

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LES ESPACES DE BERKOVICH SONT ANGÉLIQUES

Jérôme Poineau

**Tome 141
Fascicule 2**

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 267-297

LES ESPACES DE BERKOVICH SONT ANGÉLIQUES

PAR JÉRÔME POINEAU

RÉSUMÉ. — Bien que les espaces de Berkovich définis sur un corps trop gros ne soient, en général, pas métrisables, nous montrons que leur topologie reste en grande partie gouvernée par les suites : tout point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie et les parties compactes sont séquentiellement compactes. Notre preuve utilise de façon essentielle l'extension des scalaires et nous en étudions certaines propriétés. Nous montrons qu'un point d'un disque peut être défini sur un sous-corps de type dénombrable et que, lorsque le corps de base est algébriquement clos, tout point est universel : dans une extension des scalaires, il se relève canoniquement.

ABSTRACT (*Berkovich spaces are angelic*). — Although Berkovich spaces may fail to be metrizable when defined over too big a field, we prove that a large part of their topology can be recovered through sequences: for instance, limit points of subsets are actual limits of sequences and compact subsets are sequentially compact. Our proof uses extension of scalars in an essential way and we need to investigate some of its properties. We show that a point in a disc may be defined over a subfield of countable type and that, over algebraically closed fields, every point is universal: in an extension of scalars, it may be canonically lifted.

Texte reçu le 27 avril 2011 et accepté le 20 février 2012.

JÉRÔME POINEAU, Institut de recherche mathématique avancée, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France • *E-mail* : jerome.poineau@math.uni-strasbourg.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G22, 54D55, 46A50.

Mots clefs. — Espaces de Berkovich, géométrie analytique p -adique, espaces de Fréchet-Urysohn, espaces séquentiels, espaces angéliques.

L'auteur est membre du projet jeunes chercheurs « Berko » de l'Agence Nationale de la Recherche.

1. Introduction

Parmi les différentes théories d'espaces analytiques p -adiques, celle introduite par V. Berkovich se distingue entre autres par ses propriétés topologiques agréables. Mentionnons, par exemple, qu'en dépit du caractère totalement discontinu du corps de base, les espaces de Berkovich sont localement compacts, localement connexes par arcs (cf. [3]) et même localement contractiles dans de nombreux cas (cf. [4], [18]).

Pour des applications à la théorie des systèmes dynamiques, ces propriétés présentent un grand intérêt et ont déjà rendu de nombreux services (cf. [2] pour un exposé détaillé dans le cadre de la droite). Cependant, d'autres obstacles se présentent : dans ce contexte, les suites jouent un rôle prépondérant, mais leur comportement ne présente *a priori* guère de liens avec la topologie des espaces de Berkovich. En effet, lorsque leur corps de définition est trop gros, ces espaces cessent en général d'être métrisables et rien n'assure alors que les caractérisations usuelles des propriétés topologiques en termes de suites continuent de s'appliquer. Pourtant, nous allons montrer que, dans une large mesure, tel est bien le cas, allongeant ainsi la liste des propriétés topologiques remarquables des espaces de Berkovich.

Dans ce texte, nous allons précisément montrer que les espaces de Berkovich sont des espaces de Fréchet-Urysohn. Cette condition, qui signifie que tout point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie, entraîne notamment que la notion de partie ouverte ou fermée peut se tester à l'aide de suites et que toute partie compacte (au sens où tout recouvrement ouvert possède un sous-recouvrement fini) est également séquentiellement compacte (au sens où toute suite possède une sous-suite convergente). Nous démontrerons également que les espaces de Berkovich sont angéliques, c'est-à-dire qu'ils satisfont la condition supplémentaire que leurs parties relativement ω -compactes sont relativement compactes, sous certaines conditions, toujours vérifiées pour les courbes ou les espaces provenant de variétés algébriques.

Signalons que ces résultats ont été obtenus par C. Favre dans [12] lorsque le corps de base est un corps de séries de Laurent. Nous nous affranchissons ici de cette hypothèse. Indiquons que la stratégie qu'il emploie fait intervenir des espaces de Riemann-Zariski (ce qui explique la restriction aux corps de séries de Laurent) et se distingue assez nettement de la nôtre.

Ajoutons, à présent, quelques mots sur les résultats topologiques. Dans des cas simples comme celui du disque de dimension 1, voire celui des courbes, l'on se convainc assez facilement de leur véracité. Considérons par exemple le disque unité $\mathbf{D}_k^{1,\text{an}}$ sur un corps valué complet algébriquement clos k de valuation non triviale. Les k -points y sont denses et l'on construit aisément

une suite de k -points convergeant vers un point donné *a priori*. Si ce point est le point de Gauß, par exemple, il suffit que les points de la suite parcourent une infinité de branches issues de ce point (autrement dit que l'ensemble des classes résiduelles dans \tilde{k} des points de la suite soit infini). Un raisonnement du même style montrerait que $\mathbf{D}_k^{1,\text{an}}$ est séquentiellement compact.

Cependant, la portée de ce type de techniques semble assez limitée et nous procéderons par d'autres méthodes. Les espaces de Berkovich étant construits à partir d'espaces affinoïdes, qui sont eux-mêmes des fermés de Zariski de disques, il suffit en réalité de démontrer les résultats pour les disques. Exposons en quelques mots la stratégie que nous adopterons. Étant donné un disque $\mathbf{D}_k^{n,\text{an}}$ sur un corps valué complet k , nous commencerons par descendre le problème sur un sous-corps ℓ de k . Si ce corps est assez petit, le disque $\mathbf{D}_\ell^{n,\text{an}}$ est métrisable et le problème est résolu. Il faut alors remonter.

Nous consacrons la section 3 aux points « que l'on peut remonter ». Ces points, que nous appelons universels, ont été introduits par V. Berkovich sous le nom de « peaked points ». Sans rentrer dans les détails, un point x d'un espace analytique X sur k est dit universel lorsque, pour toute extension valuée complète K de k , il existe un point canonique au-dessus de x dans X_K . Examinons, de nouveau, le cas où X est un disque de dimension 1 sur un corps algébriquement clos. On peut alors écrire tout point comme bord de Shilov (qui coïncide ici avec le bord topologique) d'un disque centré en un point rationnel de rayon plus petit ou comme limite de tels bords. Nous obtenons ainsi un procédé pour remonter canoniquement tous les points de X à X_K . C'est, par exemple, l'approche adoptée par X. Faber dans [11], §4.

De façon plus générale, V. Berkovich a proposé un moyen de vérifier la propriété d'universalité consistant à réaliser le point comme unique point du bord de Shilov d'un espace strictement affinoïde d'un certain type. Nous aurons besoin de généraliser ce résultat à des espaces qui ne sont pas strictement affinoïdes, ce qui oblige à remplacer les réductions classiques par des réductions graduées au sens de M. Temkin (cf. [19]). C'est pour cette raison que nous avons rédigé la section 2, où nous étendons au cadre gradué quelques résultats classiques d'algèbre commutative tel le Nullstellensatz. Nous en déduisons le résultat de « remontée » que nous recherchions : sur un corps algébriquement clos, tout point est universel.

À la section 4, nous nous intéressons spécifiquement au cas des disques. Ainsi que nous l'avons expliqué précédemment, nous montrons que nous pouvons en « descendre » les points : tout point du disque $\mathbf{D}_k^{n,\text{an}}$ peut être défini (en un sens que nous précisons) sur un disque $\mathbf{D}_\ell^{n,\text{an}}$, où ℓ est un sous-corps de k de type dénombrable sur son sous-corps premier. Dans ce cas, le disque $\mathbf{D}_\ell^{n,\text{an}}$ est métrisable.

Nous disposons alors de tous les ingrédients pour mettre en place la stratégie exposée plus haut et en tirer quelques conséquences ayant trait à la topologie des espaces de Berkovich. C'est l'objet de la section 5.

Remerciements

Nous remercions très chaleureusement Charles Favre qui nous a posé les questions à l'origine de ce texte et nous a communiqué sa prépublication [12] sur le même sujet. Ses remarques sur le texte nous ont apporté une aide certaine et nous ont amené à éclaircir plusieurs points. Merci également à Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros pour leurs commentaires et conseils.

Notations

Ce texte est consacré à l'étude d'espaces analytiques au sens de V. Berkovich. Nous adopterons les notations suivantes dans tout le texte, exception faite de la section 2. La lettre k désignera un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est complet. Nous n'excluons pas le cas de la valeur absolue triviale. Nous noterons k_p le complété du sous-corps premier de k .

Si X est un espace k -analytique et K une extension valuée complète de k , nous noterons X_K l'espace K -analytique obtenu par extension des scalaires.

Nous dirons qu'une famille finie $r = (r_1, \dots, r_n)$ de nombres réels strictement positifs est un polyrayon k -libre si son image dans le \mathbf{Q} -espace vectoriel $\mathbf{R}_+^*/\sqrt{|k^*|}$ est une famille libre. Nous noterons k_r le corps constitué des séries de la forme

$$f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{\mathbf{m}} T_1^{m_1} \dots T_n^{m_n},$$

avec $\alpha_{\mathbf{m}} \in k$, telles que la famille $(|\alpha_{\mathbf{m}}| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n})_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Muni de la norme définie par $\|f\|_r = \max_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n} (|\alpha_{\mathbf{m}}| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n})$, c'est un corps valué complet.

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une k -algèbre de Banach. L'algèbre $A \hat{\otimes}_k k_r$ (cf. section 3 pour des rappels sur le produit tensoriel complété) est alors isomorphe à l'espace des séries de la forme $\sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{m}} T_1^{m_1} \dots T_n^{m_n}$, avec $a_{\mathbf{m}} \in A$, telles que la famille $(\|a_{\mathbf{m}}\| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n})_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Muni de la norme définie par $\|f\|_r = \max_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n} (\|a_{\mathbf{m}}\| r_1^{m_1} \dots r_n^{m_n})$, c'est un espace de Banach.

Soient \mathcal{A} une algèbre k -affinoïde. Tout point x du spectre analytique $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} est associé à une semi-norme multiplicative bornée sur \mathcal{A} , que nous noterons $|\cdot|_x$. Nous noterons \mathfrak{p}_x l'idéal premier de \mathcal{A} défini par

$$\mathfrak{p}_x = \{f \in \mathcal{A} \mid |f|_x = 0\},$$

$k(\mathfrak{p}_x)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ et $\mathcal{H}(x)$ son complété pour la valeur absolue induite par $|\cdot|_x$.

Suivant [3], § 9.1, si K est une extension valuée complète de k , nous noterons $s(K/k)$ le degré de transcendance du corps \tilde{K} sur \tilde{k} et $t(K/k)$ la dimension du \mathbf{Q} -espace vectoriel $\sqrt{|K^*|}/\sqrt{|k^*|}$. Pour un point x d'un espace k -affinoïde X , nous noterons $s_k(x) = s(\mathcal{H}(x)/k)$ et $t_k(x) = t(\mathcal{H}(x)/k)$ (ou simplement $s(x)$ et $t(x)$ si aucune confusion ne peut en résulter). Dans ce contexte, l'inégalité d'Abhyankar s'écrit

$$s_k(x) + t_k(x) \leq \dim_{k,x}(X).$$

Pour des rappels sur la dimension des espaces analytiques, nous renvoyons à [8], § 1.

