiens [3] ; seule sa démonstration originale du théorème fondamental de la géométrie projective [Schur 1898a] est régulièrement citée dans la littérature. Il m'a donc semblé qu'il y avait une lacune historique à combler et que les travaux de Schur devaient faire l'objet d'une relecture destinée à décrire précisément sa méthode, à en montrer l'origine et à en dégager les aspects originaux. L'article comportera trois parties :

2 Voici ce qu'écrit à son propos Albert Châtelet dans le *Bulletin des sciences mathématiques* :
« Actuellement de profondes modifications tendent à s'introduire, tant dans l'enseignement que dans notre conception de la Géométrie. On ne peut encore dire jusqu'où iront ni à quoi aboutiront ces tentatives, mais on peut affirmer que le Livre de M. Schur, par son exposé méthodique et simple de nombreuses questions, marquera une des étapes de cette transformation. » [Châtelet 1910, p. 72]
Ce texte témoigne bien du changement profond qui s'effectue au début du XX[e] siècle après la publication des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert et la diffusion de la méthode axiomatique.

3 Dans son article nécrologique sur Schur [Engel 1935], Friedrich Engel traite principalement des travaux de Schur consacrés à la théorie des groupes de transformations de Lie et ne dit presque rien de ceux consacrés aux fondements de la géométrie. Dans son édition commentée des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert [Hilbert 1899], Paul Rossier consacre trois pages à Schur ; il décrit de manière très générale sa méthode. Il faut encore citer une courte note de Kuno Fladt [Fladt 1957] publiée à l'occasion du centenaire de la naissance de Schur. Fladt qualifie Schur de l'un des plus importants géomètres allemands. Il regrette que ses recherches aient été éclipsées par celles de Hilbert et souhaite que son livre soit réédité. Il met l'accent sur l'intérêt pour l'enseignement scolaire des recherches de Schur. Cette dernière remarque est probablement à mettre en relation avec l'importance accordée à cette époque en Allemagne à la notion de transformation dans l'enseignement de la géométrie. Cette notion joue en effet un rôle important dans le livre de Schur.

1) Je retracerai d'abord, en m'appuyant sur des documents inédits, l'historique des recherches de Schur concernant les fondements de la géométrie.

2) J'étudierai ensuite les différentes étapes de sa construction axiomatique. Celle-ci présente de nombreux développements originaux mais s'inspire aussi, notamment dans le choix des axiomes, des travaux d'autres mathématiciens sur lesquels il conviendra de s'arrêter. Parmi ceux-ci, les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert jouent un rôle tout particulier. Nous verrons en effet que Schur cherche constamment à se situer par rapport à cet ouvrage fondamental.

3) Je présenterai enfin le point de vue épistémologique de Schur sur la géométrie. Il permet d'expliquer certains choix axiomatiques et constitue un élément important pour situer sa place dans l'histoire de la géométrie.

Au terme de cette analyse, je répondrai aux deux questions suivantes : pourquoi les travaux de Schur sont-ils aujourd'hui oubliés et quel intérêt peuvent-ils présenter pour le lecteur moderne ?

1. HISTORIQUE DES RECHERCHES DE SCHUR SUR LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

C'est en 1881 que Schur manifeste pour la première fois son intérêt pour un problème lié aux fondements de la géométrie en publiant une courte note dans les *Mathematische Annalen* [Schur 1881]. Elle concerne le théorème fondamental de la géométrie projective dont la démonstration faisait alors l'objet de nombreuses discussions [4]. Dix ans plus tard, Schur publie un article plus important consacré à l'introduction des éléments idéaux en géométrie projective [Schur 1891]. Il aborde là un problème concernant le fondement de cette discipline et propose une solution plus simple que celle exposée par Moritz Pasch dans ses *Vorlesungen über neuere Geometrie* [Pasch 1882]. L'année d'après, il publie un petit article sur l'aire

4 Ce théorème est dû à von Staudt. Son énoncé est rappelé plus loin au début du § 2.5. En ce qui concerne les discussions suscitées par la preuve de ce théorème, on pourra se reporter à [Voelke 2008]. Dans la suite de cette étude, l'appellation « théorème fondamental » désignera toujours ce théorème.

des figures polygonales planes [Schur 1892] [5]. Au début des années 1890, Schur s'occupe cependant principalement des groupes de Lie et ce n'est qu'à la fin de la décennie qu'il publiera un nouvel article sur une question touchant les fondements de la géométrie. Mais ceci ne l'empêche pas de s'intéresser à ce sujet. La correspondance inédite de Schur avec Killing et surtout Engel [6] apporte à cet égard de nombreux renseignements et permet de suivre l'évolution des idées de Schur dans ce domaine tout au long de la dernière décennie du XIX^e^ siècle. Le thème des fondements de la géométrie est abordé pour la première fois dans une lettre du 2 janvier 1892 à Killing. Ce dernier était alors en train de rédiger un ouvrage sur ce sujet [7]. Schur explique qu'il procéderait autrement que lui s'il devait écrire un ouvrage de cette sorte destiné en particulier aux maîtres de mathématiques. Il laisserait de côté tout ce qui concerne la géométrie

---

5 Schur ne reviendra par la suite plus sur la théorie de l'aire. Je résume donc ici le contenu de cet article. Il montre comment construire une théorie de l'aire fondée sur la notion d'équidécomposabilité (deux polygones sont équidécomposables (« flächengleich ») s'ils peuvent être décomposés chacun en un nombre fini de triangles ne se recoupant pas et congruents deux à deux). En se référant à un raisonnement exposé notamment par Otto Stolz dans [Stolz 1885], Schur rappelle qu'il est possible d'associer à chaque triangle un rectangle équidécomposable de côté donné ; la preuve de ce résultat fait appel à l'axiome d'Archimède. Comme tout polygone est décomposable en triangles, on peut lui associer un rectangle de côté donné et par conséquent un segment. Schur reprend un raisonnement d'August Möbius pour démontrer que ce segment ne dépend pas de la décomposition en triangles du polygone. L'idée de mesurer les aires par des segments sera reprise par Hilbert dans le chapitre 4 de ses *Grundlagen der Geometrie*. À la différence de Schur, Hilbert fonde la théorie de l'aire sur la notion d'équicomplémentarité et évite ainsi d'utiliser l'axiome d'Archimède. En ce qui concerne la théorie de l'aire et son histoire, on pourra se référer à [Volkert 1999].

6 Cette correspondance inédite est conservée dans le Fonds Engel à l'Universitätsbibliothek de Giessen. Les lettres ont été récemment numérisées et sont disponibles à l'adresse `http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2005/2127`. Engel et Schur avaient été collègues à Leipzig entre 1881 et 1888. Le départ de Schur à Dorpat marque le début de cette correspondance qui durera pratiquement jusqu'au décès de Schur. Trois lettres de Schur à Killing figurent aussi dans le dossier ; elles ont apparemment été remises à Engel par Schur en 1927.

7 Il s'agit de *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* [Killing 1893]. Le mot Grundlagen n'a à cette époque pas le sens qu'il prendra après 1900. Killing ne cherche pas à construire de manière axiomatique la géométrie. Son livre est un ouvrage de synthèse présentant notamment les géométries non euclidienne, projective et multidimensionnelle. Un deuxième tome paraîtra cinq ans plus tard, en 1898.

non euclidienne car c'est là que réside l'obstacle pour beaucoup de débutants ; il mettrait l'accent sur un développement indépendant de la géométrie projective. Schur affirme que l'indépendance de celle-ci par rapport au postulat des parallèles constitue le résultat principal de toutes les recherches sur la géométrie non euclidienne. Il fait ici allusion aux travaux de Klein [8] qui, comme nous le verrons, constituent le point de départ de sa méthode. Schur déclare aussi avoir commandé le livre de Giuseppe Veronese *Fondamenti di geometria* [Veronese 1891]. On retrouve cette information dans une lettre à Engel écrite le lendemain (3 janvier 1892). Dans celle-ci, Schur rapporte un propos de Killing selon lequel le livre de Veronese est faible. Schur déclare ne pas s'attendre à grand chose car « Veronese n'est pas l'homme à écrire sur les fondements » [9]. Dans cette lettre Schur critique aussi le livre de Ferdinand Lindemann *Vorlesungen über Geometrie* [Lindemann 1891] [10] ; il lui oppose celui de Pasch, jugé « beaucoup plus approfondi mais aussi ennuyeux ». Ces différentes lettres témoignent de l'intérêt de Schur pour la question des fondements et montrent qu'il a déjà à ce moment des idées précises sur la façon d'écrire un ouvrage sur ce sujet.

Un mois plus tard, Schur a reçu le livre de Veronese. Voici son appréciation dans une lettre à Engel du 2 février 1892 :

> Je me suis maintenant aussi un peu orienté dans les Fondamenti di Geometria de Veronese et en ai assez vu pour savoir que je ne lirai jamais ce livre. Les

---

8 Rappelons que dans [Klein 1871], Klein définit des métriques projectives qui permettent de donner une interprétation de la géométrie non euclidienne et de la géométrie elliptique. Dans ses calculs, Klein travaille avec des coordonnées homogènes qui, à cette époque, étaient définies à partir de distances euclidiennes. Certains de ses contemporains ont donc pensé que sa méthode présentait un cercle vicieux. Soucieux d'écarter cette objection, Klein montrera dans un article ultérieur [Klein 1873] que l'espace projectif peut être obtenu indépendamment du postulat des parallèles en adjoignant des éléments idéaux à une portion d'espace limitée. En reprenant une idée de von Staudt, il est ensuite possible de définir de manière non métrique des coordonnées projectives. Ces deux problèmes seront étudiés en détail aux § 2.3 et 2.5 de cet article.

9 Veronese avait étudié auprès de Klein à Leipzig en 1880-1881. Schur et lui se sont donc probablement rencontrés à ce moment.

10 Cet ouvrage fut en partie rédigé à partir de leçons données par Alfred Clebsch. Il traite principalement des surfaces du 2e ordre et de géométrie non euclidienne.

idées fondamentales de Veronese me semblent complètement fausses, même si je suis d'accord avec lui sur certains points de sa critique. Sa définition des formes fondamentales géométriques prétendument indépendante de toute intuition est pour moi seulement quelque chose qui sonne bien. Pour moi il n'y a absolument aucun concept clair sans intuition extérieure [...]. Et maintenant l'infiniment grand actuel et l'infiniment petit ! Ici je ne puis avec Mephisto dire que ceci : et justement là où des concepts manquent, un mot survient au bon moment. L'introduction de ces prétendus concepts repose naturellement sur le sentiment entièrement légitime mais obscur que le continu numérique ne remplit pas complètement le continu ponctuel d'une ligne géométrique. Mais de ceci je ne peux que déduire la recommandation de ne pas utiliser aussi longtemps que possible le concept de nombre irrationnel dans le fondement de la géométrie, comme les Anciens l'ont aussi fait. Mais vouloir faire de cette idée obscure un concept mathématique, qui doit servir de soutien à l'édifice de la géométrie, en lui donnant n'importe quel nom — on pourrait aussi l'appeler Cantor ou Veronese — est une chose contre laquelle chaque véritable mathématicien devrait protester. Veronese pouvait donc s'épargner de soumettre par ce flot d'idées démesuré les questions vraiment difficiles des fondements de la géométrie à un traitement approfondi. L'approche du problème de Klein n'est de loin pas estimée à sa juste valeur [11].

---

11 Ich habe mich nun auch in Veronese's Fondamenti di Geometria etwas orientiert und soviel gesehen, dass ich dies Buch niemals lesen werde. Mir scheinen die Grundideen V's vollkommen verfehlt, wenn ich auch in manchen Punkten seiner Kritik mit ihm übereinstimme. Seine angeblich von aller Anschauung unabhängige Definition der geometrischen Grundgebilde ist für mich nur Wohlgeklinget. Für mich giebt es überhaupt keinen klaren Begriff ohne äussere Anschauung, [...]. Und nun gar das aktuel Unendlichgrosse und Unendlichkleine ! Hier kann ich mit Mephisto nur sagen : Und eben wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zu rechter Zeit sich ein. Die Einführung dieser sogennanten Begriffe geht natürlich auf das ganz berechtigte, aber dunkle Gefühl zurück, dass das Zahlencontinuum das Punktcontinuum einer geometrischen Linie nicht vollkommen ausfülle. Hieraus kann ich aber nur die Vorschrift herleiten, bei Begründung der Geometrie den Begriff der Irrationalzahl so lange als möglich nicht zu benutzen, wie es die Alten ja auch gemacht haben. Diese dunkle Ahnung aber durch Bezeichnung mit irgend einem Worte — man könnte sie ja auch Cantor oder Veronese nennen — zu einem mathematischen Begriffe machen zu wollen, der als Stütze des Gebäudes der Geometrie dienen soll, dagegen sollte jeder wirkliche Mathematiker protestieren. Durch diesen windigen Ideenflug konnte es sich denn V. esparen, die wirklich schwierigen Fragen der Grundlagen der Geometrie einer erschöpfenden Behandlung zu unterziehen. Kleins Behandlung für die Sache ist lange nicht genug gewürdigt.

Une traduction allemande du livre de Veronese paraîtra, mais seulement en 1894. Schur se réfère donc à l'original, ce qui témoigne d'une bonne connaissance de l'italien qui lui sera utile pour lire d'autres textes écrits dans cette langue. Sa réaction négative porte sur deux aspects du livre. Il rejette d'abord l'idée que l'on veuille, comme le fait Veronese au début de son livre, développer la géométrie de manière abstraite, sans recourir à l'intuition. Pour Schur, celle-ci devra toujours être à la base de la géométrie. La seconde concerne les infiniment petits. À l'instar de Cantor[12], il les rejette sans discussion. Même s'il est hostile au livre de Veronese, Schur en retiendra au moins une idée importante, à savoir que l'axiome d'Archimède n'est pas indispensable pour développer la géométrie. L'idée qu'il faut éviter les irrationnels est pour sa part antérieure à la lecture de Veronese puisqu'on la trouve déjà dans la note sur le théorème fondamental [Schur 1881][13]; elle témoigne aussi du souci d'éviter l'emploi d'une hypothèse de continuité. On notera enfin une nouvelle référence à la méthode de Klein. Les avantages et les caractéristiques de celle-ci sont développés plus en détail dans une lettre à Engel du 7 novembre 1893. Après avoir affirmé que Lie envisage les fondements de la géométrie de manière unilatérale en ne s'intéressant qu'à ce qui dépend de la théorie des groupes de transformations, il écrit :

> J'aimerais par contre affirmer que pour une construction véritable de la géométrie à partir des axiomes de l'intuition les travaux de Klein sont beaucoup plus importants que ceux de Riemann et à plus forte raison de Lie. Le fait que l'on doive se limiter à un espace fini afin d'être tout à fait sûr de dériver des premiers axiomes — à part l'axiome des parallèles — tout ce qui peut être dérivé sans introduction implicite de nouveaux axiomes, et l'introduction des éléments idéaux qui en dépend, ces idées exprimées en premier par Klein sont vraiment fondamentales, et elles permettent une réfutation absolument indiscutable de la preuve de l'axiome des parallèles[14].

12 La position de Cantor apparaît dans sa correspondance [Cantor 1991].

13 Il affirme dans cette note qu'un passage par les irrationnels doit être tenu éloigné de la « géométrie pure » le plus longtemps possible.

14 Demgegenüber möchte ich behaupten, dass für einen wirklichen Aufbau der Geometrie auf den Axiomen der Anschauung Kleins Arbeiten viel wichtiger sind als die von Riemann geschweige denn die von Lie. Dass man sich, um ganz sicher zu sein aus den ersten Axiomen — abgesehen vom Parallelenaxiom — alles abzuleiten,

La question de savoir comment aborder les fondements est à cette époque ouverte. Deux approches s'opposent : la méthode analytique de Bernhard Riemann, Hermann von Helmholtz ou Lie qui consiste à supposer que l'espace est une variété différentiable, et la méthode synthétique, suggérée par Klein et développée par Pasch, dans laquelle on commence par considérer une portion d'espace limitée que l'on complète ensuite par des éléments idéaux pour obtenir l'espace projectif. Cette méthode est indépendante du postulat des parallèles et c'est à elle que Schur accorde sa préférence.

Entre 1894 et 1896, le thème des fondements n'est plus abordé. Il réapparaît dans une lettre du 9 juillet 1897. Schur déclare (à propos d'une construction des parallèles non euclidiennes proposée par Engel [15]), qu'il ne s'est que peu occupé de géométrie non euclidienne au sens élémentaire et que ce sont exclusivement les fondements qui l'ont intéressé. Dans une lettre du 15 novembre 1897, il affirme que le fait de savoir si le postulat d'Archimède est nécessaire pour fonder la géométrie projective ou non a fait l'objet d'une dispute (allusion probable aux controverses suscitées par le livre de Veronese). Il signale que Hermann Wiener a affirmé que le théorème de Desargues et celui de Pascal pour deux droites sont suffisants pour fonder la géométrie projective [16]. Il note que le premier théorème est certainement indépendant de ce postulat ; il affirme de plus que c'est aussi le cas du second qui peut être démontré à partir d'axiomes de congruence. Il esquisse une preuve de ce théorème ; elle repose sur les propriétés de l'hyperboloïde de révolution à une nappe. Schur conclut en disant qu'il n'a pas encore eu le temps d'approfondir cette idée. Ce travail sera effectué

was ohne stillschweigende Einführung neuer Axiome daraus abgeleitet werden kann, auf einen endlichen Raum beschränken müsse, und die damit zusammenhängende Einführung der idealen Elemente, diese zuerst von Klein ausgesprochenen Ideen sind geradezu fundamental, und sie ermöglichen eine vollkommen einwandfreie Widerlegung des Beweises des Parallelenaxioms.

15 Cette construction sera exposée dans [Engel 1898b].

16 Cette affirmation figure sans démonstration dans [Wiener 1892]. Le cas particulier du théorème de Pascal pour deux droites est le théorème de Pappus. Rappelons-en l'énoncé : soient g et g' deux droites ; soient E_1, E_3, E_5 trois points de g, E_2', E_4', E_6' trois points de g', $D_1 = E_1E_2' \cap E_4'E_5$, $D_2 = E_2'E_3 \cap E_5E_6'$, $D_3 = E_3E_4' \cap E_6'E_1$; les trois points D_1, D_2 et D_3 sont alignés. Dans la suite cet article, l'appellation « théorème de Pascal » désignera toujours ce cas particulier.

quelques mois plus tard. En effet, dans une lettre du 26 mai 1898, Schur annonce avoir écrit pendant les vacances de Pâques un petit article pour les *Mathematische Annalen* dans lequel il montre qu'un fondement de la géométrie est possible sans le postulat d'Archimède. Dans cet article [Schur 1898a], Schur expose la preuve du théorème de Pascal esquissée dans la lettre du 15 novembre 1897 ; il montre de plus comment établir à partir de ce théorème le théorème fondamental. La géométrie projective peut donc effectivement être fondée sans faire appel au postulat d'Archimède et Schur apporte là une contribution importante.

Après avoir publié cet article, Schur semble avoir commencé à réfléchir de manière plus générale au problème des fondements et à étudier les travaux existants sur ce sujet. Dans une lettre du 8 décembre 1898, il cite un livre de Veronese *Elementi di Geometria* [Veronese 1897] [17] qu'il juge très intéressant. Il déplore par ailleurs l'absence d'une traduction allemande récente des *Eléments* d'Euclide. Il se déclare d'accord avec Engel pour dire que le livre de Killing [18] est le seul qui permette de s'instruire de manière exhaustive sur la question des fondements de la géométrie. Dans une lettre du 5 février 1899, Schur cite à nouveau le manuel de Veronese et déclare que ce dernier a montré qu'il y a relativement peu de postulats implicitement admis par Euclide. Schur remercie aussi Engel de lui avoir envoyé son livre *Lobatschefskij* [Engel 1898a]. Il fait quelques commentaires généraux :

> Dans l'ensemble, vous serez bien d'accord avec moi que seul un intérêt historique revient encore aux « Nouveaux principes » [19]. Une présentation de la géométrie non euclidienne devra aujourd'hui toujours avoir lieu du point de vue projectif. Car une telle présentation pénètre premièrement mieux dans le sujet et est ensuite au fond beaucoup plus élémentaire. Grâce à elle on peut aussi repousser beaucoup plus loin l'usage de processus limites et des considérations de continuité sont absolument inutiles. Peut-être les premiers peuvent-ils être aussi complètement évités. Les recherches à ce sujet ne sont pas encore complètement terminées ; la faute en est le point de vue unilatéral avec lequel on a

17 Dans cet ouvrage, Veronese entend faire bénéficier l'enseignement de la géométrie élémentaire des récents progrès effectués dans le domaine de l'axiomatique et des fondements.

