

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

MINORATIONS SIMULTANÉES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

Éric Gaudron

**Tome 142
Fascicule 1**

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 1-61

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

Comité de rédaction

Jean BARGE	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhelm SCHLAG
Charles FAVRE	
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € (\$ 519)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2014

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MINORATIONS SIMULTANÉES DE FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

PAR ÉRIC GAUDRON

RÉSUMÉ. — Soit p un nombre premier ou $p = \infty$ et k un corps de nombres plongé dans $\mathbf{C}_p$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{C}_p$ tels que $e^{u_j} \in k$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Soit $(\beta_{i,j})$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq n$, une matrice $t \times n$ à coefficients dans k . Soit $(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$. Posons $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} u_j \in \mathbf{C}_p$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. Nous obtenons des minoration de $\max\{|\Lambda_i|_p; 1 \leq i \leq t\}$ explicites en tous les paramètres, lorsque ce maximum n'est pas nul. Ces minoration englobent de nombreux résultats antérieurs. La démonstration repose sur la méthode de Baker-Philippon-Waldschmidt, la réduction d'Hirata-Kohno, le procédé de changement de variables de Chudnovsky, repensés avec les outils modernes de la théorie des pentes adéliques (*méthode de la section auxiliaire*). Au passage, nous montrons comment étendre le lemme de Siegel absolu de Zhang au cadre des fibrés adéliques hermitiens et nous établissons un nouveau lemme de Siegel approché.

ABSTRACT (*Simultaneous lower bounds for linear forms in logarithms of algebraic numbers*)

This work falls within the theory of linear forms in logarithms over a commutative linear algebraic group defined over a number field. We give lower bounds for simultaneous linear forms in logarithms of algebraic numbers, treating both the archimedean and p -adic cases. The proof includes Baker's method, Hirata's reduction, Chudnovsky's

Texte reçu le ??? et accepté le ???.

ÉRIC GAUDRON, Université Blaise Pascal, Laboratoire de Mathématiques,
Campus universitaire des Cézeaux, UMR 6620, BP 80026, 63177 Aubières
Cedex, France • E-mail : Eric.Gaudron@math.univ-bpclermont.fr •
Url : <http://math.univ-bpclermont.fr/~gaudron>

Classification mathématique par sujets (2010). — 11J86 (11J61, 14G40).

Mots clefs. — Formes linéaires de logarithmes, approximation simultanée, méthode de Baker, réduction d'Hirata-Kohno, changement de variables de Chudnovsky, méthode de la section auxiliaire, fibré adélique hermitien, lemme de Siegel absolu, lemme de Siegel approché.

process of variable change. The novelty is that we integrate into the proof the modern tools of adelic slope theory (*auxiliary section method*), using a new small values Siegel's lemma.

1. Introduction

Ce texte présente une minoration simultanée de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, valide pour un plongement quelconque (complexe ou ultramétrique) du corps de nombres ambiant. En d'autres termes il s'agit de minorer $\max \{|\Lambda_i|_{p_0} ; 1 \leq i \leq t\}$ où Λ_i est de la forme $\beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} u_j$ avec $\beta_{i,j}$ et e^{u_j} dans un corps de nombres k plongé dans $\mathbf{C}_{p_0}$ et $|\cdot|_{p_0}$ est une valeur absolue sur le complété $\mathbf{C}_{p_0}$ d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_{p_0}$ (p_0 est un nombre premier ou $p_0 = \infty$ avec la notation $\mathbf{C}_\infty := \mathbf{C}$).

Depuis les travaux de Baker entrepris au milieu des années soixante, de nombreux articles ont été consacrés à l'étude de cas particuliers de ce problème. En très grande majorité les auteurs s'intéressaient à *une* seule forme linéaire ($t = 1$) et, souvent, seulement au cas d'un plongement archimédien. Si le plongement était ultramétrique alors ils supposaient $\beta_{i,j} \in \mathbf{Q}$. Plus précisément, dès que $t \geq 2$, et si l'on écarte les travaux de Philippon & Waldschmidt [25] et d'Hirata-Kohno [17] qui traitent le cas très général d'un groupe algébrique commutatif quelconque, seuls Ramachandra [27] et Loxton [18] ont étudié la question qui nous intéresse ici (cas archimédien). Lorsque le plongement est ultramétrique, ne semble exister que l'étude de Dong [8], qui traite un cas particulier de la question ($\beta_{i,j} \in \mathbf{Z}$, $\beta_{i,0} = 0$). Ainsi, en dépit de la richesse de la littérature sur le thème des formes linéaires de logarithmes⁽¹⁾, l'on ne trouve guère de résultats généraux qui prennent en compte plusieurs formes linéaires et aucun qui ne considère à la fois le cas archimédien et le cas p -adique. Un des objectifs de cet article est de combler cette lacune, tout en donnant une minoration qui soit en phase avec celles présentées dans [38].

Étant donné un nombre algébrique α , on désigne par $h(\alpha)$ la hauteur de Weil logarithmique absolue de α . Si x est un nombre réel alors $[x]$ est la partie entière de x .

THÉOREME 1.1. — *Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Soit k un sous-corps de nombres de $\mathbf{C}$, de degré D sur $\mathbf{Q}$. Soit $t \in \{1, \dots, n\}$ et*

$$(\beta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbf{M}_{t,n}(k)$$

⁽¹⁾ Nous renvoyons le lecteur au livre très complet de Waldschmidt [38] pour en saisir l'étendue.

une matrice de rang maximal t . Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, soit $u_j \in \mathbf{C}$ tel que $\alpha_j := e^{u_j} \in k$. Soit b, a, ϵ des nombres réels positifs tels que $\epsilon \geq e$,

$$\log a \geq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ h(\alpha_j), \frac{\epsilon |u_j|}{D} \right\} \quad \text{et} \quad \log b \geq D \max_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 1 \leq j \leq n}} \{1, h(\beta_{i,j})\}.$$

Soit $\mathfrak{a}$ l'entier défini par

$$\mathfrak{a} := \left\lceil \frac{D}{\log \epsilon} \log \left(e + \frac{D}{\log \epsilon} + n \log a \right) \right\rceil + 1.$$

Si $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre sur $\mathbf{Q}$ alors aucune des formes linéaires de logarithmes

$$\Lambda_i := \beta_{i,1}u_1 + \dots + \beta_{i,n}u_n \quad (1 \leq i \leq t)$$

n'est nulle et elles vérifient la minoration

$$\log \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i| \geq -(10n)^{58n^2/t} \mathfrak{a}^{1/t} (\log b + \mathfrak{a} \log \epsilon) \left(1 + \frac{D \log a}{\log \epsilon} \right)^{n/t}.$$

Cet énoncé est une conséquence d'un théorème plus général que l'on verra au § 5.2. Un résultat similaire sera aussi démontré dans le cas ultramétrique lorsque k est un sous-corps de $\mathbf{C}_{p_0}$. Dans le minorant du logarithme de $\max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|$, on notera la dépendance linéaire (et donc optimale) en $\log b$ (hauteur des formes linéaires) et la dépendance usuelle $(\log a)^{n/t} (\log \log a)^{1+1/t}$ en $\log a$ (hauteur du point $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Hormis l'aspect général de cette minoration déjà évoqué (t et $k \hookrightarrow \mathbf{C}_{p_0}$ quelconques), mentionnons l'absence du discriminant du corps de nombres, qui apparaissait auparavant dans le cas simultané (comme dans l'article [17] d'Hirata-Kohno).

Cet article de synthèse n'apporte pas d'idée originale qui améliorerait de manière significative les résultats connus pour une forme linéaire. En revanche, la démonstration que nous proposons est, elle, plus novatrice dans sa forme car elle combine la trame de la méthode des fonctions auxiliaires classique avec les outils de la théorie des pentes adéliques (sans « méthode des pentes » proprement dite). Il en résulte un cumul des avantages propres à ces techniques : souplesse d'utilisation et simplicité de la démarche pour l'une, conservation de l'aspect intrinsèque des données et obtention aisée des constantes numériques pour l'autre. Nous expliquerons plus en détail notre approche au § 5.1. Si nous avons pris le parti d'écrire ce texte dans le cas d'un groupe linéaire, il serait cependant possible de généraliser à un groupe algébrique commutatif quelconque et même d'obtenir des constantes numériques explicites pour une variété abélienne, comme dans [10], *sans hypothèse* de non-torsion du point rationnel considéré (ici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{G}_m^n(k)$).

Remerciements. — Je remercie Daniel Bertrand et Michel Waldschmidt de leurs commentaires sur une première version de ce texte. Je remercie également Gaël Rémond pour les discussions éclairantes que nous avons eues sur les parties 3 et 4. Par ailleurs, la lecture attentive et critique du rapporteur a permis d'améliorer nombre de détails. Je lui en suis extrêmement reconnaissant. Mentionnons enfin que ce texte a bénéficié du soutien de l'ANR Diophante, 06-JCJC-0028, piloté par Lucia Di Vizio.

2. Énoncé principal

2.1. — On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers auquel est adjoint un symbole supplémentaire noté ∞ . Pour $p \neq +\infty$, on note $(\mathbf{C}_p, |\cdot|_p)$ le corps valué ultramétrique complet et algébriquement clos usuel, avec la normalisation $|p|_p = p^{-1}$ de la valeur absolue. Si $p = \infty$, le corps valué $(\mathbf{C}_\infty, |\cdot|_\infty)$ est le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ muni de la valeur absolue usuelle. Soit k un corps de nombres de degré $D = [k : \mathbf{Q}]$. Pour chaque $p \in \mathcal{P}$ il y a D morphismes de corps (appelés plongements) $\sigma : k \rightarrow \mathbf{C}_p$ qui correspondent aux racines dans $\mathbf{C}_p$ du polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ d'un élément primitif de k . Avec ces conventions, la formule du produit s'écrit

$$\forall x \in k \setminus \{0\}, \quad \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} |\sigma(x)|_p = 1$$

et la *hauteur de Weil* (logarithmique absolue) d'un élément x de k est la somme (finie)

$$h(x) := \frac{1}{D} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max \{1, |\sigma(x)|_p\}.$$

Soit $r_p := p^{-1/(p-1)}$ si $p \neq \infty$ et $r_\infty := +\infty$ sinon. Désignons par $\mathcal{I}_p$ le disque ouvert de $\mathbf{C}_p$, centré en 0 et de rayon r_p ($\mathcal{I}_\infty = \mathbf{C}$). L'exponentielle du groupe de Lie $\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_p)$ est définie sur $\mathcal{I}_p$ par la série convergente usuelle

$$\forall z \in \mathcal{I}_p, \quad e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}.$$

Dans la suite on fixe $p_0 \in \mathcal{P}$ et $\sigma_0 : k \hookrightarrow \mathbf{C}_{p_0}$ un plongement avec lequel nous identifierons k à un sous-corps de $\mathbf{C}_{p_0}$. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $u_1, \dots, u_n$ des éléments de $\mathcal{I}_{p_0}$, d'exponentielles respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Nous supposons que tous les α_i appartiennent à k .

Soit $t \in \{1, \dots, n\}$ et $\ell_1, \dots, \ell_t : k^n \rightarrow k$ des formes linéaires que l'on écrit dans la base canonique sous la forme

$$\forall z = (z_1, \dots, z_n) \in k^n, \quad \ell_i(z) = \beta_{i,1}z_1 + \dots + \beta_{i,n}z_n.$$

Soit W_0 le sous-espace vectoriel de k^n intersection des noyaux des formes linéaires ℓ_i , $i \in \{1, \dots, t\}$. Soit $u_0 := -(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0}) \in k^t$ et $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}_{p_0}^n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, posons $\Lambda_i := \beta_{i,0} + \ell_i(u)$. Soit $\epsilon_0 := 0$ si p_0 est premier et $\epsilon_0 := 1$ si $p_0 = \infty$.

THÉOREME 2.1. — *Avec les données ci-dessus, notons T_u le sous-espace vectoriel de dimension minimale de $\mathbf{Q}^n$ tel que $u \in \mathsf{T}_u \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}_{p_0}$. Considérons une partie J de $\{1, \dots, n\}$ telle que $(u_j)_{j \in J}$ soit une famille libre sur $\mathbf{Q}$ et maximale pour cette propriété. Nous supposons que $|u_j|_{p_0} \leq r_{p_0}^2 e^{-1}$ pour tout $j \in J$. Soit $a_1, \dots, a_n, \mathfrak{e}, \mathfrak{r}$ des nombres réels vérifiant les conditions suivantes :*

$$\mathfrak{e} \in \begin{cases} [e, \min \{r_{p_0}^2 / |u_j|_{p_0}; j \in J\}] & \text{si } p_0 \neq \infty, \\ [e, +\infty[& \text{si } p_0 = \infty, \end{cases}$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \log a_j \geq \max \left\{ h(\alpha_j), \frac{\epsilon_0 \mathfrak{e} |u_j|_{p_0}}{D} \right\}.$$

Soit $\mathfrak{a}$ l'entier défini par la formule

$$\mathfrak{a} := \left\lceil \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log \left(e + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} + \log \prod_{j=1}^n a_j \right) \right\rceil + 1.$$

Soit b un nombre réel vérifiant

$$\log b \geq D \max_{\substack{1 \leq i \leq t \\ 0 \leq j \leq n}} \{1, h(\beta_{i,j})\}$$

et $s := \dim_{\mathbf{Q}} \mathsf{T}_u - \dim_k(W_0 \cap (\mathsf{T}_u \otimes_{\mathbf{Q}} k))$. Si $s \neq 0$ alors il existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\Lambda_i \neq 0$ et on a

$$\begin{aligned} & \log \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|_{p_0} \\ & \geq -(10n)^{59n^2/s} \mathfrak{a}^{1/s} (\max(1, \epsilon_0 D) \log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} + D \log D) \prod_{j \in J} \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}} \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Le paramètre s est identique à celui de [6], où il apparaît pour la première fois. La condition $s \neq 0$ signifie qu'il existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\ell_i(u) \neq 0$.

2.2. Commentaires

- 1) La différence avec le résultat de Loxton [18] est assez modeste. Elle réside surtout dans la dépendance en le degré D (ici de l'ordre de $D^{2+\varepsilon+(n+1)/s}$ au lieu de D^{200n}) et dans le caractère plus général du théorème 2.1 (plongement σ_0 quelconque, pas d'hypothèse d'indépendance multiplicative des α_j , $1 \leq j \leq n$). En revanche Loxton a une constante égale à $(16n)^{200n}$.

- 2) Lorsque p_0 est premier, je n'ai pas trouvé dans la littérature de minoration analogue à celle du théorème 2.1, bien que la méthode de Baker originelle puisse donner un tel résultat. Il semble que l'obtention de minorations générales et explicites ait été délaissée au profit de l'étude de cas particuliers comme le cas rationnel ($\beta_{i,j} \in \mathbf{Z}$, $\beta_{i,0} = 0$), *a priori* plus utiles pour les applications (voir le survol [39] et [38, p. 547]).
- 3) Toujours dans le cas p -adique, on observe que la minoration du logarithme de $\max_i |\Lambda_i|_{p_0}$ ne dépend pas de p_0 . En réalité cette dépendance est cachée dans la condition $|u_j|_{p_0} \leq r_{p_0}^2 e^{-1}$ qui est assez forte. Nous aurions pu affaiblir la condition en $|u_j|_{p_0} < r_{p_0}^2$ mais au prix d'une complexité accrue du minorant de $\log \max_i |\Lambda_i|_{p_0}$, à l'instar du théorème de Rémond & Urfels [29] (toutefois le contexte est un peu différent). Nous avons donc opté pour un compromis entre une hypothèse un peu plus forte et un résultat un peu plus lisible et maniable. Dans le cas rationnel, Yu parvient à des hypothèses très faibles du type $|u_j|_{p_0} \leq 1$.
- 4) La constante $(10n)^{59n^2/s}$ qui apparaît dans le théorème 2.1 a une moins bonne dépendance en n que celle de Loxton car nous n'avons pas mis en IJuvre la méthode de Kummer. Rappelons que dans le cas rationnel, avec $t = 1$ et $p_0 = \infty$, Matveev a montré que l'on pouvait avoir une constante du type c^n avec c absolue (voir [20]). Il serait intéressant d'incorporer sa méthode dans le cadre de la théorie des pentes que nous utilisons ici. Quant à l'aspect numérique de la constante, une grande partie de sa taille vient du fait qu'il n'a pas été possible de supposer $n \geq 2$ dans la démonstration (à cause du cas p -adique, voir plus haut).

La démonstration du théorème 2.1 découle d'un énoncé analogue correspondant au cas $\mathbf{T}_u = \mathbf{Q}^n$ (la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur $\mathbf{Q}$). Nous expliquons son déroulement à cette occasion (§ 5.1) mais, auparavant, nous rappelons quelques notions de théorie des pentes adéliques et nous énonçons un nouveau lemme de Siegel approché qui jouera un rôle clef dans la démonstration.

3. Éléments de théorie des pentes adéliques

La théorie des pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps de nombres k a fait l'objet d'une présentation systématique dans l'article [12]. Nous adoptons ici une présentation un peu décalée où les places du corps de nombres sont remplacées par les plongements dans les corps $\mathbf{C}_p$ pour p un nombre premier ou $p = \infty$ (dans ce dernier cas $\mathbf{C}_\infty$ désigne le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$). Rappelons que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers et de l'infini, $\mathcal{P} := \{2, 3, 5, \dots, \infty\}$.