2. Quelques résultats d'algèbre graduée

Dans cette section, nous démontrons quelques résultats d'algèbre graduée, au sens de M. Temkin. Fixons un groupe commutatif G . Les anneaux gradués que nous considérons sont des anneaux commutatifs et unitaires A , munis de G -graduations $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ par des sous-groupes additifs vérifiant $A_g A_h \subset A_{gh}$. Nous demandons que les morphismes respectent la graduation. Les notions d'algèbre commutative habituelles s'étendent à ce cadre. Nous renvoyons à [19], §1 pour les détails mais rappelons tout de même quelques définitions pour la commodité du lecteur.

- Un élément homogène x de A est un élément appartenant à l'un des A_g . On note appelle g l'ordre de x et on le note $\rho(x)$.
- Un anneau gradué est dit intègre s'il est non nul et si le produit de deux éléments homogènes non nuls est non nul.
- Un corps gradué est un anneau gradué non nul dans lequel tous les éléments homogènes sont inversibles. Tout anneau gradué intègre possède un corps des fractions gradué obtenu en inversant les éléments homogènes.
- Un idéal homogène I de A est un idéal engendré par des éléments homogènes. Le quotient A/I est alors encore naturellement un anneau gradué.
- Si g est un élément de G , l'anneau $B = A[g^{-1}T]$ est l'anneau $A[T]$ muni de l'unique graduation telle que T soit homogène d'ordre g .
- Une A -algèbre graduée B est de type fini si elle est quotient d'une algèbre graduée $A[bg^{-1}\mathbf{T}] = A[g_1^{-1}T_1, \dots, g_n^{-1}T_n]$ par un idéal homogène.
- Un A -module B est de type fini s'il est quotient d'un module gradué A^n (avec la graduation donnée par $(A^n)_g = A_g^n$) par un sous-module homogène.

Signalons que certaines de ces notions peuvent se comporter de façon surprenante. Considérons, par exemple, un corps gradué k , un élément g de G n'appartenant pas à $\rho(k)$ et considérons l'anneau gradué $k[g^{-1}T]$. Ses seuls éléments homogènes sont de la forme aT^n , où a est un élément homogène de k

et n un entier. Ce sont donc les seuls éléments que l'on inverse pour obtenir le corps des fractions gradué $k(g^{-1}T) = k[g^{-1}T, gT^{-1}]$. Cet argument montre que le corps gradué $k(g^{-1}T)$ est de type fini sur k . En particulier, nous ne pouvons espérer dans ce cadre un Nullstellensatz complètement analogue au Nullstellensatz classique.

Ce formalisme des anneaux gradués nous sera utile par la suite pour réduire des algèbres k -affinoïdes qui ne sont pas nécessairement strictement k -affinoïdes. En général, si \mathcal{D} désigne une k -algèbre de Banach et $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}_+$ sa semi-norme spectrale, pour tout nombre réel $r > 0$, on définit $\tilde{\mathcal{D}}_r$ comme le quotient de l'anneau $\{x \in \mathcal{D} \mid \rho(x) \leq r\}$ par l'idéal $\{x \in \mathcal{D} \mid \rho(x) < r\}$. La réduction de \mathcal{D} est alors l'algèbre \mathbf{R}_+^* -graduée

$$\tilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_{r>0} \tilde{\mathcal{D}}_r.$$

Cette réduction appliquée à des algèbres k -affinoïdes quelconques possède des propriétés similaires à la réduction classique des algèbres strictement k -affinoïdes. Pour des résultats précis, nous renvoyons à [19], §3.

Notre but est ici de démontrer une version du Nullstellensatz pour les algèbres graduées. Nous suivons la preuve qu'en ont proposée E. Artin et J. Tate dans [1]. Nous en profitons pour donner quelques analogues de définitions et résultats classiques. Commençons par énoncer deux résultats concernant les algèbres graduées de polynômes en une variable. Nous en omettons les démonstrations, en tout point analogues aux démonstrations classiques.

PROPOSITION 2.1 (Division euclidienne). — *Soient k un corps gradué et g un élément de G . Soient A et B deux éléments homogènes de l'anneau gradué $k[g^{-1}T]$. Supposons que B n'est pas nul. Alors il existe un unique couple (Q, R) d'éléments homogènes de $k[g^{-1}T]$ qui vérifient les propriétés suivantes :*

- i) $A = BQ + R$;*
- ii) $\deg(R) < \deg(B)$.*

COROLLAIRE 2.2. — *Soit k un corps gradué. Pour tout élément g de G , l'anneau gradué $k[g^{-1}T]$ est principal : tout idéal homogène est engendré par un élément homogène.*

Comme dans le cas classique, on peut définir sur les corps gradués une notion d'élément algébrique.

DÉFINITION 2.3. — Soit \mathbf{g} un élément de G^n . Un polynôme $P(\mathbf{T})$ en n variables à coefficients dans une algèbre graduée A est dit **\mathbf{g} -homogène** s'il définit un élément homogène de $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$. Un polynôme est dit **G -homogène**, ou simplement **homogène**, s'il existe un élément \mathbf{g} de G^n pour lequel il est \mathbf{g} -homogène.

DÉFINITION 2.4. — Soit k un corps gradué. Un élément homogène x d'une k -algèbre graduée est dit **algébrique** sur k s'il est racine d'un polynôme G -homogène en une variable à coefficients dans k .

Le corps gradué k est dit **algébriquement clos** si tout polynôme G -homogène non constant en une variable à coefficients dans k y possède une racine.

REMARQUE 2.5. — Le corollaire 2.2 permet notamment de définir le polynôme minimal d'un élément algébrique sur k . C'est un polynôme G -homogène.

On vérifie facilement qu'un corps gradué est algébriquement clos si, et seulement si, toutes ses extensions finies sont triviales. Comme dans le cas classique, les réductions des corps complets algébriquement clos sont algébriquement closes, ainsi que l'exprime la proposition suivante.

PROPOSITION 2.6. — Soit k un corps valué complet algébriquement clos. Alors sa réduction \tilde{k} est un corps gradué algébriquement clos.

Démonstration. — Ici la graduation est celle qui correspond à la valeur absolue et le groupe G n'est autre que le groupe multiplicatif \mathbf{R}_+^* .

Soient $r > 0$ et $\tilde{P}(T) = \sum_{n=0}^d \alpha_n T^n$ un élément homogène non constant de $\tilde{k}[r^{-1}T]$. Notons s son ordre. Nous pouvons supposer que $\alpha_0 \neq 0$. Relevons $\tilde{P}(T)$ en un élément $P(T) = \sum_{n=0}^d a_n T^n$ de $k[T]$. Puisque $\tilde{P}(T)$ est homogène d'ordre s , pour tout n , nous avons $|a_n|r^n = s$.

Le polynôme $P(T)$ n'est pas constant et possède donc une racine $x \neq 0$ dans k . Il existe donc deux entiers $i, j \in \llbracket 0, d \rrbracket$, avec $i < j$, tels que l'on ait $|a_i x^i| = |a_j x^j| > 0$. On en déduit que $|x|^{j-i} = |a_i|/|a_j| = r^{j-i}$ et donc que $|x| = r$. Par conséquent, pour tout n , $|a_n x^n| = s$ et $\tilde{a}_n \tilde{x}^n$ est homogène de degré s . On en déduit que $\sum_{n=0}^d \tilde{a}_n \tilde{x}^n = 0$ dans \tilde{k} . \square

Nous disposons également d'une notion de module gradué noethérien et d'anneau noethérien qui se comporte comme dans le cadre classique. De nouveau, nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ces vérifications.

THÉORÈME 2.7 (Artin-Tate). — Soient $A \subset B \subset C$ des anneaux gradués. Supposons que A est noethérien, que C soit une A -algèbre de type fini et un B -module de type fini. Alors B est une A -algèbre de type fini.

Démonstration. — Soient c_1, \dots, c_n des éléments homogènes de C qui l'engendrent en tant que A -algèbre. Soient d_1, \dots, d_m des éléments homogènes de C qui l'engendrent en tant que B -module. Pour tout i , nous pouvons écrire

$$c_i = \sum_j \gamma_{i,j} d_j,$$

où les $\gamma_{i,j}$ sont des éléments homogènes de A et, pour tous i et j , nous pouvons écrire

$$d_i d_j = \sum_k \delta_{i,j,k} d_k,$$

où les $\delta_{i,j,k}$ sont des éléments homogènes de B . Soit B_0 la sous-algèbre graduée de B engendrée par les $\gamma_{i,j}$ et les $\delta_{i,j,k}$. Elle est de type fini sur A et donc noethérienne.

En utilisant le fait que tout élément homogène de C peut s'écrire comme un polynôme homogène en les c_i à coefficients dans A , on montre que C est une B_0 -algèbre graduée de type fini. On en déduit que B est une B_0 -algèbre graduée de type fini et donc une A -algèbre graduée de type fini. \square

Nous avons déjà remarqué plus haut que certains corps gradués transcendants pouvaient être de type fini. Nous apportons ici quelques précisions sur ce résultat. Si g désigne un élément de G^n , nous noterons $k(g^{-1}T)$ le corps des fractions gradué de l'anneau gradué $k[g^{-1}T]$.

DÉFINITION 2.8. — *Soit E une partie de G . Une famille \mathcal{F} d'éléments de G est dite **indépendante de E** si son image dans le \mathbf{Z} -module $G/\langle E \rangle$ est libre.*

*Si la partie E est réduite à l'élément 1, nous dirons simplement que la famille est **indépendante**.*

LEMME 2.9. — *Soient k un corps gradué, n un entier et g un élément de G^n . Le corps gradué $k(g^{-1}T)$ est une k -algèbre graduée de type fini si, et seulement si, la famille g est indépendante de $\rho(k)$.*

Démonstration. — Si $g = (g_1, \dots, g_n)$ est indépendante de $\rho(k)$, nous avons

$$k(g^{-1}T) = k[g_1^{-1}T_1, g_1S_1, \dots, g_n^{-1}T_n, g_nS_n]/(T_1S_1 - 1, \dots, T_nS_n - 1)$$

et cette algèbre graduée est donc de type fini sur k .

Pour prouver la réciproque, il suffit de démontrer que si g est un élément de G dépendant de $\rho(k)$, alors le corps gradué $k(g^{-1}T)$ n'est pas de type fini. Considérons donc un tel élément g de G et supposons, par l'absurde, qu'il existe des éléments homogènes $P_1(T), \dots, P_n(T)$ de $k[g^{-1}T]$ d'ordres respectifs h_1, \dots, h_n tels que

$$k(g^{-1}T) = k[g^{-1}T, h_1P_1(T)^{-1}, \dots, h_nP_n(T)^{-1}].$$

Puisque g est dépendant de $\rho(k)$, il existe un entier non nul d et un élément non nul α de k tels que $\prod_{i=1}^n h_i^d = \rho(\alpha)$. Le polynôme $Q(T) = \prod_{i=1}^n P_i(T)^d - \alpha$ est donc un élément homogène de $k[g^{-1}\mathbf{T}]$. Si son inverse appartenait à l'algèbre graduée $k[g^{-1}\mathbf{T}, h_1P_1(T)^{-1}, \dots, h_nP_n(T)^{-1}]$, le polynôme Q serait multiple de l'un (au moins) des polynômes P_i . Par division euclidienne, ceci est impossible. \square

Signalons que les éléments algébriques sur les corps du type $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$, où \mathbf{g} est une famille indépendante de $\rho(k)$, sont faciles à décrire.