18 Il s'agit de [Killing 1893], un livre pourtant critiqué dans d'autres lettres.

19 [Lobatchevski 1835].

exclusivement dirigé ses efforts sur l'axiome des parallèles, comme s'il n'existait dans le domaine de la géométrie pas d'autre problème que celui-ci [20].

Une lettre du 14 février 1899 apporte des compléments. Schur déconseille à Engel d'écrire un livre sur la géométrie non euclidienne « à tendance métrique (règle et compas) ». Voici ses arguments :

> D'abord un livre comme vous le prévoyez ne trouverait certainement qu'un cercle restreint de lecteurs ; en Allemagne peut-être principalement Max Simon [21]. Mais p. ex. en Italie, où l'on mène actuellement les études sur les fondements de la géométrie avec un zèle et un succès bien plus grands qu'en Allemagne, un tel livre susciterait à peine l'intérêt. En fait la conviction s'est pourtant peu à peu frayé un chemin dans tous les cercles scientifiques qu'un intérêt et une importance reviennent à la géométrie non euclidienne principalement dans la mesure où elle nous montre clairement quels théorèmes de la géométrie sont indépendants du postulat des parallèles. Mais ceci ne peut être développé de manière systématique que sur un fondement projectif ou, puisque je voudrais aussi ne pas renoncer complètement à la métrique, sur un fondement qui ne fait d'abord aucune supposition sur les théorèmes des parallèles, et non plus sur ceux de Lobatscheffskij. Mais si vous voulez tenir compte de cette exigence, il n'y a pas de chemin plus élémentaire que celui suivi par Pasch, surtout si l'on tient compte des simplifications qui ont été entre-temps trouvées.
>
> Mais je tiens aussi en elle-même cette méthode pour plus élémentaire que p. ex. celle de Lobatscheffskij. Elle opère seulement avec des éléments réellement constructibles, donc p. ex. pas avec des choses situées complètement hors de toute constructibilité comme la surface limite de Lobatscheffskij. Vous faites

---

20 Im Grossen und Ganzen werden Sie wohl mit mir darin einig sein, dass den « Neuen Anfangsgründen » nur noch ein historisches Interesse zukomme. Eine Darstellung der nichteuklidischen Geometrie wird heute wohl immer von projektivem Standpunkte aus geschehen müssen. Denn eine solche dringt erstens mehr in die Sache ein und dann ist sie im Grunde genommen viel elementarer. Auch lässt sich bei ihr die Benutzung von Grenzprocessen viel weiter hinausschieben und Stetigkeitsbetrachtungen braucht man gar nicht. Vielleicht lassen sich auch die ersteren ganz vermeiden. Die Untersuchungen darüber sind wohl noch nicht ganz abgeschlossen, woran die Einseitigkeit schuld ist, mit der man ausschliesslich seine Bemühungen auf das Parallelenaxiom gerichtet hat, als ob es auf dem Gebiete der Geometrie keine andern Probleme gäbe als dieses.

21 Simon (1844-1918) fut maître de gymnase à Strasbourg puis professeur d'université dans cette ville. Il est l'auteur de plusieurs articles consacrés à la géométrie non euclidienne.

> aussi erreur si vous croyez que la méthode projective, pour m'exprimer brièvement, ne peut indiquer aucune manière de prouver métriquement les théorèmes. Elle ne livre peut-être pas toujours le chemin le plus simple, mais elle en indique toujours un par l'étude des déplacements que l'on peut en géométrie non euclidienne justement ramener aux retournements comme dans l'euclidienne. [...] En ce qui concerne enfin l'évitement des axiomes de continuité, je suis curieux de savoir comment vous voulez éviter le postulat d'Archimède autrement que par le chemin (projectif) tel que je l'ai exposé ; et on devra maintenant exiger ceci d'une présentation qui doit avoir quelque signification pour les fondements de la géométrie [22].

Dans ces deux lettres, Schur décrit le programme qu'il suivra dans ses *Grundlagen der Geometrie* : il faut construire la géométrie sur un « fondement projectif », raisonner seulement sur des figures constructibles et éviter toute hypothèse concernant le parallélisme. La résolution de la question des parallèles n'est pas une fin en soi et ne constitue qu'une étape

---

22 Zunächst würde ein Buch, wie Sie es planen, sicherlich nur einen geringen Leserkreis finden ; in Deustchland vielleicht hauptsächlich Max Simon. Aber z. B. in Italien, wo man die Studien über die Grundlagen der Geometrie gegenwärtig mit viel grösseren Eifer und Erfolge treibt als in Deutschland, würde ein solches Buch kaum Interesse finden. In der That hat sich doch in allen wissenschaftlichen Kreisen allmählich die Überzeugung Bahn gebrochen, dass der nichteuklidischen Geometrie hauptsächlich ein Interesse und Wichtigkeit zukomme, als sie uns deutlich zeigt, welche Sätze der Geometrie vom Parallelensatze unabhängig sind. Dies kann aber in systematischer Weise nur auf projectiver Grundlage oder, da auch ich die Metrik nicht ganz entbehren möchte, auf einer Grundlage entwickelt werden, die über die Parallelensätze zunächst gar keine Voraussetzungen macht, also auch nicht die Lobatscheffskijschen. Wollen Sie aber dieser Forderung gerecht werden, so giebt es wohl keinen elementareren Weg als den z.B. von Pasch eingeschlagenen, besonders wenn man die Vereinfachungen eintreten lässt, die inzwischen gefunden werden.
Aber auch an sich halte ich diese Methode für elementarer als z.B. diejenige von Lobatscheffskij. Sie operirt nur mit wirklich construirbaren Elementen, also z.B. nicht mit solchen ganz ausserhalb aller Construirbarkeit liegenden Dingen wie die L'. sche Grenzfläche. Auch irren Sie, wenn Sie glauben, dass die projective Methode, um mich kurz auszudrücken, keinen Weg angeben soll, wie man die Sätze metrisch beweist. Sie liefert vielleicht nicht immer den einfachsten Weg, aber sie giebt stets einen solchen an durch das Studium der Bewegungen, die man in der nichteuklidischen Geometrie gerade so auf die Umwendungen zurückführen kann wie in der euklidischen. [...] Was endlich die Vermeidung der Stetigkeitsaxiome betrifft, so bin ich neugierig, wie Sie anders als auf dem von mir angegebenen (projectiven) Wege das Archimedische Postulat vermeiden wollen, und von einer Darstellung, die für die Grundlagen der Geometrie Bedeutung haben soll, wird man das jetzt verlangen müssen.

dans une recherche plus générale sur les fondements. Il faut de plus renoncer à l'axiome d'Archimède et fonder la partie « métrique » sur la notion de déplacement dont l'étude se ramène à celle des « retournements » (symétries axiales). Schur se place dans la filiation de Pasch et son jugement est plus favorable qu'au début de la décennie. À la différence de Hilbert [23], il connaît bien les recherches effectuées en Italie et est pleinement conscient de leur importance [24]. Ce sont précisément ces recherches qui font qu'il n'est plus possible d'écrire un livre comme celui de Killing par exemple.

Au début de l'année 1899, Schur n'est cependant pas le seul mathématicien allemand à réfléchir aux fondements de la géométrie. À cette époque, Hilbert a commencé à étudier ce sujet après avoir délaissé la géométrie pendant plusieurs années [25]. Comme Markus Toepell [Toepell 1985] l'a montré, Schur a joué un rôle dans cette réorientation. C'est en effet sa preuve du théorème de Pascal fondée sur la congruence qui contribua à éveiller chez Hilbert un nouvel intérêt pour les fondements de la géométrie ; le résultat en sera la publication, une année plus tard, des *Grundlagen der Geometrie*. Cet événement majeur ne manquera pas d'influencer à son tour les recherches de Schur. Il donne en effet à Karlsruhe au semestre d'hiver 1899-1900 un cours sur les fondements de la géométrie. Une lettre de Schur à Engel du 10 décembre 1899 témoigne bien de la stimulation exercée par le livre de Hilbert. Schur affirme qu'il place cet ouvrage à la base de son cours ; il ajoute cependant aussitôt qu'il l'a complété en de

23 Sur ce point, on pourra consulter [Toepell 1985, pp. 56-57].

24 Il cite à la fin de la lettre le mémoire *Sui fondamenti della geometria* de Peano [Peano 1894]. C'est à ce mémoire que Schur fait allusion lorsqu'il parle dans la lettre des simplifications apportées à la méthode de Pasch. Il écrit aussi que Veronese, en dépit de nombreuses absurdités, a rendu de grands services dans le domaine des fondements.

25 Schur l'ignore. Une lettre du 20 février 1899 montre qu'il est persuadé que Hilbert ne s'intéresse qu'à la théorie des nombres. Il écrit : « Il [Hilbert] est assis derrière un mur qui le tient éloigné de tout ce qui ne dépend pas de la théorie des nombres, [...]. » (Er sitzt eben hinter einer Mauer, die ihm alles, was nicht mit Zahlentheorie zusammenhängt, fern hält, [...].) Schur conclut que Weierstrass était un autre homme ! La correspondance de Schur contient un grand nombre de jugements négatifs sur ses collègues.

nombreux points et regrette qu'Hilbert n'ait pas accordé plus d'importance aux géomètres italiens [26]. Il considère comme particulièrement intéressante la preuve apportée par Hilbert de l'indépendance de l'axiome d'Archimède, preuve simple et indépendante de toute considération sur l'infini actuel. Hilbert établit en effet cette indépendance en donnant un modèle fonctionnel d'une géométrie non archimédienne ; il ne procède pas de manière abstraite comme Veronese en supposant l'existence d'infiniment petits ou grands.

Le résultat des recherches effectuées par Schur à cette période aboutira à un article intitulé *Ueber die Grundlagen der Geometrie* [Schur 1901]. Il ne s'agit plus, comme dans les articles précédents, de résoudre un problème particulier, mais d'exposer une méthode axiomatique pour construire simultanément la géométrie euclidienne et les différentes géométries non euclidiennes [27] à l'intérieur de la géométrie projective. Cette méthode sera reprise et développée par Schur dans ses *Grundlagen der Geometrie*. Son article contient aussi un certain nombre de remarques et critiques à l'égard de Hilbert et on sent chez Schur le besoin de se situer par rapport à son collègue. Une lettre du 27 octobre 1900 à Engel montre que l'article a aussi une autre fonction :

> Je suis moi-même maintenant en train de finir un article sur les fondements de la géométrie non euclidienne principalement pour mettre en avant une omission de mes droits de priorité sur la preuve élémentaire de l'indépendance de certains théorèmes du postulat d'Archimède. Par sa manière de citer et peut-être sans le vouloir, Hilbert n'est pas complètement innocent de cette omission [28].

---

26 Plusieurs lettres adressées par Schur à Hilbert à cette époque témoignent également de cet intérêt critique. Ces lettres sont conservées à la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek* à Göttingen (Cod. Ms. D. Hilbert 360).

27 L'appellation « géométrie non euclidienne » doit être prise ici au sens large et non au sens strict (géométrie de Bolyai et Lobatchevski).

28 Ich selbst bin jetzt dabei, einen Artikel über die Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie fertig zu machen hauptsächlich, um eine Verdunkelung meiner Prioritätsansprüche auf den [?] elementaren Beweis der Unabhängigkeit gewisser Sätze vom Archimedischen Postulate vorzubringen. An dieser Verdunkelung ist Hilbert durch seine Art des Zitierens, vielleicht ohne es zu wollen, nicht ganz unschuldig.

En démontrant le théorème de Pascal sans utiliser l'axiome d'Archimède et en montrant de plus dans son livre *Analytische Geometrie* [Schur 1898b] comment fonder un calcul des proportions à partir de ce théorème, Schur avait en effet anticipé sur le chapitre 3 des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. On peut donc comprendre sa déception de ne pas être cité par ce dernier [29].

En 1903, Hilbert publie un article sur les fondements de la géométrie de Bolyai et Lobatchevski [Hilbert 1903]. Toujours intéressé et en même temps critique, Schur publie l'année d'après un commentaire éclairant du travail de Hilbert [Schur 1904]. Il écrit à ce propos dans une lettre à Engel du 28 avril 1904 :

> J'aide le monde à comprendre un peu les motivations de Hilbert dans son article « Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie » [30].

Les recherches de Schur sur les fondements de la géométrie s'achèveront avec la publication des *Grundlagen der Geometrie* en 1909. Une lettre à Engel du 2 mai 1907 indique dans quel état d'esprit cet ouvrage fut rédigé :

> Je travaille maintenant à un livre sur les fondements de la géométrie non euclidienne [...]. J'aimerais de cette manière me libérer de ces anciennes recherches et pouvoir ensuite me consacrer à d'autres choses [31].

C'est à partir de ce livre que j'exposerai la méthode de Schur tout en me référant parfois aux articles antérieurs, et en particulier à l'article *Ueber die Grundlagen der Geometrie* [Schur 1901] qui en constitue la première version. Cet article sera désigné par l'abréviation *UG*, alors que le livre sera désigné par l'abréviation *GG*.

---

29 Ce problème est aussi évoqué dans une lettre de Schur à Hilbert du 5 janvier 1900. [Cod. Ms D. Hilbert 360]

30 Ich helfe darin der Welt, Hilbert in Bezug auf seine Abhandlung « Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie » etwas in die Karten zu gucken.

31 Ich arbeite jetzt an einem Buche über die Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie [...]. Ich möchte mich auf diese Weise von diesen alten Untersuchungen befreien, und mich dann anderen Dingen zuwenden können.

2. LA MÉTHODE DE SCHUR

2.1. *Caractéristiques générales*

Relevons tout de suite une première différence entre Hilbert et Schur. Le premier se situe dans le cadre de la géométrie euclidienne élémentaire alors que le second se place dans celui de la géométrie projective. Les recherches de Schur s'inscrivent donc dans une lignée de travaux qui débute avec la *Geometrie der Lage* de Christian von Staudt [Staudt 1847] et se poursuit avec les *Vorlesungen über neuere Geometrie* de Pasch [Pasch 1882] et les deux mémoires de Giuseppe Peano *I principii di geometria logicamente esposti* [Peano 1889] et *Sui fondamenti della geometria* [Peano 1894]. On sait que c'est aussi de cette manière qu'Hilbert avait abordé au début des années 1890 la question des fondements dans des cours[32]. C'est l'approche naturelle à la fin du XIXe siècle. Rappelons que dans la lettre à Engel du 14 février 1899 citée ci-dessus, Schur affirmait que la géométrie doit être bâtie sur un fondement projectif et qu'il n'y a pas de méthode plus élémentaire que celle de Pasch. Dans la préface de *GG*, il présente d'ailleurs son livre comme une réélaboration de celui de Pasch à la lumière des différentes recherches suscitées par les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. On peut distinguer cinq étapes dans la construction de Schur :

1) Il commence par poser des postulats faisant intervenir à la fois l'incidence et l'ordre et valables dans une portion d'espace limitée que j'appellerai « l'espace initial ». Il complète ensuite cet espace en adjoignant des éléments idéaux de manière à obtenir l'espace projectif entier. C'est le chemin suivi par Pasch ; l'idée en remonte à Klein. Il repose sur une conception empiriste de la géométrie sur laquelle je reviendrai.

2) Schur poursuit sa construction en posant cinq postulats caractérisant les déplacements. Ces postulats sont valables dans l'espace initial mais les déplacements se prolongent en collinéations de l'espace projectif. Parmi eux, les symétries jouent un rôle particulier. Schur se fonde sur leurs propriétés pour établir le théorème de Pascal et donner une démonstration du théorème fondamental indépendante de tout axiome de continuité.

---

32 Cf. [Toepell 1986] et [Hallett & Majer 2004]

3) Dans une troisième étape, Schur établit d'une nouvelle manière le calcul des jets de von Staudt qui lui sera nécessaire pour développer la géométrie analytique.

4) Il utilise la notion de perpendicularité pour définir sur chaque droite une involution appelée « absolue ». Cette nouvelle notion permet d'associer à chaque couple de points un jet particulier appelé « distance projective ». Schur établit un certain nombre de relations faisant intervenir cette distance. Elles contiennent une constante et sont analogues, suivant la valeur de cette constante, aux relations métriques euclidiennes, non euclidiennes (hyperboliques) ou elliptiques. L'analogie n'est que formelle car l'axiome d'Archimède n'a pas encore été introduit. Il s'agit sans doute, avec la démonstration du théorème fondamental, de la partie la plus originale des recherches de Schur.

5) La dernière caractéristique des recherches de Schur est de repousser le plus loin possible l'utilisation de l'axiome d'Archimède. Ce n'est que dans le dernier chapitre de *GG* qu'il introduit cet axiome et montre quelles en sont les conséquences. Cette préoccupation apparaît déjà dans [Schur 1898a]. J'ai montré qu'elle trouvait son origine dans la lecture de Veronese.

J'examinerai maintenant plus en détail la méthode de Schur en suivant les chapitres de son livre dans l'ordre. Je ne pourrai naturellement pas rendre compte de tous les détails et me limiterai aux points qui me paraissent les plus importants.

2.2. *Les postulats projectifs*

Dans le premier chapitre, Schur énonce huit postulats appelés « projectifs » et valables dans l'espace initial (cf. annexe). Les notions fondamentales sont celles de point et de segment. La droite, le plan et l'espace font l'objet d'une définition (cf. annexe). Schur démontre qu'une droite est déterminée par deux quelconques de ses points et un plan par trois quelconques de ses points non alignés. Ce système de postulats est proche de celui exposé par Peano dans [Peano 1894] [33] et repris ensuite avec quelques modifications par Giuseppe Ingrami dans son manuel *Elementi*

33 Peano s'est lui-même inspiré de Pasch.

di geometria [Ingrami 1899] [34]. Dans *UG*, Schur adopte sans changements la version de ce dernier. Dans *GG*, il y apporte quelques modifications. En reprenant une idée du géomètre américain Eliakim Moore [Moore 1902], il peut renoncer à l'un des postulats plans de Peano [35]. À la différence de Pasch, Peano et Ingrami, Schur renonce à poser comme axiome la possibilité de prolonger un segment au-delà d'une de ses extrémités [36]. Il écrit à ce propos :

> À cette occasion nous laissons ouverte la question de savoir si chaque segment peut être prolongé au-delà de chacune de ses extrémités et nous nous limitons plutôt, comme cela correspond à la formation des axiomes géométriques, à des parties bornées de la ligne droite, ce que l'on appelle ses points atteignables. [Schur 1909, p. 6] [37]

On voit apparaître ici l'exigence constuctiviste qui est au fondement de la méthode et de l'épistémologie de Schur. Elle pose cependant parfois des problèmes, notamment ici car la définition de la droite donnée quelques lignes plus loin suppose précisément qu'un segment est prolongeable à

34 Ce manuel aujourd'hui oublié est paru peu de temps après l'ouvrage homonyme de Veronese [Veronese 1897]. Les deux auteurs poursuivent le même but (cf. note 17).

35 À la différence de Pasch, Peano ne traite pas le plan comme une notion primitive mais en donne une définition ; celle-ci revient à dire que le plan ABC est le lieu des points situés sur les droites passant par un des sommets du triangle ABC et un point situé sur un côté opposé à ce sommet. Peano démontre qu'un plan est déterminé par trois points non alignés. Sa preuve fait appel à deux postulats qui n'apparaissent pas chez Pasch. En voici, librement retranscrits, les énoncés :
Postulat XIII. Soient A, B, C trois points non alignés. Soit D un point du segment BC, E un point du segment AD. Le segment AC et le prolongement de BE ont un point commun.
Postulat XIV. Dans la situation précédente, si F est un point de AC, il existe un point commun aux segments AD et BF.
Schur démontre que le second postulat est une conséquence du premier.

36 Le système de Schur ne comprend donc pas l'axiome suivant : soient A et B deux points ; il existe un point C tel que B appartient au segment AC. Cet axiome figure aussi chez Hilbert (numéro II, 2). Pour la définition de la prolongation d'un segment et la définition de la droite, cf. annexe, déf. 1 et 2.

37 Hierbei lassen wir es dahingestellt, ob jede Strecke über jeden Endpunkt hinaus verlängert werden kann, wir beschränken uns vielmehr, wie es der Entstehung der geometrischen Axiome entspricht, auf begrenzte Teile der geraden Linien, ihre sogenannten erreichbaren Punkte.

partir de chacune de ses extrémités. L'existence d'une prolongation est aussi nécessaire pour démontrer que si deux plans ont un point commun, ils ont une droite commune [38]. Dans sa preuve, Schur suppose en effet que si S est le point commun des deux plans α et β, il existe un segment AB de α contenant S.