3.1. Définitions. — Un *fibré vectoriel pré-adélique* $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma})_\sigma)$ est la donnée d'un k -espace vectoriel E , de dimension finie $\nu \geq 0$, et, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout plongement $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, d'une norme $\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma}$ sur $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$, qui satisfont aux contraintes suivantes :

- 1) il existe une k -base $(e_1, \dots, e_\nu)$ de E telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}$ sauf un nombre fini, pour tout plongement $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, on a $\|\sum_{i=1}^\nu e_i \otimes_\sigma x_i\|_{\overline{E},\sigma} = \max\{|x_1|_p, \dots, |x_\nu|_p\}$ pour tout $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_p^\nu$,
- 2) si $p \neq \infty$ alors $\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma}$ est une ultranorme.

Dans cette définition, la notation $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ désigne le produit tensoriel $E \otimes_k \mathbf{C}_p$ où $\mathbf{C}_p$ est muni de la structure de k -espace vectoriel donnée par $\lambda.x := \sigma(\lambda)x$ pour $\lambda \in k$ et $x \in \mathbf{C}_p$. Dans la suite, l'espace $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ est vu comme espace vectoriel sur $\mathbf{C}_p$ avec la loi externe $\mu_1.(x \otimes \mu_2) := x \otimes (\mu_1\mu_2)$ pour $x \in E$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}_p$. En particulier, pour $\lambda \in k$ et $x \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$, on a $\|\lambda.x\|_{\overline{E},\sigma} = |\sigma(\lambda)|_p \|x\|_{\overline{E},\sigma}$. On rappelle que deux plongements σ, σ' de k dans $\mathbf{C}_p$ sont dits *conjugués* s'il existe un automorphisme continu $\iota: \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ tel que $\sigma' = \iota \circ \sigma$. Ceci définit une relation d'équivalence et une *place* de k est une classe d'équivalence de plongements.

DÉFINITION 3.1. — Soit $p \in \mathcal{P}$ et v une place de k au-dessus de p . On dit que la collection de normes $(\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma})_{\sigma \in v}$ est *invariante par Galois* si, pour tout automorphisme continu $\iota: \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$, l'application canonique

$$\text{id} \otimes \iota: (E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p, \|\cdot\|_{\overline{E},\sigma}) \rightarrow (E \otimes_{\iota \circ \sigma} \mathbf{C}_p, \|\cdot\|_{\overline{E},\iota \circ \sigma})$$

est une isométrie.

Par exemple, si $E = k^\nu$ et si $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}$ est un plongement complexe, la paire $\{\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma}, \|\cdot\|_{\overline{E},\bar{\sigma}}\}$ (ou, par abus de langage, la norme $\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma}$) est invariante par Galois si $\|(x_1, \dots, x_\nu)\|_{\overline{E},\sigma} = \|(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_\nu})\|_{\overline{E},\bar{\sigma}}$ pour tout $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}^\nu$, car il n'y a que deux automorphismes continus de $\mathbf{C}$ qui sont l'identité et la conjugaison complexe. Si, de plus, σ est réel ($\sigma(k) \subseteq \mathbf{R}$) et si $\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma}$ est donné par une matrice hermitienne $A \in M_\nu(\mathbf{C})$ définie positive (c'est-à-dire $\|x\|_{\overline{E},\sigma} = ({}^t\overline{x}Ax)^{1/2}$ pour tout $x \in \mathbf{C}^\nu$) alors nécessairement A est une matrice symétrique *réelle*.

DÉFINITION 3.2. — Un *fibré vectoriel adélique* sur k est un fibré vectoriel pré-adélique $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma})_\sigma)$ sur k tel que, pour toute place v de k , la collection de normes $(\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma})_{\sigma \in v}$ est invariante par Galois.

La notion usuelle de fibré vectoriel adélique présentée dans [12] fait ressortir seulement les places v de k . On y choisit un complété k_v de k en la place v puis une clôture algébrique complète $\mathbf{C}_v$. Ceci revient à considérer un plongement

$\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ pour lequel $\mathbf{C}_v = \mathbf{C}_p$ et k_v est l'adhérence topologique de $\sigma(k)$ dans $\mathbf{C}_v$. Le choix d'une norme $\|\cdot\|_{\overline{E},v}$ sur $E \otimes_k \mathbf{C}_v$ est celui d'une norme sur $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$. La condition d'invariance par Galois de la définition 3.1 de [12, p. 37] est identique à celle de la définition 3.1 ci-dessus. Grâce à elle le choix de $\sigma \in v$ n'influe pas sur les propriétés métriques de l'espace normé $(E \otimes_k \mathbf{C}_v, \|\cdot\|_{\overline{E},v})$ utiles pour définir les pentes et hauteurs du fibré. Il est donc légitime de ne conserver que la place v dans la notation et désigner un fibré vectoriel adélique sur k sous la forme $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},v})_v)$ (où v parcourt les places de k).

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel pré-adélique. Si F est un sous-espace vectoriel de E , il induit un sous-fibré vectoriel pré-adélique $\overline{F}$, dont les normes sont les restrictions de celles de $\overline{E}$ à F . Le fibré vectoriel pré-adélique est dit *hermitien* lorsque toutes les normes correspondant aux plongements complexes $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}$ sont hermitiennes. Il est dit *pur*⁽²⁾ lorsque, pour tout plongement ultramétrique $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ et tout $x \in E$, on a $\|x\|_{\overline{E},\sigma} \in |k_\sigma|_p$ où k_σ est l'adhérence topologique de $\sigma(k)$ dans $\mathbf{C}_p$ (voir [13]). Contrairement à la définition 2.3 de [13], il n'est pas supposé ici qu'un fibré pré-adélique hermitien est nécessairement pur. Les fibrés adéliques hermitiens purs sont exactement les *fibrés vectoriels hermitiens* sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ de la géométrie d'Arakelov classique (voir proposition 3.10). L'exemple le plus simple d'un tel fibré est celui du fibré standard $(k^\nu, |\cdot|_2)$ que l'on obtient de la manière suivante. Étant donné $p \in \mathcal{P}$ et $x_1, \dots, x_\nu$ des nombres réels, notons

$$\text{moy}_p(x_1, \dots, x_\nu) := \begin{cases} (\sum_{i=1}^\nu x_i^2)^{1/2} & \text{si } p = \infty, \\ \max\{x_1, \dots, x_\nu\} & \text{si } p \neq \infty. \end{cases}$$

Le fibré vectoriel adélique $(k^\nu, |\cdot|_2)$, hermitien et pur, est par définition le fibré adélique d'espace sous-jacent k^ν et de normes $|x|_{2,\sigma} := \text{moy}_p(|x_1|_p, \dots, |x_\nu|_p)$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_p^\nu$. Après le choix d'une k -base (quelconque) $(e_1, \dots, e_\nu)$ de E , les fibrés vectoriels hermitiens sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ s'obtiennent à partir du fibré standard $(k^\nu, |\cdot|_2)$ au moyen d'une collection de matrices $\{A_\sigma \in \text{GL}_\nu(k_\sigma); \sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p\}_{p \in \mathcal{P}}$ telles que

- 1) pour tout σ , sauf un nombre fini, A_σ est une isométrie de $(\mathbf{C}_p^\nu, |\cdot|_{2,\sigma})$,
- 2) pour tout automorphisme continu $\iota: \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$, on a $A_{\iota \circ \sigma} = \iota(A_\sigma)$ (l'action de ι est sur les coefficients de la matrice),

⁽²⁾ La notion de pureté d'une norme est un cas particulier de la propriété (N) de Serre [32, p. 69]. La terminologie *solid norm* est également parfois employée dans d'autres contextes [23, p. 19].

3) pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in \mathbf{C}_p$ on a

$$\|e_1 \otimes_\sigma x_1 + \dots + e_\nu \otimes_\sigma x_\nu\|_{\overline{E}, \sigma} = \left| A_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix} \right|_{2, \sigma}.$$

3.2. Extension des scalaires. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel pré-adélique sur k et K une extension finie de k (on identifie k à un sous-corps de K). Le K -espace vectoriel $E_K := E \otimes_k K$ est muni naturellement d'une structure de fibré vectoriel pré-adélique $\overline{E}_K$ de la manière suivante. Soit $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ un plongement qui étend $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$. Pour des éléments $e_i \in E$, $\lambda_i \in K$, $x_i \in \mathbf{C}_p$ posons

$$\left\| \sum_i (e_i \otimes_k \lambda_i) \otimes_\tau x_i \right\|_{\overline{E}_K, \tau} := \left\| \sum_i e_i \otimes_\sigma (\tau(\lambda_i) x_i) \right\|_{\overline{E}, \sigma}.$$

En choisissant des bases de E sur k et de K sur k , on vérifie que cette définition a bien un sens et que la norme d'un élément $x \in (E \otimes_k K) \otimes_\tau \mathbf{C}_p$ ne dépend pas du choix de sa représentation en somme de tenseurs élémentaires. Le couple $\overline{E}_K = (E \otimes_k K, (\|\cdot\|_{\overline{E}_K, \tau})_\tau)$ forme alors un fibré vectoriel pré-adélique sur K . Il est adélique si $\overline{E}$ l'est car, si $\iota : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ est un automorphisme continu de corps, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i (e_i \otimes_k \lambda_i) \otimes_{\iota \circ \tau} \iota(x_i) \right\|_{\overline{E}_K, \iota \circ \tau} &\stackrel{\text{déf.}}{=} \left\| \sum_i e_i \otimes_{\iota \circ \sigma} ((\iota \circ \tau)(\lambda_i) \iota(x_i)) \right\|_{\overline{E}, \iota \circ \sigma} \\ &= \left\| \sum_i e_i \otimes_{\iota \circ \sigma} \iota(\tau(\lambda_i) x_i) \right\|_{\overline{E}, \iota \circ \sigma} \\ &= \left\| \sum_i e_i \otimes_\sigma (\tau(\lambda_i) x_i) \right\|_{\overline{E}, \sigma} \quad \text{par isométrie} \\ &\stackrel{\text{déf.}}{=} \left\| \sum_i (e_i \otimes_k \lambda_i) \otimes_\tau x_i \right\|_{\overline{E}_K, \tau}. \end{aligned}$$

De même, si la norme $\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma}$ est hermitienne alors $\|\cdot\|_{\overline{E}_K, \tau}$ l'est aussi pour tout plongement τ qui étend σ .

3.3. Produit tensoriel de fibrés hermitiens. — Soit $\overline{E}$ et $\overline{F}$ des fibrés pré-adéliques hermitiens sur k . Le dual $E^\vee = \text{Hom}_k(E, k)$ de E , muni des normes d'opérateurs

$$\|\varphi\|_{\overline{E}^\vee, \sigma} = \sup \left\{ \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_{\overline{E}, \sigma}} ; x \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \setminus \{0\} \right\},$$

possède une structure de fibré pré-adélique hermitien sur k . On munit alors le produit tensoriel $E \otimes_k F$ d'une structure de fibré pré-adélique hermitien de la manière suivante. Si $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}$ est un plongement complexe, on considère des bases orthonormées $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\nu$ de $(E \otimes_\sigma \mathbf{C}, \|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma})$ et $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_\mu$ de $(F \otimes_\sigma \mathbf{C}, \|\cdot\|_{\overline{F}, \sigma})$ et on choisit sur $(E \otimes_k F) \otimes_\sigma \mathbf{C} \simeq (E \otimes_\sigma \mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} (F \otimes_\sigma \mathbf{C})$ l'unique produit hermitien pour lequel $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j)_{i,j}$ forme une base orthonormée (indépendant du choix des bases). Si $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ est un plongement ultramétrique, on identifie $E \otimes_k F$ à $\mathrm{Hom}_k(E^\vee, F)$ et l'on munit $(E \otimes_k F) \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ de la norme d'opérateur sur $\mathrm{Hom}_k(E^\vee, F) \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$. Autrement dit, si $x = \sum_{i=1}^N x_i \otimes y_i$ avec $x_i \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ et $y_i \in F \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$, on a

$$\|x\|_{\overline{E \otimes F}, \sigma} := \sup \left\{ \frac{\|\sum_{i=1}^N \varphi(x_i) y_i\|_{\overline{F}, \sigma}}{\|\varphi\|_{\overline{E}^\vee, \sigma}}; \varphi \in (E^\vee \otimes_\sigma \mathbf{C}_p) \setminus \{0\} \right\}.$$

On vérifie que le couple $\overline{E} \otimes \overline{F} = (E \otimes_k F, (\|\cdot\|_{\overline{E \otimes F}, \sigma})_\sigma)$ forme un fibré pré-adélique hermitien. De plus si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont des fibrés adéliques hermitiens (*resp.* purs), il en est de même pour $\overline{E} \otimes \overline{F}$. Lorsque $\overline{E}$ est un fibré pré-adélique hermitien, de dimension $\nu \geq 1$, et $\mu \in \{1, \dots, \nu\}$, on peut alors munir la puissance extérieure $\wedge^\mu E$ de E de normes lui conférant une structure de fibré pré-adélique $\wedge^\mu \overline{E}$ sur k de la manière suivante. Si σ est un plongement complexe, on considère une base orthonormée $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\nu$ de $(E \otimes_\sigma \mathbf{C}, \|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma})$ et on décrète que la base $\{\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_\mu}; 1 \leq i_1 < \dots < i_\mu \leq \nu\}$ de $\wedge^\mu E \otimes_\sigma \mathbf{C}$ est orthonormée. Si σ est un plongement ultramétrique, on voit $\wedge^\mu E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ comme un quotient de $(E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p)^{\otimes \mu}$ que l'on munit de la norme quotient induite par $\|\cdot\|_{\overline{E}^{\otimes \mu}, \sigma}$.

3.4. Pentés des fibrés pré-adéliques hermitiens. — On note $\det E$ la puissance extérieure maximale $\wedge^\nu E$ de E .

DÉFINITION 3.3. — Le *degré d'Arakelov (normalisé) du fibré pré-adélique hermitien $\overline{E}$* est le nombre réel

$$\widehat{\deg_n} \overline{E} := -\frac{1}{D} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E}, \sigma}$$

pour tout choix d'une k -base $(e_1, \dots, e_\nu)$ de E . Lorsque $E = \{0\}$ on pose $\widehat{\deg_n} \overline{E} := 0$.

Le degré ne dépend pas du choix de la base grâce à la formule du produit. La *hauteur (logarithmique absolue)* de $\overline{E}$ est $h(\overline{E}) := -\widehat{\deg_n} \overline{E}$, sa *pente d'Arakelov normalisée* (si $E \neq \{0\}$) est

$$\hat{\mu}(\overline{E}) := \frac{\widehat{\deg_n} \overline{E}}{\dim E},$$

sa pente maximale (si $E \neq \{0\}$) est

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \max \{ \hat{\mu}(\overline{F}) ; \{0\} \neq F \subseteq E \}.$$

On a également une notion de hauteur pour les éléments x de E :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad h_{\overline{E}}(x) := \frac{1}{D} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \|x\|_{\overline{E}, \sigma} \quad (h_{\overline{E}}(0) := -\infty).$$

LEMME 3.4. — Soit $\overline{E}$ un fibré pré-adélique hermitien sur k .

- 1) Si $\overline{F}$ est un sous-fibré de $\overline{E}$ alors on a $\widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}/\overline{F} = \widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E} - \widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{F}$.
- 2) Si $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ sont des sous-fibrés de $\overline{E}$ alors on a

$$\widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}_1 + \widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}_2 \leq \widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2.$$

Démonstration. — La démonstration est identique à celle des fibrés vectoriels hermitiens sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ (voir [12, propositions 4.22 et 4.23]). $\square$

Toutes ces notions sont invariantes par extension des scalaires :

PROPOSITION 3.5. — Soit $\overline{E}$ un fibré pré-adélique hermitien sur k et K/k une extension finie. Alors on a $\widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}_K = \widehat{\deg}_{\mathbf{n}} \overline{E}$ et $\hat{\mu}_{\max}(\overline{E}_K) = \hat{\mu}_{\max}(\overline{E})$.