LEMME 2.10. — *Soient k un corps gradué et \mathbf{g} une famille d'éléments de G indépendante de $\rho(k)$. Tout élément algébrique sur $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ est le produit d'un élément algébrique sur k par une racine d'un polynôme de Kummer de la forme $X^n - \mathbf{T}^m$, avec $n \geq 1$ et $m \in \mathbf{Z}^n$.*

En particulier, si le corps gradué k est algébriquement clos, toute extension finie $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ se plonge dans un corps gradué de la forme $k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$, où \mathbf{h} est une famille finie indépendante de $\rho(k)$.

Démonstration. — Soit x un élément algébrique sur $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$. Considérons son polynôme minimal unitaire $P(X)$, qui est un polynôme homogène. Son degré d est un entier non nul et son coefficient constant est un élément homogène non nul de $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$, donc de la forme $\alpha\mathbf{T}^m$ avec $\alpha \in k^*$ et $m \in \mathbf{Z}^n$. Soit y une racine du polynôme de Kummer $X^d - \mathbf{T}^m$. En divisant le polynôme $P(X)$ par y^d , on montre que x/y est racine d'un polynôme homogène unitaire dont le coefficient constant est égal à α . En utilisant l'homogénéité du polynôme et le fait que \mathbf{g} est indépendante de $\rho(k)$, on montre que tous ses coefficients appartiennent à k . Autrement dit, x/y est algébrique sur k . \square

Démontrons maintenant l'analogie du Nullstellensatz pour les algèbres graduées.

COROLLAIRE 2.11 (Nullstellensatz gradué). — *Soit k un corps gradué. Soit K une k -algèbre graduée de type fini qui est un corps. Alors il existe une famille finie \mathbf{T} d'éléments homogènes de K dont la famille des ordres \mathbf{g} est indépendante de $\rho(k)$ telle que K soit une extension finie de $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$.*

En particulier, si le corps gradué k est algébriquement clos, K se plonge dans un corps de la forme $k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$, où \mathbf{h} est une famille finie indépendante de $\rho(k)$.

Démonstration. — Choisissons une famille maximale \mathbf{T} d'éléments homogènes de k algébriquement indépendants sur k . Notons \mathbf{g} la famille des ordres. Le corps K est une extension finie de $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$. D'après le théorème d'Artin-Tate appliqué aux k -algèbres graduées $k \subset k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) \subset K$, le corps gradué $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ est de type fini, d'où l'assertion, compte tenu du lemme précédent. \square

REMARQUE 2.12. — A. Ducros propose au théorème 2.7 de [8] une version du Nullstellensatz pour les algèbres k -affinoïdes, où il donne une description explicite de celles qui sont des corps. La réduction d’une telle algèbre est une \tilde{k} -algèbre graduée de type fini et les corps gradués qui apparaissent dans le Nullstellensatz gradué sont exactement les réductions des corps qu’il appelle de type I. Si les réductions des autres, ceux de type II, sont absents de notre énoncé, c’est parce qu’ils sont des corps, mais non des corps valués (sauf lorsqu’ils sont aussi de type I) et que leurs réductions ne sont pas des corps gradués, ni même d’ailleurs des anneaux gradués intègres.

Nous allons maintenant démontrer une propriété géométrique qui nous sera utile dans la suite du texte : une variété graduée intègre définie sur un corps algébriquement clos reste intègre après toute extension du corps de base. Commençons par un cas simple.

LEMME 2.13. — *Soient k un corps gradué et A une k -algèbre graduée intègre. Soit \mathbf{g} une famille d’éléments de G indépendante de $\rho(k)$. Alors l’algèbre graduée $A \otimes_k k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T})$ est intègre.*

Démonstration. — En procédant par récurrence, il suffit de montrer le résultat pour une famille \mathbf{g} réduite à un seul élément g . Dans ce cas, nous avons $k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) \simeq k[g^{-1}\mathbf{T}, gS]/(ST - 1)$ et donc

$$A \otimes_k k(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}) \simeq A[g^{-1}\mathbf{T}, gS]/(ST - 1) \simeq A[g^{-1}\mathbf{T}, gT^{-1}].$$

Un raisonnement sur les coefficients dominants permet de montrer que cette dernière algèbre graduée est intègre. □

En utilisant le Nullstellensatz gradué, nous allons en déduire le cas général.

THÉORÈME 2.14. — *Soient k un corps gradué algébriquement clos et A une k -algèbre graduée de type fini intègre. Alors, pour toute extension graduée K de k , l’algèbre graduée $A \otimes_k K$ est intègre.*

Démonstration. — Écrivons l’algèbre A comme quotient d’un anneau de polynômes $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}] = k[g_1^{-1}T_1, \dots, g_r^{-1}T_r]$ par un idéal gradué I . Cet idéal est engendré par des éléments homogènes a_1, \dots, a_n de $k[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]$.

Soit K une extension graduée de k . Nous pouvons supposer qu’elle est algébriquement close. Supposons, par l’absurde, que l’algèbre graduée $A \otimes_k K = K[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}]/(a_1, \dots, a_n)$ n’est pas intègre. Il existe alors des polynômes \mathbf{g} -homogènes P et Q n’appartenant pas à l’idéal (a_1, \dots, a_n) et des polynômes \mathbf{g} -homogènes b_1, \dots, b_n tels que l’on ait

$$PQ = \sum_{i=1}^n a_i b_i \text{ dans } K[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}].$$

Il existe une extension graduée L de K et un élément homogène \mathbf{x} de L^n tels que $P(\mathbf{x}) \neq 0$ et, pour tout i , $a_i(\mathbf{x}) = 0$. Il existe également un élément homogène \mathbf{y} , que nous pouvons supposer appartenir au même L^n , tel que $Q(\mathbf{y}) \neq 0$ et, pour tout i , $a_i(\mathbf{y}) = 0$.

Soit B la sous-algèbre graduée de $K(\mathbf{g}'^{-1}\mathbf{T}')$ engendrée sur k par les coordonnées de \mathbf{x} et de \mathbf{y} , par $1/P(\mathbf{x})$, $1/P(\mathbf{y})$, ainsi que les coefficients des polynômes P, Q, b_1, \dots, b_n . Par le Nullstellensatz gradué, il existe une famille finie \mathbf{h} d'éléments de G , indépendante de $\rho(k)$, et un morphisme $\varphi : B \rightarrow k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$ qui induit l'identité sur k . Par construction, nous avons $\varphi(P)(\mathbf{x}) \neq 0$, $\varphi(Q)(\mathbf{y}) \neq 0$, pour tout i , $a_i(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{y}) = 0$, ainsi que l'égalité

$$\varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi(b_i) \text{ dans } k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})[\mathbf{g}^{-1}\mathbf{T}'].$$

On en déduit que l'anneau gradué $A \otimes_k k(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{S})$ n'est pas intègre, ce qui contredit le lemme qui précède. □

3. Points universels

Dans cette section, nous nous intéressons aux morphismes d'extension des scalaires entre espaces analytiques, du type $X_K \rightarrow X_k$. Plus précisément, nous cherchons à comprendre sous quelles conditions les points de X_k peuvent se relever canoniquement à X_K .

Commençons par signaler qu'en ce qui concerne les normes sur les produits tensoriels de modules normés sur un anneau normé, nous suivons les conventions habituelles du domaine (cf. [6], §2.1.7 ou [3], fin de §1.1) : si \mathcal{A} désigne un anneau normé et M et N deux \mathcal{A} -modules semi-normés, nous définissons une semi-norme sur le produit tensoriel $M \otimes_{\mathcal{A}} N$ en posant, pour f dans $M \otimes_{\mathcal{A}} N$,

$$\|f\| = \inf(\max_i(\|m_i\| \|n_i\|)),$$

la borne inférieure portant sur l'ensemble des représentations de f sous la forme $\sum_i m_i \otimes n_i$, avec $m_i \in M$ et $n_i \in N$. Nous définissons ensuite une \mathcal{A} -algèbre de Banach $M \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} N$ en complétant $M \otimes_{\mathcal{A}} N$ par rapport à cette semi-norme.

Démontrons, à présent, un lemme technique, qui nous sera utile à plusieurs reprises par la suite.

LEMME 3.1. — *Soit $A \rightarrow B$ un morphisme isométrique de k -espaces vectoriels normés. Soit C un k -espace vectoriel normé. Alors le morphisme canonique $A \otimes_k C \rightarrow B \otimes_k C$ est encore une isométrie.*

En particulier, le morphisme canonique $A \hat{\otimes}_k C \rightarrow B \hat{\otimes}_k C$ est une isométrie.

Démonstration. — Si r est un nombre réel n'appartenant pas à $\sqrt{|k^*|}$, pour tout k -espace vectoriel normé V , l'injection canonique $V \rightarrow V \otimes_k k_r$ est isométrique. Quitte à étendre les scalaires à k_r , avec $r \notin \sqrt{|k^*|}$, nous pouvons donc supposer que la valuation du corps k n'est pas triviale. Quitte à remplacer A par son image dans B , nous pouvons également supposer que $A \subset B$.

Nous noterons $\|\cdot\|_A$ et $\|\cdot\|_B$ les normes tensorielles sur $A \otimes_k C$ et $B \otimes_k C$. Soit f un élément de $A \otimes_k C$. Nous souhaitons montrer que $\|f\|_A = \|f\|_B$ et, pour ce faire, il suffit de montrer que $\|f\|_A \leq \|f\|_B$, l'autre inégalité étant immédiate.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des éléments b_1, \dots, b_d de B et c_1, \dots, c_d de C tels que

$$f = \sum_{n=1}^d b_n \otimes c_n \text{ dans } B \otimes C$$

et

$$\|f\|_B \leq \max_{1 \leq n \leq d} (\|b_n\| \|c_n\|) \leq \|f\|_B + \varepsilon.$$

Soit A_0 un sous-espace vectoriel de dimension finie de A tel que $f \in A_0 \otimes_k C$. Soit B_0 un sous-espace vectoriel de dimension finie de B contenant A_0 et les b_i . Soit $\alpha > 1$. D'après [6], proposition 2.6.2/3, il existe deux entiers $s \geq r$ et une famille $(\beta_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments de B_0 tels que $(\beta_1, \dots, \beta_s)$ soit une base de A_0 et $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ soit une base α -cartésienne de B_0 . Rappelons que cette dernière condition signifie que pour tout élément $b = \sum_{i=1}^r \lambda_i \beta_i$ de B_0 , nous avons

$$\max_{1 \leq i \leq r} (|\lambda_i| \|\beta_i\|) \leq \alpha \|b\|.$$

Écrivons chacun des b_n sous la forme $b_n = \sum_{i=1}^r \lambda_{n,i} \beta_i$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq r} (\|b_n\| \|c_n\|) &\geq \alpha^{-1} \max_{1 \leq n \leq d, 1 \leq i \leq r} (|\lambda_{n,i}| \|\beta_i\| \|c_n\|) \\ &\geq \alpha^{-1} \max_{1 \leq n \leq d, 1 \leq i \leq s} (|\lambda_{n,i}| \|\beta_i\| \|c_n\|) \\ &\geq \alpha^{-1} \|f\|_A \end{aligned}$$

car $f = \sum_{n=1}^d (\sum_{i=1}^s \lambda_{n,i} \beta_i) \otimes c_n$ dans $A \otimes_k C$. Par conséquent, nous avons

$$\|f\|_A \leq \alpha (\|f\|_B + \varepsilon).$$

Utilisant le fait que cette inégalité vaut pour tout $\alpha > 1$, puis pour tout $\varepsilon > 0$, nous obtenons le résultat attendu. □

Précisons maintenant la notion de relèvement canonique évoquée plus haut.