Dans *UG*, Schur remarque que les postulats (ou axiomes) projectifs correspondent aux axiomes d'incidence et d'ordre de Hilbert. Il considère que cette séparation n'est pas tout à fait heureuse dans le cas du plan ; l'axiome II 5 de Hilbert (« l'axiome de Pasch ») mélange en effet les deux notions [39]. De plus, Schur affirme que les axiomes de Hilbert ne sont pas indépendants et que le groupement de Peano-Ingrami permet une simplification « essentielle » du système de Hilbert, raison pour laquelle il préfère le premier au second. Schur pense en effet que puisque dans le système de Peano le plan est définissable et ses propriétés démontrables, les axiomes I 3, 4 et 5 de Hilbert (concernant le plan) sont superflus [40]. Moore [Moore 1902] montrera cependant que cette affirmation n'est pas correcte en donnant l'exemple d'une géométrie où les axiomes des deux premiers groupes sont vérifiés à l'exception des axiomes I 3, 4 et 5 [41]. Moore note que dans son raisonnement, Schur suppose implicitement

38 Il s'agit du théorème 11 du livre [Schur 1909, p. 13].

39 « L'axiome II, 5 à la p. 7 des *Grundlagen* de Hilbert ne peut pas être considéré comme un pur axiome d'ordre, car premièrement il affirme que la droite a a un point en commun avec l'une des deux droites, et deuxièmement que ce point est situé entre deux sommets du triangle. » [Schur 1901, p. 267]
(« Das Axiom II, 5 auf S. 7 von Hilbert's Grundlagen kann nicht als ein reines Axiom der Anordnung betrachtet werden, da es erstens aussagt, dass die Gerade a mit einer von zwei Geraden überhaupt einen Punkt gemein hat, und zweitens, dass dieser Punkt zwischen zwei Ecken des Dreiecks liegt. »)
Cet axiome porte le numéro II, 5 dans la première édition des *Grundlagen*. Dans les éditions ultérieures, il porte le numéro II, 4.

40 Voici l'énoncé de ces axiomes dans la première édition :
I. 3 Trois points non alignés A, B, C déterminent toujours un plan α.
I. 4 Trois points non alignés d'un plan déterminent ce plan.
I. 5 Si deux points A, B d'une droite a appartiennent à un plan α tous les points de la droite appartiennent à ce plan α.

41 L'exemple est simple. Les points, segments et droites sont ceux de la géométrie euclidienne ordinaire à trois dimensions ; l'ensemble des plans est constitué de deux sphères sécantes.

que le plan de Hilbert est identique à celui de Peano, identité qui ne peut être établie selon lui qu'en utilisant au moins en partie les axiomes I 3 - 7 et II 5 de Hilbert [42]. Dans la suite de l'article, Moore démontre que l'axiome I 4 est dépendant des autres axiomes, mais son raisonnement contient une erreur signalée dans les errata. Il établit en revanche de manière correcte que l'axiome d'ordre II 4 est dépendant [43]. Si la remarque de Schur n'est donc pas justifiée, elle a peut-être eu le mérite de soulever la question de l'indépendance des axiomes de Hilbert. Dans la première édition de son livre, Hilbert avait en effet écrit que son système était indépendant. Cette affirmation, reprise ensuite par d'autres auteurs, sera retirée dès la deuxième édition du livre en 1902.

2.3. *Les éléments idéaux*

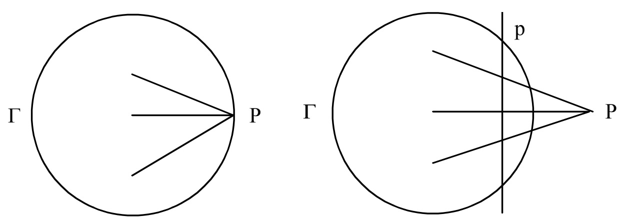
Les postulats d'incidence et d'ordre de Pasch, Peano, Ingrami et Schur décrivent une portion d'espace limitée et ne permettent en particulier pas d'affirmer que deux droites ont toujours un point commun. Il faut donc compléter l'espace initial au moyen d'éléments idéaux. Une telle complétion est classique lorsqu'on suppose la notion de parallélisme ; tout faisceau de parallèles définit en effet un point à l'infini. Mais comment procéder si l'on ne fait pas appel à cette notion ? Cette question a été soulevée pour la première fois par Klein dans le deuxième de ses articles consacrés à la géométrie non euclidienne [Klein 1873]. Plaçons-nous dans son interprétation projective du plan non euclidien [44]. Celui-ci est représenté par l'intérieur d'une conique réelle Γ. Les points situés sur Γ constituent les points à l'infini ; ceux situés à l'extérieur constituent les points idéaux ; ils sont situés à une distance imaginaire des points propres. Klein pose la question de savoir comment caractériser géométriquement les points idéaux

42 Dans une lettre à Hilbert du 30 mars 1902 [Cod. Ms D. Hilbert 360], Schur reconnaîtra son erreur en l'attribuant à un travail interrompu à plusieurs reprises et insuffisament relu.

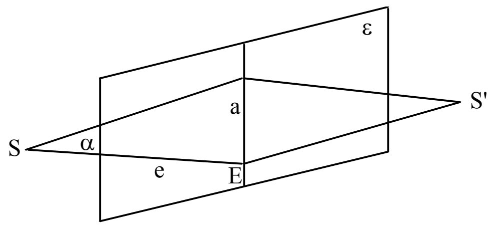
43 L'énoncé de cet axiome est dans la première édition : quatre points A, B, C, D quelconques d'une droite peuvent toujours être ordonnés de sorte que B soit entre A et C et aussi entre A et D et de plus que C soit entre A et D et aussi entre B et D.

44 Elle est exposée dans le premier article de Klein sur la géométrie non euclidienne [Klein 1871].

sans faire appel à l'interprétation du plan non euclidien comme intérieur de Γ. Il rappelle que dans la géométrie ordinaire un point à l'infini n'est autre que le représentant d'un faisceau de droites parallèles. Il faut selon lui procéder de la même manière et admettre que par un point idéal il passe un faisceau de droites. Cette idée apparaît clairement si l'on se place dans l'interprétation. Les droites d'un faisceau de parallèles concourent en effet en un point P de Γ ; les points de Γ correspondent donc aux points à l'infini. Quant aux droites admettant une perpendiculaire commune p, elles constituent un faisceau de droites divergentes et concourent au point P, pôle de p relativement à Γ.



Si Klein affirme qu'il faut généraliser la notion de faisceau, il ne fait cependant que suggérer l'idée. Celle-ci sera développée de manière systématique par Pasch. Dans ses *Vorlesungen über neuere Geometrie* [Pasch 1882], ce dernier définit rigoureusement la notion de point idéal, puis celle de droite idéale et de plan idéal. Il démontre que les relations d'incidence sont encore vraies pour ces nouveaux objets. Les raisonnements et les figures particulièrement compliqués de Pasch inciteront Schur à proposer une autre méthode. Elle est exposée d'abord dans [Schur 1891] puis reprise dans le chapitre 2 de *GG*. Schur utilise la notion de « correspondance perspective de deux gerbes de droites au moyen d'un plan ». Soient deux gerbes de droites de centres S et S' et un plan ϵ qui ne passe ni par S ni par S' ; supposons les deux gerbes mises en correspondance de sorte qu'à chaque droite e passant par S et coupant ϵ en un point E corresponde la droite $S'E$; de même à chaque plan α passant par S et coupant ϵ en une droite a correspond le plan $S'a$.



Le problème consiste à étendre cette correspondance au cas d'une droite issue de S qui ne coupe pas ϵ en un point ou d'un plan passant par S qui ne coupe pas ϵ en une droite. Schur démontre d'abord qu'à tous les plans passant par S, ayant une droite commune g et coupant ϵ, correspondent des plans passant par S' et ayant aussi une droite commune g'. On peut donc associer à g une droite g' sans savoir si elle coupe ϵ. La correspondance s'étend ainsi à toutes les droites passant par S. La démonstration fait appel au théorème des trièdres perspectifs [45]. Il prouve ensuite qu'à trois droites coplanaires passant par S correspondent trois droites par S' également coplanaires. La correspondance est donc aussi définie pour tout plan α passant par S. La démonstration utilise à nouveau le théorème des trièdres perspectifs. Schur démontre enfin qu'une droite g passant par S et la droite correspondante g' passant par S' sont coplanaires. Il conclut :

> Il découle de notre théorème que deux droites quelconques a et b d'un plan ϵ déterminent, indépendamment du fait qu'elles aient un point commun ou non, une gerbe de rayons dans le sens que par chaque point il passe un et un seul rayon et que deux tels rayons appartiennent au même plan. Si le point S est en dehors de ϵ, le rayon est la droite d'intersection g des plans Sa et Sb, et le théorème enseigne que $g' = (S'a, S'b)$ est coplanaire avec g, aussi bien qu'avec les rayons que déterminent avec ϵ les plans passant par g. Par conséquent le rayon c qui passe par un point quelconque C de ϵ est alors aussi déterminé, à savoir comme droite d'intersection de ϵ avec Cg ou Cg'. [...]

45 Voici l'énoncé de ce théorème : soient abc et $a'b'c'$ deux trièdres de sommet S. Si les plans aa', bb' et cc' se coupent selon la même droite g, les droites d'intersection des plans ab et $a'b'$, ac et $a'c'$, bc et $b'c'$ sont coplanaires. Schur reprend une démonstration donnée par Ventura Reyes y Prosper [Reyes y Prosper 1888]. Comme ce dernier le note, ce théorème « correspond à la proposition connue de Desargues sur les triangles perspectifs dans le plan. »

> Ceci amène, aussi dans le cas où nous ne savons rien du point d'intersection éventuel des droites a et b, où il n'existe peut-être pas, à parler d'un centre *idéal* de la gerbe déterminée par a et b ou du faisceau à l'intérieur du plan ϵ. [Schur 1909, pp. 17-18] [46]

Il est surprenant de voir Schur parler du point d'intersection éventuel des droites comme s'il y avait là quelque chose d'indécidable. Nous allons retrouver cette indécision un peu plus loin. Un point idéal peut aussi être défini par un plan ϵ et une droite g non située dans ϵ ; soient en effet A un point de ϵ et a l'intersection de ϵ et du plan $(A; g)$; soient encore B un point de ϵ non situé sur a et b l'intersection de ϵ et du plan $(B; g)$. Les droites a et b définissent une gerbe dont, par construction, g fait partie.

La définition donnée par Schur d'un point idéal est celle de Pasch [47]. Ce dernier démontre plus rapidement que Schur et sans utiliser la correspondance projective que les droites g et g' sont coplanaires. La méthode de Schur se révèle en revanche plus avantageuse pour définir les droites et plans idéaux. Voyons comment Schur définit la première de ces notions :

> Si deux points idéaux sont donnés avec les gerbes qui s'y rapportent, il est immédiatement clair que par chaque point S il passe un plan commun aux deux gerbes ; il est déterminé par les droites des deux gerbes qui passent par S [...]. Si deux tels plans n'ont pas de point commun ou si un tel point n'est pas garanti, nous pouvons pourtant parler d'une *droite idéale* du faisceau de plans déterminé par les deux points idéaux. Imaginons, ce qui est toujours possible, les deux points idéaux déterminés par un plan commun ϵ de leurs gerbes et par

---

46 Aus unserm Satze geht hervor, daß irgend zwei Geraden a und b einer Ebene ϵ unabhängig davon, ob sie einen gemeinsamen Punkt haben oder nicht, ein Strahlenbündel in dem Sinne bestimmen, daß es durch jeden Punkt einen und nur einen Strahl schickt, und je zwei solcher Strahlen derselben Ebene angehören. Liegt der Punkt S außerhalb von ϵ, so ist der Strahl die Schnittlinie g der Ebenen Sa und Sb, und der Satz lehrt, daß $g' = (S'a, S'b)$ mit g, ebenso aber mit denjenigen Strahlen in je einer Ebene liegt, welche die Ebenen durch g mit ϵ bestimmen. Hierdurch ist also auch der Strahl c bestimmt, der durch irgendeinen Punkt C von ϵ läuft, als Schnittlinie nämlich von ϵ mit Cg oder Cg'. [...]
Dies veranlaßt dazu, auch in dem Falle, daß wir über den etwaigen Schnittpunkt der Geraden a und b nichts wissen, daß er also vielleicht *nicht* vorhanden ist, von einem *idealen* Zentrum des durch a und b bestimmten Bündels oder Büschels innerhalb der Ebene ϵ zu reden.

47 Elle apparaît déjà implicitement chez Klein [Klein 1873, pp. 339-340].

deux rayons g et h issus de S, alors chaque rayon k du plan $[g, h]$ par S déterminera avec ϵ un point idéal que nous pouvons considérer comme appartenant à la droite idéale. Car si les trois points idéaux (g, ϵ), (h, ϵ), (k, ϵ) déterminent par un autre point S' les rayons g', h', k', ceux-ci sont situés d'après le théorème 13 [48] dans un plan qui appartient à notre faisceau et en même temps à chacune des gerbes appartenant aux trois points idéaux. [Schur 1909, p. 18] [49]

Les propriétés de la correspondance perspective permettent donc à Schur de définir sans ambiguïté une droite idéale et d'éviter les longs raisonnements de Pasch [50]. On peut aussi considérer qu'une droite idéale est définie par deux plans non sécants. Après l'introduction des points idéaux et des droites idéales, il est possible d'affirmer sans exception que, dans un plan, deux points déterminent une droite et deux droites un point. Le théorème de Desargues peut être alors établi à partir du théorème des trièdres perspectifs.

Soient ϵ et ϵ' deux plans, T un point idéal. Considérons l'application faisant correspondre à tout point de ϵ le point de ϵ' situé sur la droite le reliant avec T. Schur démontre que trois points alignés de ϵ correspondent à trois points alignés de ϵ'. Si les trois points sont sur une droite propre, ce résultat est immédiat. S'ils appartiennent à une droite idéale, la preuve fait appel au théorème de Desargues. Il conclut :

48 C'est le théorème cité précédemment selon lequel les images par la correspondance perspective de trois droites coplanaires passant par S sont encore coplanaires.

49 Sind zwei ideale Punkte mit den zugehörigen Bündeln gegeben, so ist unmittelbar klar, daß durch jeden Punkt S eine gemeinsame Ebene der beiden Bündel geht; sie ist bestimmt durch die Strahlen, welche die beiden Bündel durch den Punkt S schicken [...]. Besitzen zwei solche Ebenen keinen gemeinsamen Punkt oder ist ein solcher nicht verbürgt, so können wir doch von einer *idealen Geraden* des durch die beiden idealen Punkte bestimmten Ebenenbüschels reden. Denken wir uns, was immer möglich ist, die beiden idealen Punkte bestimmt durch eine gemeinsame Ebene ϵ ihrer Bündel und durch zwei Strahlen g und h von S, so wird jeder Strahl k der Ebene $[g, h]$ durch S mit ϵ einen idealen Punkt bestimmen, den wir als der idealen Geraden angehörig betrachten können. Denn schicken die drei idealen Punkte (g, ϵ), (h, ϵ), (k, ϵ) durch irgend einen andern Punkt S' die Strahlen g', h', k', so liegen diese nach dem 13. Satze in einer Ebene, die unserm Büschel angehört und zugleich jedem der zu drei idealen Punkten gehörigen Bündel.

50 Pasch a par la suite simplifié sa méthode (cf. [Pasch 1888] et [Pasch 1882, 2^{e} édition]).

> Nous pouvons aussi exprimer ce résultat en disant que le lieu des droites idéales qui sont déterminées par un point idéal et les points d'une droite idéale est rencontré par chaque plan en une droite propre ou idéale. Nous pourrons donc appeler ce lieu un *plan idéal*. [Schur 1909, p. 23] [51]

Avec cette dernière définition, Schur achève sa construction. L'introduction des éléments idéaux rend plus difficile le début de la construction axiomatique. Mais cette manière de faire présente un avantage relevé par Schur : en évitant l'utilisation du parallélisme, il est possible de fonder simultanément la géométrie euclidienne et les différentes géométries non euclidiennes. C'est précisément ce qu'il va faire dans la suite de son livre. Schur fait encore la remarque suivante :

> On peut finalement remarquer encore une fois que lors de l'introduction d'un point idéal on ne postule par exemple en rien que les droites le déterminant n'ont vraiment aucun point commun au sens habituel du terme ; cette introduction a lieu plutôt seulement dans l'intention de repousser la décision sur cette question. [Schur 1909, p. 24] [52]

On retrouve l'indécision déjà observée précédemment. Celle-ci est curieuse. En effet, il n'y a du point de vue mathématique que deux possibilités : soit deux droites se coupent et déterminent un point propre, soit elles ne se coupent pas et déterminent alors un point idéal. Mais selon Schur, certains points qui pourraient d'abord sembler idéaux pourraient en fait être propres. Il ne semble pas distinguer entre une géométrie pratique où effectivement on ne peut pas dire ce qui se passe en dehors de la feuille et une géométrie axiomatique où deux droites se coupent ou ne se coupent pas et où un point ne saurait changer de statut en cours de route. Nous allons voir par ailleurs au paragraphe suivant que l'introduction des postulats des déplacements exclut la possibilité d'une géométrie où tous les

---

51 Wir können diesen Satz auch dahin aussprechen, daß der Ort der idealen Geraden, die ein idealer Punkt mit den Punkten einer idealen Gerade bestimmt, durch jede Ebene in einer eigentlichen oder idealen Geraden getroffen wird. Wir werden daher diesen Ort eine *ideale Ebene* nennen können.

52 Schließlich mag nochmals darauf hingewiesen werden, daß bei Einführung eines idealen Punktes z. B. nichts darüber postuliert wird, daß die ihn bestimmenden Geraden wirklich keinen Punkt im gewöhnlichen Sinne des Wortes gemein haben, die Einführung geschieht vielmehr nur in der Absicht, um die Entscheidung über diese Frage hinauszuschieben.

points sont propres. Schur ne se préoccupe cependant guère de ce problème et admet tout au long de son livre la possibilité d'une telle géométrie. J'aurai l'occasion de revenir sur ce point au § 3. Relevons encore que dans la fin du chapitre 2, Schur utilise le théorème de Desargues pour introduire les notions de collinéation centrale, conjugué harmonique et réflexion colinéaire [53].

2.4. *Les déplacements*

Après avoir défini les éléments idéaux et construit l'espace projectif, l'étape suivante consiste à introduire la notion de déplacement. C'est l'objet du chapitre 3 du livre. Schur adopte un système de postulats énoncé par Peano à la fin de son mémoire *Sui fondamenti della geometria* [Peano 1894] [54]. Dans *UG*, Schur juge ces postulats particulièrement intéressants et préférables aux axiomes de congruence de Hilbert, à cause de l'utilisation de la notion de groupe de déplacements. Il faut peut-être voir dans ce point de vue l'influence de Lie ou même de Helmholtz [55]. On observe en tout cas à nouveau chez Schur le souci de se distinguer de Hilbert [56].

Le système de Peano comprend huit postulats. Le premier revient à dire que les déplacements conservent les segments. Les trois suivants affirment que les déplacements constituent un groupe. Les quatre derniers peuvent

53 Une réflexion colinéaire est une collinéation centrale dans laquelle un point A et son image A' sont conjugués harmoniques relativement au centre S de la collinéation et au point d'intersection D de la droite AA' et de l'axe de collinéation. Cette notion se généralise à l'espace de manière naturelle et Schur définit une réflexion colinéaire relativement à un plan et à un point.

54 Peano expose d'abord dans ce mémoire un système de postulats projectifs proche de celui choisi plus tard par Schur. À la différence de ce dernier, Peano n'explique pas comment définir les éléments idéaux et se contente d'un renvoi à la méthode de Pasch. Notons encore que Peano semble avoir été guidé, en tout cas en ce qui concerne les déplacements, par une intention pédagogique. Il conclut en effet son mémoire en espérant que quelques unes de ses remarques seront utiles pour la publication de traités élémentaires.

55 Nous verrons que ce dernier est cité plus loin.

56 Si dans ses *Grundlagen der Geometrie* Hilbert utilise la notion de congruence, il a également utilisé la notion de groupe de déplacements dans un article [Hilbert 1902] ajouté par la suite comme supplément no 4 à son livre.