Démonstration. — Le nombre de plongements $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ qui prolongent $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ est égal à $[K : k]$, ce qui donne la première propriété. Pour la seconde, on montre comme dans le cas classique l'existence et l'unicité du fibré déstabilisant (en utilisant le lemme précédent), c'est-à-dire qu'il existe un unique sous-fibré $\overline{E}_{\text{des}}$ de $\overline{E}$, de dimension maximale, tel que $\hat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \hat{\mu}(\overline{E}_{\text{des}})$. Comme $E_{\text{des}} \otimes_k K$ est un sous-espace de $E_K = E \otimes_k K$, on a

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \hat{\mu}(\overline{E}_{\text{des}}) = \hat{\mu}(\overline{E}_{\text{des}} \otimes_k K) \leq \hat{\mu}_{\max}(\overline{E}_K).$$

Pour démontrer l'égalité, on peut donc supposer que K/k est galoisienne. Considérons le morphisme de groupes $\rho : \text{Gal}(K/k) \rightarrow \text{GL}(E_K)$ qui à $u \in \text{Gal}(K/k)$ associe l'isomorphisme $\rho(u) = \text{id}_E \otimes u$ de E_K . Pour tout $m \in \{1, \dots, \dim E\}$, pour tous $e_1, \dots, e_m \in E_K$, pour tout plongement $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, on a

$$\|\rho(u)(e_1) \wedge \dots \wedge \rho(u)(e_m)\|_{\wedge^m \overline{E}, \tau} = \|e_1 \wedge \dots \wedge e_m\|_{\wedge^m \overline{E}, \tau \circ u}.$$

En appliquant cette égalité à une K -base de $(E_K)_{\text{des}}$, on obtient

$$\hat{\mu}(\overline{\rho(u)((E_K)_{\text{des}})}) = \hat{\mu}(\overline{(E_K)_{\text{des}}}).$$

Par unicité de $\overline{(E_K)_{\text{des}}}$ on a $\rho(u)((E_K)_{\text{des}}) = (E_K)_{\text{des}}$ pour tout $u \in \text{Gal}(K/k)$. Il existe alors un sous-espace vectoriel E_0 de E tel que $(E_K)_{\text{des}} = E_0 \otimes_k K$. En effet, si, pour $x \in E_K$, on pose $\text{tr}(x) := \sum_{u \in \text{Gal}(K/k)} \rho(u)(x) \in E$, alors $E_0 = \{\text{tr}(x) ; x \in (E_K)_{\text{des}}\}$ convient. On conclut avec $\hat{\mu}_{\max}(\overline{E}_K) = \hat{\mu}(\overline{(E_K)_{\text{des}}}) = \hat{\mu}(\overline{E_0}) \leq \hat{\mu}_{\max}(\overline{E})$. $\square$

L'argument sur le nombre de plongements $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ qui prolongent $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ permet de voir également que le nombre réel $h_{\overline{E_K}}(x)$ ne dépend pas du choix de l'extension K/k pour laquelle $x \in E \otimes_k K$ (lorsque $\overline{E}$ est un fibré vectoriel pré-adélique).

L'énoncé suivant remplace l'inégalité de Liouville usuelle.

LEMME 3.6. — *Soit $\overline{E}$ un fibré pré-adélique hermitien non nul. Alors*

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad h_{\overline{E}}(x) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

La démonstration est immédiate à partir des définitions car $h_{\overline{E}}(x) = h((k.x, (\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma})_\sigma))$.

3.5. Compléments sur les fibrés adéliques. — Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. Soit E un K -espace vectoriel de dimension $\nu \geq 1$ et $\|\cdot\|$ une ultranorme sur E .

DÉFINITION 3.7. — Soit $a \in]0, 1]$. On dit qu'une famille $\{e_1, \dots, e_\nu\}$ de vecteurs de E est *a-orthogonale* si, pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in K$, on a

$$a \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i| \|e_i\| \leq \|x_1 e_1 + \dots + x_\nu e_\nu\|.$$

Si $a = 1$ on dit que la famille est *orthogonale* et si, de plus, $\|e_1\| = \dots = \|e_\nu\| = 1$ alors elle est dite *orthonormée*.

Une famille *a-orthogonale* est toujours libre et $\{e_1, \dots, e_\nu\}$ forme une base de E (on parle alors de *base a-orthogonale*). Lorsque $a < 1$, de telles bases existent par le critère suivant dû à Van der Put (voir [23, théorème 2.2.16]). Si $e \in E$ et $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel, on note $\text{dist}(e, F)$ la borne inférieure des $\|e - f\|$ pour $f \in F$.

LEMME 3.8. — *Soit $t_2, \dots, t_\nu \in]0, 1]$ et $(e_1, \dots, e_\nu)$ une base de E tels que, pour tout $i \in \{2, \dots, \nu\}$, on a*

$$\text{dist}(e_i, K.e_1 + \dots + K.e_{i-1}) \geq t_i \|e_i\|.$$

*Alors $(e_1, \dots, e_\nu)$ est une base $t_2 \dots t_\nu$ -orthogonale de E . En particulier, pour tout $a \in]0, 1[$, il existe une base *a-orthogonale* de E .*

Dans le cas d'une base orthogonale, la réciproque du lemme 3.8 est vraie : si $(e_1, \dots, e_\nu)$ est une base orthogonale de $(E, \|\cdot\|)$ alors, pour tout $i \in \{2, \dots, \nu\}$, on a $\text{dist}(e_i, K.e_1 + \dots + K.e_{i-1}) = \|e_i\|$.

DÉFINITION 3.9. — L'espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit *sphériquement complet* si toute suite de boules emboîtées de E a une intersection non vide.

Un corps local⁽³⁾, par exemple $\mathbf{Q}_p$, est sphériquement complet. On montre que E (de dimension finie) est sphériquement complet si et seulement si $(K, |\cdot|)$ l'est. Dans ce cas, la distance $\text{dist}(e, F)$ est un minimum et, en particulier, $(E, \|\cdot\|)$ possède une base orthogonale (cette propriété est en général fausse si K n'est pas sphériquement complet, comme par exemple $K = \mathbf{C}_p$, voir [23, exemple 2.3.26]).

LEMME DE PERTURBATION. — *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps valué ultramétrique $(K, |\cdot|)$ et $\|\cdot\|$ une ultranorme sur E . Soit $a \in]0, 1]$ et $(e_1, \dots, e_\nu)$ une base a -orthogonale de E . Soit $f_1, \dots, f_\nu \in E$ tels que $\|e_i - f_i\| < a\|e_i\|$ pour tout $i \in \{1, \dots, \nu\}$. Alors $(f_1, \dots, f_\nu)$ est une base a -orthogonale de E .*

Démonstration. — Par inégalité ultramétrique on a $\|f_i\| = \|e_i\|$. On en déduit, pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in K$,

$$\begin{aligned} a \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i| \|f_i\| &= a \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i| \|e_i\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} x_i e_i \right\| \\ &\leq \max \left(\left\| \sum_{i=1}^{\nu} x_i f_i \right\|, \left\| \sum_{i=1}^{\nu} x_i (f_i - e_i) \right\| \right). \end{aligned}$$

Si au moins un des x_i n'est pas nul on a $\left\| \sum_{i=1}^{\nu} x_i (f_i - e_i) \right\| < a \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i| \|e_i\|$, ce qui montre alors que $(f_1, \dots, f_\nu)$ est une famille a -orthogonale. Elle est donc libre et elle forme une base de E (ceci est un cas particulier du théorème 2.3.16 de [23]). $\square$

L'énoncé suivant est dû à Gaël Rémond.

PROPOSITION 3.10. — *Les fibrés adéliques hermitiens purs sur un corps de nombres k sont exactement les fibrés vectoriels hermitiens sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$.*

Un fibré vectoriel hermitien sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ est toujours pur et l'intérêt de cette proposition réside dans le fait que la réciproque est vraie. La démonstration repose sur le lemme suivant.

LEMME 3.11. — *Soit K/k une extension galoisienne de corps valués ultramétriques. Notons $|\cdot|$ la valeur absolue sur K et supposons que $(K, |\cdot|)$ est sphériquement complet. Supposons également que l'extension des corps résiduels $\kappa(K)/\kappa(k)$ est séparable. Soit E un k -espace vectoriel de dimension finie et $\|\cdot\|$ une ultranorme sur $E \otimes_k K$, invariante sous l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(K/k)$. Alors toute base orthonormée de $(E, \|\cdot\|)$ reste une base orthonormée de $(E \otimes_k K, \|\cdot\|)$.*

⁽³⁾ Corps complet muni d'une valeur absolue discrète (non triviale).

L'hypothèse d'invariance par Galois de la norme signifie que, pour toute k -base $(e_1, \dots, e_\nu)$ de E , pour tout $u \in \text{Gal}(K/k)$, pour tout $x_1, \dots, x_\nu \in K$, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} e_i \otimes u(x_i) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} e_i \otimes x_i \right\|.$$

L'hypothèse de séparabilité des corps résiduels est vérifiée lorsque $\kappa(k)$ est parfait, par exemple si k est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la dimension $\nu \geq 1$. Le cas $\nu = 1$ étant clair, supposons le lemme vrai pour tout espace de dimension $\leq \nu - 1$. Soit E de dimension $\nu \geq 2$ et $(e_1, \dots, e_\nu)$ une base orthonormée de $(E, \|\cdot\|)$. Il s'agit de montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} e_i \otimes x_i \right\| = \max \{|x_1|, \dots, |x_\nu|\}$$

pour tout $x_1, \dots, x_\nu \in K$. Soit F le sous-espace de E engendré par $e_1, \dots, e_{\nu-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $(F, \|\cdot\|)$, la base orthonormée $(e_1, \dots, e_{\nu-1})$ de F reste une base K -orthonormée de $(F \otimes_k K, \|\cdot\|)$. Comme K est sphériquement complet, il existe $f \in E \otimes_k K \setminus \{0\}$ tel que $\text{dist}(f, F \otimes_k K) = \|f\|$. Quitte à diviser f par son coefficient devant e_ν (nécessairement non nul), on peut supposer que f est de la forme $e_1 \otimes \lambda_1 + \dots + e_{\nu-1} \otimes \lambda_{\nu-1} + e_\nu$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{\nu-1} \in K$. D'après le lemme 3.8 et la remarque qui suit, la base $(e_1, \dots, e_{\nu-1}, f)$ de $E \otimes_k K$ est orthogonale. Ainsi on a

$$1 = \|e_\nu\| = \max \{\|f\|, |\lambda_1|, \dots, |\lambda_{\nu-1}|\}.$$

Supposons $\|f\| < 1$. Pour un élément u du groupe de Galois de K/k , notons

$$f_u := e_\nu + \sum_{i=1}^{\nu-1} e_i \otimes u(\lambda_i).$$

Comme la norme est invariante par Galois on a $\|f_u\| = \|f\|$ donc

$$\max_{1 \leq i \leq \nu-1} |u(\lambda_i) - \lambda_i| = \|f_u - f\| \leq \|f\| < 1.$$

Comme l'extension $\kappa(K)/\kappa(k)$ est séparable, elle est galoisienne et l'application canonique $\text{Gal}(K/k) \rightarrow \text{Gal}(\kappa(K)/\kappa(k))$ qui à u associe

$$\bar{u} : x \bmod M \mapsto u(x) \bmod M \quad (\text{où } M := \{x \in K; |x| < 1\})$$

est surjective (voir par exemple [22, II.9.9, p. 172]). Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, \nu - 1\}$, l'inégalité $|u(\lambda_i) - \lambda_i| < 1$ donne $\bar{u}(\lambda_i \bmod M) = \lambda_i \bmod M$. En faisant varier u , l'élément $\lambda_i \bmod M$ est invariant par $\text{Gal}(\kappa(K)/\kappa(k))$ et donc $\lambda_i \bmod M \in \kappa(k)$, ce qui signifie qu'il existe $a_i \in k$ tel que $|\lambda_i - a_i| < 1$ (en particulier $|a_i| \leq 1$). En posant $g := e_\nu + \sum_{i=1}^{\nu-1} e_i \otimes a_i$, on a $\|f - g\| =$

$\max_i |\lambda_i - a_i| < 1$ et $\|g\| = 1$ car $(e_1, \dots, e_\nu)$ est une base orthonormée de E . Ceci contredit l'inégalité ultramétrique $\|g\| \leq \max(\|g - f\|, \|f\|)$. Le cas $\|f\| < 1$ ne peut donc pas se produire. Ainsi on a $\|f\| = 1$ puis

$$\text{dist}(e_\nu, F \otimes_k K) = \text{dist}(f, F \otimes_k K) = \|f\| = 1 = \|e_\nu\|.$$

Par conséquent $(e_1, \dots, e_\nu)$ est une base orthonormée de $(E \otimes_k K, \|\cdot\|)$ par le lemme 3.8. $\square$

Démonstration de la proposition 3.10. — Soit $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma})_\sigma)$ un fibré adélique hermitien pur sur k . Fixons un plongement ultramétrique $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ et une base orthonormée $(e_1, \dots, e_\nu)$ de $(E \otimes_\sigma k_\sigma, \|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma})$. Soit $x_1, \dots, x_\nu \in \mathbf{C}_p$ des éléments algébriques sur $\mathbf{Q}$ et K/k une extension galoisienne finie qui contient ces nombres. Soit $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ un plongement qui prolonge σ . On note w la place de K induite par τ . L'extension K_τ/k_σ est galoisienne et, pour tout $u \in \text{Gal}(K_\tau/k_\sigma)$, il existe un automorphisme continu $\iota : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ tel que $\tau \circ u = \iota \circ \tau$ (ces plongements correspondent tous à w). Ainsi la norme $\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma}$ sur $(E \otimes_\sigma k_\sigma) \otimes_{k_\sigma} K_\tau$ est invariante par le groupe de Galois de K_τ/k_σ (au sens du lemme 3.11) car la collection de normes $(\|\cdot\|_{\overline{E_K}, \tau'})_{\tau' \in w}$ est invariante par Galois (au sens de la définition 3.1). Le lemme 3.11 s'applique donc à $(E, \|\cdot\|) = (E \otimes_\sigma k_\sigma, \|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma})$ et $K = K_\tau$ (qui est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ donc sphériquement complet). On a ainsi

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} e_i \otimes_\sigma x_i \right\|_{\overline{E}, \sigma} = \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p.$$

Cette égalité est vraie pour tout $(x_1, \dots, x_\nu) \in \overline{\mathbf{Q}}^\nu$. Par continuité des normes et par densité de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}_p$, elle reste vraie sur $\mathbf{C}_p^\nu$. La matrice de passage de $(e_1, \dots, e_\nu)$ à une k -base $(e_1, \dots, e_\nu)$ de E fournit une matrice $A_\sigma \in \text{GL}_\nu(k_\sigma)$ telle que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} e_i \otimes_\sigma x_i \right\| = |A_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\nu \end{pmatrix}|_{2, \sigma}.$$

De plus, l'invariance par Galois de $(\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma'})_{\sigma' \in v}$ (v est la place de k induite par σ) permet de choisir ces matrices de sorte que $A_{\iota \circ \sigma} = \iota(A_\sigma)$ pour tout automorphisme continu ι de $\mathbf{C}_p$. Le fibré $\overline{E}$ est donc un fibré vectoriel hermitien sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$. $\square$

Nous allons montrer maintenant que l'on peut approcher un fibré adélique hermitien par un fibré adélique hermitien *pur*, pourvu que l'on autorise une extension du corps de base.

LEMME 3.12. — Soit $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ un plongement ultramétrique d'un corps de nombres k et E un k -espace vectoriel de dimension $\nu \geq 1$. Soit $\|\cdot\|$ une ultranorme sur $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une extension finie K de k , il existe une base $f_1, \dots, f_\nu$ de $E \otimes_k K$ et un plongement $\tau: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ qui prolonge σ tels que, pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in \mathbf{C}_p$, on a

$$\max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f_i \otimes_{\tau} x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p.$$

Démonstration. — Par le lemme 3.8, il existe une base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\nu$ de $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ telle que, pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in \mathbf{C}_p$, on a

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p \|\mathbf{e}_i\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} x_i \mathbf{e}_i \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p \|\mathbf{e}_i\|.$$

Comme les nombres algébriques sur $\mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{C}_p$, le lemme de perturbation permet de supposer qu'il existe une extension finie K/k et un plongement $\tau: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ qui prolonge σ tels que $\mathbf{e}_i \in E \otimes_\sigma \tau(K)$. Considérons un entier $M \geq 1$ tel que $p^{1/M} \leq (1 + \varepsilon)^{1/2}$. Quitte à prendre une extension finie de K on peut supposer que $p^{1/M} \in K$. Par ailleurs, il existe $\alpha_i \in \mathbf{R}$ tel que $(1 + \varepsilon)^{-1/2} \|\mathbf{e}_i\| = p^{\alpha_i}$. Soit $f_i \in E \otimes_k K$ tel que $f_i \otimes_{\tau} 1 = p^{[\alpha_i M]/M} \mathbf{e}_i$. La famille $\{f_1, \dots, f_\nu\}$ forme une base de $E \otimes_k K$ et la norme de $\sum_{i=1}^{\nu} f_i \otimes_{\tau} x_i$ vérifie l'encadrement voulu. $\square$

On notera que toute extension finie du corps K donné par ce lemme convient encore.

COROLLAIRE 3.13. — Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k . Alors, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une extension finie K de k et un fibré adélique hermitien pur $\overline{E}_\varepsilon$ sur K , d'espace sous-jacent $E \otimes_k K$, tels que, pour tout plongement $\tau: K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ qui prolonge $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, pour tout $x \in (E \otimes_k K) \otimes_{\tau} \mathbf{C}_p$, on a

$$\|x\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau} \leq \|x\|_{\overline{E}_K, \tau} \leq (1 + \varepsilon) \|x\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau}.$$

De plus, l'inégalité $\|\cdot\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau} \leq \|\cdot\|_{\overline{E}_K, \tau}$ n'est stricte que pour un nombre fini de plongements τ .