DÉFINITION 3.2. — Une k -algèbre de Banach commutative et unitaire \mathcal{A} est dite **universellement multiplicatif** sur k si, pour toute extension valuée complète K de k , la norme de l'algèbre $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K$ est multiplicative.

Soient \mathcal{A} une k -algèbre de Banach commutative et unitaire. On dit qu'un point x de $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est **universel** sur k si son corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ est universellement multiplicatif sur k . Nous noterons X_u l'ensemble des points universels de X sur k .

Soient \mathcal{A} une k -algèbre de Banach commutative et unitaire. Soient x un point de $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et K une extension valuée complète de k . Si le point x est universel ou si le corps K est universel, nous disposons d'un point canonique de X_K au-dessus de x : celui qui correspond à la norme de l'algèbre $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K$. Nous le noterons $\sigma_{K/k}(x)$, ou simplement $\sigma_K(x)$ si aucune confusion n'en résulte.

Remarquons que pour $x \in X$ et $k \subset L \subset K$, lorsque ces quantités sont définies, nous avons $\sigma_{K/k}(x) = \sigma_{K/L}(\sigma_{L/k}(x))$.

REMARQUE 3.3. — Notre notion de point universel n'est autre que celle de « peaked point » définie par V. Berkovich dans [3], §5.2 (qui note donc X_p l'ensemble que nous notons X_u). Si la notion de pic rend bien compte du comportement du point dans sa fibre après extension des scalaires, elle nous semble trompeuse lorsque l'on s'intéresse à l'ensemble de ces points. Nous montrerons par exemple à la fin de cette section que, sur un corps algébriquement clos, tout point est un pic, ce qui est difficilement conciliable avec l'intuition.

Nous généralisons ici le lemme 5.2.6 et le corollaire 5.2.7 de [3]. Rappelons tout d'abord une définition.

DÉFINITION 3.4. — Un k -espace de Banach est dit **de type dénombrable** sur k s'il contient un sous- k -espace vectoriel dense de dimension dénombrable.

Nous utiliserons surtout cette définition pour des extensions valuées complètes du corps k . C'est donc dans ce sens qu'il faudra entendre extension de type dénombrable du corps k .

REMARQUE 3.5. — On pourrait définir de façon analogue la notion de k -espace de Banach de type fini, mais celle-ci coïncide avec la notion de k -espace de Banach de dimension finie, d'après [6], proposition 2.3.3/4.

LEMME 3.6. — Soient \mathcal{A} une k -algèbre de Banach commutative et unitaire et B un k -espace de Banach. Soit φ un élément de $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k B$. Pour tout point x de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, notons $\|\cdot\|_{x,B}$ la norme tensorielle sur $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k B$. Alors la fonction $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \|\varphi\|_{x,B}$ est continue.

Démonstration. — Par définition, φ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A} \otimes_k B$. Dans chacun de ces éléments n'intervient qu'un nombre fini d'éléments de B . Il existe donc un sous- k -espace de Banach B_0 de B , de type dénombrable sur k , tel que $\varphi \in \mathcal{A} \hat{\otimes}_k B_0$. D'après le lemme 5.2.6 de [3], la fonction $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto \|\varphi\|_{x, B_0}$ est continue. Mais, par le lemme 3.1, pour tout point x de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, nous avons $\|\varphi\|_{x, B_0} = \|\varphi\|_{x, B}$. \square

COROLLAIRE 3.7. — *Soient \mathcal{A} une k -algèbre de Banach commutative et unitaire et K une extension valuée complète (resp. universelle) du corps k . Notons $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. L'application $\sigma_K : X_u \rightarrow X \hat{\otimes}_k K$ (resp. $\sigma_K : X \rightarrow X \hat{\otimes}_k K$) est continue.*

REMARQUE 3.8. — Une autre possibilité pour définir l'universalité, peut-être plus naturelle, consisterait à demander qu'un point soit universel non pas lorsque sa norme est universellement multiplicative, mais lorsque son rayon spectral l'est. Nous ne sommes malheureusement pas parvenu à obtenir un analogue du corollaire 3.7 dans ce cadre.

Il faut donc prendre garde au fait qu'il ne suffit pas qu'un point se relève de façon canonique dans toute extension des scalaires pour qu'il soit universel. Considérons, par exemple, un point x dont le corps résiduel $\mathcal{H}(x)$ est une extension purement inséparable stricte du corps k . Bien qu'il se relève canoniquement dans toute extension des scalaires, il n'est pas universel : l'anneau $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ n'étant pas même réduit, il ne saurait être muni d'une norme multiplicative.

Nous allons maintenant chercher des critères permettant d'assurer qu'un point est universel. Dans le résultat qui suit, nous étendons, dans certains cas, le résultat de la proposition 5.2.5 de [3]. Signalons que les réductions dont il est question ici sont les réductions graduées au sens de M. Temkin (cf. section 2).

PROPOSITION 3.9. — *Soit \mathcal{A} une algèbre k -affinoïde. Supposons que le corps k est stable et que $\rho(\mathcal{A}) \cap \sqrt{|k^*|} \subset |k^*|$. Supposons que la réduction graduée \tilde{X} de l'espace k -affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est géométriquement intègre (au sens où pour toute extension graduée \tilde{K} de \tilde{k} , l'anneau gradué $\tilde{\mathcal{A}} \hat{\otimes}_{\tilde{k}} \tilde{K}$ est intègre). Alors le bord de Shilov de X est un singleton et son unique point est universel.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que l'algèbre \mathcal{A} est réduite. Puisque l'algèbre graduée $\tilde{\mathcal{A}}$ est intègre, d'après [19], proposition 3.3, le bord de Shilov de X est réduit à un point, que nous noterons γ . Soit K une extension valuée complète du corps k . Nous souhaitons montrer que la norme tensorielle sur l'algèbre $\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k K$ est multiplicative.

Les hypothèses assurent qu'il existe un polyrayon k -libre \mathfrak{r} tel que l'algèbre $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_{\mathfrak{r}}$ soit strictement $k_{\mathfrak{r}}$ -affinoïde et que $\rho(\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_{\mathfrak{r}}) = |k_{\mathfrak{r}}|$.

Puisque le corps k est stable, le corps k_r l'est aussi (cf. [20], corollary 6.3.6 ou [10], théorème 3.3.16). L'algèbre $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_r$ est réduite et le théorème 6.4.3/1 de [6] assure qu'elle est distinguée. Notons γ_r l'unique point du bord de Shilov de $X \hat{\otimes}_k k_r$. En utilisant le fait que l'élément r de \mathbf{R}_+^* n'appartient pas à $\sqrt{|\mathcal{H}(\gamma)^*|} = \sqrt{\rho(\mathcal{A})^*}$, on montre que le morphisme naturel $\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k k_r \rightarrow \mathcal{H}(\gamma_r)$ est un isomorphisme isométrique.

D'après la proposition 5.2.5 de [3] (noter la correction apportée à sa preuve, ou plutôt à celle du lemme 5.2.2 sur lequel elle repose, par le lemme 1.8 de [9]), le point γ_r est universel et la norme tensorielle sur l'algèbre $\mathcal{H}(\gamma_r) \hat{\otimes}_{k_r} K_r$ est donc multiplicative. Or $\mathcal{H}(\gamma_r) \hat{\otimes}_{k_r} K_r = (\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k K) \hat{\otimes}_K K_r$ et le lemme précédent utilisé avec $K \subset K_r$ permet de conclure. \square

REMARQUE 3.10. — Le recours à un changement de base dans la preuve précédente peut sembler artificiel. Une méthode plus naturelle consisterait à utiliser une notion plus générale d'algèbre distinguée, autorisant des algèbres de Tate $k\{r^{-1}T\}$ avec des rayons arbitraires, et à prouver sur celle-ci les résultats classiques de [5]. Signalons que des problèmes liés à cette question apparaissent déjà dans le cas strictement affinoïde puisque, pour $r \in \sqrt{|k^*|} \setminus |k^*|$, l'algèbre $k\{r^{-1}T\}$ n'est pas distinguée, mais le devient après extension des scalaires au corps k_r , le complété du corps des fractions de $k\{r^{-1}T\}$.

COROLLAIRE 3.11. — *Soit X un espace k -affinoïde. Supposons que le corps k est algébriquement clos. Alors tout point du bord de Shilov de X est universel.*

Démonstration. — Soit γ un point du bord de Shilov de $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. D'après [19], proposition 3.3, sa réduction graduée $\tilde{\gamma}$ est un point générique de \tilde{X} . Choisissons un élément \tilde{f} de $\tilde{\mathcal{A}}$ qui s'annule en tous les points génériques de la réduction graduée \tilde{X} à l'exception de $\tilde{\gamma}$ et relevons-le en un élément f de \mathcal{A} . Posons $r = \rho(f)$. D'après [19], proposition 3.1, la réduction graduée de l'algèbre affinoïde $\mathcal{A}\{r^{-1}f\}$ est égale à $\tilde{A}_{\tilde{f}}$ et le bord de Shilov de son spectre Y est donc réduit au point γ .

Nous pouvons maintenant conclure en appliquant le résultat de la proposition 3.9 à l'espace Y . Les hypothèses sur le corps k sont satisfaites : étant algébriquement clos, il est stable et son groupe des valeurs est divisible. Celle sur Y l'est également puisque sa réduction graduée $\tilde{Y} = \tilde{X}_{\tilde{f}}$ est intègre et donc géométriquement intègre, d'après le théorème 2.14. \square

Il nous sera également possible d'obtenir des points universels comme limites de familles de points universels.

PROPOSITION 3.12. — *Soit \mathcal{A} une k -algèbre de Banach commutative et unitaire. L'ensemble des points universels de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est fermé.*

Démonstration. — Soit γ un point de $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Supposons qu'il existe un ensemble ordonné filtrant $(I, <)$ et une suite généralisée $(\gamma_i)_{i \in I}$ de points universels de X qui converge vers γ .

Soit K une extension valuée complète du corps k . Nous souhaitons montrer que la norme tensorielle sur $\mathcal{H}(\gamma) \hat{\otimes}_k K$ est multiplicative. D'après le lemme 3.1, il suffit de montrer que la norme tensorielle sur $k(\mathfrak{p}_\gamma) \otimes_k K$, est multiplicative. Nous noterons $\|\cdot\|_{\gamma, K}$ cette norme. Nous définissons de même une norme $\|\cdot\|_{\gamma_i, K}$, pour tout i .

D'après le lemme 3.6, pour tout élément φ de $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K$, la suite généralisée $\|\varphi\|_{\gamma_i, K}$ tend vers $\|\varphi\|_{\gamma, K}$. Puisque les normes $\|\cdot\|_{\gamma_i, K}$ sont multiplicatives, la norme $\|\cdot\|_{\gamma, K}$ est multiplicative sur $\mathcal{A} \hat{\otimes}_k K$.