être regroupés en un seul énoncé : soient A, B et C trois points non alignés, A_1, B_1 et C_1 trois autres points non alignés ; il existe alors un et un seul déplacement envoyant A sur A_1, la demi-droite AB sur la demi-droite A_1B_1 et le demi-plan (AB, C) sur le demi-plan (A_1B_1, C_1). À ces postulats vient encore s'ajouter un axiome de continuité équivalent au principe de coupure de Dedekind ; on en déduit l'axiome d'Archimède.

Ces postulats permettent à Peano de considérer trois déplacements fondamentaux notés α, β et γ. Supposons que A, B et C sont trois points non alignés. Le premier de ces déplacements laisse fixes le point A et le rayon AB et envoie le demi-plan (AB, C) sur son complémentaire. Le deuxième laisse fixes A et le demi-plan (AB, C) et envoie le rayon AB sur son complémentaire ; le dernier laisse fixe A et envoie le rayon AB sur son complémentaire et le demi-plan (AB, C) sur son complémentaire. Si un rayon AC est envoyé sur son complémentaire par le déplacement α, il est « perpendiculaire » à AB. Peano démontre que ces trois déplacements sont du même type et sont des symétries axiales ou « rotations de 180° relativement à un axe » [57]. Les symétries sont donc vues comme des transformations spatiales. Dans le premier cas, l'axe est la droite AB, dans le deuxième cas c'est la perpendiculaire à AB par A dans le plan ABC et dans le troisième c'est la perpendiculaire au plan ABC en A. Les postulats permettent à Peano de définir aussi les notions de translation et de rotation. Il démontre qu'une translation peut être obtenue en composant deux symétries dont les axes sont perpendiculaires à une même droite et une rotation en composant deux symétries dont les axes sont concourants. Il est important de noter que l'axiome d'Archimède intervient dans la démonstration de ces deux théorèmes.

Les différents résultats établis par Peano montrent l'importance des symétries. Celle-ci avait déjà été mise en évidence quelques années plus tôt par Wiener dans deux articles consacrés au mouvement des systèmes fixes de points [Wiener 1890a ;b]. Wiener n'est pas cité par Peano et on ne peut dire si ce dernier connaissait ses travaux. Il est en revanche cité par Schur

57 [Peano 1894, p. 152].

et ses articles ont sans doute aussi constitué pour lui une source d'inspiration. À la différence de Peano, Wiener ne se place pas dans un cadre axiomatique mais dans un cadre cinématique qu'il qualifie lui-même d'intuitif. Il travaille dans l'espace euclidien et fait appel aux notions de parallélisme et de perpendicularité. Il définit une symétrie comme un « demi-tour autour d'un axe » [58] et démontre en particulier que tout déplacement de l'espace peut être obtenu en composant deux symétries [59]. On prendra garde au fait qu'il n'envisage que des déplacements conservant l'orientation [60] ; dans le cas contraire, le théorème est faux.

Revenons à Schur. Il pose d'abord trois postulats (les no 9, 10, 11) valables dans l'espace initial. Ils sont équivalents aux huit postulats de Peano. Schur se distingue de ce dernier en renonçant à toute hypothèse de continuité, ce qui l'amènera par la suite à poser encore deux postulats supplémentaires. Il est important de noter que si les déplacements sont d'abord définis dans l'espace initial, ils se prolongent d'une manière unique en collinéations de l'espace projectif [61]. Il est donc possible de les considérer d'un double point de vue : comme transformations de l'espace initial ou de l'espace projectif.

Dans ses raisonnements, Schur se limite d'abord au cas du plan. En vertu du 11^{e} postulat, il existe dans un plan un déplacement U laissant fixes un point A ainsi qu'un des côtés d'une droite a passant par A et échangeant chacun des demi-plans limités par a ; c'est le déplacement noté α par Peano. Schur démontre, en se fondant sur le théorème de Desargues, que la prolongation de α au plan projectif est une réflexion

58 [Wiener 1890a, p. 14].

59 Wiener établit ce résultat dans son premier article en supposant que tout déplacement de l'espace est une torsion, composée d'une rotation et d'une translation. Il établit ce résultat directement dans le second article. Dans des articles ultérieurs, Wiener poursuivra ses recherches en développant un calcul des symétries. Pour une présentation des travaux de Wiener, on pourra se référer à [Schönbeck 1986] ou [Henke 2010].

60 Cette restriction disparaît dans les articles ultérieurs.

61 Ce point n'est pas explicité par Schur. Pasch en revanche explique comment la notion de congruence, qu'il introduit d'abord pour les éléments propres, s'étend aux éléments impropres [Pasch 1882, § 14]. Il montre aussi à la fin du § 18 de son livre que si des figures sont congruentes (dans le sens élargi du terme), l'une est l'image de l'autre par une collinéation.

colinéaire dont l'axe est la droite a et le centre un point appelé « pôle » de l'axe. Il définit la notion de perpendicularité comme Peano. Il démontre que la composition de deux symétries d'axes AB et AC perpendiculaires est une réflexion colinéaire de centre A ; l'axe de cette réflexion est appelé « polaire absolue de A » ; c'est le lieu des pôles de toutes les droites passant par A. Schur affirme que le pôle d'une droite peut être propre ou idéal, ce qui est faux. En effet, si le pôle P d'une droite d était propre, son symétrique P' par rapport à d serait aussi propre et distinct de P [62] ; toutes les perpendiculaires à d passeraient par P et P', contredisant ainsi le théorème (démontré précédemment) selon lequel deux points déterminent une droite exactement. Le système axiomatique de Schur exclut donc la géométrie elliptique.

Les notions de pôle et polaire apparaissent déjà chez Pasch [63]. Elles trouvent leur origine dans l'interprétation projective de la géométrie non euclidienne de Klein présentée au début du paragraphe précédent. Klein définit d'abord la distance de deux points et l'angle de deux droites et démontre ensuite que les perpendiculaires à une droite d sont concourantes au pôle de d relativement à Γ. Schur procède de manière inverse en définissant le pôle d'une droite comme le point de concours des perpendiculaires à cette droite [64].

Schur poursuit en établissant la possibilité du report d'un segment dans le plan. En d'autres termes, soit AB un segment et A_1 un point d'une droite a_1 située dans le même plan que AB ; il existe sur a_1, de chaque côté de A_1, un et un seul point B_1 tel que les segments AB et A_1B_1 sont congruents (deux segments sont « congruents » s'il existe un déplacement amenant l'un sur l'autre). La preuve est incomplète car Schur suppose que si un déplacement envoie le segment AB sur le segment A_1B_1, A est envoyé sur A_1 et B sur B_1, alors qu'on pourrait avoir l'inverse. Si l'on veut compléter la preuve, il faut utiliser le postulat du retournement du

---

62 Si P et P' étaient confondus, l'identité et la symétrie d'axe a seraient deux déplacements différents laissant fixes a et P ; le 11^{e} postulat serait donc faux.

63 [Pasch 1882, § 19]. Pasch introduit ces notions un peu différemment de Schur car il utilise la notion de congruence et non celle de déplacement. À la différence de ce dernier, il relève que le pôle d'une droite est un point impropre et que la polaire d'un point propre est une droite impropre.

64 Cette propriété était connue depuis longtemps en géométrie sphérique.

segment introduit plus loin [65]. Schur énonce un nouveau postulat (le 12^{e}) :

> Le déplacement qui laisse fixe un point A, qui transforme la demi-droite AB en AC et le demi-plan $(AB)C$ en $(AC)B$, transforme aussi AC en AB. (Retournement de l'angle). [Schur 1909, p. 33] [66]

Il démontre que ce déplacement est une symétrie. Comme Peano le signale à la fin de son mémoire, ce postulat est démontrable si l'on introduit l'axiome d'Archimède. Un déplacement qui envoie la demi-droite AB sur la demi-droite AC est la symétrie décrite dans le postulat ou la composition de cette symétrie avec la symétrie d'axe AC. Ce second déplacement n'est plus une symétrie mais, par définition, une rotation. L'un des deux axes servant à construire la rotation peut être choisi arbitrairement parmi les droites du plan ABC passant par le point A. Schur en déduit que la composition de trois symétries dont les axes sont coplanaires et passent par un point A peut être remplacée par une seule symétrie dont l'axe passe aussi par A [67]. Cet important résultat lui permet de démontrer le théorème de Pascal [68].

L'étape suivante consiste à considérer les déplacements comme des transformations de l'espace. Schur démontre que l'ensemble des perpendiculaires à une droite AB au point A est un plan. La droite AB est « perpendiculaire » à ce plan. Il démontre aussi que deux perpendiculaires

---

65 Ce postulat, le 13^{e}, est cité à la fin du paragraphe.

66 Die Bewegung, die einen Punkt A stehen läßt, die Halbgerade AB in AC und die Halbebene $(AB)C$ in $(AC)B$ überführt, verwandelt auch AC in AB. (Umkehrung des Winkels.)

67 Schur est apparemment le premier mathématicien à avoir énoncé explicitement le théorème des trois symétries dans [Schur 1898a]. Ce théorème apparaît déjà sous une forme un peu différente chez Wiener [Wiener 1894, p. 75] ; ce dernier considère aussi le cas où les trois axes de symétrie sont parallèles ; cf. aussi [Schönbeck 1986, p. 91].

68 Comme indiqué dans l'introduction, la démonstration de Schur a été régulièrement citée dans la littérature tout au long du XX^{e} siècle et a fait l'objet de plusieurs analyses (cf. p. ex. [Pasch 1882, 2^{e} édition, pp. 229-232], [Henke 2010] ou [Voelke 2008]) ; je n'entrerai donc pas ici dans les détails. Il faut seulement relever que le raisonnement a lieu dans l'espace même si le théorème des trois symétries est un résultat de géométrie plane.

à un plan sont coplanaires [69] et que toutes les perpendiculaires à un plan passent par un point appelé « pôle » du plan. Il établit la possibilité du report d'un segment dans l'espace [70] et remarque que celle-ci est admise à titre d'axiome par Hilbert (axiome III,1). Il explique que s'il démontre si tardivement ce résultat habituellement choisi comme premier axiome de congruence, cela tient à sa formulation des postulats des déplacements et à sa conception de ceux-ci comme groupe de transformations colinéaires du plan et de l'espace, conception qu'il fait remonter à Helmholtz. Si le système de postulats de Schur permet de démontrer le premier axiome de congruence de Hilbert, on peut se poser plus généralement la question de savoir si les postulats de congruence sont équivalents aux postulats des déplacements. Schur n'examine pas ce problème, mais la réponse est affirmative dans le cas du plan [71]. Il introduit enfin un dernier postulat :

> 13. Le déplacement qui transforme un point A en un point B et le prolongement de AB au delà de A en celui [de AB] au delà de B et qui laisse fixe un côté d'un plan α contenant AB, envoie aussi B sur A. (Retournement du segment) [Schur 1909, p. 42] [72]

Ce postulat est démontré par Peano ; mais comme dans le cas du retournement de l'angle, il faut utiliser à un moment donné l'axiome d'Archimède [73]. Schur démontre que le déplacement décrit dans le postulat est une symétrie par rapport à une droite de α perpendiculaire à AB en un point M appelé milieu du segment AB. Si l'on compose cette symétrie

69 Le postulat du retournement de l'angle intervient dans la preuve.

70 À la différence du plan, la preuve nécessite l'utilisation du postulat du retournement de l'angle. Elle présente la même lacune que dans le cas du plan.

71 Cf. [Hessenberg & Diller 1967, § 37-39] ; il faut alors dire que deux segments ou deux angles sont congruents si et seulement s'il existe un déplacement transformant l'un en l'autre et, réciproquement, que les déplacements sont les transformations du plan conservant l'incidence et l'ordre et telles qu'une figure et son image sont congruentes. Dans le cas de l'espace, Schur se limite à des déplacements conservant l'orientation et on peut avoir des figures congruentes qui ne sont pas image l'une de l'autre par un déplacement.

72 Die Bewegung, die einen Punkt A in einen Punkt B und die Verlängerung von AB über A hinaus in diejenige über B hinaus verwandelt und eine Seite einer AB enthaltenden Ebene α stehen läßt, führt auch B in A über. (Umkehrung der Strecke)

73 Ce postulat est démontrable à partir du précédent (retournement de l'angle) si l'on admet l'axiome euclidien des parallèles (*GG*, p. 134).

avec la symétrie relativement à la perpendiculaire à AB par B située dans le plan α, on obtient un nouveau déplacement appelé « translation ». Schur démontre qu'une translation est obtenue en composant deux symétries relativement à des droites de α perpendiculaires à la même droite AB ; de plus l'un des deux axes peut être choisi arbitrairement parmi les droites de α perpendiculaires à AB. Il conclut en démontrant que tout déplacement peut être obtenu en composant deux symétries. On retrouve le résultat déjà démontré par Wiener mais dans un contexte cinématique et non axiomatique. Rappelons encore une fois que Peano, Wiener et Schur se limitent à des déplacements conservant l'orientation. Si l'on définit de manière générale un déplacement comme une transformation de l'espace conservant l'incidence, l'ordre et la congruence, le dernier théorème est faux. Une symétrie par rapport à un plan ne conserve pas l'orientation et ne peut être représentée comme un produit de symétries axiales. On notera également que si les symétries par rapport à un plan figuraient parmi les déplacements, le 11^{e} postulat ne serait plus vrai. Soient en effet A, B, C trois points non alignés ; l'identité et la symétrie par rapport au plan (AB, C) envoient toutes deux A sur A, la demi-droite AB sur la demi-droite AB et le demi-plan (AB, C) sur le demi-plan (AB, C). Cette restriction à des déplacements conservant l'orientation s'explique probablement par le point de départ de Peano et Schur. Leurs axiomes sont en premier lieu destinés à décrire les déplacements dans un plan. Mais si l'on veut en pratique transformer une figure plane par une symétrie axiale, il faut la faire tourner autour de l'axe et effectuer un passage par l'espace. Les symétries axiales sont donc des transformations spatiales. Elles conservent l'orientation (dans l'espace) et suffisent pour obtenir tous les déplacements à l'intérieur d'un plan. Schur définit aussi une réflexion par rapport à un plan comme une réflexion colinéaire relativement à ce plan et à son pôle. Mais ces transformations ne sont pas des déplacements et ne conservent pas l'orientation. Schur les considère par groupes de deux. Il démontre ainsi que toute rotation peut être obtenue en composant deux réflexions par rapport à deux plans passant par l'axe de la rotation.

Je terminerai ce paragraphe en introduisant une terminologie utile pour la suite. Si l'on se limite au plan, les postulats de Schur sont donc équivalents aux axiomes d'incidence, d'ordre et de congruence de Hilbert. La théorie fondée sur ces axiomes est appelée « géométrie absolue » car elle est indépendante de toute hypothèse de parallélisme. Une structure vérifiant ces postulats est pour sa part appelée « H-plan » ou « plan de Hilbert »[74]. On peut donc dire que le « plan initial » de Schur est un plan de Hilbert.

2.5. *Théorème fondamental et calcul projectif*

L'un des buts des recherches de Schur, déjà mis en évidence au début de *UG*, est d'établir une géométrie analytique indépendante de toute hypothèse de parallélisme. Les relations obtenues seront donc valables dans une série de géométries. Le calcul des jets de von Staudt va lui fournir l'outil nécessaire[75]. Il constitue l'objet principal du chapitre 4 de *GG*. Dans *UG*, Schur affirme avoir enseigné ce calcul dès 1884 à Leipzig, ce qui témoigne de sa part d'un intérêt de longue date pour von Staudt. À côté de Pasch et Peano, von Staudt constitue la troisième source d'inspiration de Schur. Si la matière présentée dans ce chapitre est issue pour l'essentiel des travaux de ce géomètre, le traitement proposé par Schur est néanmoins sur plusieurs points nouveau. Il réussit en particulier à limiter au strict nécessaire l'utilisation du théorème fondamental pour établir les propriétés du calcul des jets.

La première notion est celle de projectivité entre deux droites coplanaires. Chez von Staudt il s'agit, en termes modernes, d'une transformation biunivoque conservant les quaternes harmoniques. Schur adopte une autre définition : une projectivité de degré n est la composée d'une suite de n projections[76]. Il démontre que toute projectivité entre deux droites

---

74 L'appellation « H-plan » (en hommage à Hessenberg, Hjelmslev et Hilbert) apparaît dans [Hessenberg & Diller 1967, p. 96] ; le terme « plan de Hilbert » est utilisé dans [Hartshorne 2000, p. 97].

75 Un jet est un ensemble de quatre points alignés. Le calcul des jets est établi par von Staudt dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage* [Staudt 1856, 1857, 1860]. Il a fait récemment l'objet d'une étude approfondie de Philippe Nabonnand [Nabonnand 2008].

76 Cette définition apparaît pour la première fois chez Luigi Cremona [Cremona 1873] et Johannes Thomae [Thomae 1873]. Elle est reprise par Pasch [Pasch 1882].

coplanaires distinctes est de degré deux ou un et établit le théorème fondamental de la géométrie projective : une projectivité entre deux droites coplanaires est déterminée par la donnée de trois points et des points correspondants ; sa preuve fait appel au théorème de Pascal [77].

Après avoir démontré le théorème fondamental, Schur aborde le calcul des jets ou « segments projectifs » [78]. Rappelons que Von Staudt fonde ce calcul sur la notion d'involution et présuppose le théorème fondamental [79]. Schur se distingue de son prédécesseur en utilisant à la place de l'involution deux autres transformations de la droite : la « prospectivité relativement à un élément fixe » et l'« affinité projective ». Il établit toutes les propriétés du calcul des segments, à l'exception de la commutativité de la multiplication, indépendamment du théorème fondamental [80]. Il développe enfin ce calcul, jusqu'à la représentation analytique des projectivités, sans introduire l'idée de mesure [81].

Commençons avec la notion de « prospectivité relativement à un élément fixe U » ; il s'agit d'une projectivité d'une droite sur elle-même n'admettant qu'un seul élément fixe. Cette transformation apparaît chez Pasch qui la nomme « équivalence relativement à l'élément limite U » [82]. Pasch démontre qu'une telle transformation est déterminée par la donnée du

Une projectivité entre deux droites coplanaires d_1 et d_{n+1} est donc obtenue en projetant, à partir d'un point O_1, d_1 sur une une droite d_2, en projetant ensuite d_2 sur d_3 à partir d'un point O_2, etc.

77 Pour le détail de cette preuve originale donnée pour la première fois dans [Schur 1898a], cf. [Voelke 2008] ou [Henke 2010]. Il y a en fait deux énoncés différents du théorème fondamental, suivant la définition choisie pour une projectivité (celle de von Staudt ou celle de Cremona et Thomae). Une projectivité au sens de Cremona et Thomae est évidemment une projectivité au sens de von Staudt ; le théorème fondamental au sens de von Staudt permet d'établir la réciproque.

78 C'est la terminologie de Schur.

79 Une involution est une transformation projective d'une droite sur elle-même ayant la propriété suivante : si P_1 est l'image de P, P est l'image de P_1. Von Staudt utilise le théorème fondamental pour démontrer qu'il suffit que deux points soient échangés pour qu'une transformation projective soit une involution [Staudt 1847, pp. 118-119]. Schur redémontre ce résultat plus loin (*GG*, p. 61).

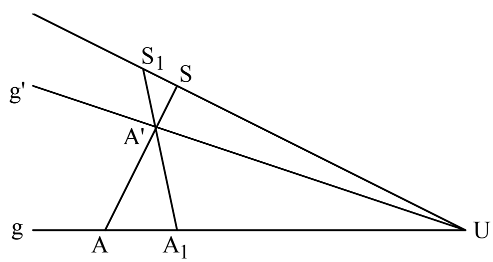
80 Schur insiste à plusieurs reprises sur cette indépendance.

81 Si von Staudt définit les opérations sur les jets sans introduire la notion de mesure, il introduit cependant cette notion au moment où il parle de valeur d'un jet [Staudt 1856, 1857, 1860, § 27].