Démonstration. — Fixons une k -base $(e_1, \dots, e_\nu)$ de E et un sous-ensemble fini S de $\mathcal{P}$ tel que, pour tout $p \notin S$, pour tout plongement $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, pour tout $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{C}_p^\nu$, on a

$$\|e_1 \otimes_{\sigma} x_1 + \dots + e_\nu \otimes_{\sigma} x_\nu\|_{\overline{E}, \sigma} = \max(|x_1|_p, \dots, |x_\nu|_p)$$

(première condition de la définition de fibré pré-adélique). On applique le lemme 3.12 à chacune des normes $\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma}$ pour $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ avec $p \in S \setminus \{\infty\}$. L'on peut supposer que les extensions finies K_σ/k que l'on obtient sont toutes

les mêmes, égales à une extension galoisienne finie K de k . Ainsi, pour chacun de ces σ , il existe un plongement $\tau_\sigma : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ prolongeant σ et une base $f_{1,1}, \dots, f_{\nu,1}$ de $E \otimes_k K$ (qui dépend de σ) tels que, pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in \mathbf{C}_p$, on a

$$(1) \quad \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f_{i,1} \otimes_{\tau_\sigma} x_i \right\|_{\overline{E_K}, \tau_\sigma} \leq (1 + \varepsilon) \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p.$$

Soit $a \in K$ tel que $K = k(a)$ et π_a le polynôme minimal de a sur k . Comme K/k est galoisienne, l'on peut choisir des éléments $u_1 = \text{id}, u_2, \dots, u_g$ du groupe de Galois de K/k tels que les nombres $\tau_\sigma \circ u_\ell(a) \in \mathbf{C}_p$ pour $\ell \in \{1, \dots, g\}$ soient chacun racine d'un des g facteurs irréductibles de $\sigma(\pi_a)$ dans $k_\sigma[X]$. Les plongements $\tau : K \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ au-dessus de σ sont alors de la forme $\iota \circ \tau_\sigma \circ u_\ell$ avec ι automorphisme continu de $\mathbf{C}_p$ qui laisse fixe les éléments de k_σ (on a rangé les plongements selon les places de K au-dessus de σ). Considérons des éléments $\lambda_{i,j} \in K$, $1 \leq i, j \leq \nu$, tels que $f_{i,1} = \sum_{j=1}^{\nu} e_j \otimes_k \lambda_{i,j}$ pour tout $i \in \{1, \dots, \nu\}$. Posons alors

$$f_{i,\ell} := \sum_{j=1}^{\nu} e_j \otimes_k u_\ell^{-1}(\lambda_{i,j}) \in E \otimes_k K.$$

Pour tous $x_1, \dots, x_\nu \in \mathbf{C}_p$ et $\tau = \iota \circ \tau_\sigma \circ u_\ell$ et par définition des normes sur $\overline{E_K}$, on a alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} f_{i,\ell} \otimes_{\tau} x_i \right\|_{\overline{E_K}, \tau} = \left\| \sum_{j=1}^{\nu} e_j \otimes_{\sigma} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \iota \circ \tau_\sigma(\lambda_{i,j}) x_i \right) \right\|_{\overline{E}, \sigma}.$$

Comme la norme $\|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma}$ est invariante par Galois et comme $\iota \circ \sigma = \sigma$, on a

$$(2) \quad \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f_{i,\ell} \otimes_{\tau} x_i \right\|_{\overline{E_K}, \tau} = \left\| \sum_{i=1}^{\nu} f_{i,1} \otimes_{\tau_\sigma} x_i \right\|_{\overline{E_K}, \tau_\sigma}.$$

Sur $(E \otimes_k K) \otimes_{\tau} \mathbf{C}_p$ (pour $\tau = \iota \circ \tau_\sigma \circ u_\ell$), définissons la norme $\|\cdot\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau}$ par la formule

$$\left\| \sum_{i=1}^{\nu} f_{i,\ell} \otimes_{\tau} x_i \right\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau} := \max_{1 \leq i \leq \nu} |x_i|_p.$$

Le couple $\overline{E}_\varepsilon = (E \otimes_k K, (\|\cdot\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau})_\tau)$ forme un fibré hermitien pur sur K . De plus, l'encadrement $\|\cdot\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau} \leq \|\cdot\|_{\overline{E_K}, \tau} \leq (1 + \varepsilon) \|\cdot\|_{\overline{E}_\varepsilon, \tau}$ résulte de (1) et (2). $\square$

Ce corollaire implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur k , il existe une extension finie K de k et un fibré hermitien pur $\overline{E}'$ sur K , avec $E' = E \otimes_k K$, tels que, pour tout $x \in E \otimes_k \overline{k}$, on a

$$h_{\overline{E}'}(x) \leq h_{\overline{E}}(x) \leq h_{\overline{E}'}(x) + \varepsilon.$$

De plus, on peut choisir $\overline{E'}$ de sorte que

$$h(\overline{E'}) \leq h(\overline{E}) \leq h(\overline{E'}) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E'}) - \varepsilon \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E'})$$

car les inégalités de normes dans le corollaire 3.13 induisent des inégalités similaires pour les sous-fibrés et les déterminants d'iceux.

3.6. Normes d'opérateurs. — Soit $(K, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ (*resp.* $(F, \|\cdot\|_F)$) un K -espace vectoriel normé de dimension $\nu \geq 1$ (*resp.* $\mu \geq 1$). Lorsque K est ultramétrique, on suppose que les normes sont des ultranormes. Soit $a : E \rightarrow F$ une application K -linéaire. L'équivalence des normes en dimension finie (qui découle par exemple de l'existence de bases 1/2-orthogonales) permet de poser la

DÉFINITION 3.14. — La *norme d'opérateur* de a est le nombre réel

$$\|a\| := \sup \left\{ \frac{\|a(x)\|_F}{\|x\|_E} ; x \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

PROPOSITION 3.15. — *Supposons que K est ultramétrique et que $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ possèdent des bases orthogonales, notées respectivement $e = (e_1, \dots, e_\nu)$ et $f = (f_1, \dots, f_\mu)$. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{\mu,\nu}(K)$ la matrice qui représente l'application linéaire a dans les bases e et f . Alors on a*

$$\|a\| = \max \{ |a_{i,j}| \|f_i\|_F / \|e_j\|_E ; 1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \nu \}.$$

Démonstration. — Notons α le maximum du membre de droite. Soit $x = \sum_{j=1}^\nu x_j e_j \in E$. On a

$$a(x) = \sum_{i=1}^\mu \left(\sum_{j=1}^\nu a_{i,j} x_j \right) f_i$$

donc

$$\|a(x)\|_F \leq \max_{i,j} |a_{i,j} x_j| \|f_i\|_F \leq \alpha \max_{1 \leq j \leq \nu} |x_j| \|e_j\|_E = \alpha \|x\|_E$$

puis $\|a\| \leq \alpha$. Réciproquement, considérons des indices i_0, j_0 tels que $\alpha = |a_{i_0,j_0}| \|f_{i_0}\|_F / \|e_{j_0}\|_E$ et prenons $x = e_{j_0}$. On a $a(x) = \sum_{i=1}^\mu a_{i,j_0} f_i$ et, par orthogonalité de f , on en déduit

$$\|a(x)\|_F = \max_{1 \leq i \leq \mu} |a_{i,j_0}| \|f_i\|_F \geq |a_{i_0,j_0}| \|f_{i_0}\|_F = \alpha \|x\|_E$$

puis $\|a\| \geq \alpha$. □

3.7. Puissances symétriques des fibrés adéliques hermitiens. — Étant donné des multiuplets $m = (m_1, \dots, m_\nu)$ et $n = (n_1, \dots, n_\nu)$, on note $|m|$ la longueur $\sum_{i=1}^\nu m_i$ de m et on désigne par $m!$ (resp. m^n) le produit $m_1! \cdots m_\nu!$ (resp. $m^n := m_1^{n_1} \cdots m_\nu^{n_\nu}$). Soit $\ell \geq 1$ un entier et $\overline{E}$ un fibré pré-adélique hermitien sur k . La puissance symétrique $S^\ell(E)$ est un quotient de $E^{\otimes \ell}$ (l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(E)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle $\mathbf{T}(E)$ par l'idéal engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$). Cette structure quotient confère à $S^\ell(E)$ une structure de fibré pré-adélique hermitien $\overline{S^\ell(E)}$ induite par $\overline{E}^{\otimes \ell}$.

PROPOSITION 3.16. — *Pour tout fibré adélique hermitien $\overline{E}$ sur k de dimension $\nu \geq 1$, pour tout entier $\ell \geq 1$, on a*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{S^\ell(E)}) \leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2 \log \nu).$$

Démonstration. — Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$, ce résultat est une partie de la proposition 8.4 de [15]. Le passage aux fibrés hermitiens quelconques s'effectue au moyen du corollaire 3.13, en utilisant l'invariance par extension des scalaires de la pente maximale de $\overline{E}$ (proposition 3.5). $\square$

Dans la suite, la puissance symétrique sera utilisée à la fois pour décrire l'ensemble des polynômes auxiliaires et pour décrire l'espace des dérivations. Si E est un k -espace vectoriel, on rappelle que $E^\vee$ désigne l'espace dual $\text{Hom}_k(E, k)$. Pour tout entier $\ell \geq 1$, on dispose de l'application canonique $\Phi: (E^\vee)^\ell \times E \rightarrow k$ qui à $(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell, x)$ associe le produit $\varphi_1(x) \cdots \varphi_\ell(x)$. À $x \in E$ fixé, l'application partielle $\Phi(\cdot, x): (E^\vee)^\ell \rightarrow k$ est une forme multilinéaire symétrique. Elle se factorise donc en une application $\Phi_x: S^\ell(E^\vee) \rightarrow k$ définie sur le produit symétrique. Si $s \in S^\ell(E^\vee)$ on note plus simplement $s(x)$ au lieu de $\Phi_x(s)$.

DÉFINITION 3.17. — Un *polynôme homogène* s sur E de degré ℓ est un élément de $S^\ell(E^\vee)$ et l'*application polynomiale* associée est l'application de E dans k qui envoie $x \in E$ sur $s(x)$. Plus généralement, si $n \in \mathbf{N}$ et si $E_0, \dots, E_n$ sont des k -espaces vectoriels, un *polynôme multihomogène* s de degré $(\ell_0, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$ est un élément de $\mathfrak{E} := S^{\ell_0}(E_0^\vee) \otimes \cdots \otimes S^{\ell_n}(E_n^\vee)$ et l'application polynomiale associée est l'application de $\prod_{j=0}^n E_j$ dans k qui envoie $(x_0, \dots, x_n)$ sur $s(x_0, \dots, x_n)$.

Lorsque, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, l'espace E_j possède une structure de fibré adélique hermitien $\overline{E_j}$ (il en est alors de même pour $E_j^\vee$ avec les métriques duales), la norme de s en une place v de k est calculée dans $\bigotimes_{j=0}^n \overline{S^{\ell_j}(E_j^\vee)}$. Dans la pratique, si $\overline{E}$ est un fibré adélique hermitien pur sur k , si l'on fixe une

base orthonormée $\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_{j,1}, \dots, \mathbf{e}_{j,\nu_j})$ de $E_j \otimes_{\sigma} \mathbf{C}_p$ (ici $\nu_j = \dim E_j$), de base duale $\mathbf{e}_j^{\vee} = (\mathbf{e}_{j,1}^{\vee}, \dots, \mathbf{e}_{j,\nu_j}^{\vee})$, et si l'on écrit l'élément s comme une somme

$$(3) \quad s := \sum_i p_i \prod_{j=0}^n (\mathbf{e}_j^{\vee})^{i_j}$$

avec $i = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^{\nu_0} \times \dots \times \mathbf{N}^{\nu_n}$, i_j de longueur ℓ_j , et $p_i \in \mathbf{C}_p$, alors la norme $\|s\|_{\overline{\mathbf{e}}, \sigma}$ de s est

$$\|s\|_{\overline{\mathbf{e}}, \sigma} = \begin{cases} \left(\sum_i |\sigma(p_i)|^2 \frac{i!}{\ell_0! \dots \ell_n!} \right)^{1/2} & \text{si } p = \infty \\ \max_i |p_i|_p & \text{si } p \neq \infty. \end{cases}$$

Remarquons également que grâce à cette formule et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la somme $\sum_i |\sigma(p_i)|$ est plus petite que $\|s\|_{\overline{\mathbf{e}}, \sigma} \times \prod_{j=0}^n \nu_j^{\ell_j/2}$ (si σ est complexe).

4. Lemmes de Siegel approchés

4.1. — La plupart des démonstrations de transcendance requiert l'utilisation d'une fonction auxiliaire qui doit satisfaire à un nombre fini de conditions linéaires. En général il s'agit de conditions d'annulations en des points particuliers avec des ordres de multiplicités dans certaines directions (on parle parfois de « points épaissis »). Aux prémices de la théorie (travaux d'Hermite et Lindemann par exemple), on exhibait hardiment une fonction auxiliaire *explicite*. Toutefois sont rapidement apparues les difficultés et les limitations inhérentes à cette approche presque impudique⁽⁴⁾. En filigrane dans les articles de Thue [34, 35], l'on doit à Siegel d'avoir conceptualisé en 1929 l'idée qu'il suffisait de connaître une estimation de la « taille » de la fonction auxiliaire F . Demander l'annulation de F en un nombre fini de points épaissis équivaut à réclamer que les coefficients de F satisfassent à un système linéaire

$$(4) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j = 0$$

d'inconnues $x_1, \dots, x_{\nu}$. Lors de l'étude de la transcendance des valeurs des fonctions de Bessel [33], Siegel formula l'énoncé précis suivant.

⁽⁴⁾ Cependant, ce procédé reste encore très actuel au travers par exemple des approximations de Padé et des fonctions hypergéométriques car, comme l'avait noté Chudnovsky, il conduit souvent à de meilleurs résultats.

LEMME DE SIEGEL. — *Supposons que $\mu < \nu$ et que, pour tous i, j , on a $a_{i,j} \in \mathbf{Z}$. Soit $A = \max_{i,j} |a_{i,j}|$. Alors il existe une solution $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu \setminus \{0\}$ au système (4) telle que*

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_\nu|\} \leq 1 + (\nu A)^{\frac{\mu}{\nu-\mu}}.$$

Ce résultat découle simplement du *principe des tiroirs de Dirichlet*. Comme l'a remarqué Mignotte, il est possible de l'étendre à un système à coefficients algébriques (voir lemme 1.3.1 de [36]). Cependant l'on s'est aperçu qu'un tel lemme n'était rien d'autre qu'une variante du *premier théorème de Minkowski* sur les corps convexes. Ce point de vue s'est révélé fécond en débouchant sur une version adélique du lemme de Siegel, démontrée par Bombieri & Vaaler [3] (voir [14, § 3.2] pour la constante $(1/2) \log \nu$).

LEMME DE BOMBIERI & VAALER. — *Soit k un corps de nombres de discriminant absolu D_k . Notons $\text{rd}_k := |D_k|^{1/[k:\mathbf{Q}]}$ son discriminant racine. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien pur sur k , de dimension $\nu \geq 1$. Alors il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que*

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}(\overline{E}) + \frac{1}{2}(\log \nu + \log \text{rd}_k).$$

Plusieurs développements de ce lemme existent. On peut demander que l'élément $x \in E \setminus \{0\}$ évite un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E . Ceci constitue le fil directeur des articles [13, 14]. Mais la variante la plus importante est celle qui permet de s'affranchir de la dépendance en le discriminant du corps de nombres. On recherche une solution x non nulle non pas dans E mais dans $E \otimes \overline{\mathbf{Q}}$. Un tel lemme de Siegel est dit *absolu*. Roy & Thunder ont obtenu un énoncé de ce type dans [31]. Nous présentons ici un raffinement de leur résultat, signalé par David & Philippon [7], qui se déduit d'une inégalité de Zhang relative aux minima successifs d'une variété arithmétique [40].

LEMME DE SIEGEL ABSOLU. — *Soit $\overline{E}$ un fibré adélique hermitien sur k , de dimension $\nu \geq 1$. Alors il existe $x \in (E \otimes \overline{\mathbf{Q}}) \setminus \{0\}$ tel que*

$$h_{\overline{E}}(x) \leq -\widehat{\mu}(\overline{E}) + \frac{1}{2} \log \nu.$$

L'énoncé de Roy & Thunder donne $(\nu - 1)/4 + \varepsilon$ au lieu de $\frac{1}{2} \log \nu$ lorsque $\overline{E}$ est pur. Avec la même hypothèse, Zhang montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E \otimes_k \overline{\mathbf{Q}}$ de hauteur plus petite que $-\widehat{\mu}(\overline{E}) + (H_\nu - 1)/2 + \varepsilon$, où $H_\nu = 1 + 1/2 + \dots + 1/\nu$ est le nombre harmonique (la constante $(1/2) \log \nu$ étant un majorant strict de $(H_\nu - 1)/2$ lorsque $\nu \geq 2$). *A priori* valide pour les fibrés adéliques hermitiens purs sur k , cet énoncé reste vrai pour les fibrés adéliques hermitiens grâce au corollaire 3.13 (et aux conséquences qui suivent).