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $k(\mathfrak{p}_\gamma) \otimes_k K$. Il existe des éléments g_1 et g_2 de $\mathcal{A} \otimes_k K$ et des éléments u_1 et u_2 de \mathcal{A} ne s'annulant pas en γ tels que

$$f_1 = u_1^{-1}(\gamma)g_1 \text{ et } f_2 = u_2^{-1}(\gamma)g_2 \text{ dans } k(\mathfrak{p}_\gamma) \otimes_k K.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|f_1 f_2\|_{\gamma, K} &= \|u_1^{-1}(\gamma)u_2^{-1}(\gamma)g_1 g_2\|_{\gamma, K} \\ &= |u_1^{-1}(\gamma)u_2^{-1}(\gamma)| \|g_1 g_2\|_{\gamma, K} \\ &= |u_1^{-1}(\gamma)| |u_2^{-1}(\gamma)| \|g_1\|_{\gamma, K} \|g_2\|_{\gamma, K} \\ &= \|f_1\|_{\gamma, K} \|f_2\|_{\gamma, K}. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit. □

REMARQUE 3.13. — Les notions et résultats de cette section s'étendent sans peine du cas des spectres de k -algèbres de Banach commutatives et unitaires à celui des espaces k -analytiques. Ainsi, un point x de X sera-t-il dit universel sur k si son corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ l'est. Quant au corollaire 3.7 et à la proposition 3.12, ils se généralisent aisément, car les résultats pour l'espace X découlent des mêmes résultats pour ses domaines affinoïdes.

COROLLAIRE 3.14. — *Tout point d'un espace analytique sur un corps algébriquement clos est universel.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que l'ensemble des points universels est dense. Cela découle du corollaire 3.11 appliqué aux domaines affinoïdes de l'espace considéré. □

REMARQUE 3.15. — Si l'on ne s'intéresse qu'aux espaces analytiques sur un corps de valuation non triviale, il est possible de démontrer ce résultat en utilisant uniquement les réductions classiques. En effet, on se ramène d'abord au cas des espaces affinoïdes, puis à celui des disques (car les espaces affinoïdes en sont des fermés de Zariski) et à celui des espaces affines. Dans ces derniers,

tout point possède un système fondamental de voisinages formé de domaines strictement k -affinoïdes, ce qui permet de conclure.

COROLLAIRE 3.16. — *Soient X un espace k -analytique et x un point de X . Notons F le complété d'une clôture algébrique de k . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) le point x est universel;*
- ii) la norme tensorielle sur $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k F$ est multiplicative.*

Démonstration. — L'implication $i) \implies ii)$ est immédiate.

Montrons que $ii) \implies i)$ et, pour cela, supposons que la norme tensorielle sur $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k F$ est multiplicative. Dans ce cas, la fibre du morphisme $X_F \rightarrow X_k$ au-dessus de x possède un unique point x_F dans son bord de Shilov et le morphisme d'évaluation $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k F \rightarrow \mathcal{H}(x_F)$ est une isométrie.

Soit K une extension valuée complète de k . Nous voulons montrer que la norme tensorielle sur $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K$ est multiplicative. D'après le lemme 3.1, quitte à remplacer le corps K par le complété de sa clôture algébrique, nous pouvons supposer qu'il est algébriquement clos. Nous pouvons donc supposer qu'il contient le corps F . D'après le corollaire qui précède, le point x_F est universel et la norme tensorielle sur $\mathcal{H}(x_F) \hat{\otimes}_F K$ est multiplicative. En utilisant de nouveau le lemme 3.1, on en déduit que la norme tensorielle sur $(\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k F) \hat{\otimes}_F K = \mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k K$ est multiplicative. \square

4. Points des disques

Dans cette section, nous nous consacrons plus spécifiquement aux points des disques. Nous montrons qu'ils peuvent être définis sur des corps de type dénombrable, ce qui nous permettra d'effectuer l'opération de « descente » décrite dans l'introduction.

Nous commencerons par étudier une famille particulière de points.

DÉFINITION 4.1. — *Soit X un espace k -analytique. Un point x de X sera appelé **point d'Abhyankar** s'il satisfait l'égalité $s_k(x) + t_k(x) = \dim_{k,x}(X)$.*

REMARQUE 4.2. — La description explicite des points de la droite affine $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ donnée par V. Berkovich montre que les points d'Abhyankar de $\mathbf{D}_k^1(r)$ sont exactement ceux de type 2 ou 3.

REMARQUE 4.3. — L'inégalité d'Abhyankar rappelée à la fin de la section 1 montre qu'un point d'Abhyankar x d'un espace analytique irréductible ne peut appartenir à aucun fermé analytique.

Le résultat qui suit permet d'exhiber des points d'Abhyankar.

LEMME 4.4. — Soient X un espace strictement k -affinoïde et x un point de son bord de Shilov. Alors $s_k(x) = \dim_{k,x}(X)$.

Démonstration. — Posons $d = \dim_{k,x}(X)$. Nous pouvons supposer que X est irréductible de dimension d . Notons \mathcal{A} l'algèbre de l'espace X . Soit f un élément de \mathcal{A}° dont la réduction \tilde{f} est nulle sur toutes les composantes irréductibles de \tilde{X} ne contenant pas \tilde{x} , mais pas en \tilde{x} . Considérons le domaine affinoïde V de X défini par $\{|f| = 1\}$. D'après [6], proposition 7.2.6/3 (et [19], proposition 3.1 dans le cas de valuation triviale), sa réduction est isomorphe à $D(\tilde{f})$. Remarquons que V et sa réduction sont de dimension d .

Le point x est l'unique antécédent par l'application de réduction $V \rightarrow \tilde{V}$ du point générique \tilde{x} de $\tilde{V} = D(\tilde{f})$. Par conséquent, nous avons une injection $\tilde{k}(\tilde{x}) \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$. On en déduit que $s_k(x)$ est supérieur à d , et donc égal à d , par l'inégalité d'Abhyankar. □

COROLLAIRE 4.5. — Supposons que la valuation de k n'est pas triviale. Soit X un espace strictement k -affinoïde équidimensionnel de dimension d . Alors, l'ensemble des points x tels que $s_k(x) = d$ est dense dans X .

Pour étendre ces résultats au cas général, nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 4.6. — Soit X un espace k -affinoïde. Soit r un nombre réel strictement positif n'appartenant pas à $\sqrt{|k^*|}$. Considérons l'espace k_r -affinoïde $X_r = X \hat{\otimes}_k k_r$ et notons π sa projection sur X . Le bord de Shilov de la fibre $\pi^{-1}(x)$ contient un unique point, que nous noterons x_r . Nous avons

- i) $s_{k_r}(x_r) = s_k(x) + 1$ et $t_{k_r}(x_r) = t_k(x) - 1$ si $r \in \sqrt{|\mathcal{H}(x)^*|}$;
- ii) $s_{k_r}(x_r) = s_k(x)$ et $t_{k_r}(x_r) = t_k(x)$ si $r \notin \sqrt{|\mathcal{H}(x)^*|}$.

Démonstration. — Notons \mathcal{A} l'algèbre de X . On vérifie que le point x_r est associé à la semi-norme

$$\sum_{m \in \mathbf{Z}} a_m T^m \in \mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_r \mapsto \max_{m \in \mathbf{Z}} (|a_m(x)| r^m).$$

Les résultats énoncés s'en déduisent. □

PROPOSITION 4.7. — Tout point du bord de Shilov d'un espace affinoïde est un point d'Abhyankar.

Démonstration. — Soit X un espace k -affinoïde et x un point de son bord de Shilov. Puisque x appartient à une seule composante irréductible de X , quitte à remplacer X par cette composante, nous pouvons supposer que X est irréductible. Soit \mathfrak{s} un polyrayon k -libre tel que $X \hat{\otimes}_k k_{\mathfrak{s}}$ soit strictement $k_{\mathfrak{s}}$ -affinoïde. Par une récurrence utilisant le lemme qui précède, on associe au point x de X un point $x_{\mathfrak{s}}$ appartenant au bord de Shilov de $X \hat{\otimes}_k k_{\mathfrak{s}}$ et vérifiant

$s_{k_s}(x_s) + t_{k_s}(x_s) = s_k(x) + t_k(x)$. Le résultat découle alors du lemme 4.4 et de l'invariance de la dimension par extension des scalaires. \square

COROLLAIRE 4.8. — *L'ensemble des points d'Abhyankar d'un espace analytique est dense.*

Dans la suite de cette section, nous montrerons que la réciproque de la proposition est vraie, dans certains cas. Nous prouverons en fait un résultat plus précis en imposant des restrictions sur les domaines affinoïdes qui interviennent. Commençons par des lemmes techniques. Le premier se démontre en utilisant les mêmes méthodes que dans la preuve du lemme 4.4.

LEMME 4.9. — *Soit X un espace strictement k -affinoïde équidimensionnel. Alors sa réduction \tilde{X} est équidimensionnelle et de même dimension.*

LEMME 4.10. — *Soit Y un espace k -affinoïde équidimensionnel d'algèbre \mathcal{B} . Soit $P(T) \in \mathcal{B}[T]$ un polynôme unitaire non constant et soit $r > 0$. Considérons le domaine affinoïde X de $\mathbf{A}_Y^{1,\text{an}}$ défini par $\{|P(T)| \leq r\}$. Notons Γ_Y le bord de Shilov de Y . Pour tout point γ de Γ_Y , notons Γ_γ le bord de Shilov de la fibre X_γ . Alors le bord de Shilov de X est*

$$\Gamma_X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_Y} \Gamma_\gamma.$$

Démonstration. — Quitte à étendre les scalaires à un corps k_r , où r désigne un polyrayon k -libre bien choisi, nous pouvons supposer que les espaces X et Y sont strictement k -affinoïdes et que la valuation du corps k n'est pas triviale. Cette opération préserve le caractère équidimensionnel de Y , comme on le voit en se ramenant au cas irréductible et réduit et en constatant que l'algèbre $\mathcal{B} \hat{\otimes}_k k_r$ est alors intègre.

Notons Z le domaine strictement affinoïde de $\mathbf{A}_Y^{1,\text{an}}$ défini par $\{|T| \leq r\}$. Une description explicite de l'algèbre de Z montre que son bord de Shilov Γ_Z n'est autre que $\Gamma_Z = \{z_\gamma, \gamma \in \Gamma_Y\}$, où, pour tout $\gamma \in \Gamma_Y$, z_γ désigne l'unique point du bord de Shilov de la fibre Z_γ . Considérons le morphisme fini $\varphi : X \rightarrow Z$ défini par le polynôme P . D'après [6], 6.3.5/1, le morphisme induit $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Z}$ est fini.

Puisque X est strictement k -affinoïde, d'après [3], proposition 2.4.4, un point x appartient à son bord de Shilov Γ_X si, et seulement si, sa réduction \tilde{x} est un point générique de \tilde{X} , donc, d'après le lemme qui précède, si, et seulement si, le degré de transcendance sur \tilde{k} du corps $\tilde{k}(\tilde{x})$ est égal à $\dim(X)$. Le même résultat vaut pour Z . En utilisant le fait qu'un morphisme fini préserve le degré de transcendance, on en déduit que $\Gamma_X = \varphi^{-1}(\Gamma_Z)$, puis le résultat attendu. \square

Par les mêmes méthodes, on peut démontrer un résultat décrivant le bord de Shilov d'un fermé de Zariski d'une droite relative.