82 [Pasch 1882, p. 132].

point fixe U ainsi que d'un autre point A et de son image A_1. Sa preuve fait appel au théorème fondamental. Dans *UG*, Schur établit ce résultat d'une autre manière, mais toujours à l'aide de ce théorème. Dans *GG*, il réussit en revanche à s'en passer en définissant la notion de prospectivité relativement à un élément fixe comme suit :

> Une prospectivité des points d'une droite g relativement à l'élément fixe U est obtenue en projetant g à partir d'un point quelconque S sur une droite g' contenant U et en projetant g' d'un point quelconque S_1 de la droite US de nouveau sur g. [Schur 1909, p. 52] [83]



Schur démontre que le résultat est indépendant du point S et de la droite g' si l'on donne seulement un point A et son image A_1. La preuve utilise le théorème de Desargues. Il démontre ensuite que la composée de deux prospectivités avec élément fixe U est encore une telle transformation. Il peut alors donner les deux définitions suivantes :

> Définition. Deux segments projectifs (AB) et (A_1B_1) de la même droite sont dits égaux relativement à l'élément fixe U, en signe $(AB) = (A_1B_1)$, si les points A, B peuvent être envoyés par une prospectivité avec élément fixe U en les points A_1, B_1.
>
> Définition. Un segment projectif (OC) est la *somme* des segments projectifs (OA) et (OB), en signe $(OC) = (OA) + (OB)$ si, dans une prospectivité avec élément fixe U, les points B et C correspondent aux points O et A. [...] [Schur 1909, p. 53] [84]

---

83 Eine Prospektivität der Punkte einer Geraden g in Beziehung auf das Deckelement U entsteht dadurch, daß g von irgend einem Punkte S aus auf eine U enthaltende Gerade g' und g' von irgendeinem Punkte S_1 der Geraden US wieder auf g zurück projiziert wird.

84 Definition. Zwei projektive Strecken (AB) und (A_1B_1) derselben Geraden heißen einander gleich in bezug auf das Deckelement U, in Zeichen $(AB) = (A_1B_1)$, wenn

Si l'on suppose que g est la droite euclidienne et U le point à l'infini, on retrouve l'addition habituelle des segments. Dans *UG*, Schur démontre que si A et A_1, B et B_1 sont des couples de points correspondants dans une prospectivité relativement à un élément fixe U, les couples de points UU, AB_1 et A_1B sont en involution ; la preuve fait appel au théorème fondamental. Si $(OA)+(OB)=(OC)$, les couples de points UU, OC et AB sont donc en involution et on retrouve la définition de l'addition des jets donnée par von Staudt [85].

Schur démontre que l'addition est commutative et associative [86]. Si UOA et UBO sont prospectifs, U et O sont séparés harmoniquement par A et B et la somme $(OA)+(OB)$ est égale à (OO) ; ce segment est appelé segment nul et on vérifie que $(OA)+(OO)=(OA)$. On remarquera encore que si $(OA)+(OB)=(OC)$, $(OA)=(BC)$ au sens de la première des deux définitions données ci-dessus ; on peut donc écrire $(OB)+(BC)=(OC)$.

La définition de la multiplication fait appel à une deuxième transformation. Soient g une droite, O et U deux points de g, a une droite passant par O. Si l'on restreint une collinéation centrale d'axe a et de centre U à la droite g, on obtient une « similitude perspective relativement à l'élément fixe U et à l'origine O ». Soit $ABC\ldots$ une série de points de g, $A_1B_1C_1\ldots$ la série correspondante ; on écrit $UOABC\ldots \sim UOA_1B_1C_1\ldots$ Schur démontre qu'une telle transformation est déterminée de manière univoque (indépendamment du choix de l'axe a), dès que l'on donne un point A et son image A_1. En d'autres termes, une similitude perspective est déterminée par la donnée des points O, U, A et A_1. La preuve fait appel au théorème de Desargues. Schur démontre que la composée de deux similitudes projectives d'origine O et d'élément fixe U est encore une telle transformation. Il est alors possible de définir la multiplication comme suit :

---

die Punkte A, B durch eine Prospektivität mit dem Deckelemente U in A_1, B_1 übergeführt werden können [...].
Definition. Eine projektive Strecke (OC) heißt die *Summe* der projektiven Strecken (OA) und (OB), in Zeichen $(OC)=(OA)+(OB)$ wenn in einer Prospektivität mit dem Deckelemente U den Punkten O, A die Punkte B, C entsprechen.

85 [Staudt 1856, 1857, 1860, p. 167] ou [Nabonnand 2008, pp. 221-222].

86 Dans *UG* Schur établit ces propriété en utilisant la définition de l'addition de von Staudt fondée sur la notion d'involution ; il fait donc encore appel au théorème fondamental.

> Définition : Si le segment projectif (OE) est considéré comme représentant du nombre 1, un segment (OC) est appelé *produit* du segment (OB) par le segment (OA), en signes $(OA) \cdot (OB) = (OC)$, si $UOEB \sim UOAC$. [Schur 1909, p. 56] [87]

On peut aussi écrire $UOEA \cdot UOAC = UOEC$. Si l'on admet le théorème fondamental, on a $UOEB \sim UOAC \iff UOEB \barwedge UOAC$ (les points $UOEB$ et $UOAC$ se correspondent dans une projectivité) ; c'est de cette seconde manière que Schur définit la multiplication dans UG. Notons encore que l'égalité $UOEA \cdot UOAC = UOEC$ correspond à la première des deux définitions de la multiplication donnée par von Staudt [88]. Si l'on suppose que g est la droite euclidienne et U le point à l'infini, on retrouve la multiplication habituelle des segments.

Schur établit l'associativité de la multiplication et sa distributivité par rapport à l'addition. Comme la commutativité de la multiplication n'a pas encore été établie, il doit distinguer deux cas dans la démonstration de la distributivité. Schur démontre enfin que la commutativité de la multiplication est équivalente au théorème de Pascal [89]. Comme celui-ci est une conséquence des axiomes de congruence, la multiplication est commutative. Le segment (OE) est l'élément neutre de cette opération.

La division est définie comme suit : $(OC) = (OA) : (OB) \iff UOCA \sim UOEB$. On peut aussi écrire : $\frac{UOEA}{UOCA} = UOEC$. Schur démontre que si le point B est situé en E, respectivement en O ou U, le point C est situé en A, respectivement U ou O. Comme la division par (OU) donne le segment nul (OO), U correspond au point à l'infini du calcul segmentaire habituel.

---

87 Definition. Wird die projektive Strecke (OE) als Repräsentant der Zahl 1 betrachtet, so heißt eine Strecke (OC) das *Produkt* der Strecke (OB) in die Strecke (OA), in Zeichen $(OA) \cdot (OB) = (OC)$, wenn $UOEB \sim UOAC$.

88 [Staudt 1856, 1857, 1860, pp. 171-172]. Dans *GG* (p. 62), Schur démontre que si l'on admet le théorème fondamental, les couples UO, AB et EC sont en involution et retrouve ainsi la seconde définition de von Staudt [Staudt 1856, 1857, 1860, p. 173]. Cf. aussi [Nabonnand 2008, p. 225].

89 Comme indiqué à la fin du § 1, Schur avait dix ans plus tôt, et avant Hilbert, développé un calcul segmentaire dans le plan euclidien indépendant de l'axiome d'Archimède et noté que le théorème de Pascal est équivalent à la commutativité de la multiplication. Cf. [Voelke 2008].

Arrivé à ce stade, Schur annonce qu'il utilisera désormais sans restriction le théorème fondamental. Il introduit la notation de von Staudt $ABCD\ldots \barwedge A'B'C'D'\ldots$ pour indiquer que les points $ABCD\ldots$ correspondent aux points $A'B'C'D'\ldots$ dans une (et une seule) projectivité.

Soient A, B, C, D quatre points d'une droite d. Von Staudt a démontré que $ABCD \barwedge BADC$ [90] ; on en déduit : $ABCD \barwedge CDAB$. Choisissons trois points U, O et E de d comme point à l'infini, origine et point unité d'un calcul projectif. On a : $(ABCD) = (CDAB) = (CDAU) : (CDBU) = (AUCD) : (BUCD) = \frac{(AUCE)}{(AUDE)} : \frac{(BUCE)}{(BUDE)} = \frac{(UAEC)}{(UAED)} : \frac{(UBEC)}{(UBED)} = \frac{(AC)}{(AD)} : \frac{(BC)}{(BD)}$ (c'est le théorème 56). Ce résultat peut encore s'écrire sous la forme $(ABCD) = \frac{(OC)-(OA)}{(OD)-(OA)} : \frac{(OC)-(OB)}{(OD)-(OB)}$. Comme cas particulier, on a : $(UABC) = \frac{(AC)}{(AB)}$.

En se fondant sur la seconde définition de la multiplication de von Staudt (cf. note 88), Schur établit encore le résultat suivant :

> Th. 59. Si l'origine et le point à l'infini d'un calcul segmentaire projectif sont des points correspondants d'une involution, le produit de deux segments reliant l'origine aux points correspondants a pour toutes les paires de l'involution la même valeur. [Schur 1909, p. 63] [91]

Il poursuit en montrant comme attribuer à chaque segment un signe. Supposons que U, O et E soient des points propres tels que E soit situé sur le segment $\overline{OU}$. Un segment projectif (OA) est alors dit positif ou négatif selon que A est situé sur le segment $\overline{OU}$ ou non ; dans le second cas, A peut être un point impropre. Comme tout segment projectif peut être, en vertu du théorème fondamental, représenté par un segment rapporté à ces trois éléments particuliers, la distinction vaut pour tous les segments projectifs. Schur démontre de plus qu'elle est indépendante du choix des trois points propres U, O et E. À tout segment positif (OA) correspond un segment opposé $(OA_1) = -(OA)$ tel que A_1 et A sont séparés harmoniquement par U et O et tel que $(OA) + (OA_1) = (OO)$. Il devient possible de comparer les segments en disant que $(OA) < (OB)$ ou $(OA) > (OB)$ selon

90 Cf. [Staudt 1847, pp. 58-59] et (*GG*, p. 60).

91 Sind der Unendlichkeits- und der Nullpunkt einer projektiven Streckenrechnung zugeordnete Punkte einer Involution, so hat das Produkt zweier Strecken vom Nullpunkte nach zugeordneten Punkten für alle Paare der Involution denselben Wert.

que $(OB) - (OA)$ est positif ou négatif. Schur démontre diverses propriétés, parmi lesquelles la règle des signes pour la multiplication. Le calcul des segments projectifs satisfait donc aux mêmes propriétés que le calcul des segments de la géométrie euclidienne.

2.6. *Géométrie analytique et trigonométrie*

Tout est maintenant en place pour développer la géométrie analytique et la trigonométrie. C'est l'objet du chapitre 5 du livre [92]. Le point de départ est la notion d'involution absolue qui, comme Schur l'explique, forme le lien entre les segments projectifs et les segments habituels. Cette notion apparaît déjà chez Pasch [93]. Sa définition et ses propriétés sont résumées par Schur dans le théorème suivant :

> Th. 71. Si l'on fait correspondre comme *conjugué* à chaque point propre A d'une droite g le point A' de g qui est harmoniquement séparé de lui par deux points symétriques par rapport à A, si donc la polaire absolue de A passe par A', les paires de points conjugués appartiennent à une involution, appelée *involution absolue* de la droite, qui par chaque déplacement est transformée en l'involution absolue de la droite correspondante. [Schur 1909, pp. 73-74] [94]

Avant de poursuivre, signalons que dès maintenant Schur fait les conventions suivantes : si (OA) désigne un segment projectif, O est un point propre, U est le point de la droite OA conjugué de O et le point unité E est choisi de manière que les segments $\overline{OE}$ soient pour toutes les droites congruents. Schur définit une distance projective entre deux points :

> Par *distance projective* entre un point propre A et un point quelconque B on entend le segment projectif $(\overline{AB}) = (A'ALB)$ où A' est le point conjugué à A

92 Il reprend et développe considérablement le § 4 de *UG*.

93 [Pasch 1882, § 19].

94 Ordnet man jedem eigentlichen Punkte A einer Geraden g denjenigen Punkt A' von g als *konjugiert* zu, welcher von ihm durch irgend zwei Punkte harmonisch getrennt ist, die Spiegelbilder von einander für A sind, geht also die absolute Polare von A durch A', so gehören die Paare konjugierter Punkte einer Involution an, der sogenannten *absoluten Involution* der Geraden, die bei jeder Bewegung in die absolute Involution der entsprechenden Geraden übergeht.

sur AB et $\overline{AL}$ est congruent à l'unité de longueur $\overline{OE}$ de manière qu'il en résulte que $(\overline{AB})$ est positif. [Schur 1909, p. 74] [95]

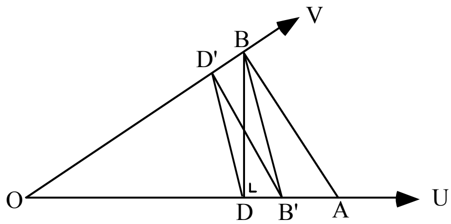
Cette distance a la propriété suivante : si les points A, B, A_1 et B_1 sont propres et si $(\overline{AB}) = (\overline{A_1B_1})$, les segments AB et A_1B_1 sont congruents et réciproquement. On prendra garde au fait qu'il ne s'agit pas d'une distance au sens métrique du terme mais d'un segment projectif particulier. L'introduction de cette notion constitue l'une des caractéristiques originales de la méthode de Schur. On ne voit cependant de prime abord pas la raison de cette définition et Schur ne donne pas d'explication à ce sujet. Je reviendrai plus loin sur cette question.

Après avoir donné cette définition, Schur développe la géométrie analytique. Il serait vain de vouloir entrer dans tous les détails de ses calculs. Je me contenterai donc d'expliquer comment il établit les deux premiers résultats et je résumerai ensuite les principales étapes en soulignant quelques points importants. Voici le premier résultat :

> Considérons maintenant le triangle rectangle OBA $(OB \perp BA)$; désignons par D le pied de la perpendiculaire à OA issue de B et par B' et D' les images de B et D par la symétrie échangeant les demi-droites OA et OB ; si V est le point de OB conjugué à O, on a : $(UOAB') = (VOBD') = (UOB'D)$, ou : $(OB') : (OA) = (OD) : (OB')$. [...]. Par conséquent, si nous utilisons l'écriture habituelle, on a : $(OB)^2 = (OA) \cdot (OD)$, où nous retrouvons une formule connue de la géométrie euclidienne seulement dans une autre signification. [Schur 1909, p. 75] [96]

95 Unter dem *projektiven Abstande* eines eigentlichen Punktes A von irgendeinem Punkte B versteht man die projektive Strecke $(\overline{AB}) = (A'ALB)$, wo A' der zu A konjugierte Punkt auf AB und $\overline{AL}$ der Längeneinheit $\overline{OE}$ kongruent ist, so zwar, daß $(\overline{AB})$ positiv resultiert.

96 Betrachten wir nunmehr das rechtwinkelige Dreieck OBA $(OB \perp BA)$, bezeichnen mit D den Fußpunkt der Senkrechten von B auf OA und mit B' und D' die aus B und D durch diejenige Umwendung hervorgehenden Punkte, welche die Halbgeraden OA und OB vertauscht, so ist, falls V der zu O konjugierte Punkt auf OB ist, $(UOAB') = (VOBD') = (UOB'D)$ oder : $(OB') : (OA) = (OD) : (OB')$. [...] Es ist folglich, wenn wir uns der üblichen Schreibweise bedienen $(OB)^2 = (OA) \cdot (OD)$, worin wir eine bekannte Formel der euklidischen Geometrie nur in anderer Bedeutung wiederfinden.

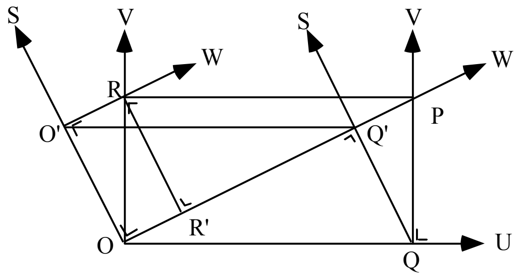


Comme $B'D$ et BD sont perpendiculaires, leurs images BD' et $B'D'$ sont perpendiculaires. Les droites $B'D'$ et AB se coupent donc au pôle absolu P de OV. Comme P est le pôle d'une droite passant par O, il est sur la polaire de O, c'est-à-dire sur la droite UV (en effet U et V sont conjugués à O). Les droites UV, $D'B'$ et AB sont donc concourantes en P. En projetant à partir de P la droite OU sur OV, on obtient : $(UOAB') = (VOBD')$; comme l'involution absolue est conservée par un déplacement, on a $(VOBD') = (UOB'D)$. La fin du raisonnement fait appel au cas particulier du théorème 56 cité au § 2.5.

Passons au deuxième résultat :

> Nous voulons appliquer cette formule aux deux triangles rectangles OQP $(OQ \perp QP)$ et ORP $(OR \perp RP)$, où en même temps $OQ \perp OR$. Si Q' et R' sont les pieds des perpendiculaires à OP issues de Q et R, il suit de $(OQ)^2 = (OP) \cdot (OQ')$ et $(OR)^2 = (OP) \cdot (OR')$, que $(OQ)^2 + (OR)^2 = (OP)\{(OQ') + (OR')\}$. Mais si $OO' \perp OP$ et $RO' \perp OO'$, les côtés correspondants des deux triangles ORO' et QPQ' se coupent sur la polaire absolue UV de O. $O'Q'$ contient donc le point conjugué de O situé sur OQ et, parce que $O'R$ contient aussi le point conjugué W de O situé sur OP, WOR' est prospectif à $WQ'P$ et donc $(OQ') + (OR') = (OP)$. Il suit de là le résultat que $(OQ)^2 + (OR)^2 = (OP)^2$, dans lequel nous pouvons voir une généralisation du théorème de Pythagore. Mais il faut bien faire attention au fait que en général (QP) n'est pas égal à (OR). [Schur 1909, pp. 75-76] [97]

97 Diese Formel wollen wir auf die beiden rechtwinkeligen Dreiecke OQP $(OQ \perp QP)$ und $ORP(OR \perp RP)$ anwenden, wo zugleich $OQ \perp OR$ sein mag. Sind Q' und R' die Fußpunkte der Senkrechten von Q und R auf OP, so folgt aus $(OQ)^2 = (OP) \cdot (OQ')$ und $(OR)^2 = (OP) \cdot (OR')$, daß $(OQ)^2 + (OR)^2 = (OP)\{(OQ') + (OR')\}$ sein muß. Ist aber $OO' \perp OP$ und $RO' \perp OO'$, so schneiden sich die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ORO' und QPQ' auf der absoluten Polare UV von O. Es enthält daher $O'Q'$ den zu O konjugierten Punkt U auf OQ, und es ist, weil auch $O'R$ den zu O konjugierten Punkt W auf OP enthält, WOR' prosp. $WQ'P$, also $(OQ') + (OR') = (OP)$. Demnach ergibt sich das Resultat, daß $(OQ)^2 + (OR)^2 = (OP)^2$ ist, worin wir eine Verallgemeinerung des



Voici quelques explications concernant ce raisonnement. Les droites OP et $O'R$ sont perpendiculaires à OO' et se coupent donc au pôle W de OO' ; ce point est situé sur la polaire de O. De même OR et QP se coupent au pôle V de OQ, point situé sur la polaire de O, et OO' et QQ' se coupent au pôle S de OP, point situé sur la polaire de O. Les côtés correspondants des triangles ORO' et QPQ' se coupent en trois points alignés ; d'après le théorème de Desargues, les droites OQ, RP et $O'Q'$ sont concourantes en un point qui n'est autre que U. Projetons WOR' en $WO'R$ à partir de S, puis $WO'R$ en $WQ'P$ à partir de U ; WOR' est alors prospectif relativement à $WQ'P$, d'où la conclusion. La caractéristique de la méthode de Schur est d'établir des résultats concernant les éléments propres en faisant intervenir dans le raisonnement des éléments impropres et des méthodes projectives. L'une des conséquences importantes de ce résultat (non mentionnée par Schur) est que le corps des segments projectifs est pythagoricien (la somme de deux carrés est un carré).

L'étape suivante consiste à introduire des coordonnées :

> Si $OX \perp OY$ et si U et V sont les points conjugués de O sur ces droites et si des segments congruents entre eux $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ sont choisis sur OX et OY, on entend par abscisse et ordonnée d'un point P à partir duquel les perpendiculaires à OX et OY ont les pieds Q et R, les segments projectifs $x = (OQ) = (UOEQ)$ et $y = (OR) = (VOFR)$ et on les appelle les deux en même temps *coordonnées* du point P. Nous pouvons alors formuler notre résultat de la manière suivante :

---

pythagoraeischen Lehrsatzes sehen werden. Es ist aber wohl darauf zu achten, daß im allgemeinen (QP) keineswegs $= (OR)$ ist.

Théorème 73. La distance projective d'un point propre O et d'un point P quelconque, dont l'abscisse et l'ordonnée relativement à deux axes perpendiculaires passant par O sont (OQ) et (OR), est donnée par la formule : $(\overline{OP})^2 = (OQ)^2 + (OR)^2$. [Schur 1909, p. 76] [98]

Schur démontre que toute droite est représentée par une équation de la forme $\alpha x + \beta y = d$; réciproquement les points satisfaisant à une telle équation sont situés sur une droite. Les droites pour lesquelles le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est le même sont toutes concourantes au même point situé sur la polaire de l'origine O.