Si, autrefois, dans les démonstrations de mesures d'indépendance linéaire de logarithmes, le discriminant du corps de nombres était absorbé par des termes plus gros, aujourd'hui les mesures sont devenues assez fines pour que ce discriminant devienne un facteur limitant. C'est la présence de ce discriminant qui explique pourquoi l'énoncé principal de [9] s'exprime au moyen d'un maximum sur deux quantités. Comme il supprime cette imperfection, le lemme de Siegel absolu a pris une grande importance ces dernières années, ainsi que le prouve son utilisation dans plusieurs articles récents de la théorie des formes linéaires de logarithmes [6, 1, 11]. Le fait que l'on ne maîtrise pas le (degré du) corps de nombres dans lequel vit la solution x est sans conséquence car, en définitive, l'on est amené à effectuer une somme sur les différents plongements de ce corps, somme d'où émerge directement $h_{\overline{E}}(x)$. Néanmoins quelques soucis techniques peuvent surgir.

Tout d'abord, la hauteur de $\overline{E}$ peut s'avérer difficile à évaluer avec précision. Si, comme dans le lemme de Siegel original, l'espace vectoriel E est défini par le système linéaire (4), la hauteur de $\overline{E}$ se calcule au moyen des mineurs maximaux de la matrice $A := (a_{i,j})_{i,j}$. En général, on estime la taille de ces mineurs avec l'inégalité d'Hadamard (le déterminant d'une famille de vecteurs est plus petit que le produit des normes hermitiennes de ces vecteurs), qui, *in fine*, fait ressortir la hauteur des $a_{i,j}$. Il arrive que les $a_{i,j}$ soient petits aux places archimédiennes (ce qui est très bien) mais avec un dénominateur trop grand aux places ultramétriques. L'astuce consiste alors à trouver un système

$$(5) \quad \forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \sum_{j=1}^{\nu} b_{i,j} x_j = 0,$$

équivalent à (4) et définissant ainsi le même espace vectoriel E , mais, où, cette fois-ci, les nombres algébriques $b_{i,j}$ sont petits aux places ultramétriques et de tailles quelconques aux autres places. Dans ce cas, la partie archimédienne de la hauteur de $\overline{E}$ est évaluée avec (4) et la partie ultramétrique avec (5). Cette technique fonctionne assez bien même si elle est parfois délicate à mettre en IJuvre (voir p. ex. la démonstration de la proposition 4.15 de [11]).

Une autre difficulté est que les coefficients $a_{i,j}$ qui se présentent naturellement peuvent ne pas être algébriques, même après renormalisation. Le système (4) ne possède alors en général aucune solution algébrique hormis $(0, \dots, 0)$. C'est pourquoi il est plus raisonnable de demander au lemme de fournir une solution algébrique $(x_1, \dots, x_{\nu})$ non nulle au système d'inéquations

$$\forall i \in \{1, \dots, \mu\}, \quad \left| \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j \right| \leq \varepsilon$$

(ici ε est un nombre réel strictement positif). Un énoncé qui garantit l'existence d'une solution algébrique non nulle à ce système d'inéquations est appelé *lemme de Siegel approché*. En voici un exemple⁽⁵⁾, extrait de l'article de Philippon & Waldschmidt [26], qui a servi à la construction de la fonction auxiliaire de plusieurs articles marquants de la théorie des formes linéaires de logarithmes [26, 25, 16, 17] (aussi utilisé dans [9]) :

LEMME DE SIEGEL APPROCHÉ. — Soit $(a_{i,j})$, $1 \leq i \leq \mu$, $1 \leq j \leq \nu$, une matrice de nombres complexes de rang ρ et A un nombre réel tels que

$$\max_{1 \leq i \leq \mu} \sum_{j=1}^{\nu} |a_{i,j}| \leq A.$$

Soit $H \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $\varepsilon \in]0, +\infty[$ tels que

$$\left(\frac{2\mu H A}{\varepsilon} + 1 \right)^{2\rho} < (H + 1)^\nu.$$

Alors il existe $(x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbf{Z}^\nu \setminus \{0\}$ tel que

$$\max_{1 \leq j \leq \nu} |x_j| \leq H \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq \mu} \left| \sum_{j=1}^{\nu} a_{i,j} x_j \right| \leq \varepsilon.$$

Tout comme pour le lemme de Siegel original, la démonstration repose sur le principe des tiroirs. S'il est facile de généraliser à un corps de nombres au moyen d'une $\mathbf{Q}$ -base $(\xi_1, \dots, \xi_D)$ de ce corps, ceci fait intervenir la hauteur de cette base. Le corps considéré est souvent le corps de nombres dans lequel vivent tous les nombres algébriques de la démonstration. En particulier, pour les formes linéaires de logarithmes, la hauteur de $(\xi_1, \dots, \xi_D)$ est liée aux paramètres $\log a$ et $\log b$. Pour faire disparaître la dépendance en le corps de nombres ambiant, l'on peut imaginer écrire un lemme de Siegel approché et *absolu*. Il s'avère qu'un lemme de Siegel (classique ou absolu) donne automatiquement un lemme de Siegel approché par *déformation des normes*⁽⁶⁾, comme nous allons l'expliquer maintenant.

Soit $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E},\sigma})_\sigma)$ et $\overline{F} = (F, (\|\cdot\|_{\overline{F},\sigma})_\sigma)$ des fibrés adéliques hermitiens sur un corps de nombres k . Soit S un ensemble fini (non vide) de plongements de k . Pour tout $\sigma \in S$, soit $\mathbf{a}_\sigma : E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \rightarrow F \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ une application $\mathbf{C}_p$ -linéaire et posons $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_\sigma)_{\sigma \in S}$. On considère sur $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ la norme tordue par $\mathbf{a}_\sigma$:

$$\forall x \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p, \quad \|x\|_{\overline{E}_\mathbf{a},\sigma} := \text{moy}_\sigma(\|x\|_{\overline{E},\sigma}, \|\mathbf{a}_\sigma(x)\|_{\overline{F},\sigma})$$

⁽⁵⁾ Cet exemple est dû en partie à Mignotte [21], qui s'est intéressé à la question dans les années 70. On pourra aussi consulter le § 1.3 du chapitre 1 de [36].

⁽⁶⁾ *A posteriori*, nous nous sommes rendu compte que cette idée était déjà en substance dans l'article [21] de Mignotte et qu'elle serait due à Mahler (voir [19]).

où, par commodité, on a noté moy_σ pour moy_p (le $p \in \mathcal{P}$ est celui correspondant à $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$). Si $\sigma \notin S$, on pose $\|\cdot\|_{\overline{E}_a, \sigma} := \|\cdot\|_{\overline{E}, \sigma}$. Le couple $\overline{E}_a = (E, (\|\cdot\|_{\overline{E}_a, \sigma}))$ forme un fibré pré-adélique hermitien sur k . Une condition suffisante pour qu'il soit adélique est que, pour tout $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ dans S , pour tout automorphisme continu $\iota: \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$, on a $\iota \circ \sigma \in S$ et les deux éléments de $F \otimes_{\iota \circ \sigma} \mathbf{C}_p$ que l'on obtient par les deux chemins du diagramme

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p & \xrightarrow{\mathbf{a}_\sigma} & F \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \\ \text{id} \otimes \iota \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \iota \\ E \otimes_{\iota \circ \sigma} \mathbf{C}_p & \xrightarrow{\mathbf{a}_{\iota \circ \sigma}} & F \otimes_{\iota \circ \sigma} \mathbf{C}_p \end{array}$$

sont de même norme. De plus, si $x \in E$, on a $h_{\overline{E}}(x) \leq h_{\overline{E}_a}(x)$ et $\|\mathbf{a}_\sigma(x)\|_{\overline{F}, \sigma} \leq \|x\|_{\overline{E}_a, \sigma}$ pour $\sigma \in S$. Dès lors, savoir majorer finement $h_{\overline{E}_a}(x)$, pour un vecteur x particulier, amène à établir un lemme de Siegel approché. On note $\|\mathbf{a}_\sigma\|$ la norme d'opérateur de $\mathbf{a}_\sigma$ (voir paragraphe 3.6) :

$$\|\mathbf{a}_\sigma\| := \sup \{ \|\mathbf{a}_\sigma(x)\|_{\overline{F}, \sigma} / \|x\|_{\overline{E}, \sigma} ; x \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \setminus \{0\} \}.$$

LEMME DE SIEGEL APPROCHÉ ABSOLU. — Soit k un corps de nombres de degré D et S un ensemble fini de plongements de k . Soit $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés adéliques hermitiens sur k . Pour tout $\sigma \in S$, soit $\mathbf{a}_\sigma: E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \rightarrow F \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ une application $\mathbf{C}_p$ -linéaire, de rang ρ_σ , et de norme d'opérateur $\|\mathbf{a}_\sigma\|$. On suppose que $\overline{E}_a$ est un fibré adélique hermitien. Alors il existe $x \in (E \otimes \mathbf{Q}) \setminus \{0\}$ tel que

$$h_{\overline{E}_a}(x) \leq \frac{1}{\nu D} \sum_{\sigma \in S} \rho_\sigma \log \text{moy}_\sigma(1, \|\mathbf{a}_\sigma\|) + \frac{1}{2} \log \nu - \widehat{\mu}(\overline{E}).$$

Une caractéristique importante du majorant est la présence des quotients ρ_σ/ν , qui seront petits dans le contexte des formes linéaires de logarithmes (voir proposition 6.13). Dans un souci d'efficacité, nous n'avons pas séparé les contributions des normes de x en les différents plongements de $\overline{\mathbf{Q}}$, en exprimant simplement le résultat en termes de hauteur (globale) de x . Par ailleurs une manière de procéder pour faire en sorte que $\overline{E}_a$ soit un fibré adélique hermitien est de considérer un ensemble S_0 de plongements $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ qui n'induisent pas la même valuation. Pour un plongement conjugué à σ , c'est-à-dire pour $\sigma' = \iota \circ \sigma$ avec ι automorphisme continu de $\mathbf{C}_p$, on choisit $\mathbf{a}_{\sigma'}$ de sorte que le diagramme (6) vérifie la condition d'isométrie et l'on prend $S = \{\sigma'; \sigma \in S_0\}$ (le cardinal de S est $\sum_{\sigma \in S_0} [k_\sigma: \mathbf{Q}_p]$).

4.2. Démonstration du lemme de Siegel approché absolu. — En vertu du lemme de Siegel absolu de Zhang appliqué à $\overline{E}_a$, il suffit de montrer que

$$-\widehat{\mu}(\overline{E}_a) \leq \frac{1}{\nu D} \sum_{\sigma \in S} \rho_\sigma \log \text{moy}_\sigma(1, \|a_\sigma\|) - \widehat{\mu}(\overline{E}).$$

Par définition du degré adélique, pour toute k -base $e_1, \dots, e_\nu$ de E , on a

$$-\widehat{\mu}(\overline{E}_a) + \widehat{\mu}(\overline{E}) = \frac{1}{\nu D} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \frac{\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E_a, \sigma}}}{\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E, \sigma}}}.$$

Dans cette somme, seuls les $\sigma \in S$ interviennent, les autres donnant des termes nuls. De plus, à σ fixé, chacun des quotients $\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E_a, \sigma}} / \|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E, \sigma}}$ est indépendant du choix de la base $e_1, \dots, e_\nu$ de $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$. Pour calculer ce quotient, supposons dans un premier temps que σ est ultramétrique et considérons un nombre réel $t \in]0, 1]$ et une base t -orthogonale $e_1, \dots, e_\nu$ de $E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ telle que $e_{\rho_\sigma+1}, \dots, e_\nu$ soit une base de $\ker a_\sigma$ [23, corollaire 2.3.21]. Alors, d'une part, comme la norme sur le déterminant est une norme quotient, on a

$$\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E_a, \sigma}} \leq \prod_{i=1}^{\nu} \|e_i\|_{\overline{E_a, \sigma}} \leq \left(\prod_{i=1}^{\nu} \|e_i\|_{\overline{E, \sigma}} \right) \text{moy}_\sigma(1, \|a_\sigma\|)^{\rho_\sigma}.$$

D'autre part, la base $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_\nu}, 1 \leq i_1, \dots, i_\nu \leq \nu\}$ de $(E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p)^{\otimes \nu}$ est t^ν -orthogonale [23, corollaire 10.2.10, (vi)]. Si un vecteur $x \in (E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p)^{\otimes \nu}$ a pour coordonnées $(x_{i_1, \dots, i_\nu})$ dans cette base alors son image dans $\det E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ est le vecteur $(\sum_{s \in \mathfrak{S}_\nu} \varepsilon(s) x_{s(1), \dots, s(\nu)}) e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu$. On en déduit que, pour tout $x \in (E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p)^{\otimes \nu}$, la norme $\|e_1 \otimes \dots \otimes e_\nu + x\|_{\overline{E}^{\otimes \nu}, \sigma}$ est supérieure à

$$t^\nu \left(\prod_{i=1}^{\nu} \|e_i\|_{\overline{E, \sigma}} \right) \max_{s \in \mathfrak{S}_\nu \setminus \{\text{id}\}} \{ |1 + x_{1, \dots, \nu}|_p, |x_{s(1), \dots, s(\nu)}|_p \}.$$

Si, de plus, l'image de x dans $\det E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ est nulle alors $\sum_{s \in \mathfrak{S}_\nu} \varepsilon(s) x_{s(1), \dots, s(\nu)} = 0$. De cette relation et par inégalité ultramétrique, l'on déduit que le maximum ci-dessus est supérieur à 1 puis que

$$\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E, \sigma}} \geq t^\nu \prod_{i=1}^{\nu} \|e_i\|_{\overline{E, \sigma}}.$$

On a donc

$$\frac{\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E_a, \sigma}}}{\|e_1 \wedge \dots \wedge e_\nu\|_{\overline{\det E, \sigma}}} \leq t^{-\nu} \text{moy}_\sigma(1, \|a_\sigma\|)^{\rho_\sigma}.$$

Lorsque σ est archimédien, la même inégalité reste valide en choisissant la base $(e_1, \dots, e_\nu)$ orthonormée (la preuve se simplifie car $t = 1$ convient). Ceci

conduit à l'estimation

$$-\widehat{\mu}(\overline{E}_a) + \widehat{\mu}(\overline{E}) \leq \frac{1}{\nu D} \sum_{\sigma \in S} \rho_{\sigma} \log \text{moy}_{\sigma}(1, \|\mathbf{a}_{\sigma}\|) - \frac{\text{card } S}{D} \log t.$$

On conclut en faisant tendre t vers 1.

5. Canevas de la démonstration du théorème 2.1

5.1. — Nous utilisons la méthode de Baker non pas avec des fonctions auxiliaires, ni avec des déterminants d'interpolation, ni avec la méthode des pentes. En réalité, nous faisons un mélange entre la première et la dernière de ces méthodes, c'est-à-dire que nous passons par la construction d'une section auxiliaire d'un certain fibré adélique hermitien. À chaque étape de la démonstration nous conservons l'aspect intrinsèque des données. De la sorte nous bénéficions de la souplesse de la méthode des fonctions auxiliaires et de la possibilité d'accéder naturellement aux constantes numériques de la méthode des pentes. Concrètement, après avoir modifié les données initiales de manière à être en mesure d'utiliser la réduction d'Hirata-Kohno et le procédé de changement de variables de Chudnovsky, nous construisons un fibré adélique hermitien $\overline{E}$. L'espace vectoriel E sous-jacent est un espace de polynômes en plusieurs variables, auquel sont adjointes des normes en tous les plongements de k . Ce fibré adélique $\overline{E}$ a la particularité d'avoir une σ_0 -norme « tordue », ce qui constitue une des nouveautés de ce texte. Nous construisons alors un élément $s \neq 0$ de E de petite hauteur au moyen du lemme de Siegel absolu. Le choix des paramètres et le lemme de multiplicités de Philippon assurent qu'il existe un jet de s le long de W (sous-espace construit à partir de W_0) en un multiple de $\mathfrak{p} = (u_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ qui est non nul. Ensuite nous évaluons la hauteur de ce jet, en distinguant les normes relatives aux plongements ultramétriques de celles relatives aux plongements archimédiens. Le comportement du jet en σ_0 et tous ses conjugués est étudié à part. La majoration de sa norme repose sur une extrapolation sur les dérivations (cas périodique) ou sur les multiples de $\mathfrak{p}$ (cas non périodique), qui a été préparée par la construction de s . C'est à cet endroit qu'apparaissent les valeurs absolues des formes linéaires que nous cherchons à évaluer. Pour conclure, nous utilisons une variante de l'inégalité de Liouville (lemme 3.6) pour minorer la hauteur de ce jet, qui fait intervenir la pente maximale arakelovienne de l'espace naturel dans lequel vit le jet considéré.

5.2. — Les considérations ci-dessus s'appliquent en réalité à l'énoncé suivant (les notations sont celles du théorème 2.1).

THÉORÈME 5.1. — *Supposons que sont vérifiées les trois conditions suivantes :*

- a) *La famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur $\mathbf{Q}$,*

- b) la famille $\{\ell_1, \dots, \ell_t\}$ est libre sur k ,
 c) si $p_0 = \infty$ alors $|(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})|_{2,\sigma_0} \leq 1$.

Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, on a $\Lambda_i \neq 0$ et

$$\log \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|_{p_0} \geq -(10n)^{58n^2/t} \mathbf{a}^{1/t} (\log b + \mathbf{a} \log \mathfrak{e}) \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}}\right)^{1/t}.$$

De plus, si $t = 1$ et $\beta_{1,0} \neq 0$, l'hypothèse c) peut être supprimée et la quantité $\log b + \mathbf{a} \log \mathfrak{e}$ dans le minorant peut être remplacée par $\log b + \log \mathfrak{e} + D \log \mathbf{a}$.

La première assertion est le théorème de Baker qui affirme que la famille $\{1, u_1, \dots, u_n\}$ reste libre sur k . Le théorème 1.1 donné dans l'introduction découle immédiatement de l'énoncé 5.1 en choisissant $a_j = a$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et $\beta_{i,0} = 0$ pour $i \in \{1, \dots, t\}$.

6. Démonstration du théorème 5.1

Les paragraphes 6.1 à 6.12 portent sur la démonstration du théorème 5.1.

6.1. Cas particulier. — Le théorème 5.1 est vrai si $n = 1$, $p_0 = \infty$ et $\beta_{1,0} = 0$. En effet, il n'y a alors qu'une seule forme linéaire $\Lambda_1 = \beta_{1,1}u_1$ et $t = 1$. L'inégalité de Liouville donne $\log |\beta_{1,1}|_{\sigma_0} \geq -Dh(\beta_{1,1})$ et, si $\alpha_1 \neq 1$,

$$\log |\alpha_1 - 1|_{\sigma_0} \geq -Dh(\alpha_1 - 1) \geq -D(h(\alpha_1) + \log 2).$$

De plus, puisque σ_0 est archimédienne, on a

$$|\alpha_1 - 1|_{\sigma_0} = \left| u_1 \int_0^1 e^{tu_1} dt \right|_{\sigma_0} \leq |u_1|_{\sigma_0} \int_0^1 e^t dt \leq 2|u_1|_{\sigma_0}$$

lorsque $|u_1|_{\sigma_0} \leq 1$. Dans ce cas, on a $\alpha_1 \neq 1$ et des estimations précédentes découlent

$$\begin{aligned} \log |\Lambda_1|_{\sigma_0} &\geq -\log b - D(\log a_1 + 2 \log 2) \\ &\geq -3(\log b + \log \mathfrak{e}) \left(1 + \frac{D \log a_1}{\log \mathfrak{e}}\right). \end{aligned}$$

Cette minoration reste vraie si $|u_1|_{\sigma_0} \geq 1$ et le théorème 5.1 est démontré. Dans toute la suite, on supposera donc que si $n = 1$ et $p_0 = \infty$ alors $\beta_{1,0} \neq 0$.

6.2. Préparatifs. — Avant de commencer la démonstration du théorème 5.1, il nous est utile de modifier les données brutes du paragraphe 2.1.

Rappelons que W_0 désigne le sous-espace vectoriel de k^n intersection des noyaux des formes linéaires ℓ_i , $i \in \{1, \dots, t\}$. Soit G_0 le spectre de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}((k^n/W_0)^\vee)$. C'est un schéma en groupes affine sur $\text{Spec } k$, dont l'espace tangent à l'origine s'identifie canoniquement au quotient k^n/W_0 . Notons G le k -groupe algébrique linéaire $G_0 \times \mathbf{G}_m^n$. Soit $\lambda : k^n \rightarrow k^n/W_0$ la projection canonique et W le sous-espace de l'espace tangent à l'origine $t_G = (k^n/W_0) \oplus k^n$ défini comme l'ensemble des vecteurs de la forme $(\lambda(y), y)$ avec $y \in k^n$. Le fibré adélique hermitien $(k^n, |\cdot|_2)$ confère à k^n/W_0 et à t_G des structures adéliques hermitiennes, respectivement par quotient et par somme directe orthogonale. Nous noterons $\overline{k^n/W_0}$ et $\overline{t_G}$ les fibrés adéliques hermitiens ainsi obtenus. Comme sous-espace vectoriel de $(k^n, |\cdot|_2)$, l'espace W_0 hérite d'une structure de fibré adélique hermitien $\overline{W_0}$ et l'on note $h(\overline{W_0})$ sa hauteur d'Arakelov au sens du § 3. Par hermitianité, cette quantité est aussi le degré d'Arakelov de $\overline{k^n/W_0}$. À une constante qui ne dépend que de n près, elle est bornée par $\max_{i,j} \{1, h(\beta_{i,j})\}$, terme qui apparaît dans la définition de $\log b$ du théorème 2.1. Plus précisément on a la

PROPOSITION 6.1. — *La hauteur d'Arakelov de $\overline{W_0}$ vérifie l'inégalité*

$$D \max \{1, h(\overline{W_0})\} \leq n^3 \log b.$$

Démonstration. — Si $n = t$ alors $W_0 = \{0\}$ et la proposition est vraie. Nous supposons maintenant $t \leq n - 1$. L'application $k^n \rightarrow k^t$ qui à $z = (z_1, \dots, z_n)$ associe $(\ell_1(z), \dots, \ell_t(z))$ se factorise en un isomorphisme $\varphi : k^n/W_0 \rightarrow k^t$ de k -espaces vectoriels. Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$ et pour tout plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la majoration

$$|\ell_i(z_1, \dots, z_n)|_\sigma \leq \|\ell_i\|_{(k^n, |\cdot|_2)^\vee, \sigma} \|\bar{z}\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma}$$

avec

$$\|\ell_i\|_{(k^n, |\cdot|_2)^\vee, \sigma} = \text{moy}_p(|\beta_{i,1}|_\sigma, \dots, |\beta_{i,n}|_\sigma).$$

Par conséquent, la norme d'opérateur $\|\varphi\|_\sigma$ de φ entre $\overline{k^n/W_0}$ et $(k^t, |\cdot|_2)$ est plus petite que $|(\beta_{i,j})_{i,j}|_{2,\sigma}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} h(\overline{W_0}) &= \widehat{\deg}_n(\overline{k^n/W_0}) \leq \widehat{\deg}_n(k^t, |\cdot|_2) + \frac{t}{D} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \|\varphi\|_\sigma \\ &\leq 0 + t h_{(k^{nt}, |\cdot|_2)}((\beta_{i,j})_{i,j}) \\ &\leq \frac{t}{2} \log(nt) + nt^2 \frac{\log b}{D} \end{aligned}$$

(la première inégalité est une inégalité de pentes classique, voir par exemple le lemme 6.3 de [12]). On conclut au moyen des majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} \log(nt) + nt^2 &\leq \frac{(n-1)}{2} \log(n(n-1)) + n(n-1)^2 \\ &\leq n \log n + n^3 - n(2n-1) \\ &\leq n^3 - n^2 + n \leq n^3 \end{aligned}$$

car $\log n \leq n$. □

L'isomorphisme φ défini ci-dessus permet de définir $u'_0 := \varphi^{-1}(u_0) \in k^n/W_0$. Dans la suite, nous confondrons u'_0 avec u_0 . Nous ne garderons que la notation u_0 , le contexte permettant de distinguer s'il s'agit de $u'_0 \in k^n/W_0$ ou bien de $u_0 \in k^t$.

Par ailleurs, plutôt que minorer $\max \{|\Lambda_i|_{p_0}; 1 \leq i \leq t\}$, nous allons minorer la norme de $u_0 - \lambda(u)$, norme relative à k^n/W_0 au plongement σ_0 . Ceci est rendu possible par le résultat suivant :

PROPOSITION 6.2. — On a $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma_0} \leq b^{n^3} (\sqrt{t})^{\epsilon_0} \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|_{p_0}$.

Démonstration. — Si $n = t$ alors $W_0 = \{0\}$ et $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma_0} = |(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)|_{2, \sigma_0}$. La proposition est vraie dans ce cas et, dans la suite, nous supposons $t \leq n-1$. Comme $\varphi(u_0 - \lambda(u)) = -(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$ on a

$$\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma_0} \leq \|\varphi^{-1}\|_{\sigma_0} |(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)|_{2, \sigma_0} \leq \|\varphi^{-1}\|_{\sigma_0} (\sqrt{t})^{\epsilon_0} \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|_{p_0}$$

où, si σ est un plongement de k , $\|\varphi^{-1}\|_{\sigma}$ désigne la norme d'opérateur de $\varphi_{\sigma}^{-1} : (\mathbf{C}_p^t, |\cdot|_{2, \sigma}) \rightarrow (k^n/W_0 \otimes_{\sigma} \mathbf{C}_p, \|\cdot\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma})$. On a $\|\varphi^{-1}\|_{\sigma} \leq \|\varphi\|_{\sigma}^{t-1} \|\det \varphi\|_{\sigma}^{-1}$ (voir [12, lemme 7.2] p. ex.) et $\|\det \varphi\|_{\sigma} \leq \|\varphi\|_{\sigma}^t$ par $1 \leq \|\varphi\|_{\sigma} \|\varphi^{-1}\|_{\sigma}$. On en déduit

$$h(\overline{W_0}) = \widehat{\deg_n \overline{k^n/W_0}} = h(\det \varphi) \leq \frac{t}{D} \sum_{\sigma} \log \max(1, \|\varphi\|_{\sigma}) - \frac{\log \|\varphi^{-1}\|_{\sigma_0}}{D}.$$

La norme $\|\varphi\|_{\sigma}$ est inférieure à $|(\beta_{i,j})_{i,j}|_{2, \sigma}$ et $h(\overline{W_0}) \geq -(n-t) \widehat{\mu}_{\max}(\overline{k^n}) = 0$. On en déduit

$$\begin{aligned} \log \|\varphi^{-1}\|_{\sigma_0}^{1/D} &\leq \frac{t}{D} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p} \log \max(1, |(\beta_{i,j})_{i,j}|_{2, \sigma}) \\ &\leq t(\log \sqrt{nt} + nt) \frac{\log b}{D}. \end{aligned}$$

On conclut en majorant $t(\log \sqrt{nt} + nt)$ par n^3 comme nous l'avons fait à la fin de la proposition 6.1, en tenant compte de $t \leq n-1$. □

6.3. Choix des paramètres. — Soit $C_0 := (10n)^{6n}$. Posons $y := 0$ si $t = 1$ et $\beta_{1,0} \neq 0$ et $y := 1$ sinon. Soit $S_0 := C_0 \mathbf{a}$ et $S := C_0^3 \mathbf{a}$. Soit $U_0 > 0$ un nombre réel défini un peu plus loin (voir (9)). Soit $\widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n, \widetilde{T}, \widetilde{T}_0$ les nombres réels donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_0 &:= \frac{C_0 U_0}{S \log \mathfrak{e}}, & \widetilde{T} &:= C_0^2 \widetilde{T}_0 = \frac{U_0}{\mathbf{a} \log \mathfrak{e}}, \\ \widetilde{D}_0 &:= \frac{U_0}{\log b + D \log S + S^y \log \mathfrak{e}}\end{aligned}$$

(la présence du paramètre y au dénominateur explique le raffinement donné dans le théorème 5.1 lorsqu'il n'y a qu'une seule forme linéaire, non homogène) et

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \widetilde{D}_j := \frac{U_0}{S \log \mathfrak{e} + D S \log a_j}.$$

Notons $\bar{k}$ une clôture algébrique de k dans $\mathbf{C}_{p_0}$. Un sous-groupe algébrique connexe G' de G se décompose sur $\bar{k}$ en un produit $G'_0 \times \mathbf{G}'_{\mathbf{m}}$ avec G'_0 (*resp.* $\mathbf{G}'_{\mathbf{m}}$) un sous-groupe algébrique connexe de G_0 (*resp.* $\mathbf{G}_{\mathbf{m}}^n$). Posons

$$(7) \quad t' := \dim G'_0, \quad n' := \dim \mathbf{G}'_{\mathbf{m}}, \quad r' := \operatorname{codim}_G G', \quad \lambda' := \operatorname{codim}_W (W \cap t_{G'}).$$

De simples considérations d'algèbre linéaire montrent que

$$(8) \quad r' - \lambda' = t - \dim(t_{G'_0} + \lambda(t_{\mathbf{G}'_{\mathbf{m}}})) \leq \min \{t - t', n - n'\}.$$

Par ailleurs, les groupes algébriques G_0 et G admettent des compactifications naturelles $\mathbf{X}_0 := \mathbf{P}(k \oplus (k^n/W_0)^\vee)$ et $\mathbf{X} := \mathbf{X}_0 \times (\mathbf{P}_k^1)^n$. À une sous-variété V de $\mathbf{X}_{\bar{k}}$ est associé un polynôme dit de Hilbert-Samuel H_V à $n+1$ variables (en prenant l'adhérence de Zariski de V dans $\mathbf{X}_{\bar{k}}$). Soit $\mathcal{H}(V; X_0, \dots, X_n)$ la partie homogène de plus haut degré de H_V multipliée par $(\dim V)!$. Les coefficients de $\mathcal{H}$ sont des entiers positifs de somme égale au degré de V . Par exemple, on a $\mathcal{H}(G; X_0, \dots, X_n) = \frac{(n+t)!}{t!} X_0^t X_1 \cdots X_n$ (pour les propriétés de $\mathcal{H}$ nous renvoyons au texte de Roy [38, chapitre 5]). Posons

$$\mathbf{p} := (u_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{et} \quad \Sigma_{\mathbf{p}}(S) := \{0_G, \mathbf{p}, 2\mathbf{p}, \dots, S\mathbf{p}\}.$$

Lorsque $W + t_{G'} \neq t_G$ (et en particulier $t' \neq t$), on pose

$$x(G') := \left(\frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\bar{k})}{G'(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G'; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)}{C_0 \mathcal{H}(G; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \right)^{\frac{1}{t-t'}}.$$

Soit x le minimum des nombres réels $x(G')$ lorsque G' parcourt les sous-groupes algébriques connexes de $G_{\bar{k}}$ tels que $W \otimes_k \bar{k} + t_{G'} \neq t_{G_{\bar{k}}}$ (l'existence de x découle d'un argument standard, expliqué par exemple à la page 734 de [10]). Soit $\widetilde{G} = \widetilde{G}_0 \times \widetilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{m}}$ un sous-groupe algébrique vérifiant ces conditions et tel que

$x = x(\widetilde{G})$, auquel on adjoint les entiers $\widetilde{t}, \widetilde{n}, \widetilde{r}, \widetilde{\lambda}$ définis par (7). Nécessairement on a $\widetilde{n} < n$ car sinon $t_{\widetilde{G}} + W \otimes_k \bar{k} = t_{G_k}$. Notons $T := [\widetilde{T}]$, $D_0 := [x\widetilde{D}_0]$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $D_j := [\widetilde{D}_j]$. L'homogénéité de la fonction $\mathcal{H}$ permet de voir que la quantité $U_0^{(r' - \lambda')/(t - t')} x(G')$ ne dépend pas de U_0 , lorsque G' varie parmi les sous-groupes autorisés. En observant que $\{0\}$ fait partie de ces sous-groupes, nous pouvons choisir U_0 de sorte que $x(\{0\}) \leq 1$ (et, en particulier, on a $x \in]0, 1]$). Concrètement, la condition $x(\{0\}) = 1$ est satisfaite si l'on choisit U_0 égal à

$$(9) \quad C_0^{(3n-1)/t} \left\{ \frac{t! \operatorname{card}(\Sigma_p(S))}{(n+t)!} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}} \right) \right\}^{1/t} \times (\log b + D \log S + S^y \log \mathfrak{e}).$$

On notera que $\operatorname{card}(\Sigma_p(S)) = S+1$ sauf, éventuellement, si toutes les conditions $p_0 = \infty$, $n = 1$, $\beta_{1,0} = 0$ et $u_1 \in \mathbf{Q}i\pi$ sont remplies. Mais ce cas est exclu grâce à l'hypothèse émise à la fin du § 6.1. On a donc $\operatorname{card}(\Sigma_p(S)) = S+1$. L'expression (9) de U_0 permet de justifier les estimations suivantes.

PROPOSITION 6.3. — *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) $C_0 \max \{1, \widetilde{D}_0/S^{1-y}, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n\} \leq \widetilde{T}_0$,
- (ii) $D_0 \neq 0$ et $C_0 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{\widetilde{D}_j\}$ (en particulier l'un au moins des D_j , $1 \leq j \leq n$, n'est pas nul),
- (iii) $D \log \mathfrak{a} \leq 2\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}$,
- (iv) $T \log(4\widetilde{D}_0) \leq (7n \log C_0)U_0/D$.