LEMME 4.11. — *Soit Y un espace k -affinoïde équidimensionnel d'algèbre \mathcal{B} . Soit $P(T)$ un polynôme unitaire non constant à coefficients dans \mathcal{B} . Considérons le fermé de Zariski X de $\mathbf{A}_Y^{1,\text{an}}$ défini par $\{P(T) = 0\}$. Notons Γ_Y le bord de Shilov de Y . Alors le bord de Shilov de X est*

$$\Gamma_X = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_Y} X_\gamma.$$

LEMME 4.12. — *Soient $r > 0$ et x un point de type 2 ou 3 de $\mathbf{D}^1(r)$. Il existe un polynôme $P(T)$ à coefficients dans k tel que le domaine affinoïde défini par $\{|P(T)| \leq |P(T)(x)|\}$ ait un bord de Shilov réduit au point x .*

Démonstration. — Si le point x est l'unique point η_r du bord de Shilov du disque, le résultat est immédiat. Sinon, considérons une composante connexe de $\mathbf{D}^1(r) \setminus \{x\}$ ne contenant pas η_r . C'est un ouvert de $\mathbf{D}^1(r)$ qui contient un point rigide y défini par l'annulation d'un polynôme irréductible $P(T)$ à coefficients dans k . Remarquons que le point x se trouve sur l'unique chemin joignant les points y et η_r .

Soit $Q(T)$ un polynôme irréductible à coefficients dans k . Rappelons que nous savons comment se comporte la valeur absolue $|Q(T)(z)|$ lorsque le point z varie sur la droite $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$. Notons q l'unique point de la droite en lequel $Q(T)$ s'annule. Alors la valeur absolue $|Q(T)(z)|$ croît strictement lorsque le point z parcourt le segment $[q, \infty]$ et est localement constante sur son complémentaire. En utilisant ce fait ainsi que la densité des polynômes dans l'algèbre du disque $\mathbf{D}^1(r)$, on vérifie que x est l'unique point du bord de Shilov du domaine affinoïde $\{|P(T)| \leq |P(T)(x)|\}$. □

PROPOSITION 4.13. — *Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$. Soit x un point d'Abhyankar de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$. Alors il existe un domaine de Weierstraß V de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ dont le bord de Shilov est réduit au point x . En outre, le domaine affinoïde V peut être défini sur un sous-corps de k de type fini sur k_p .*

Démonstration. — Démontrons ce résultat par récurrence sur p . Si $p = 0$, c'est évident.

Supposons le résultat vrai pour p et démontrons-le pour $p + 1$. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{p+1}) \in (\mathbf{R}_+^*)^{p+1}$. Posons $\mathbf{r}' = (r_1, \dots, r_p)$. Soit x un point d'Abhyankar de $\mathbf{D}_k^{p+1}(\mathbf{r})$. Considérons le morphisme de projection sur les p premières coordonnées $\pi : \mathbf{D}_k^{p+1}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}')$. Posons $y = \pi(x)$.

Nous avons $s(x) = s(\mathcal{H}(x)/\mathcal{H}(y)) + s(y)$ et $t(x) = t(\mathcal{H}(x)/\mathcal{H}(y)) + t(y)$. L'inégalité d'Abhyankar assure que $s(y) + t(y) \leq p$ et que $s(\mathcal{H}(x)/\mathcal{H}(y)) + t(\mathcal{H}(x)/\mathcal{H}(y)) \leq 1$ (en l'appliquant au point y de $\mathbf{D}_{\mathcal{H}(y)}^1(r_{p+1})$). On en déduit

que y est un point d'Abhyankar de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}')$ et que x est un point d'Abhyankar (c'est-à-dire un point de type 2 ou 3) de $\mathbf{D}_k^1(\mathcal{H}(y)(r_{p+1}))$.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un domaine de Weierstraß W de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ dont le bord de Shilov est réduit au point y . Notons \mathcal{A}_W l'algèbre affinoïde associée. D'après le lemme qui précède, il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathcal{H}(y)$ et un nombre réel $s > 0$ tels que le domaine affinoïde de $\pi^{-1}(y)$ défini par $\{|P| \leq s\}$ ait un bord de Shilov réduit au point x .

Chacun des coefficients du polynôme P est limite de quotients d'éléments de $k\{T_1, \dots, T_p\}$ et même de $k[T_1, \dots, T_p]$. Il existe donc un polynôme Q à coefficients dans $k[T_1, \dots, T_p]$ et un élément q de $k[T_1, \dots, T_p]$, non nul en y , tels que

$$\pi^{-1}(y) \cap \{|P| \leq s\} = \pi^{-1}(y) \cap \{|Q| \leq |q|s\} = \pi^{-1}(y) \cap \{|Q| \leq |q(y)|s\}.$$

Définissons un domaine affinoïde de $\mathbf{D}_k^{p+1}(\mathbf{r})$ par

$$V = \pi^{-1}(W) \cap \{|Q| \leq |q(y)|s\}.$$

D'après le lemme 4.10, le bord de Shilov de cet affinoïde est réduit au point x .

L'assertion finale de l'énoncé est claire puisque, à chaque étape, on ne fait intervenir dans la construction qu'un nombre fini d'éléments de k , correspondant aux coefficients du polynôme Q . □

REMARQUE 4.14. — Les deux faits suivants découlent de la preuve.

- i) Le domaine de Weierstraß V peut être défini par p polynômes.
- ii) Dans le cas où le point x satisfait $s(x) = p$, le domaine de Weierstraß V peut être choisi strictement affinoïde.

COROLLAIRE 4.15. — Soit X un espace strictement k -affinoïde irréductible de dimension d . Soit x un point de X tel que $s(x) = d$. Alors il existe un domaine de Laurent strictement affinoïde de X dont le bord de Shilov est réduit au point x .

Démonstration. — Le théorème de normalisation de Noether assure qu'il existe un morphisme fini $\varphi : X \rightarrow \mathbf{D}_k^d$ (où nous avons noté \mathbf{D}_k^d le disque $\mathbf{D}_k^d(1, \dots, 1)$). Nous avons $s(\varphi(x)) = s(x) = d$. Par conséquent, il existe un domaine de Weierstraß strictement affinoïde V_0 de \mathbf{D}_k^d dont le bord de Shilov est réduit au point $\varphi(x)$. Son image réciproque $V = \varphi^{-1}(V_0)$ est un domaine de Weierstraß strictement affinoïde de X .

Un argument de réduction similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 4.10 montre que le bord de Shilov de V est égal à $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. Notons \mathcal{A} l'algèbre de X et \mathcal{A}_V celle de V . Considérons un élément f de \mathcal{A}_V° dont la réduction \tilde{f} s'annule sur toutes les composantes irréductibles de \tilde{V} sauf celle contenant \tilde{x} . Puisque V est un domaine de Weierstraß de X , \mathcal{A} est dense

dans \mathcal{A}_V et nous pouvons supposer que $f \in \mathcal{A}$. D’après [6], proposition 7.2.6/3 (et [19], proposition 3.1 dans le cas de valuation triviale), la réduction du domaine affinoïde W de V défini par $\{|f| = 1\}$ est isomorphe à $D(\tilde{f}) \subset \tilde{V}$. Son bord de Shilov est donc le singleton $\{x\}$. □

COROLLAIRE 4.16. — *Soit X un espace k -affinoïde irréductible de dimension d . Soit x un point d’Abhyankar de X . Alors il existe un domaine de Laurent de X dont le bord de Shilov est réduit au point x .*

Démonstration. — Construisons un morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbf{D}_k^d$ et des domaines affinoïdes V et V_0 comme précédemment. Soit r un polyrayon k -libre tel que $V_0 \hat{\otimes}_k k_r$ soit strictement k_r -affinoïde. À tout point y de V ou V_0 on peut associer un point y_r de $V \hat{\otimes}_k k_r$ ou $V_0 \hat{\otimes}_k k_r$, par la construction décrite au lemme 4.6. On vérifie que les points du bord de Shilov de $V \hat{\otimes}_k k_r$ (resp. $V_0 \hat{\otimes}_k k_r$) sont exactement ceux de la forme γ_r , où γ est un point du bord de Shilov de V (resp. V_0). Nous pouvons alors reprendre la preuve précédente pour montrer que le bord de Shilov de V est égal à $\varphi^{-1}(\varphi(x))$. La fin de la preuve est identique au cas strictement affinoïde. □

REMARQUE 4.17. — Dans les corollaires 4.15 et 4.16, le domaine de Laurent peut être défini par $d + 1$ éléments.

COROLLAIRE 4.18. — *Soit X un espace k -affinoïde. Soit x un point d’Abhyankar de X et supposons que l’unique composante irréductible C de X contenant x soit strictement k -affinoïde. Alors il existe un domaine de Laurent de X dont le bord de Shilov est réduit au point x .*

En outre, si $s(x) = \dim_{k,x}(X)$, le domaine rationnel peut être choisi strictement affinoïde.

Démonstration. — D’après le corollaire 4.16, il existe un entier p , des éléments f_1, \dots, f_p de l’algèbre \mathcal{A}_C de C et des nombres réels $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$ tels que le point x soit l’unique point du bord de Shilov du domaine affinoïde V de C défini par $V = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \{y \in C \mid s_i \leq |f_i(y)| \leq t_i\}$. Relevons les f_i en des éléments g_i de l’algèbre \mathcal{A} de X .

Notons D la réunion des composantes irréductibles de X ne contenant pas x . Soit f un élément de \mathcal{A} qui est nul sur D mais ne s’annule pas en x . Considérons alors

$$\begin{aligned} W &= \left(\bigcap_{1 \leq i \leq p} \{y \in X \mid s_i \leq |g_i(y)| \leq t_i\} \right) \cap \{y \in X \mid |f(y)| = |f(x)|\} \\ &= V \cap \{y \in X \mid |f(y)| = \|f\|_V\}. \end{aligned}$$

C’est un domaine rationnel de X dont le bord de Shilov est réduit au point x d’après [19], proposition 3.1.

On démontre de même la seconde partie du résultat. □

REMARQUE 4.19. — Dans ce corollaire, le domaine de Laurent peut être défini par $\dim_x(X) + 2$ éléments.

REMARQUE 4.20. — Soit X un espace affinoïde. Considérons un domaine de Laurent $V = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \{y \in X \mid s_i \leq |f_i(y)| \leq t_i\}$ de X dont le bord de Shilov est un singleton $\{x\}$. D’après [19], proposition 3.1, le bord de Shilov du domaine rationnel $\bigcap_{1 \leq i \leq p} \{y \in X \mid |f_i(y)| = |f_i(x)| = \|f\|_V\}$ est encore le singleton $\{x\}$.

Jointe au corollaire qui précède, cette remarque permet de retrouver le résultat d’un théorème de T. de Fernex, L. Ein et S. Ishii qui assure que toute valuation divisorielle sur une variété complexe affine peut être déterminée par sa valeur sur un nombre fini de fonctions (cf. [14], theorem 0.2 pour un énoncé précis).

Revenons maintenant aux points d’Abhyankar des disques.