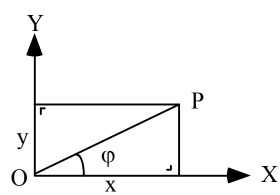
Ouvrons maintenant une parenthèse afin d'expliquer quelle est l'idée qui guide Schur dans tous ces calculs. Supposons que les éléments propres constituent le plan non euclidien représenté dans le plan euclidien à l'intérieur du disque de Beltrami-Klein. Supposons aussi que O soit le centre du disque ; la polaire de O est alors la droite à l'infini (au sens euclidien). Soit P un point, W le conjugué de O sur la droite OP, G le point de cette droite tel que le segment OG soit congruent au segment unité. Le jet $WOGP$ représente la distance projective et sa valeur, pour parler comme von Staudt [99], est égale à la distance euclidienne OP. La signification du théorème de Pythagore démontré précédemment devient ainsi claire. Les coordonnées x et y de P sont ses coordonnées cartésiennes dans la représentation à l'intérieur du disque de Beltrami-Klein, c'est-à-dire ses coordonnées beltramiennes. Comme on le sait l'équation d'une droite en coordonnées beltramiennes est du premier degré. Or Schur a précisément démontré que l'équation d'une droite est du premier degré. Ces observations confirment ce qui a déjà été dit au § 2.4 à propos de la notion de pôle : l'idée de Schur

98 Ist $OX \perp OY$, sind U und V die zu O konjugierten Punkte auf diesen Geraden und werden auf OX und OY einander kongruente Strecken $\overline{OE} \cong \overline{OF}$ angenommen, so versteht man unter der Abszisse und Ordinate eines Punktes P, von dem die Senkrechten auf OX und OY die Fußpunkte Q und R haben, die projektiven Strecken : $x = (OQ) = (UOEQ)$ und $y = (OR) = (VOFR)$ und nennt beide zugleich die *Koordinaten* des Punktes P, so können wir unser Resultat in folgender Form aussprechen :
73. Satz. Der projektive Abstand eines eigentlichen Punktes O von irgend einem Punkte P, dessen Abszisse und Ordinate in Beziehung auf zwei zueinander senkrechte Achsen durch O (OQ) und (OR) sind, ist gegeben durch die Formel : $(\overline{OP})^2 = (OQ)^2 + (OR)^2$.

99 La notion de valeur d'un jet est définie dans [Staudt 1856, 1857, 1860, p. 256].

est de reconstuire de manière synthétique la géométrie non euclidienne à partir de son interprétation projective. Mais en ne faisant pas appel à l'axiome d'Archimède, sa méthode permet de traiter simultanément bien d'autres géométries que la seule géométrie non euclidienne de Bolyai et Lobatchevski. Si la géométrie elliptique est exclue, nous allons voir que d'autres géométries, à métrique elliptique, sont possibles. On remarquera encore que la distance projective entre deux points propres A et B correspond formellement à la distance euclidienne entre O et C où OC est un segment congruent à AB.

Revenons au texte proprement dit. L'étape suivante consiste à définir les fonctions trigonométriques. Le sinus, resp. le cosinus d'un angle $\varphi = XOP$ est l'ordonnée, resp. l'abscisse du point P tel que $(\overline{OP}) = (\overline{OE}) = 1$. Du point de vue formel, on retrouve la définition classique ; la différence est que le sinus et le cosinus d'un angle ne sont pas des distances mais des segments projectifs. Les fonctions trigonométriques ainsi définies vérifient les mêmes relations que les fonctions trigonométriques classiques. On déduit immédiatement du th. 73 que $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Schur établit également les formules d'addition.



Soit M un point propre de la droite OX, W le conjugué de M situé sur cette droite ; soit m l'abscisse de M et w celle de W. Comme O et U sont des points correspondants dans l'involution absolue, le th. 59 (cité précédemment) permet d'affirmer que $m \cdot w = R$, où R est une constante caractéristique de la géométrie, positive, négative ou infinie, et ne dépendant que de l'unité de longueur : en effet, par un déplacement, l'involution absolue d'une droite est transformée en l'involution absolue de la droite correspondante. Schur en déduit que si $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont deux points conjugués, on a : $x_1x_2 + y_1y_2 = R$. La métrique du plan initial peut donc être interprétée formellement comme une métrique relativement à une conique du plan projectif.

Soit $M(m,0)$ un point propre de l'axe Ox. Schur démontre que le point A, image de l'origine O par une symétrie dont l'axe est perpendiculaire à Ox en M, a comme abscisse $a = \frac{2m}{1+\varkappa m^2}$ où $\varkappa = \frac{1}{R}$. Ce résultat a deux conséquences sur lesquelles je reviendrai au § 2.7 [100]. La première est que si $M(m,0)$ est un point propre, $A(\frac{2m}{1+\varkappa m^2}, 0)$ est aussi un point propre. Réciproquement, si $A(a,0)$ est un point propre, le postulat du retournement du segment implique l'existence d'un point milieu du segment OA. En inversant la relation précédente, on obtient : $m = \frac{1-\sqrt{1-\varkappa a^2}}{\varkappa a}$. Si $A(a,0)$ est un point propre, il existe donc un segment projectif dont le carré est égal à $1-\varkappa a^2$. Il est encore important de noter que si $P(a,0)$ est un point propre, $a^2 < R$ [101].

Schur établit une série de relations métriques et trigonométriques qui contiennent toutes la constante $\varkappa$. Voici à titre d'exemple l'expression de la distance projective dans le plan entre le point $C = (a,b)$ et le point $C_1 = (a_1, b_1)$:

$$(\overline{CC_1})^2 = \frac{(a_1-a)^2 + (b_1-b)^2 - \varkappa(ab_1 - ba_1)^2}{\{1-\varkappa(aa_1+bb_1)\}^2}$$

Parmi les nombreux points traités dans ce chapitre, trois méritent encore d'être signalés. Le premier est l'introduction d'un nouveau postulat de continuité ; il revient à affirmer qu'il est possible de construire un triangle rectangle dont on donne l'hypoténuse et un des côtés de l'angle droit :

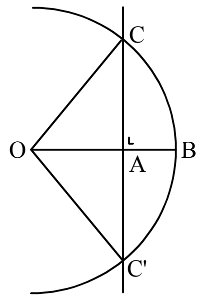
> Postulat 14. Si O, A, B sont trois points d'une droite tels que A est situé sur $\overline{OB}$, et si, dans le cas où le point conjugué U de O devait être propre, B est aussi sur le segment $\overline{OU}$, il y a alors de chaque côté de OA un triangle rectangle OAC dont l'hypoténuse $\overline{OC} \cong \overline{OB}$. [Schur 1909, p. 92] [102]

---

100 Seule la seconde conséquence est mise en évidence par Schur.

101 Cf. [Hessenberg & Diller 1967, p. 226]. En effet, si $a^2 > R$, on a $\left|\frac{1}{\varkappa a}\right| < a$. Le point $Q(\frac{1}{\varkappa a}, 0)$ est un point propre et sa polaire est la droite d'équation $\frac{x}{a} = 1$. Comme a est l'absisse d'un point propre, cette droite est propre, ce qui n'est pas possible puisque Q est propre. Ce point n'est pas mis en évidence par Schur, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il n'exclut pas le cas où tous les points sont propres.

102 Sind O, A, B drei solche Punkte einer Geraden, daß A auf der Strecke $\overline{OB}$ liegt und, falls der zu O konjugierte Punkt U ein eigentlicher sein sollte, auch B auf der Strecke $\overline{OU}$, so gibt es auf jeder Seite von OA ein rechtwinkeliges Dreieck OAC, dessen Hypotenuse $\overline{OC} \cong \overline{OB}$ ist.



On notera que Schur persiste à penser que le point conjugué d'un point propre peut être propre. Un postulat équivalent apparaît chez Veronese [103]. Il revient à dire que si $OA < OB$, le cercle de centre O et de rayon OB coupe la perpendiculaire à OA en A en deux points C et C'. Il permet d'établir le théorème suivant :

> Th. 82. Pour chaque segment positif on peut construire à la règle et au compas deux segments opposés dont le carré est égal à celui-ci. [Schur 1909, p. 93] [104]

Le corps des segments projectifs est donc euclidien.

Le deuxième point concerne le rapport entre la valeur de la somme des angles d'un triangle et le signe de la constante $\varkappa$. En utilisant le théorème du cosinus dans un triangle, Schur démontre que cette somme est inférieure, égale ou supérieure à deux droits selon que $\varkappa$ est positive, nulle ou négative. On en déduit donc le second théorème de Legendre, à savoir que si la somme des angles d'un triangle est inférieure, égale ou supérieure à deux droits dans un triangle, c'est le cas dans tous les triangles. Max Dehn est le premier mathématicien à avoir établi ce résultat indépendamment de l'axiome d'Archimède [Dehn 1900]. La preuve de Schur, déjà exposée dans *UG*, est naturellement elle aussi indépendante de cet axiome ; elle est différente de celle de Dehn. Une preuve synthétique a ensuite été donnée par Roberto Bonola [Bonola 1905] [105].

---

103 [Veronese 1897, p. 85].

104 Zu jeder positiven projektiven Strecke können mit Zirkel und Lineal zwei entgegengesetzt gleiche projektive Strecken konstruiert werden, deren Quadrat jener gleich ist.

105 On pourra se référer sur ce sujet à [Cerroni 2007]. Schur donne aussi une preuve synthétique au chapitre 6 de son livre.

Le dernier point concerne la notion de parallèle. Supposons la constante $\varkappa$ positive. Soit R un point propre de l'axe OY, K le point de l'axe OX d'abscisse $\sqrt{R} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ [106]. Schur démontre que K est invariant par toute translation ; ce n'est donc pas un point propre et il en va de même de tous les points dont l'abscisse est supérieure à $\sqrt{R}$. Schur remarque qu'on ne peut pas en déduire que tout point Q d'abscisse positive inférieure à $\sqrt{R}$ est un point propre, ou, ce qui revient au même, que toute droite issue de R et située à l'intérieur de l'angle ORK coupe OX en un point propre. Il poursuit :

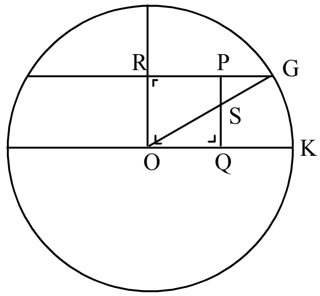
> Si l'on ajoute ceci comme nouvelle supposition, la droite RK sera appelée d'après Lobatschefskij une des deux *parallèles* à OX par R. Comme amplitude λ ou ce que l'on appelle *angle de parallélisme* des parallèles passant par O à la droite RP perpendiculaire en R à OY, on trouve : $\mathrm{tg}\lambda = \frac{y}{\sqrt{R-y^2}} = \frac{y\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{1-\varkappa y^2}}$.
>
> Une telle parallèle coupe donc la perpendiculaire QP issue de P à OX en un point S de coordonnées x, $\frac{\sqrt{\varkappa}xy}{\sqrt{1-\varkappa y^2}}$, dont la distance à O est donnée par :
>
> $$(\overline{OS}) = \sqrt{x^2 + \frac{\varkappa x^2 y^2}{1-\varkappa y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-\varkappa y^2}} = (\overline{RP}).$$
>
> On obtient ainsi la construction connue des parallèles de Lobatschefskij. [Schur 1909, pp. 100-101] [107]

[106] J'ai gardé les notations de Schur. On ne confondra pas la constante R et le point R. On notera par ailleurs que le point d'abscisse $\sqrt{R}$ existe en vertu du 14$^{\text{e}}$ postulat.

[107] Fügt man dies als eine neue Voraussetzung hinzu, so wird die Gerade RK nach Lobatschefskij eine der beiden Parallelen durch R zu OX genannt. Für die Amplitude λ oder den sogenannten Parallelwinkel der Parallelen durch O zu der in R auf OY senkrechten Geraden RP findet man offenbar : $\mathrm{tg}\lambda = \frac{y}{\sqrt{R-y^2}} = \frac{y\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{1-\varkappa y^2}}$. Eine solche Parallele schneidet daher das Lot QP von P auf OX in einem Punkte S mit den Koordinaten x, $\frac{\sqrt{\varkappa}xy}{\sqrt{1-\varkappa y^2}}$, dessen Abstand von O gegeben ist durch :

$$(\overline{OS}) = \sqrt{x^2 + \frac{\varkappa x^2 y^2}{1-\varkappa y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-\varkappa y^2}} = (\overline{RP}).$$

Hieraus ergibt sich die bekannte Lobatschefskijsche Konstruktion der Parallelen.



Cette construction apparaissait déjà dans *UG*. Mais Schur admettait alors sans discussion l'existence des parallèles. Le fait que celle-ci n'est pas immédiate a été relevé pour la premier fois dans [Schur 1904] [108]. J'y reviendrai plus loin. Le point G a comme ordonnée y et comme abscisse $\sqrt{R-y^2}$; la tangente de l'angle $\lambda = ROG$ est donc égale à $\frac{y}{\sqrt{R-y^2}}$. Les distances se calculent au moyen de la formule citée précédemment. Pour construire la parallèle OG, il faut donc choisir un point Q sur la perpendiculaire OK à OR en O et construire la perpendiculaire à OK issue de Q ; celle-ci coupe la droite RG en P ; le 14^e^ postulat assure l'existence sur la droite PQ d'un point S tel que $OS = RP$; la droite OS est la parallèle cherchée. Schur attribue à tort cette construction à Lobatchevski ; elle est en effet due à Engel [109]. La justification d'Engel est différente ; elle est métrique et fait appel à des relations trigonométriques établies par Lobatchevski à partir notamment des propriétés de l'horisphère. Schur donne également une justification géométrique de cette construction. Il en donne déjà l'idée dans une lettre à Engel du 5 février 1899. Schur se réfère alors explicitement à l'interprétation projective de Klein et dit qu'il représente la conique fondamentale par un cercle. Dans *GG*, il n'y a plus de référence explicite mais la figure comporte toujours un cercle. La représentation projective continue donc à guider les raisonnements de Schur.

---

108 Dans cet article, Schur apporte quelques éclaircissements à un article de Hilbert consacré aux fondements de la géométrie de Bolyai et Lobatchevski [Hilbert 1903]. Hilbert admet sans discussion l'existence des deux parallèles, ce que Schur critique. Je reviendrai sur cette question à la fin du § 2. 7.

109 [Engel 1898a, p. 256]. Une construction des parallèles est donnée par Bolyai dans son *Appendix* [Bolyai 1832, § 34].

2.7. *Preuve de non contradiction des différentes géométries*

La construction axiomatique achevée, il faut encore démontrer qu'elle est non contradictoire. C'est l'objet principal du chapitre 6 du livre. Voici comment Schur présente sa démarche :

> Pour de telles recherches nous construisons des géométries appelées artificielles en définissant les points et les segments par des grandeurs numériques de manière que nos postulats soient définis de manière purement formelle, c'est-à-dire comme seules expressions des rapports entre les concepts bien définis de point et segment. Si nous réussissons, nous avons en même temps obtenu une preuve purement logique de la non-contradiction de nos postulats, sans pour autant que nous soyons assurément arrivés d'une manière ou de l'autre plus près de la définition des concepts géométriques fondamentaux de point et segment. [Schur 1909, p. 106] [110]

La démarche est celle suivie par Hilbert au début du chapitre 2 de ses *Grundlagen der Geometrie* dans le cas de la géométrie euclidienne. Elle consiste à construire une géométrie sur un corps et à démontrer qu'on obtient ainsi une interprétation du système axiomatique initial. Schur met ici clairement en évidence les caractéristiques de la méthode, ce que Hilbert ne faisait pas. L'intervalle de dix ans qui sépare les deux ouvrages a sans doute permis aux mathématiciens de mieux comprendre ces caractéristiques. Dans ses *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert traite ce problème très rapidement. Dans le cas de la géométrie non euclidienne, il ne fait que suggérer l'idée. Schur procède en revanche de manière approfondie en construisant différents modèles correspondant aux différentes valeurs de la constante $\varkappa$ et en démontrant chaque fois que les postulats sont vérifiés. Il est à ma connaissance le premier à effectuer complètement ce travail. Au cours de mon analyse, je me référerai régulièrement à [Hessenberg & Diller 1967]. Le chapitre V de cet ouvrage, rédigé par Justus Diller, offre

110 Für solche Untersuchungen konstruieren wir uns sogenannte künstliche Geometrien, indem wir Punkte und Strecken durch Zahlengrößen so definieren, daß unsere Postulate rein formal, d. h. als bloße Ausdrücke der Beziehungen zwischen den wohl definierten Begriffen Punkt und Strecke definiert sind. Wenn uns dies gelingt, so haben wir zugleich einen rein logischen Beweis für die Widerspruchslosigkeit unserer Postulate erbracht, ohne daß wir dadurch freilich der Definition der geometrischen Grundbegriffe Punkt und Strecke irgendwie näher gekommen wären.

en effet un traitement moderne du problème abordé par Schur dans le chapitre 6 de *GG*. Il permet d'éclaircir un certain nombre de points laissé en suspens par ce dernier et en même temps d'apprécier l'originalité de ses recherches.

Schur suppose que les grandeurs numériques qui vont servir à construire les concepts fondamentaux satisfont aux « règles habituelles du calcul et de l'ordre ». Ces grandeurs constituent donc, en termes modernes, un corps ordonné K. Il affirme que l'on peut dans un premier temps supposer qu'il s'agit des nombres réels. La première étape consiste à construire un « espace affine de coordonnées »[111]. Un triplet (x, y, z) de nombres est un point; le segment déterminé par les points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ est l'ensemble des points $P(x, y, z)$ de la forme $x = x_1 + (x_2 - x_1)u, y = y_1 + (y_2 - y_1)u, z = z_1 + (z_2 - z_1)u$ où $0 \leq u \leq 1$. Schur démontre que les points et segments ainsi définis vérifient les postulats projectifs et que l'équation d'un plan (cf. définition 3 citée en annexe) est du premier degré.

L'étape suivante consiste à introduire dans l'espace de coordonnées affine les notions d'orthogonalité et de déplacement et à construire ainsi un « espace de coordonnées affine-métrique »[112]. Schur distingue le cas euclidien du cas non euclidien. Je n'entrerai pas dans les détails du premier. Schur fait appel à des résultats classiques (critère d'orthogonalité de deux droites dans l'espace euclidien et expression analytique des déplacements dans cet espace) pour définir dans l'espace affine-métrique des déplacements vérifiant les postulats et tels que $\varkappa = 0$. Il faut supposer que si g et h sont deux grandeurs numériques, l'expression $\sqrt{1 + g^2 + h^2}$ est aussi une grandeur numérique[113]. Si le corps K est celui des réels, cette hypothèse est satisfaite. Dans le cas général, elle doit être rajoutée.

Examinons maintenant avec plus de détails comment Schur procède dans le cas non euclidien. Il commence par introduire la notion de points

111 C'est la terminologie utilisée par Diller dans le cas du plan [Hessenberg & Diller 1967, p. 180].

112 [Hessenberg & Diller 1967, p. 215] ; dans le § 64 de cet ouvrage, Diller effectue dans le cas du plan le même travail que Schur.

113 Le corps est donc pythagoricien.

conjugués : les points P_1 et P_2 sont « conjugués » si leurs coordonnées vérifient l'égalité $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = R$ où R est une constante non nulle, positive ou négative. Le lieu des conjugués d'un point P est un plan π appelé « plan polaire absolu » de ce point ; P est le « pôle » de π. Les pôles des plans passant par l'origine O sont des points impropres et le plan polaire de O est le plan à l'infini (au sens usuel du terme). Les plans polaires absolus des points d'une droite g passent tous par une droite g_1 appelée « polaire absolue » de g. Deux droites sont perpendiculaires si l'une coupe la polaire absolue de l'autre. Schur définit les déplacements de manière synthétique à partir de la notion de réflexion colinéaire relativement à un plan et à son pôle [114]. Il démontre qu'une réflexion transforme une paire de points conjugués en une autre paire de points conjugués et conserve donc la perpendicularité. Il démontre ensuite que la composée de trois réflexions relativement à trois plans passant par le même axe peut être remplacée par une seule réflexion relativement à un plan passant par cet axe. La composée de deux réflexions relativement à des plans perpendiculaires est appelée une « symétrie ». Schur établit le théorème fondamental suivant : la composée de trois symétries, et même d'un nombre quelconque de symétries, peut être remplacée par la composée d'au plus deux symétries. Arrivé à ce stade, Schur définit les déplacements comme composées d'un nombre quelconque de symétries, donc comme composées d'au plus deux symétries. Il obtient ainsi un espace de coordonnées affine-métrique dans lequel la « constante métrique » [115] est égale à $\varkappa = 1/R$.