Démonstration. — Si les inégalités (i) et (ii) se vérifient aisément à partir des valeurs des paramètres, il n'est pas entièrement évident que D_0 est non nul, en raison du x devant $\widetilde{D}_0$. Pour voir cela, on reprend l'argumentation du lemme 5.1, (iii), de [10] qui repose sur une propriété de décroissance d'un quotient de fonctions $\mathcal{H}$ et sur l'inégalité $\widetilde{\lambda} \geq n - \widetilde{n} \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
 (x\widetilde{D}_0)^{t-\widetilde{t}} &\geq \frac{\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \mathcal{H}(\widetilde{G}; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n) \widetilde{D}_0^{t-\widetilde{t}}}{C_0 \mathcal{H}(G; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \\
 &\geq \frac{\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}}}{C_0 \left(\frac{(n+t)!}{t!} \right) \max_{1 \leq j \leq n} \{\widetilde{D}_j\}^{n-\widetilde{n}}} \\
 &\geq \frac{C_0^{3\widetilde{\lambda}-1}}{(n+t)!} \quad (\text{grâce à (i)}).
 \end{aligned}$$

La valeur de C_0 entraîne alors $(x\widetilde{D}_0)^{t-\widetilde{t}} \geq 1$ puis $D_0 \geq 1$. Venons-en maintenant à (iii) et (iv) qui requièrent aussi quelques détails. Tout d'abord, on a

$$\log \mathfrak{a} = \log \left(\frac{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D} \right) + \log \left(\frac{D}{\log \mathfrak{e}} \right) \leq \frac{2\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D}$$

(car $\log x \leq x$), ce qui donne (iii). Par ailleurs, les définitions de T et $\widetilde{D}_0$ combinées avec la valeur (9) de U_0 donnée ci-dessus impliquent

$$T \log(4\widetilde{D}_0) \leq \frac{U_0}{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}} \log \left(C_0^{3n+3} \mathfrak{a} \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}} \right) \right).$$

En majorant le dernier produit par

$$\left(1 + \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log \prod_{j=1}^n a_j \right)^n \leq \left(1 + \exp \left\{ \frac{2\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D} \right\} \right)^n$$

on a

$$T \log(4\widetilde{D}_0) \leq \frac{U_0}{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}} \left((3n+3) \log C_0 + \log \mathfrak{a} + 3n \frac{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D} \right).$$

On utilise alors (iii) pour majorer $\log \mathfrak{a}$ et on obtient

$$T \log(4\widetilde{D}_0) \leq \left(3n+3 + \frac{3n+2}{\log C_0} \right) \frac{(\log C_0) U_0}{D}.$$

La valeur de C_0 permet de conclure. $\square$

Désignons par Ω_{σ_0} l'ensemble $\{0\} \times (2i\pi\mathbf{Z})^n$ si σ_0 est archimédien et l'ensemble $\{0\}$ sinon.

DÉFINITION 6.4. — Nous dirons que nous sommes dans le *cas périodique* s'il existe un entier $m \in \{1, \dots, (n+t)S\}$ tel que $m(u_0, u) \in t_{\widetilde{G}}(\mathbf{C}_{p_0}) + \Omega_{\sigma_0}$, et que nous sommes dans le *cas non périodique* dans le cas contraire.

REMARQUES 6.5. — (i) Si $t = 1$ et $\beta_{1,0} \neq 0$ alors nous sommes nécessairement dans le cas non périodique car sinon on aurait $\widetilde{G}_0 = G_0$, ce qui impliquerait $W \otimes_k \bar{k} + t_{\widetilde{G}} = t_{G_{\bar{k}}}$ par (8) et contredirait la définition de $\widetilde{G}$. Comme l'hypothèse c) du théorème 5.1 n'est utilisée que dans le cas périodique (§ 6.11.2), elle n'est donc pas nécessaire lorsque $t = 1$ et $\beta_{1,0} \neq 0$.
(ii) Comme la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur $\mathbf{Q}$, être dans le cas périodique implique que le plongement σ_0 est archimédien et que la famille $\{2i\pi, u_1, \dots, u_n\}$ est liée sur $\mathbf{Q}$ (c'est-à-dire $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ multiplicativement dépendants). Comme il ne peut exister qu'une seule relation, à multiplication par un scalaire non nul près, entre $2i\pi$ et les u_j (sinon existerait une relation non triviale entre les u_j), le groupe $\widetilde{\mathbf{G}}_{\mathbf{m}}$ est de dimension $n-1$ et son espace tangent contient W_0 .

Dans le cas périodique, la lettre Υ désigne l'ensemble des couples (m, τ) avec $m \in \{0, 1, \dots, (n+t)S\}$ et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ qui vérifie $\sum_{j=1}^n \tau_j \leq 2(n+t)T$ et $\tau_n \leq T_0$. Dans le cas non périodique, Υ est l'ensemble des couples (m, τ) avec $m \in \{0, 1, \dots, S_0 - 1\}$ et $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ qui vérifie $\sum_{j=1}^n \tau_j \leq 2(n+t)T$. Dans les deux cas, nous notons μ le cardinal de Υ .

6.4. Compléments au cas périodique. — Le groupe algébrique $\widetilde{\mathbf{G}}_m$ est de dimension $\tilde{n} \leq n - 1$. En particulier, comme $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre sur $\mathbf{Q}$ on a $u \notin t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}_{p_0})$. Par conséquent les vecteurs (u_0, u) et $(\lambda(u), u)$ n'appartiennent pas à l'espace tangent du groupe algébrique $\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{C}_{p_0})$. L'intersection $W \cap t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C})$ est donc un sous-espace strict de W (car ce dernier contient $(\lambda(u), u)$). Si σ_0 est archimédien, fixons alors une base *orthonormée* $w := (w_1, \dots, w_n)$ de $W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$ qui provient de $W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{R}$ lorsque σ_0 est un plongement réel et qui possède en outre les deux propriétés suivantes :

- (i) $(w_1, \dots, w_n)$ est une base de $(W \cap t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C})) \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$ (le n gothique est la dimension de $W \cap t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C})$),
- (ii) si $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}_{p_0}^n$ désigne le vecteur des coordonnées de $(\lambda(u), u)$ dans la base $(w_1, \dots, w_n)$ alors $|u_n|_{p_0} = \max \{|u_j|_{p_0}; n+1 \leq j \leq n\}$.

Dans le cas périodique (et donc σ_0 archimédien), l'on sait minorer $|u_n|_{p_0}$ de la manière suivante. Il existe un entier $m \in \{1, \dots, (n+t)S\}$, $x \in t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C})$ et $\omega \in (2i\pi\mathbf{Z})^n \setminus \{0\}$ tels que $m(u_0, u) = x + (0, \omega)$. Soit d_{σ_0} la distance sur $t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C})$ induite par la norme $\|\cdot\|_{t_{\widetilde{\mathbf{G}}}, \sigma_0}$. Comme

$$d_{\sigma_0}((\lambda(u), u), t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C})) \leq \left| \sum_{i=n+1}^n u_i w_i \right|_2 \leq \sqrt{n} |u_n|_{p_0},$$

le nombre $|u_n|_{p_0}$ est minoré par

$$\begin{aligned} \frac{d_{\sigma_0}(m(\lambda(u), u), t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C}))}{m\sqrt{n}} &= \frac{d_{\sigma_0}((m(\lambda(u) - u_0), \omega), t_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{C}))}{m\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{d_{\sigma_0}(\omega, t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))}{(n+t)S\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

À ce stade, nous aurons besoin d'un résultat que l'on trouve en substance dans [2] et de manière plus explicite dans la démonstration de la proposition 6.1 de [28]. Pour $x \in \mathbf{R}^n$, on note $|x|_1$ la somme des valeurs absolues des composantes de x .

LEMME 6.6. — *Soit H un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{G}_m^n$, de dimension $h \in \{1, \dots, n-1\}$. Alors il existe une famille libre $\{h_i := (h_{i,1}, \dots, h_{i,n}); 1 \leq i \leq n-h\}$ de $\mathbf{Z}^n$ telle que*

- (i) $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{G}_m^n; \forall i \in \{1, \dots, n-h\}, \prod_{j=1}^n x_j^{h_{i,j}} = 1\}$

- (ii) $\prod_{i=1}^{n-h} |h_i|_1 \leq \frac{(n-h)!}{h!} \deg H$ (le degré est relatif au plongement usuel $\mathbf{G}_m^n \hookrightarrow (\mathbf{P}^1)^n$).

En utilisant ce lemme, nous allons minorer $d_{\sigma_0}(\omega, t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))$ de la manière suivante. Ce lemme appliqué à $H = \widetilde{\mathbf{G}}_m$, qui est de dimension $n-1$ d'après la remarque 6.5 (ii), donne l'existence d'un vecteur h de $\mathbf{Z}^n$ qui forme une base de l'orthogonal de $t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C})$ dans $(\mathbf{C}^n, |\cdot|_{2,\sigma_0})$ avec $|h|_1 \leq (\deg \widetilde{\mathbf{G}}_m)/(n-1)!$. Ainsi la projection ω' de ω sur cet orthogonal est de norme égale à $d_{\sigma_0}(\omega, t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C}))$. Par Cauchy-Schwarz, le produit hermitien $\omega.h = \omega'.h$ est de valeur absolue inférieure à $|h|_{2,\sigma_0} |\omega'|_{2,\sigma_0}$. De plus ce produit est non nul car $\omega \notin t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C})$ et il appartient à $2i\pi\mathbf{Z}$. Comme $|h|_{2,\sigma_0} \leq |h|_1$, on en déduit l'inégalité

$$d_{\sigma_0}(\omega, t_{\widetilde{\mathbf{G}}_m}(\mathbf{C})) \geq \frac{2\pi(n-1)!}{\deg \widetilde{\mathbf{G}}_m}$$

puis

$$|u_n| \geq \left(\frac{2\pi(n-1)!}{(n+t)\sqrt{n}} \right) \frac{1}{S \deg \widetilde{\mathbf{G}}_m} \geq \left(\frac{\pi(n-1)!}{n\sqrt{n}} \right) \frac{1}{S \deg \widetilde{\mathbf{G}}_m}$$

car $t \leq n$. On vérifie alors que le premier quotient à droite est supérieur à 1 ce qui conduit à l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.7. — Dans le cas périodique, on a $|u_n|^{-1} \leq S \deg \widetilde{\mathbf{G}}_m$.

Pour être utile, cette proposition devra être couplée avec le résultat suivant.

PROPOSITION 6.8. — Dans le cas périodique, on a $\deg \widetilde{\mathbf{G}}_m \leq (n+t)! \widetilde{D}_0 / (C_0^2 t!)$.

Démonstration. — Par définition de $\widetilde{G}$, on a $x(\widetilde{G}) \leq x(\{0\}) \leq 1$ et la définition de $x(\widetilde{G})$ entraîne alors la majoration

$$\frac{\widetilde{T}^\lambda \mathcal{H}(\widetilde{G}; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)}{C_0 \mathcal{H}(G; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \leq 1.$$

En décomposant la fonction $\mathcal{H}$ sur les parties G_0 et $\mathbf{G}_m^n$ et en utilisant la décroissance des fonctions partielles

$$x_i \mapsto \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; \widetilde{D}_0, \dots, x_i, \dots, \widetilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G; \widetilde{D}_0, \dots, x_i, \dots, \widetilde{D}_n)},$$

l'inégalité devient

$$(10) \quad \widetilde{T}^\lambda \deg \widetilde{\mathbf{G}}_m \leq \frac{C_0(n+t)!}{t!} (\widetilde{D}_0)^{t-\widetilde{t}} \max(\widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n)^{n-\widetilde{n}}.$$

Comme $\dim \widetilde{\mathbf{G}}_m = \widetilde{n} = n - 1$, on a $t - \widetilde{t} + 1 = \widetilde{r} \leq \widetilde{\lambda} + 1$ (formule (8)). De (10) on tire alors la majoration

$$\left(\frac{\widetilde{T}}{\max(\widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \right)^{\widetilde{\lambda}} \leq \frac{C_0(n+t)! \widetilde{D}_0}{t! \deg \widetilde{\mathbf{G}}_m}.$$

Si $y = 1$ la proposition 6.8 découle de $\widetilde{T} \geq C_0^3 \max(\widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)$ (proposition 6.3, (i)). Si $y = 0$ on a $t = 1$ par définition de y et, en utilisant $\widetilde{\lambda} \geq 1$ et $\widetilde{t} = 0$, l'inégalité (10) se simplifie en

$$\frac{\widetilde{T}}{\max(\widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n)} \leq \frac{C_0(n+t)! \widetilde{D}_0}{t! \deg \widetilde{\mathbf{G}}_m}.$$

Le minorant est supérieur à C_0^3 et la proposition s'en déduit. $\square$

6.5. Lemme de multiplicités. — Au § 3.7, nous avons introduit la notion de polynôme multihomogène. Elle va nous permettre de définir un espace vectoriel où se trouvera la section auxiliaire du § 6.9. Soit $E_0 := k \oplus (k^n/W_0)$ et, pour $j \in \{1, \dots, n\}$, $E_j := k \oplus k$. Posons

$$E := S^{D_0}(E_0^\vee) \otimes_k \bigotimes_{j=1}^n S^{D_j}(E_j^\vee).$$

Pour un plongement $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, soit $s \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ et considérons $F_{s,\sigma}: (k^n/W_0) \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \times \prod_{j=1}^n \mathcal{J}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ l'application qui à $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ associe

$$(11) \quad F_{s,\sigma}(z_0, z_1, \dots, z_n) = s((1, z_0), (1, e^{z_1}), \dots, (1, e^{z_n})).$$

DÉFINITION 6.9. — Soit $\ell \in \mathbf{N}$ et $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in G(\mathbf{C}_p)$. On dit qu'un polynôme $s \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ s'annule au point x à l'ordre ℓ le long de W si l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto s((1, x_0 + \lambda(z_1, \dots, z_n)), (1, x_1 e^{z_1}), \dots, (1, x_n e^{z_n}))$$

s'annule à l'ordre ℓ en $(0, \dots, 0)$, *i.e.* si la série formelle en les variables $z_1, \dots, z_n$ définie par cette application est un élément de l'idéal $(z_1, \dots, z_n)^\ell$ de $\mathbf{C}_p[[z_1, \dots, z_n]]$.

Si le point x est l'image du vecteur $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in (k^n/W_0) \otimes_\sigma \mathbf{C}_p \times \prod_{j=1}^n \mathcal{J}_p$ par l'application exponentielle de $G(\mathbf{C}_p)$ alors dire que s s'annule au point x à l'ordre ℓ le long de W équivaut à dire que l'application

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto F_{s,\sigma}(z_0 + \lambda(z_1, \dots, z_n), z_1 + z_1, \dots, z_n + z_n)$$

s'annule à l'ordre ℓ au point $(0, \dots, 0)$.

Passons maintenant au résultat principal de ce paragraphe.

PROPOSITION 6.10. — *Aucun élément non nul de $E \otimes_{\sigma_0} \bar{k}$ ne s'annule le long de W à l'ordre $(n+t)T$ en tous les points de l'ensemble $\{0_G, \mathbf{p}, \dots, (n+t)S\mathbf{p}\}$.*

La démonstration est presque la même que celle de la proposition 5.3 de [10], où le rôle joué par $\mathbf{G}_m^n$ était dévolu à une variété abélienne. Nous la reproduisons ci-après, sous une forme un peu abrégée.

Démonstration. — Supposons cet énoncé faux et qu'un tel polynôme existe. D'après le lemme de multiplicités [24], il existe un sous-groupe algébrique connexe G_0^* (resp. $\mathbf{G}_m^*$) de $G_{0,\bar{k}}$ (resp. de $\mathbf{G}_{m,\bar{k}}^n$) tel que $G^* := G_0^* \times \mathbf{G}_m^* \neq G_{\bar{k}}$ et

$$(12) \quad T^{\lambda^*} \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G^*; D'_0, \dots, D'_n) \leq \mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)$$

où $D'_j := \max \{1, D_j\}$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$. Nous allons montrer que cette inégalité ne peut pas être satisfaite en distinguant deux cas. Quitte à permuter les facteurs dans $\mathbf{G}_m^n$, l'on peut supposer $D_1 \leq \dots \leq D_n$ sans perte de généralité.

Premier cas : $t_{G^*} + W \otimes_{\sigma_0} \bar{k} = t_{G_{\bar{k}}}$, c'est-à-dire $\lambda^* = r^*$. De l'inégalité (12) l'on déduit la majoration

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right) &\leq \frac{(n+t)!}{t!} \left(\frac{D_0}{T} \right)^{t-t^*} \left(\frac{D_n}{T} \right)^{n-n^*} \\ &\leq \frac{(n+t)!}{t!} \left(\frac{2}{C_0^3} \right)^{r^*} S^{(1-y)(t-t^*)} \end{aligned}$$

par le choix des paramètres (et la minoration $T \geq \tilde{T}/2$). Si $y = 1$ ou $t = t^*$ on minore le cardinal par 1 et on a une contradiction (car $r^* \geq 1$). Si $y = 0$ et $t \neq t^*$ alors $t = 1$, $t^* = 0$ et $u_0 \neq 0$. Dans ce cas, le cardinal du quotient $(\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G^*(\bar{k}))/G^*(\bar{k})$ vaut $S + 1$ et la majoration ci-dessus entraîne encore une contradiction.