COROLLAIRE 4.21. — Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$. Soit x un point d’Abhyankar de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$. Il existe un sous-corps ℓ de k de type fini sur k_p vérifiant la propriété suivante : pour tout corps ℓ' tel que $\ell \subset \ell' \subset k$, si $\pi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_{\ell'}^p(\mathbf{r})$ désigne le morphisme de changement de base, alors x est l’unique point du bord de Shilov de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$.

Démonstration. — Considérons le domaine affinoïde V dont il est question dans la proposition 4.13 et ℓ un sous-corps de k de type fini sur k_p sur lequel il est défini. Il suffit de démontrer la propriété pour le corps ℓ . Il existe un domaine affinoïde W de $\mathbf{D}_\ell^p(\mathbf{r})$ tel que $\pi^{-1}(W) = V$. Le point $\pi(x)$ appartient à W et tous les points de $\pi^{-1}(\pi(x))$ appartiennent donc à V . Par conséquent, pour tout $y \in \pi^{-1}(\pi(x))$, nous avons

$$\forall P \in k[T_1, \dots, T_p], |P(y)| \leq \|P\|_V = |P(x)|.$$

Le point x est donc l’unique point du bord de Shilov de cette fibre. □

Nous allons maintenant démontrer un résultat analogue valant pour tous les points des disques, par une sorte de passage à la limite.

THÉORÈME 4.22. — Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$. Pour tout point x de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$, il existe un sous-corps ℓ de k de type dénombrable sur k_p vérifiant la propriété suivante : pour tout corps ℓ' tel que $\ell \subset \ell' \subset k$, si $\pi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_{\ell'}^p(\mathbf{r})$ désigne le morphisme de changement de base, alors x est l’unique point du bord de Shilov de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$.

Démonstration. — Soit x un point de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$. Nous allons démontrer que x vérifie la seconde propriété par récurrence sur la quantité $p - s(x) - t(x)$. Si elle est nulle, le point x est un point d'Abhyankar et le corollaire 4.21 permet de conclure.

Soit $m \in \mathbf{N}$ et supposons avoir démontré le résultat lorsque $p - s(x) - t(x) = m$. Soient $p \in \mathbf{N}$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_p) \in (\mathbf{R}_+^*)^p$ et x un point de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ tel que $p - s(x) - t(x) = m + 1$. Posons $\mathbf{r}' = (r_1, \dots, r_{p-1})$ et notons $\varphi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_k^{p-1}(\mathbf{r}')$ le morphisme de projection sur les $p-1$ premières coordonnées. Posons $y = \varphi(x)$. Puisque $s(x) + t(x) < p$, quitte à réordonner les variables, nous pouvons donc supposer que $s(y) + t(y) = s(x) + t(x)$.

Plaçons-nous un moment dans la fibre $\varphi^{-1}(y) \simeq \mathbf{D}_{\mathcal{H}(y)}^1(r_p)$. Il existe une suite de polynômes $(P_n(T_p))_{n \geq 0}$ à coefficients dans $\mathcal{H}(y)$ et une suite de nombres réels strictement positifs $(r_n)_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour tout n , le domaine affinoïde V_n de $\mathbf{D}_{\mathcal{H}(y)}^1(r_p)$ défini par $\{|P_n| \leq r_n\}$ contient x ;
2. pour tout n , le bord de Shilov de V_n est réduit à un point, que nous noterons γ_n ;
3. la suite d'affinoïdes $(V_n)_{n \geq 0}$ est décroissante ;
4. la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ tend vers x .

Les éléments de $\mathcal{H}(y)$ étant limites de quotients d'éléments de $k[T_1, \dots, T_{p-1}]$, en procédant comme dans la preuve de la proposition 4.13, nous pouvons supposer que les coefficients des polynômes $P_n(T_p)$ appartiennent à $k[T_1, \dots, T_{p-1}]$. Il existe donc un sous-corps ℓ_0 de k de type dénombrable sur k_p tel que tous les polynômes P_n appartiennent à $\ell_0[T_1, \dots, T_p]$. En outre, nous avons $(p - 1) - s(y) - t(y) = m$. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-corps ℓ de k de type dénombrable sur k_p tel que si $\pi' : \mathbf{D}_k^{p-1}(\mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{D}_\ell^{p-1}(\mathbf{r}')$ désigne le morphisme de changement de base, alors y est l'unique point du bord de Shilov de la fibre $\pi'^{-1}(\pi'(y))$. Nous pouvons supposer que ℓ contient ℓ_0 . Quitte à le remplacer par le complété de sa fermeture algébrique dans k , nous pouvons également supposer qu'il est algébriquement clos.

Remarquons qu'il suffit de démontrer le résultat pour le corps $\ell' = \ell$. Notons $\pi : \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_\ell^p(\mathbf{r})$ le morphisme de changement de base. Puisque ℓ est algébriquement clos, d'après le corollaire 3.14, le point $\pi(x)$ est universel et le bord de Shilov de la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ possède un unique point, que nous noterons z . Tout élément de $k[T_1, \dots, T_{p-1}]$ atteint son maximum sur $\pi^{-1}(\pi(x))$ en z . Par conséquent, $\varphi(z) = y$. Pour tout n , il existe un domaine affinoïde W_n de $\mathbf{D}_{\mathcal{H}(\pi'(y))}^1(r_p)$ tel que $\pi^{-1}(W_n) = V_n$. Pour tout n , le point $\pi(x)$ appartient à W_n et le point z appartient donc à V_n . Par conséquent, pour tout élément P

de $k[T_1, \dots, T_p]$, nous avons

$$|P(z)| \leq \inf_{n \geq 0} (\|P\|_{V_n \cap \varphi^{-1}(y)}) = \inf_{n \geq 0} (|P(\gamma_n)|) = |P(x)|,$$

d'où l'on déduit l'égalité des points z et x . □

REMARQUE 4.23. — On peut adapter le raisonnement pour montrer que les points d'Abhyankar sont denses dans $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ et obtenir ainsi une preuve élémentaire du corollaire 4.8 dans le cas d'un polydisque, puis dans le cas général par extension des scalaires et normalisation de Noether.

5. Applications à la topologie des espaces de Berkovich

Nous allons maintenant tirer quelques conséquences topologiques des résultats que nous avons démontrés, ainsi que nous l'avons annoncé dans l'introduction. Le résultat dont découleront tous les autres est celui qui assure qu'un point adhérent à une partie est limite d'une suite de points de cette partie. Les espaces topologiques vérifiant cette propriété portent un nom.

DÉFINITION 5.1. — *Un espace topologique X est dit de Fréchet-Urysohn si pour toute partie A de X , tout point de l'adhérence \bar{A} de A est limite d'une suite de points de A .*

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux disques définis sur un corps algébriquement clos, afin de pouvoir utiliser directement les résultats de la section 4.

PROPOSITION 5.2. — *Soient $p \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{r} \in (\mathbf{R}_+^*)^p$. Supposons que le corps k est algébriquement clos. Alors l'espace $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ est un espace de Fréchet-Urysohn.*

Démonstration. — Soient A une partie de $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$, que nous pouvons supposer non vide, et x un point adhérent à A . Nous voulons montrer que le point x est limite d'une suite de points de A . Considérons le sous-corps ℓ de k associé à ce point par le théorème 4.22. C'est une extension de type dénombrable fini du sous-corps premier k_p de k .

Pour tout entier $n \geq 0$, nous allons construire par récurrence un corps ℓ_n , une suite décroissante $(V_n^{(m)})_{m \geq 0}$ de parties de $\mathbf{D}_{\ell_n}^p(\mathbf{r})$ et des points x_n et y_n de $\mathbf{D}_{\ell_n}^p(\mathbf{r})$ qui vérifient les propriétés suivantes : pour tout $n \geq 0$,

- i) le corps ℓ_n est un sous-corps algébriquement clos de k de type dénombrable sur ℓ (et donc sur k_p);
- ii) le point x_n est le projeté du point x sur $\mathbf{D}_{\ell_n}^p$;
- iii) la suite $(V_n^{(m)})_{m \geq 0}$ forme un système fondamental de voisinages du point x_n ;

iv) le point y_n est rationnel sur ℓ_n , appartient à $V_n^{(n)}$ et est le projeté d'un point y'_n de A ;

et, pour tous $n' \geq n \geq 0$,

v) $\ell_n \subset \ell_{n'}$ (nous noterons $\pi_{n',n} : \mathbf{D}_{\ell_{n'}}^p \rightarrow \mathbf{D}_{\ell_n}^p$ la projection associée);

vi) pour tout $m \geq 0$, $V_{n'}^{(m)} \subset \pi_{n',n}^{-1}(V_n^{(m)})$.

Initialisons la récurrence. Pour cela, on choisit un point y'_0 de A . Il existe un sous-corps ℓ_0 de k de type dénombrable sur ℓ qui contient le corps associé au point y'_0 par le théorème 4.22. Notons y_0 la projection de ce point sur $\mathbf{D}_{\ell_0}^p$. Quitte à remplacer ℓ_0 par le complété de sa fermeture algébrique dans k , nous pouvons supposer que c'est un corps algébriquement clos. Posons $V_0^{(0)} = \mathbf{D}_{\ell_0}^p(\mathbf{r})$ et notons x_0 le projeté du point x sur $\mathbf{D}_{\ell_0}^p(\mathbf{r})$. On choisit ensuite une suite décroissante $(V_0^{(m)})_{m \geq 1}$ de parties de $\mathbf{D}_{\ell_0}^p(\mathbf{r})$ qui forme un système fondamental de voisinages du point x_0 .

Soit $n \geq 0$ et supposons avoir construit les objets du rang 0 au rang n de sorte qu'ils vérifient les propriétés demandées. La partie $V_n^{(n+1)}$ de $\mathbf{D}_{\ell_n}^p$ est un voisinage de x_n . Son image réciproque dans $\mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$ est un voisinage de x et elle contient donc un point y'_{n+1} de A . Il existe un sous-corps ℓ_{n+1} de k de type dénombrable sur ℓ_n (et donc sur ℓ) qui contient le corps associé au point y'_{n+1} par le théorème 4.22. Notons y_{n+1} la projection de ce point sur $\mathbf{D}_{\ell_{n+1}}^p(\mathbf{r})$. Quitte à remplacer ℓ_{n+1} par le complété de sa fermeture algébrique dans k , nous pouvons supposer que c'est un corps algébriquement clos. Pour $m \leq n+1$, posons $V_{n+1}^{(m)} = \pi_{n+1,n}^{-1}(V_n^{(m)})$. Notons x_{n+1} le projeté du point x sur $\mathbf{D}_{\ell_{n+1}}^p(\mathbf{r})$. Nous choisissons ensuite une suite décroissante $(W_{n+1}^{(m)})_{m \geq n+2}$ de parties de $\mathbf{D}_{\ell_{n+1}}^p(\mathbf{r})$ qui forme un système fondamental de voisinages du point x_{n+1} . Finalement, pour $m \geq n+2$, nous posons $V_{n+1}^{(m)} = W_{n+1}^{(m)} \cap \pi_{n+1,n}^{-1}(V_n^{(m)})$.