La dernière étape consiste à étudier la validité des postulats des déplacements. Le raisonnement essentiellement synthétique de Schur est incomplet et parfois obscur, notamment dans le cas où $\varkappa < 0$. Mais les conclusions qui en ressortent sont dignes d'intérêt. Schur démontre que les postulats sont vérifiés si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Le corps K est pythagoricien.

(2) Si $P(a, 0)$ est un point propre, $1 - \varkappa a^2$ est un carré dans K.

114 Le pôle S du plan σ ne doit pas être dans σ ; en termes modernes, σ ne doit pas être « isotrope » [Hessenberg & Diller 1967, pp. 207-209].

115 [Hessenberg & Diller 1967, p. 215] ; pour être précis, signalons que chez Diller la « constante métrique » est égale à $-\varkappa$.

(3) Si (x, y, z) est un point propre, $|x^2 + y^2 + z^2| < R$.

Il faudrait, pour être exhaustif[116], ajouter encore les deux conditions suivantes (non mentionnées par Schur) :

(4) Il existe un point propre $P(a, 0)$ avec $a \neq 0$. Si $P(a, 0)$ est un point propre et si $|b| < |a|$, $Q(b, 0)$ est aussi un point propre.

(5) Si $P(m, 0)$ est un point propre, $Q(\frac{2m}{1+\varkappa m^2}, 0)$ est aussi un point propre.

Ces conditions montrent donc qu'il faut se restreindre à une partie de l'espace de coordonnées affine-métrique si l'on veut obtenir une interprétation du système de postulats de Schur. Arrivé au terme de son raisonnement, il conclut qu'il est impossible de déterminer à partir de ceux-ci la valeur de la constante $\varkappa$ et donc celle de la somme des angles d'un triangle. C'est pour lui le résultat essentiel. Si l'on considère son raisonnement d'un point de vue moderne, on voit que Schur aborde en fait le problème de la classification des plans de Hilbert[117]. Expliquons brièvement en quoi consiste ce problème. Soit Π un plan de Hilbert. Les chapitres 2 à 5 de *GG* montrent que Π peut être plongé dans un plan affine-métrique sur un corps pythagoricien. La question est alors de savoir quelles sont les valeurs possibles des coordonnées des points de Π. On démontre que les conditions 2) à 5) énoncées ci-dessus sont nécessaires et suffisantes pour qu'un sous-ensemble d'un plan affine-métrique contenant l'origine soit un plan de Hilbert. Ces conditions peuvent être exprimées de manière algébrique et elles permettent de classifier les plans de Hilbert.

Revenons à Schur. Il remarque encore que la valeur de $\varkappa$ ne permet pas de tirer des conclusions sur la répartition des points en points propres ou impropres. Il cite l'exemple des géométries non legendrienne et semi-euclidienne de Dehn [Dehn 1900]. Dans la première, $\varkappa < 0$ et il existe

116 [Hessenberg & Diller 1967, p. 226] ; j'ai montré au § 2.5 la nécessité des conditions 1), 2), 3) et 5).

117 Cette classification a été faite par Wolfgang Pejas [1961]. Ce problème est aussi traité dans [Hessenberg & Diller 1967].

des points impropres [118] alors que dans la seconde $\varkappa = 0$ et le postulat euclidien des parallèles n'est pas vérifié. Schur donne aussi l'exemple d'une géométrie dans laquelle $\varkappa > 0$ et où il y a des points de l'axe Ox d'abscisse positive inférieure à $\sqrt{R}$ et pourtant impropres [119] ; le postulat non euclidien des parallèles [120] n'est donc pas vérifié ; c'est une géométrie « semi-hyperbolique » [121]. Ces différentes géométries sont construites à partir du système de grandeurs non archimédien défini par Hilbert au chapitre 2 de ses *Grundlagen der Geometrie*.

Dans le dernier paragraphe du chapitre, Schur examine les simplifications qui peuvent être apportées si l'on fait une hypothèse de parallélisme. Il suppose d'abord que l'axiome euclidien des parallèles est vérifié et décide de raisonner uniquement dans le plan. Il démontre que le 13^{e} postulat (retournement du segment) est une conséquence du 12^{e} (retournement de l'angle). Il démontre aussi de manière nouvelle le théorème de Pascal et celui de Desargues [122].

Le paragraphe se termine par une importante remarque sur l'axiome non euclidien des parallèles de Bolyai-Lobatchevski adopté en particulier par Hilbert dans un article consacré aux fondements de la géométrie non euclidienne [Hilbert 1903] [123]. Rappelons d'abord l'énoncé de cet axiome dans la formulation de Hilbert :

118 Rappelons que le système axiomatique de Schur exclut le cas où tous les éléments sont propres. L'exemple de la géométrie non legendrienne n'est donc pas vraiment pertinent. Il ne le devient que si l'on modifie les axiomes d'ordre de manière à pouvoir envisager aussi le cas où tous les éléments sont propres.

119 Cf. fin du § 2.6.

120 L'énoncé de ce postulat est rappelé à la fin de ce paragraphe.

121 Cf. [Hessenberg & Diller 1967, p. 219] ; Schur est le premier à donner l'exemple d'une telle géométrie ; l'appellation « semi-hyperbolique » n'est pas de lui.

122 Si l'on raisonne dans l'espace, le théorème de Desargues est une conséquence des postulats projectifs. Comme Schur raisonne ici dans le plan, il doit utiliser les postulats des déplacements. Hilbert a en effet démontré que si l'on se limite au plan, les axiomes de congruence sont nécessaires pour démontrer le théorème de Desargues. La partie la plus intéressante de son raisonnement est une démonstration du cas particulier du théorème de Pascal où les deux droites sont perpendiculaires fondée sur le théorème des hauteurs dans un triangle. Cette démonstration originale est exposée pour la première fois dans [Schur 1904].

123 Le contenu de cet article a par la suite été intégré comme supplément aux *Grundlagen der Geometrie*.

IV. Si b est une droite quelconque et A un point non situé sur elle, il passe toujours par A deux demi-droites a_1 et a_2 ne formant pas une seule et même droite et ne coupant pas la droite b, tandis que chaque demi-droite issue de A et située dans l'angle formé par a_1 et a_2 coupe b. [Hilbert 1903, pp. 139-140] [124]

Schur explique qu'il n'examinera pas les conséquences qui découlent de cet axiome car il s'agit d'une hypothèse trop forte par rapport aux simplifications qu'elle apporte. Elle permet en effet d'établir le 13^{e} et surtout le 14^{e} postulat, à savoir qu'un cercle coupe chaque droite dont la distance au centre est inférieure au rayon. Schur se réfère à ce propos à la preuve donnée dans son commentaire de l'article de Hilbert [Schur 1904]. Le résultat est correct [125] mais cette preuve comporte des lacunes.

2.8. *Les fondements de la géométrie dans le plan : la méthode de Hjelmslev*

La construction axiomatique de la géométrie de Schur fait appel de manière essentielle à l'espace. L'introduction des éléments idéaux repose en effet sur le théorème de Desargues et sur un raisonnement spatial. Il en va de même de la preuve du théorème de Pascal. Peu avant la parution de *GG*, le mathématicien danois Johannes Hjelmslev a cependant montré qu'il est possible de définir les éléments idéaux dans le plan, sans passage par l'espace, à partir des axiomes des trois premiers groupes (incidence, ordre et congruence) de Hilbert [Hjelmslev 1907] [126]. En se fondant sur un raisonnement dû à Gerhard Hessenberg [Hessenberg 1905b], il établit le théorème de Pascal dans le plan complété par les éléments idéaux sans sortir de celui-ci. Les recherches de Hjelmslev complètent donc celles de Schur. Elles font l'objet du chapitre 7 de *GG*. Schur suit fidèlement l'article de Hjelmslev en apportant seulement quelques compléments. Il démontre

---

124 IV. Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgeraden a_1, a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.

125 Cf. [Hartshorne 2000, p. 423].

126 Pour une présentation détaillée de la méthode de Hjelmslev, on pourra se référer à [Karzel & Kroll 1988, pp. 160-166] ou [Hessenberg & Diller 1967, pp. 96-130].

en particulier que le théorème de Desargues est une conséquence du théorème de Pascal [127], ce qui l'amène à la conclusion qu'il est possible de développer la géométrie projective et d'établir tous les résultats des chapitres 4 et 5 de son livre ainsi que les relations fondamentales de la métrique en raisonnant seulement dans le plan. De ce point de vue, le travail de Hjelmslev constitue un aboutissement. Mais Schur relève que cela a lieu au détriment de la simplicité. Le fait qu'il reprenne presque sans changement l'article de Hjelmslev montre malgré tout bien l'importance qu'il lui accorde [128]. Réciproquement, Hjelmslev affirme que ce sont les recherches de Schur qui montrent comment l'on parvient ensuite à la géométrie analytique [129].

2.9. *L'axiome d'Archimède*

Dans le dernier chapitre du livre, Schur introduit l'axiome d'Archimède et étudie les simplifications qui en découlent. Cet axiome est énoncé sous forme projective puis sous forme propre. Il suffit de citer ici la seconde :

> Si une translation de la droite AA_1 envoie le point A sur A_1, celui-ci sur A_2, celui-ci sur A_3 etc., chaque point de la demi-droite $(A)A_1$ est situé sur l'un des segments $\overline{A_nA_{n+1}}$. [Schur 1909, p. 175] [130]

Il en déduit le postulat du retournement du segment et celui du retournement de l'angle [131]. Il établit aussi les trois résultats suivants :

127 Ce résultat est dû à Hessenberg [Hessenberg 1905a]. La preuve de Schur est rédigée différemment de celle de Hessenberg mais la figure et l'idée sont les mêmes.

128 Le travail de Hjelmslev constitue le point de départ d'une série de recherches ayant pour but de fonder la géométrie à partir de la notion de symétrie. Ces recherches ont trouvé leur aboutissement dans [Bachmann 1959].

129 [Hjelmslev 1907, p. 471] ; Hjelmslev se réfère à *UG*.

130 Geht bei einer Schiebung längs der Geraden AA_1 der Punkt A in A_1 über, dieser in A_2, dieser in A_3 usf., so liegt jeder Punkt der Halbgeraden $(A)A_1$ auf einer der Strecken $\overline{A_nA_{n+1}}$.

131 La démonstration du retournement du segment est reprise de [Peano 1894]. La démonstration du retournement de l'angle est en revanche originale ; Peano énonce en effet ce résultat sans démonstration.

1) Si $\varkappa = 0$, le postulat des parallèles a lieu [132] et tous les points impropres sont situés sur une droite.

2) Si $\varkappa < 0$, tous les points sont propres.

3) Si $\varkappa > 0$, tous les points P satisfaisant à l'inégalité $(OP)^2 < R$ sont propres.

Le deuxième résultat est faux puisque tous les points ne peuvent être propres dans l'axiomatique de Schur. Il serait correct si l'on modifiait les axiomes d'ordre.

Supposons $\varkappa > 0$; une droite passant par un point propre R coupe une droite OU en un point propre P si et seulement si $(UOEP)^2 < \frac{1}{\varkappa}$, où O est le pied de la perpendiculaire issue de R sur OU, U est le conjugué de O et E le point unité sur l'axe OU. Si l'on admet le14$^{\text{e}}$ postulat, il existe alors sur la droite OU un point K d'abscisse $\sqrt{R}$. La droite RK est une parallèle limite à OU issue de R et l'axiome non euclidien des parallèles de Bolyai et Lobatchevski est vérifié [133].

L'axiome d'Archimède permet d'attribuer à tout angle une mesure φ. Si l'on suppose que la mesure de l'angle droit est égale à $\frac{\pi}{2}$, les fonctions sinus et cosinus introduites au chapitre 4 du livre peuvent être développées en séries de la manière habituelle. Il est enfin possible d'attribuer à tout segment $\overline{OP}$ une mesure ξ et au segment projectif $(OP) = (UOEP)$ correspondant une mesure x. Schur établit les relations suivantes entre ces mesures :

1) Si $\varkappa = 0$, $\xi = x$.

2) Si $\varkappa < 0$, $x \operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tang}(\lambda\xi)$ où $\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{-\varkappa}$.

3) Si $\varkappa > 0$, $\frac{x}{k} = \frac{1-e^{-\lambda\xi}}{1+e^{\lambda\xi}}$ où $\lambda = \log(\frac{k+1}{k-1})$ et $k = \sqrt{\frac{1}{\varkappa}}$.

---

132 Schur reprend une preuve donnée par Johann Heinrich Lambert [Lambert 1786, § 47]. Si $\varkappa = 0$, la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Lambert démontre en utilisant implicitement l'axiome d'Archimède que dans ce cas il ne passe par un point extérieur à une droite qu'une parallèle à cette droite.

133 Notons (A) l'axiome d'Archimède ; comme nous l'avons vu, le postulat 14 assure que le corps des segments projectifs est euclidien (tout segment positif admet une racine carrée) ; appelons donc (E) ce postulat ; notons encore (P) le postulat euclidien des parallèles et (L) le postulat non euclidien des parallèles de Bolyai et Lobatchevski. Si l'on admet (A), la seule hypothèse compatible avec (non P) est $\varkappa > 0$. Schur a donc établi en fin de compte le résultat suivant : (A) + (non P) + (E) $\Rightarrow$ (L). On pourra se référer sur cette question à [Hartshorne 2000, p. 426].

3. L'ÉPISTÉMOLOGIE DE LA GÉOMÉTRIE DE SCHUR

Je terminerai cette étude en analysant l'introduction de *GG*. Celle-ci contient en effet des considérations méthodologiques et épistémologiques. Schur explique d'abord quelles sont les caractéristiques de la méthode axiomatique en géométrie. Pour lui, une exposition scientifique des fondements de la géométrie doit consister à « poser un système simple et complet de faits d'intuition ou axiomes les plus indépendants possibles entre eux, à partir desquels la géométrie peut être développée de manière purement logique. »[134] C'est le programme exposé par Pasch dans ses *Vorlesungen über neuere Geometrie*. La conception des axiomes de Pasch comme faits d'intuition apparaît chez pratiquement tous les géomètres à la fin du XIXᵉ siècle, à l'exception de Pieri. Hilbert lui-même dans ses *Grundlagen der Geometrie* affirme que les axiomes expriment des faits fondamentaux donnés par l'intuition, mais peut-être ne s'agit-il plus chez lui que d'une référence à la tradition[135]. Celle-ci est en revanche bien vivante chez Schur. Il ajoute en effet qu'une certaine liberté est possible dans le choix des postulats. Mais pour qu'un travail puisse prétendre au nom de géométrie, il est nécessaire que les axiomes ou postulats expriment le résultat des observations les plus simples et les plus élémentaires des figures naturelles. On ne peut donc par exemple pas prendre comme axiome le fait que l'espace est une variété dans laquelle chaque point est déterminé par trois coordonnées (allusion à Riemann et Helmholtz). Schur reprend ici presque textuellement un passage de [Peano 1894]. Ces considérations l'amènent à penser, comme Pasch, que la droite ne peut pas être choisie comme notion fondamentale et à rejeter l'emploi d'un axiome de continuité. Dans la fin de l'introduction, il reprend des critiques déjà formulées par Peano à l'égard des géomètres qui veulent définir les notions de ligne, surface ou corps ou encore de droite. Il faut rejeter ces définitions car elles font chaque fois appel à d'autres notions

134 Ein einfaches und vollständiges System von einander möglichst unabhängiger Tatsachen der Anschauung oder Axiome aufzustellen, aus denen die Geometrie auf rein logischem Wege hergeleitet werden kann. [Schur 1909, p. 2]

135 Rappelons à ce propos que la seule référence donnée par Hilbert à ce problème est une citation de Kant.

qui doivent elles-mêmes être définies. Pour introduire la droite, il n'y a pas d'autre solution que de poser l'axiome suivant : deux points distincts déterminent une droite. Notre intuition de l'espace nous rend les axiomes compréhensibles sans explications supplémentaires. Schur note encore, en suivant toujours Pasch, que dans une preuve, seuls les axiomes interviennent et non les explications que l'on pourraient donner pour rendre compréhensibles les notions fondamentales. Dans la pratique, il n'est cependant pas si scrupuleux et ne sépare pas toujours clairement les préconsidérations expérimentales des raisonnements mathématiques. Dans *UG*, après avoir énoncé les postulats projectifs, il écrit en effet à propos de deux d'entre eux :

> Ces deux postulats valent pour la géométrie elliptique seulement lorsqu'on se limite, comme cela correspond à l'origine des axiomes géométriques, à une partie limitée de l'espace, les points appelés accessibles. [Schur 1901, p. 267] [136]

Les deux postulats qui posent problème sont ceux qui font intervenir la notion de segment, non univoquement définie en géométrie elliptique. Un peu plus loin, conscient de cette difficulté, Schur ajoute :

> Du moins il me semble qu'une formulation des axiomes qui évite cette difficulté provisoire, dépouillerait les axiomes du caractère originel correspondant à leur nature. [Schur 1901, p. 274] [137]

Dans *GG*, il note encore à ce sujet :

> La différence entre ce que l'on appelle la géométrie elliptique et la géométrie sphérique consiste, comme on le sait, en ce que dans l'une deux droites coplanaires ont un point commun et dans l'autre deux points communs ; nous ne sommes pas entrés en matière là-dessus car cette différence ne concerne pas

---

136 Diese beiden Postulate gelten für die elliptische Geometrie nur dann, wenn man sich, wie es der Entstehung der geometrischen Axiome entspricht, auf einen begrenzten Theil des Raumes, die sogenannten erreichbaren Punkte beschränkt.

137 Wenigstens will es mir scheinen, als ob eine Formulirung der Axiome, die diese einstweilige Einschränkung vermeidet, die Axiome des ihrem Wesen entsprechenden ursprünglichen Charakters entkleiden würde.

> la liaison des postulats dont la validité a été admise seulement dans un domaine fini. [Schur 1909, p. VI] [138]

Ces considérations peuvent avoir leur place, comme chez Pasch, pour justifier le choix des axiomes. Elles n'ont plus de sens une fois que les axiomes ont été posés. Si l'on parle de partie bornée, c'est par référence à un espace « plus grand » qui n'apparaît pas dans les axiomes de Schur. Des difficultés du même ordre surgissent à propos des points idéaux. Schur est donc plus préoccupé d'énoncer des axiomes dont l'origine expérimentale est claire que de bâtir une théorie parfaitement rigoureuse. Ces contradictions ont été relevées par le géomètre italien Beppo Levi dans un compte rendu de *GG*. Après une appréciation généralement favorable, il écrit :

> Une observation d'importance fondamentale doit encore être faite à propos de la géométrie elliptique.
>
> Dans le mémoire déjà cité des Math. Ann. 55 [*UG*], qui contient déjà les lignes fondamentale de l'ouvrage actuel, Schur observe que les postulats graphiques (postulats relatifs aux idées de *point* et *segment*) sont valables pour la géométrie elliptique seulement dans une région limitée de l'espace. [...]
>
> Une telle réserve est logiquement vaine : il est inutile de se référer à l'origine des postulats géométriques, laquelle est certainement hors du champ de la logique déductive et se retrouve plutôt dans la conciliation d'intuitions contradictoires : les postulats définissent l'*espace* auquel se réfère notre géométrie comme champ de leur validité ; si l'espace elliptique ordinaire est en contradiction quelconque avec eux, cela signifie qu'ils excluent la géométrie elliptique, pas moins que le postulat d'Euclide exclut les géométries non paraboliques. [Levi 1910, p. 42] [139]

---

138 Auf den hierauf bezüglichen Unterschied zwischen der sogenannten elliptischen und der sphärischen Geometrie, der bekanntlich darin besteht, daß in der einen je zwei Geraden derselben Ebene je einen, in der anderen aber je zwei Punkte gemein haben, sind wir nicht eingegangen, weil dieser Unterschied den Zusammenhang der Postulate, deren Gültigkeit nur für einen beschränkten Bereich angenommen wurde, nicht betrifft.

139 Un'osservazione di fondamentale importanza deve farsi ancora rispetto alla geometria ellittica.
Nella Memoria già citata dei Math. Ann. 55, che già contiene le linee fondamentali dell'opera presente, il Schur osserva che i postulati grafici (postulati relativi alle idee *punto* e *segmento*) valgono per la geometria ellittica solo per una regione limitata di spazio. [...]