Notons ℓ'_∞ le sous-corps de k engendré par les ℓ_n , pour $n \geq 0$, et ℓ_∞ son complété. Ces deux corps sont algébriquement clos. Notons x_∞ le projeté du point x sur $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$. Pour $n \geq 0$, nous noterons z_n le projeté du point y'_n sur $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$ et $\pi_n : \mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{D}_{\ell_n}^p(\mathbf{r})$ le morphisme de changement de base. Soit U un voisinage de x_∞ dans $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$. Il existe un entier n' et un voisinage V de $\pi_{n'}(x_\infty) = x_{n'}$ dans $\mathbf{D}_{\ell_{n'}}^p(\mathbf{r})$ tel que $\pi_{n'}^{-1}(V) = U$. Il existe donc un entier $n'' \geq n'$ tel que $V_{n'}^{(n'')} \subset V$. Par conséquent, quel que soit $n \geq n''$, nous avons $\pi_n^{-1}(V_n^{(n)}) \subset U$ et donc $z_n \in U$. La suite $(z_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbf{D}_{\ell_\infty}^p(\mathbf{r})$ converge donc vers x_∞ .

D'après le corollaire 3.14, les points z_n et le point x_∞ sont universels sur ℓ_∞ . On déduit du corollaire 3.7 que la suite $(\sigma_k(z_n))_{n \geq 0}$ tend vers $\sigma_k(x_\infty)$. Or, pour tout n , $\sigma_k(z_n) = y'_n$, car ℓ_∞ contient ℓ_n et $\sigma_k(x_\infty) = x$, car ℓ_∞ contient ℓ . \square

THÉORÈME 5.3. — *Tout espace k -analytique est un espace de Fréchet-Urysohn.*

Démonstration. — Soient X un espace k -analytique et A une partie de X . Nous souhaitons montrer que tout point adhérent à A est limite d'une suite de points de A .

Soit K une extension algébriquement close du corps k . Notons $\pi : X \hat{\otimes}_k K \rightarrow X$ le morphisme de changement de base. Il suffit de démontrer le résultat pour l'espace $X \hat{\otimes}_k K$ et la partie $\pi^{-1}(A)$. En effet, le morphisme π , en tant que morphisme topologiquement propre entre espaces localement compacts, est fermé. Tout point adhérent x à A possède donc une préimage y dans l'adhérence de $\pi^{-1}(A)$. S'il existe une suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de points de $\pi^{-1}(A)$ qui tend vers y , alors la suite $(\pi(y_n))_{n \geq 0}$ tend vers x . Nous pouvons donc supposer que le corps k est algébriquement clos.

Soit x un point adhérent à A . Il possède un voisinage qui est réunion finie de domaines affinoïdes. Quitte à remplacer X par l'un de ces affinoïdes et A par sa trace sur icelui, nous pouvons supposer que X est affinoïde. C'est donc un fermé de Zariski d'un disque et nous pouvons finalement supposer que $X = \mathbf{D}_k^p(\mathbf{r})$. Nous concluons alors par la proposition 5.2. \square

Les espaces de Fréchet-Urysohn font partie des espaces dits séquentiels : les parties ouvertes et fermées peuvent y être caractérisées par des suites, dans le sens que nous précisons ci-dessous.

DÉFINITION 5.4. — *Soit X un espace topologique.*

- i) Une partie A de X est dite **séquentiellement ouverte** si toute suite d'éléments de X qui converge vers un point de A ne possède qu'un nombre fini de termes hors de A .*
- ii) Une partie A de X est dite **séquentiellement fermée** si tout point de X qui est limite d'une suite d'éléments de A appartient à A .*

COROLLAIRE 5.5. — *Soient X un espace k -analytique et A une partie de X .*

- i) La partie A est ouverte si, et seulement si, elle est séquentiellement ouverte.*
- ii) La partie A est fermée si, et seulement si, elle est séquentiellement fermée.*

Pour d'autres résultats sur les espaces de Fréchet-Urysohn et les espaces séquentiels, nous renvoyons à l'article [16]. S. P. Franklin y démontre notamment que tout espace séquentiel est quotient d'un espace métrique. Ce résultat vaut donc en particulier pour les espaces k -analytiques.

En combinant le théorème 5.3 et le corollaire 4.8, nous obtenons le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.6. — *L'ensemble des points d'Abhyankar d'un espace analytique est séquentiellement dense.*

Pour les espaces strictement k -analytiques, nous pouvons obtenir un résultat plus précis.

COROLLAIRE 5.7. — *Supposons que la valuation de k n'est pas triviale. Posons $c = \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{R}_+^*/\sqrt{|k^*|})$. Soit X un espace strictement k -affinoïde et notons d le minimum des dimensions de ses composantes irréductibles. Soient $s, t \in \mathbf{N}$ tels que $s + t \leq d$ et $t \leq c$. Alors l'ensemble des points x de X vérifiant $s(x) = s$ et $t(x) = t$ est dense et séquentiellement dense dans X .*

Démonstration. — D'après le théorème 5.3, il suffit de montrer que l'ensemble indiqué est dense.

Soient x un point de X et U un voisinage strictement k -affinoïde de x . Sa dimension d' est nécessairement supérieure à d . D'après le théorème de normalisation de Noether, il existe un morphisme fini et surjectif $\varphi : U \rightarrow \mathbf{D}_k^{d'} = \mathbf{D}_k^{d'}(1, \dots, 1)$. Les conditions imposées à s et t assurent que le disque $\mathbf{D}_k^{d'}$ contient un point y tel que $s(y) = s$ et $t(y) = t$. Puisque le morphisme φ est fini, tout antécédent x de y satisfait les mêmes égalités. \square

REMARQUE 5.8. — On retrouve ainsi un résultat de C. Favre (cf. [12], corollary C) assurant la densité et la densité séquentielle des points divisoriels dans les espaces analytiques sur $k((T))$.

Énonçons un autre corollaire frappant. Signalons qu'il est utilisé de façon essentielle dans la preuve de l'analogue ultramétrique du théorème de Montel par C. Favre, J. Kiwi et E. Trucco (cf. [13]).

COROLLAIRE 5.9. — *Soit X un espace k -analytique. Toute partie compacte de X est séquentiellement compacte.*

Démonstration. — Soit A une partie compacte de X . Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de points de A . L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un compact non vide et on conclut par le théorème 5.3. \square

Pour finir, nous allons montrer que les espaces k -analytiques satisfont une propriété supplémentaire, celle d'être angéliques. Rappelons tout d'abord qu'un espace topologique est dit ω -compact lorsqu'il est séparé et que toute suite possède une valeur d'adhérence. Cette dernière condition équivaut à demander que de tout recouvrement ouvert dénombrable, on puisse extraire un recouvrement fini. En analyse fonctionnelle, le théorème d'Eberlein-Šmulian assure que les notions de compacité, compacité séquentielle et ω -compacité sont équivalentes pour les parties d'un espace de Banach réel muni de la topologie faible. La propriété d'être angélique généralise les conclusions de ce théorème et A. Grothendieck a notamment montré dans [17], que l'espace $\mathcal{C}(K)$ muni de la convergence ponctuelle est angélique, lorsque K est un espace ω -compact. Nous renvoyons à l'ouvrage [15] pour plus d'informations sur cette notion.

DÉFINITION 5.10. — *Un espace topologique X est dit **angélique** si, pour toute partie relativement ω -compacte A de X , nous avons*

- i) A est relativement compacte ;*
- ii) tout point de l'adhérence \bar{A} de A est limite d'une suite de points de A .*

PROPOSITION 5.11. — *Soit X un espace k -analytique dont la topologie est séparée. Toute partie ω -compacte de X est fermée.*

Démonstration. — Soient A une partie ω -compacte de X et x un point de \bar{A} . D'après le théorème 5.3, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de A qui tend vers x . Puisque A est ω -compacte, le point x , qui est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, appartient à A . On en déduit que $A = \bar{A}$. \square

COROLLAIRE 5.12. — *Soit X un espace k -analytique. Soient A et B deux parties de X telles que $A \subset B$. Supposons que A est ω -compacte et B compacte. Alors A est compacte.*

COROLLAIRE 5.13. — *Soit X un espace k -analytique paracompact. Toute partie ω -compacte de X est compacte.*

Démonstration. — Soit A une partie ω -compacte de X . L'espace X étant localement connexe, ses composantes connexes sont ouvertes. Puisque la partie A est ω -compacte, elle ne peut couper qu'un nombre fini de ces composantes. Nous pouvons donc supposer que X possède un nombre fini de composantes connexes.

Puisque X est localement compact et paracompact, d'après [7], I, §10, théorème 5, il existe une suite $(K_n)_{n \geq 0}$ de parties compactes de X dont la réunion recouvre X . Puisque X est localement compact, d'après *ibid.*, I, §9, proposition 15, nous pouvons supposer que, pour tout n , on ait $K_n \subset K_{n+1}$. Puisque A

est ω -compacte, il existe un entier N tel que $A \subset K_N$. On conclut alors par le théorème précédent. \square

En combinant le théorème 5.3 et le corollaire 5.13, nous obtenons le résultat voulu.

THÉORÈME 5.14. — *Toute partie d'un espace k -analytique paracompact est angélique.*

REMARQUE 5.15. — Pour un espace k -analytique dont la topologie est séparée, la paracompacité est fréquemment vérifiée en pratique : c'est notamment le cas des courbes analytiques ainsi que des analytifiées de variétés algébriques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN & J. T. TATE – « A note on finite ring extensions », *J. Math. Soc. Japan* **3** (1951), p. 74–77.
- [2] M. BAKER & R. RUMELY – *Potential theory and dynamics on the Berkovich projective line*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 159, Amer. Math. Soc., 2010.
- [3] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, Amer. Math. Soc., 1990.
- [4] ———, « Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible », *Invent. Math.* **137** (1999), p. 1–84.
- [5] S. BOSCH – « Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. », *Manuscr. Math.* **1** (1969), p. 35–57 (German).
- [6] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis*, Grund. Math. Wiss., vol. 261, Springer, 1984, A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [7] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*, Hermann, 1971.
- [8] A. DUCROS – « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p -adique », *Compos. Math.* **143** (2007), p. 1511–1532.
- [9] ———, « Les espaces de Berkovich sont excellents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), p. 1443–1552.
- [10] ———, « La structure des courbes analytiques », <http://www.math.jussieu.fr/~ducros/trirss.pdf>.
- [11] X. FABER – « Topology and Geometry of the Berkovich Ramification Locus for Rational Functions », arXiv, 2011, <http://arxiv.org/abs/1102.1432>.

- [12] C. FAVRE – « Countability properties of some Berkovich spaces », arXiv, 2011, <http://arxiv.org/abs/1103.6233>.
- [13] C. FAVRE, J. KIWI & E. TRUCCO – « A non-Archimedean Montel's theorem », *Compos. Math.* **148** (2012), p. 966–990.
- [14] T. DE FERNEX, L. EIN & S. ISHII – « Divisorial valuations via arcs. », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **44** (2008), p. 425–448 (English).
- [15] K. FLORET – *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Math., vol. 801, Springer, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978.
- [16] S. P. FRANKLIN – « Spaces in which sequences suffice », *Fund. Math.* **57** (1965), p. 107–115.
- [17] A. GROTHENDIECK – « Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux », *Amer. J. Math.* **74** (1952), p. 168–186.
- [18] E. HRUSHOVSKI & F. LOESER – « Non-archimedean tame topology and stably dominated types », arXiv, 2010, <http://arxiv.org/abs/1009.0252>.
- [19] M. TEMKIN – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.
- [20] ———, « Stable modification of relative curves », *J. Algebraic Geom.* **19** (2010), p. 603–677.