La géométrie non legendrienne est en revanche compatible avec les postulats de Schur. La comparaison entre les conceptions de Schur et Levi témoigne bien du changement de paradigme qui s'effectue au tournant du siècle. Levi met ici clairement en évidence l'idée de définition implicite ou par postulats déjà exprimée quelques années plus tôt par Hilbert dans sa correspondance avec Frege et théorisée ensuite par les philosophes néo-positivistes.

La méthode initiée par Klein et consistant à construire simultanément plusieurs géométries en partant d'axiomes valables dans une portion d'espace bornée a été reprise par László Rédei [Rédei 1968]. Dans la préface de son livre, il affirme que cette méthode n'a pas encore trouvé dans la littérature de traitement satisfaisant et qu'il entend combler cette lacune. Rédei construit simultanément les géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique en évitant les difficultés rencontrées par Schur[140]. À la différence de ce dernier, il fait usage d'un axiome de continuité et se limite donc à ces trois géométries. Une autre approche est celle présentée dans [Bachmann 1959]. Elle est fondée sur la notion de symétrie et permet de

---

Tale riserva è logicamente vana : inutile richiamarsi alla origine dei postulati geometrici, la quale certamente è fuori del campo della logica deduttiva e piuttosto si ritrova nella conciliazione di intuizioni contradditorie : i postulati definiscono lo *spazio* cui si riferisce la nostra geometria come il campo della loro validità ; se l'ordinario spazio ellittico è in qualsiasi contraddizione con essi, ciò significa che essi escludono la geometria ellittica, non meno di quanto il postulato di Euclide escluda le geometrie non paraboliche.

140 Rédei considère un espace initial E dans lequel sont valables des axiomes d'incidence et de congruence ; la notion fondamentale est celle de droite et non de segment. À l'intérieur de E il envisage un sous-espace E' dans lequel sont valables des axiomes d'ordre et un axiome de continuité (celui-ci revient à dire que toute suite croissante bornée admet une borne supérieure). En adjoignant comme Pasch et Schur des éléments idéaux à E, Rédei construit la clôture projective $\overline{E}$ de E. Ses raisonnements n'utilisent que les axiomes d'incidence et d'ordre. L'introduction de l'axiome de continuité permet ensuite de démontrer le théorème fondamental de la géométrie projective et de définir des coordonnées dans $\overline{E}$. Rédei utilise les axiomes de congruence dans le dernier chapitre de son livre. Les déplacements, définis dans E, s'étendent de façon unique en applications projectives de $\overline{E}$. Il démontre qu'il y a trois cas possibles :

a) $E = \overline{E}$ et E est l'espace elliptique.

b) Chaque droite de E contient un point idéal et E est l'espace euclidien.

c) Chaque droite de E contient une infinité de points idéaux et E est l'espace non euclidien (hyperbolique).

traiter simultanément de nombreuses géométries. On pourra enfin consulter avec profit [Hessenberg & Diller 1967] ; cet ouvrage a été en grande partie rédigé par Diller, un élève de Bachmann. Il expose une construction de la géométrie plane combinant les méthode de Hjelmslev et Schur. Elle ne permet cependant pas de traiter la géométrie elliptique.

CONCLUSION

On ne peut lire le livre de Schur sans faire abstraction de celui de Hilbert. La proximité chronologique et l'identité de leur titre amènent naturellement à une comparaison. Si l'un des ouvrages est aujourd'hui encore célèbre, l'autre est en revanche oublié. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette différence de traitement. On notera d'abord que le livre de Hilbert constitue dans l'histoire de la géométrie, et plus généralement des mathématiques, une rupture. Il résout de manière nouvelle et particulièrement élégante un problème qui préoccupait les géomètres depuis longtemps et présente toutes les qualités attendues de la part d'un mathématicien moderne : précision, rigueur, concision, clarté. Publié dix ans après celui de Hilbert, le livre de Schur ne pouvait donc prétendre apporter des innovations au point de vue méthodologique. Au contraire, nous avons vu qu'il manque souvent de rigueur et ne s'embarasse pas de certaines incohérences. Son style littéraire et son épistémologie sont proches de Pasch et à certains égards Schur est encore un mathématicien du XIXe siècle. Ceci explique sans doute pourquoi son livre est rapidement tombé dans l'oubli. Il serait cependant faux de fonder notre appréciation uniquement sur des critères de style ou de rigueur. La réaction dans l'ensemble favorable des contemporains montre que d'autres critères ont été retenus. Ces derniers, encore habitués au style des mathématiciens du XIXe siècle et moins sensibles que le lecteur moderne à des questions de rigueur, ont sans doute prêté avant tout attention au contenu mathématique de l'ouvrage et à sa richesse. Dans un compte rendu, Karl Kommerell écrit ainsi que « le livre donne des renseignements sur toutes les questions importantes qui concernent les fondements de la géométrie » [141]. On peut certes objecter que le livre de Schur est en partie un ouvrage de synthèse, moins novateur que celui de Hilbert, et que sur ce point la comparaison joue à nouveau en faveur de ce dernier. On aurait cependant tort de sous-estimer le travail de synthèse. En effectuant ce travail, le mathématicien, ou plus généralement le scientifique, participe au développement de sa discipline et permet à des idées parfois difficilement accessibles de toucher un public étendu. En combinant des résultats exposés séparément et dans des cadres distincts, il permet à ceux-ci d'acquérir une nouvelle signification. Dans le cas de Schur, c'est incontestablement le cas. La complétion de l'espace initial par des éléments idéaux de manière à obtenir l'espace projectif, l'algébrisation de ce nouvel espace grâce au calcul des jets et enfin l'introduction des déplacements et de l'involution absolue conduisent à une construction originale de la géométrie, au final fort différente de celle de Hilbert. Schur donne de plus à cette construction de nombreux développements, en particulier au plan analytique où il témoigne de ses capacités de calculateur. En accordant une place centrale aux symétries, il montre une nouvelle façon d'aborder la géométrie qui connaîtra de nombreux développements au cours du XX^e siècle. L'idée de compléter le plan ou l'espace initial pour pouvoir le regarder de l'extérieur est fructueuse puisque c'est elle qui permettra, comme nous l'avons vu, de classifier les plans de Hilbert. Notons enfin que les recherches de Schur témoignent d'un moment essentiel dans l'histoire de la géométrie et de ses fondements. Elles montrent que l'on aurait tort de réduire l'histoire de cette discipline à Hilbert ; d'autres acteurs étaient présents. C'est souvent en comparant un livre avec d'autres ouvrages contemporains que l'on en perçoit le mieux la nouveauté ou l'originalité. Cette seule raison devrait déjà inciter le lecteur de Hilbert à examiner aussi les travaux de Schur.

Remerciements

Je tiens à remercier MM. Klaus Volkert et Robin Hartshorne qui ont bien voulu lire une version préliminaire de cet article et me faire part de

141 [Kommerell 1909, p. 65].

leurs remarques. Je remercie aussi M. Jan Henke qui a répondu de manière détaillée à plusieurs questions concernant la notion de déplacement chez Peano et Schur. Il va de soi que les opinions exprimées dans cet article n'engagent que son auteur.

BIBLIOGRAPHIE

BACHMANN (Friedrich)
[1959] *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959 ; 2e édition, *ibidem*, 1973.

BOLYAI (János)
[1832] *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens*, Maros-Vásárhely : J. et S. Kali, 1832.

BONOLA (Roberto)
[1905] I teoremi del padre Gerolamo Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn, *Rendiconti Istituto Lombardo di Milano*, 38 (1905), p. 650–662.

CANTOR (Georg)
[1991] *Briefe*, Springer, 1991.

CERRONI (Cinzia)
[2007] The contributions of Hilbert and Dehn to non-Archimedean geometries and their impact on the Italian school, *Revue d'histoire des mathématiques*, 13 (2007), p. 259–299.

CHÂTELET (Albert)
[1910] Compte rendu des *Grundlagen der Geometrie* de Schur, *Bulletin des sciences mathématiques*, 34 (1910), p. 68–72.

CREMONA (Luigi)
[1873] *Elementi di geometria projettiva*, Roma : Paravia, 1873 ; traduction française de Ed. Dewulf, Gauthier-Villars, Paris, 1875.

DEHN (Max)
[1900] Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, *Mathematische Annalen*, 53 (1900), p. 404–439.

ENGEL (Friedrich)

[1898a] *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers*, Leipzig : Teubner, 1898.

[1898b] Die Construction der Parallelen in der nicht-euklidischen Geometrie, *Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 50 (1898), p. 181–187.

[1935] Friedrich Schur (nécrologie), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 45 (1935), p. 1–31.

FLADT (Kuno)

[1957] Zum hundersten Geburtstage von Friedrich Schur, *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte von Göttingen*, 5 (1957), p. 182–185.

HALLETT (Michael) & MAJER (Ulrich), éd.

[2004] *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891–1902*, Springer, 2004.

HARTSHORNE (Robin)

[2000] *Geometry : Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

HENKE (Jan)

[2010] *Der Bewegungsbegriff in der neueren Geometrie und seine Adaption im elementaren Geometrieunterricht*, Hamburg : Verlag Dr. Kovač, 2010.

HESSENBERG (Gerhard)

[1905a] Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, *Mathematische Annalen*, 61 (1905), p. 161–172.

[1905b] Neue Begründung der Sphärik, *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft*, 4 (1905), p. 69–77.

HESSENBERG (Gerhard) & DILLER (Justus)

[1967] *Grundlagen der Geometrie*, Berlin : Walter de Gruyter, 1967.

HILBERT (David)

[1899] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1899 ; traduction française de la 10e édition par P. Rossier accompagnée d'un commentaire, Dunod, Paris, 1971.

[1902] Über die Grundlagen der Geometrie, *Mathematische Annalen*, 56 (1902), p. 381–422.

[1903] Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 57 (1903), p. 137–150.

HJELMSLEV (Johannes)

[1907] Neue Begründung der ebenen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 64 (1907), p. 449–474.

INGRAMI (Giuseppe)
[1899] *Elementi di geometria per le scuole secondarie superiori*, Bologna : G. Cenerelli, 1899.

KARZEL (Helmut) & KROLL (Hans-Joachim)
[1988] *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*, Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1988.

KILLING (Wilhelm)
[1893] *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, vol. 1, Paderborn : F. Schöningh, 1893 ; vol. 2, 1898.

KLEIN (Felix)
[1871] Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4 (1871), p. 573–625 ; *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1921, vol. 1, pp. 254-305.
[1873] Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie (Zweiter Aufsatz), *Mathematische Annalen*, 6 (1873), p. 112–145 ; *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1921, vol. 1, pp. 311-342.

KOMMERELL (Karl)
[1909] Compte rendu de *Grundlagen der Geometrie* de Schur, *Archiv der Mathematik und Physik*, 16 (1909), p. 62–65.

LAMBERT (Johann Heinrich)
[1786] Theorie der Parallellinien, *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, 1786 ; réédition dans *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* de P. Stäckel et F. Engel, Teubner, Leipzig, 1895, pp. 139-208.

LEVI (Beppo)
[1910] Compte rendu de *Grundlagen der Geometrie* de Schur, *Bollettino di bibliographia e storia delle scienze matematiche*, 12 (1910), p. 36–43.

LIE (Sophus)
[1893] *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, Leipzig : Teubner, 1893.

LINDEMANN (Ferdinand)
[1891] *Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch*, zweiten Bandes erster Theil, Leipzig : Teubner, 1891.

LOBATCHEVSKI (Nicolai I.)
[1835] Nouveaux principes de la géométrie avec une théorie complète des parallèles (en russe), *Publications scientifiques de l'Université de Kazan*, III (1835), p. 3–48 ; 1836, II, pp. 3-98, 1836, III, pp. 3-50, 1837, I, pp. 3-97, 1838, I, pp. 3-124, 1838, III, pp. 3-65 ; traduction allemande dans Engel [1898a].

MOORE (Eliakim Hastings)

[1902] On the projective axioms of geometry, *Transactions of the American Mathematical Society*, 3 (1902), p. 142–158 ; errata, *ibidem*, p. 501.

NABONNAND (Philippe)

[2008] La théorie des *Würfe* de von Staudt - Une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure, *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 201–242.

PASCH (Moritz)

[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1882 ; 2e édition suivie d'un supplément de M. Dehn, Springer, Berlin, 1926.

[1888] Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen, *Mathematische Annalen*, 32 (1888), p. 158–159.

PEANO (Giuseppe)

[1889] *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino : Fratelli Bocca, 1889 ; *Opere scelte*, Edizioni Cremonese, Roma, 1958, vol. 2, pp. 56-91.

[1894] Sui fondamenti della geometria, *Rivista di matematica*, 4 (1894), p. 51–90 ; *Opere scelte*, Edizioni Cremonese, Roma, 1959, vol. 3, pp. 116-157.

PEJAS (Wolfgang)

[1961] Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie, *Mathematische Annalen*, 143 (1961), p. 212–235.

RÉDEI (László)

[1968] *Foundations of euclidean and non-euclidean Geometries according to F. Klein*, Pergamon Press, 1968.

REYES Y PROSPER (Ventura)

[1888] Sur les propriétés graphiques des figures centriques, *Mathematische Annalen*, 32 (1888), p. 157–158.

SCHÖNBECK (Jürgen)

[1986] Hermann Wiener (1857-1939), der Begründer der Spiegelungsgeometrie, *Jahrbuch Überblicke Mathematik*, 19 (1986), p. 81–104.

SCHUR (Friedrich)

[1881] Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 18 (1881), p. 252–254.

[1891] Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie, *Mathematische Annalen*, 39 (1891), p. 113–124.

[1892] Ueber den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren, *Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat)*, 10 (1892), p. 2–6.

[1898a] Über den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie, *Mathematische Annalen*, 51 (1898), p. 401–409.

[1898b] *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Leipzig : Veit, 1898 ; 2^e^ édition *ibidem*, 1912.

[1901] Über die Grundlagen der Geometrie, *Mathematische Annalen*, 55 (1901), p. 265–292.

[1903] Zur Proportionslehre, *Mathematische Annalen*, 57 (1903), p. 205–208.

[1904] Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 59 (1904), p. 314–320.

[1909] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1909.

STAUDT (Georg Karl Christian von)

[1847] *Geometrie der Lage*, Nürnberg : Bauer und Raspe, 1847.

[1856, 1857, 1860] *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg : Fr. Korn, 1856, 1857, 1860.

STOLZ (Otto)

[1885] *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, Leipzig : Teubner, 1885.

THOMAE (Johannes)

[1873] *Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage*, Halle : Louis Nebert, 1873.

TOEPELL (Michael-Markus)

[1985] Zur Schlüsselrolle Friedrich Schurs bei der Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie », dans Folkerts (Menso) & Lindgren (Uta), éd., *Mathemata, Festschrift für Helmut Gericke*, Stuttgart : Steiner Verlag, 1985, p. 637–649.

[1986] *Über die Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie »* , Vandenhoeck & Ruprecht, 1986.

VERONESE (Giuseppe)

[1891] *Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padova : Tipografia del Seminario, 1891 ; traduction allemande de A. Schlepp, Teubner, Leipzig, 1894.

[1897] *Elementi di geometria ad uso dei licei e degli istituti tecnici*, Verona, Padova : Fratelli Drucker, 1897.

VOELKE (Jean-Daniel)

[2008] Le théorème fondamental de la géométrie projective, évolution de sa preuve entre 1847 et 1900, *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 243–296.

VOLKERT (Klaus)

[1999] Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone : einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes, *Mathematische Semesterberichte*, 46 (1999), p. 1–28.

WIENER (Hermann)

[1890a] Die Zusammensetzung zweier endlichen Schraubungen zu einer einzigen, *Berichte der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 42 (1890), p. 13–23.

[1890b] Zur Theorie der Umwendungen, *Berichte der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 42 (1890), p. 71–87.

[1892] Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1 (1892), p. 45–48.

[1894] Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 3 (1894), p. 70–80.

ANNEXE : LISTE DES POSTULATS ÉNONCÉS DANS *GG*

DÉFINITIONS DE LA DROITE, DU PLAN ET DE L'ESPACE

POSTULAT 1. — Il y a une infinité d'éléments que nous appelons points.

POSTULAT 2. — Deux points différents quelconques déterminent de manière univoque un ensemble infini de points, auquel ils appartiennent eux-mêmes, et qui est appelé *segment*. Deux points quelconques d'un segment déterminent un autre segment dont les points appartiennent au premier.

POSTULAT 3. — Si C est un point du segment $\overline{AB}$, un quatrième point D de ce segment appartient ou au segment $\overline{AC}$ ou au segment $\overline{CB}$, et jamais aux deux en même temps.

POSTULAT 4A. — Si C est un point du segment $\overline{AB}$ différent de B et B un point du segment $\overline{CD}$, alors C, et donc aussi B, appartient au segment $\overline{AD}$.

DÉFINITION 1. — L'ensemble des points D qui déterminent avec A des segments tels que le point B appartienne au segment $\overline{AD}$ s'appelle la prolongation du segment $\overline{AB}$ au-delà de B et est noté $\overrightarrow{AB}$.

POSTULAT 4B. — Si C est un point des segments $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$, B est situé sur $\overline{AD}$ ou D sur $\overline{AB}$.

DÉFINITION 2. — Une *droite AB* est composée des points du segment $\overline{AB}$ et de ceux des deux prolongations.

POSTULAT 5. — Hors de chaque droite il y a des points.

POSTULAT 6. — Si A, B, C sont trois points quelconques non situés sur une droite, D un point du segment $\overline{BC}$ et E un point du segment $\overline{AD}$, il y a alors un point F appartenant au segment $\overline{AB}$ tel que E est situé sur le segment $\overline{CF}$.

DÉFINITION 3. — L'ensemble des segments resp. des droites qui relient trois points non alignés avec les points du segment déterminé chaque fois par les deux autres points s'appelle *triangle* resp. *plan.*

POSTULAT 7. — Hors de chaque plan il y a des points.

DÉFINITION 4. — L'ensemble des points des droites qui premièrement, parmi quatre points non situés dans un plan, relient chacun de ces points avec les points du triangle déterminé par les trois autres, et qui deuxièmement relient chaque fois les points du segment déterminé par deux de ces quatre points avec ceux du segment déterminé par les deux autres s'appelle un espace.

POSTULAT 8. — Hors d'un espace il n'y a pas de points.

POSTULAT 9. — Il existe une correspondance entre deux figures telle qu'à chaque segment d'une figure et à chaque point situé sur celui-ci corresponde un segment de l'autre figure et un point situé sur celui-ci, et réciproquement. Cette correspondance, de même que sa réciproque, s'appelle un déplacement.

POSTULAT 10. — La composition de deux déplacements est un déplacement.

POSTULAT 11. — Soient deux plans α et α', deux droites a dans α et a' dans α' et deux points A sur a et A' sur a' ; il existe un et un seul déplacement qui envoie A sur A', un côté déterminé de a sur un côté déterminé de a' et un côté déterminé de α sur un côté déterminée de α'.

POSTULAT 12. — Le déplacement qui laisse fixe un point A, qui transforme la demi-droite AB en AC et le demi-plan $(AB)C$ en $(AC)B$, transforme aussi AC en AB. (Retournement de l'angle).

POSTULAT 13. — Le déplacement qui transforme un point A en un point B et le prolongement de AB au delà de A en celui [de AB] au delà de B et qui laisse fixe un côté d'un plan α contenant AB, envoie aussi B sur A. (Retournement du segment)

Postulat 14. — Si O, A, B sont trois points d'une droite tels que A est situé sur $\overline{OB}$, et si dans le cas où le point conjugué U de O devait être propre, B est aussi sur le segment $\overline{OU}$, il y a alors de chaque côté de OA un triangle rectangle OAC dont l'hypoténuse $\overline{OC} \cong \overline{OB}$.

Postulat 15. — [Forme projective du postulat d'Archimède] Si E et P sont deux points quelconques du segment $\overline{OU}$ et si l'on construit à la suite les quatrièmes harmoniques E_2 de O relativement à E et U, E_3 de E relativement à E_2 et U, E_4 de E_2 relativement à E_3 et U, etc., E_n de E_{n-2} relativement à E_{n-1} et U, il y a toujours dans cette suite un point E_n tel que P soit situé sur le segment $\overline{OE_n}$.

Postulat d'Archimède. — Si une translation de la droite AA_1 envoie le point A sur A_1, celui-ci sur A_2, celui-ci sur A_3 etc., chaque point de la demi-droite $(A)A_1$ est situé sur l'un des segments $\overline{A_nA_{n+1}}$.