Second cas : $t_{G^*} + W \otimes_{\sigma_0} \bar{k} \neq t_{G_{\bar{k}}}$. En particulier on a $t^* \neq t$. Soit κ le plus petit entier de $\{1, \dots, n\}$ tel que $D_{\kappa} \geq 1$. Soit $\pi_{\kappa} : \mathbf{G}_m^n \rightarrow \mathbf{G}_m^{n-\kappa+1}$ la projection sur les $n - \kappa + 1$ derniers facteurs. Posons $G_{\kappa}^* := G_0^* \times \mathbf{G}_m^{\kappa-1} \times \pi_{\kappa}(\mathbf{G}_m^*)$. Une propriété de la fonction $\mathcal{H}$ assure que

$$\mathcal{H}(\pi_{\kappa}(\mathbf{G}_m^*); D_{\kappa}, \dots, D_n) \leq \mathcal{H}(\mathbf{G}_m^*; D'_1, \dots, D'_n),$$

ce qui entraîne

$$\frac{\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)}{\mathcal{H}(G^*; D'_0, \dots, D'_n)} \leq 4^n n! \frac{\mathcal{H}(G; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G_{\kappa}^*; \tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_n)} x^{t-t^*}.$$

De plus, comme $G^* \subseteq G_\kappa^*$ on a $\lambda_\kappa^* := \text{codim}_W(W \cap t_{G_\kappa^*}) \leq \lambda^*$ et

$$\text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G_\kappa^*(\bar{k})}{G_\kappa^*(\bar{k})} \right) \leq \text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G^*(\bar{k})}{G^*(\bar{k})} \right).$$

De la sorte l'on obtient une inégalité analogue à (12) avec le sous-groupe algébrique G_κ^* :

$$T^{\lambda_\kappa^*} \text{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + G_\kappa^*(\bar{k})}{G_\kappa^*(\bar{k})} \right) \mathcal{H}(G_\kappa^*; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n) \leq 4^n n! \mathcal{H}(G; \widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n) x^{t-t^*}.$$

En reprenant l'étude du premier cas (on a $G_\kappa^* \neq G_{\bar{k}}$ car $t^* \neq t$) et compte tenu du fait que $x \leq 1$, on montre que $\lambda_\kappa^* \neq r_\kappa^*$. Ceci signifie que $t_{G_\kappa^*} + W \otimes_{\sigma_0} \bar{k} \neq t_{G_{\bar{k}}}$ et la majoration ci-dessus entre alors en contradiction avec la définition de x . $\square$

6.6. Fibré adélique hermitien des sections auxiliaires. — Reprenons l'espace vectoriel E défini au début du § 6.5 et notons $\nu := \dim E$ sa dimension. L'objectif de ce paragraphe est de munir E d'une structure de fibré adélique hermitien assez particulière de manière à permettre d'extrapoler plus tard sur les dérivations. Tout d'abord, les espaces E_i qui entrent dans la définition de E sont naturellement munis d'une structure adélique hermitienne : pour $E_0 = k \oplus k^n/W_0$ on choisit la structure quotient du fibré $(k^n, |\cdot|_2)$ sur k^n/W_0 et l'on fait une somme directe hermitienne avec k (muni de sa collection de valeurs absolues) ; pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $E_j = k \oplus k$ et l'on prend simplement la norme $|\cdot|_2$ de k^2 . Comme nous l'avons décrit au § 3.7, ces structures hermitiennes confèrent à E une première structure de fibré adélique hermitien pur $\bar{E} := (E, (\|\cdot\|_\sigma)_\sigma)$. Mais ce n'est pas tout à fait cette structure que l'on va mettre sur E . Pour les normes relatives au plongement σ_0 et à ses conjugués, nous allons ajouter une quantité supplémentaire, comme nous l'avons fait au § 4 pour établir le lemme de Siegel approché absolu.

Normes particulières. — Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de k^n . Si σ_0 est ultramétrique, la famille $w := \{w_j := (\lambda(e_j), e_j); 1 \leq j \leq n\}$ forme une base orthonormée de $W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$. En effet, pour tout $z = \sum_{j=1}^n z_j e_j \in \mathbf{C}_{p_0}^n$, on a $z := (\lambda(z), z) = \sum_{j=1}^n z_j w_j \in W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$ et

$$\|z\|_{\bar{E}, \sigma_0} = \max(\|\lambda(z)\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma_0}, |z|_{2, \sigma_0}) = |z|_{2, \sigma_0}$$

par propriété de la norme quotient. Dans le cas d'un plongement σ_0 archimédien, on note $(w_1, \dots, w_n)$ la base orthonormée de $W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$ introduite au § 6.4. La famille $\{(\lambda(e_j), e_j); 1 \leq j \leq n\}$ est une base de W , dans laquelle les vecteurs w_j peuvent s'écrire : il existe des formes linéaires $\{l_j(z_1, \dots, z_n); 1 \leq$

$j \leq n\} \subseteq (\mathbf{C}_{p_0}^n)^\vee$ telles que

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}_{p_0}^n, \quad \sum_{j=1}^n z_j w_j = \sum_{j=1}^n l_j(z_1, \dots, z_n)(\lambda(e_j), e_j).$$

Les coefficients des l_j appartiennent au complété k_{σ_0} de $\sigma_0(k)$ dans $\mathbf{C}_{p_0}$: c'est évident si σ_0 est complexe non réel ou si σ_0 est ultramétrique car $l_j(z_1, \dots, z_n) = z_j$, et c'est aussi vrai si σ_0 est un plongement réel car dans ce cas w_j a été choisi dans $W \otimes_k k_{\sigma_0}$. Pour $s \in E \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$, $m \in \mathbf{N}$ et $\tau \in \mathbf{N}^n$, notons $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u))$ le $\tau^{\text{ème}}$ coefficient de Taylor à l'origine de l'application

$$z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto F_{s, \sigma_0}(mu_0 + \lambda(l_1(z), \dots, l_n(z)), mu_1 + l_1(z), \dots, mu_n + l_n(z))$$

(voir (11) pour la définition de F_{s, σ_0}). Soit $(s_1, \dots, s_\nu)$ une base orthonormée de $(E \otimes_k k_{\sigma_0}, \|\cdot\|_{\sigma_0})$. Pour $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in t_{G_0}(\mathbf{C}_{p_0}) \oplus \mathcal{J}_{p_0}^n$, définissons

$$(13) \quad \alpha_{\sigma_0}(z) := \prod_{j=1}^n |(1, e^{z_j})|_{2, \sigma_0}^{-D_j} \times \text{moy}_{\sigma_0}(1, \|z_0\|_{\overline{t_{G_0}}, \sigma_0})^{-D_0}.$$

Il existe $\alpha'_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \in k_{\sigma_0}$ de valeur absolue p_0 -adique égale à $\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))$. C'est clair si σ_0 est complexe. Si σ_0 est ultramétrique, le vecteur $u_0 \in k^n/W_0$ a des coordonnées dans k_{σ_0} par rapport à une k_{σ_0} -base orthonormée de $(k^n/W_0) \otimes_{\sigma_0} k_{\sigma_0}$. Ainsi $\|u_0\|_{\overline{t_{G_0}}, \sigma_0}$, qui n'est rien d'autre que le maximum des valeurs absolues de ces coordonnées, est un élément de $|k_{\sigma_0}|_{p_0}$. C'est aussi le cas pour $|(1, \alpha_j^m)|_{2, \sigma_0}$ qui vaut $1 = |1|_{p_0}$ ou $|\alpha_j^m|_{p_0}$. On a donc $\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \in |k_{\sigma_0}|_{p_0}$ et l'existence de $\alpha'_{\sigma_0}(m(u_0, u))$ en découle. Considérons alors la matrice A_{σ_0} , de taille $\mu \times \nu$, dont les coefficients sont les éléments de k_{σ_0} suivants : pour tout $(m, \tau) \in \Upsilon$, pour tout $i \in \{1, \dots, \nu\}$,

$$(14) \quad A_{\sigma_0}[(m, \tau), i] := \left(\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s_i, \sigma_0}(m(u_0, u)) \right) \times \alpha'_{\sigma_0}(m(u_0, u)).$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la norme voulue sur $E \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$: Soit $\alpha > 0$ (choisi dans la proposition 6.16). Pour tout $s = \sum_{i=1}^\nu x_i s_i \in E \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$,

$$\|s\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma_0} := \text{moy}_{\sigma_0}(|x|_{2, \sigma_0}, \alpha |A_{\sigma_0} x|_{2, \sigma_0}).$$

Dans ces expressions, x désigne le vecteur colonne de coordonnées $x_1, \dots, x_\nu$. Pour un plongement σ conjugué à σ_0 , c'est-à-dire définissant la même place v_0 , nous choisissons la norme $\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma}$ de sorte que la collection de normes $(\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma})_{\sigma \in v_0}$ soit invariante par Galois (au sens de la définition 3.1). En écrivant $\sigma = \iota \circ \sigma_0$ avec ι automorphisme continu de $\mathbf{C}_{p_0}$, on observe que $\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma}$ vérifie une égalité du même type que $\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma_0}$ en prenant $A_\sigma = \iota(A_{\sigma_0})$ (les bases $(s_1, \dots, s_\nu)$ et w étant remplacées par leurs images par ι). Par définition, le fibré adélique hermitien $\overline{E}_\alpha$ est le fibré égal à $\overline{E}$ sauf pour les plongement

$\sigma \in v_0$ où les normes sont données par $(\|\cdot\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma})_{\sigma \in v_0}$ (on retrouve $\overline{E}$ en prenant $\alpha = 0$).

LEMME 6.11. — *La pente d'Arakelov normalisée $\widehat{\mu}(\overline{E})$ du fibré adélique hermitien $\overline{E}$ est minorée par $-D_0 h(\overline{W}_0)/(t+1)$.*

En réalité, on connaît une formule exacte pour cette pente, formule qui entraîne immédiatement le lemme. Pour cela, l'on peut se référer au lemme 7.3. de [12] en tenant compte du fait que la pente d'Arakelov est additive vis à vis du produit tensoriel de fibrés adéliques hermitiens (voir [12, proposition 5.2]).

6.7. Estimation du rang d'un système linéaire

LEMME 6.12. — *Soit a, x, y des entiers naturels. Alors on a*

$$\binom{x+y+a}{a} - \binom{x+a}{a} \leq y(x+y+1)^{a-1}.$$

Démonstration. — La différence à majorer vaut exactement $\sum_{i=0}^{y-1} \binom{x+i+a}{a-1}$ et chacun des termes de cette somme est plus petit que $(x+y+1)^{a-1}$. $\square$

PROPOSITION 6.13. — *Soit ρ le rang de la matrice A_{σ_0} de coefficients (14). Alors on a $\rho \leq 2(4n+1)^{3n} \nu / C_0$.*

Démonstration. — Consubstantielle à la distinction entre le cas périodique et le cas non périodique et à l'introduction du groupe $\widetilde{G}$, l'argumentation n'a pas changé depuis l'article fondateur de Philippon & Waldschmidt [26]. En suivant l'approche plus effective de [5, § 6.3] et en posant

$$(T_1, S_1) := \begin{cases} (T, S_0) & \text{dans le cas non périodique,} \\ (T_0, S) & \text{dans le cas périodique,} \end{cases}$$

on montre que

$$\rho \leq X \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_p(S_1) + \widetilde{G}(\overline{k})}{\widetilde{G}(\overline{k})} \right) (\dim \widetilde{G} + 1 + \mathcal{H}(\widetilde{G}; D'_0, \dots, D'_n))$$

avec

$$X = \begin{cases} \binom{2(n+t)T+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} & \text{dans le cas non périodique,} \\ \binom{2(n+t)T+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} - \binom{2(n+t)T-T_0+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} & \text{dans le cas périodique.} \end{cases}$$

Par le lemme 6.12, on a $X \leq (2(n+t)+1)^n T^{\widetilde{\lambda}-1} T_1$. Par ailleurs, rappelons que, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, la fonction partielle $x_j \mapsto \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; x_0, \dots, x_n)}{\mathcal{H}(\widetilde{G}; x_0, \dots, x_n)}$ décroît sur $]0, +\infty[$. Cette observation et les majorations $\widetilde{D}_j/2 \leq D'_j$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ et $x\widetilde{D}_0/2 \leq D_0$ impliquent

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; D'_0, \dots, D'_n)}{\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n)} &\leq 2^{n+t} \frac{\mathcal{H}(\widetilde{G}; x\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n)}{\mathcal{H}(G; x\widetilde{D}_0, \dots, \widetilde{D}_n)} \\ &= \frac{2^{n+t} C_0}{\widetilde{T}^\lambda \operatorname{card} \left(\frac{\Sigma_p(S) + \widetilde{G}(\bar{k})}{\widetilde{G}(\bar{k})} \right)} \end{aligned}$$

(l'égalité vient de la définition de $x = x(\widetilde{G})$). En reportant cette estimation dans la majoration de ρ et en utilisant $\dim \widetilde{G} \leq n-1$, nous avons

$$\rho \leq 2^{n+t} (n+1)(2(n+t)+1)^n C_0 \max \left\{ \frac{T_0}{\widetilde{T}}, \frac{S_0+1}{S+1} \right\} \mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n).$$

La dimension ν de E vaut $\binom{D_0+t}{t} (D_1+1) \cdots (D_n+1)$ et, en particulier, on a

$$\mathcal{H}(G; D'_0, \dots, D'_n) = \frac{(n+t)!}{t!} D'_0 D'_1 \cdots D'_n \leq (n+t)! \nu.$$

Par conséquent, en majorant $(n+t)!$ par $(n+t)^{n+t-1}$, on obtient

$$\rho \leq 2^{n+t} (2(n+t)+1)^n (n+t)^{n+t} C_0 \max \left\{ \frac{T_0}{\widetilde{T}}, \frac{S_0+1}{S+1} \right\} \nu.$$

Le choix des paramètres permet de majorer le maximum par $2/C_0^2$ et, en utilisant $t \leq n$, on obtient

$$\rho \leq 2 \times (4n)^{2n} (4n+1)^n \nu / C_0. \quad \square$$

6.8. Estimation d'une dérivée. — Soit $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ un plongement de k . Soit $s \in E \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$ que l'on écrit dans une base orthonormée comme dans (3) avec des coefficients p_i . On notera $L(s) := \sum_i |p_i|_p$ si σ est archimédien et $L(s) := \max_i |p_i|_p$ si σ est ultramétrique. Soit $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ une base de $W \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$. En procédant de la même manière qu'au paragraphe 6.6 (en remplaçant la base w d'alors par, ici, $\mathbf{w}$), on dispose de la dérivée divisée $\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^\tau F_{s,\sigma}(z)$ en un point $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbf{C}_p^t \times \mathcal{T}_p^n$ à l'ordre $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$. Voici une première estimation, élémentaire malgré son aspect technique, d'un usage fréquent dans la suite.

PROPOSITION 6.14. — *Dans les conditions ci-dessus $(\sigma, s, \mathbf{w}, z, \tau)$ quelconques), on a*

$$\left| \frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^\tau F_{s,\sigma}(z) \right|_p \cdot \alpha_\sigma(z) \leq \left\{ \prod_{j=1}^n \|\mathbf{w}_j\|_{t_{G,\sigma}}^{\tau_j} \right\} L(s) \times \begin{cases} e^{2n\sqrt{n} \max_{0 \leq j \leq n} \{D_j\}} & \text{si } p = \infty, \\ e^{|\tau|} & \text{si } p \neq \infty \end{cases}$$

où

$$\alpha_\sigma(z) := \prod_{j=1}^n |(1, e^{z_j})|_{2,\sigma}^{-D_j} \times \operatorname{moy}_\sigma(1, \|z_0\|_{\overline{t_{G,\sigma}}})^{-D_0}.$$

Démonstration. — Tout d'abord, observons que si l'on multiplie le vecteur w_j par un nombre $\theta_j \in \mathbf{C}_p$ alors $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,\sigma}(z)$ est multiplié par $\prod_{j=1}^n \theta_j^{\tau_j}$. On peut donc supposer que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\|w_j\|_{\overline{t_G}, \sigma} = 1$. Considérons maintenant des formes linéaires $l_1, \dots, l_n \in (\mathbf{C}_p^n)^\vee$ telles que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_p^n$, on a $\sum_{j=1}^n x_j w_j = \sum_{j=1}^n l_j(x) (\lambda(e_j), e_j)$ (rappelons que e_j désigne le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}_p^n$). La somme $\sum_{j=1}^n l_j(e_i) \lambda(e_j)$ est la composante de w_i sur $k^n/W_0 \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$. Elle est donc de norme plus petite que 1.

Soit $(e_{0,1}, \dots, e_{0,t})$ la base orthonormée de k^n/W_0 choisie pour écrire les coefficients de s (cf. (3)). Le terme $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,\sigma}(z)$ que l'on cherche à évaluer est le coefficient devant x^τ de l'application

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto s((1, z_0 + \lambda(l_1(x), \dots, l_n(x))), (1, e^{z_1 + l_1(x)}), \dots, (1, e^{z_n + l_n(x)})).$$

Celle-ci est une somme de termes de la forme

$$(15) \quad p_h \left\{ \prod_{a=1}^t \left(e_{0,a}^\vee(z_0) + \sum_{j=1}^n l_j(x) e_{0,a}^\vee(\lambda(e_j)) \right)^{h_{0,a}} \right\} \prod_{j=1}^n e^{h_j z_j + h_j l_j(x)}$$

où $h_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,t}) \in \mathbf{N}^t$, $h = (h_0, h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{N}^t \times \mathbf{N}^n$ avec, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $|h_j| \leq D_j$, et $p_h \in \mathbf{C}_p$ est l'un des coefficients de s . Comme seul le coefficient devant x^τ nous intéresse, on peut remplacer l'exponentielle $\exp \{ \sum_{j=1}^n h_j l_j(x) \}$ par son développement de Taylor à l'ordre $|\tau|$:

$$(16) \quad Q_{h,\tau}(x) := \sum_{m=0}^{|\tau|} \frac{1}{m!} (h_1 l_1(x) + \dots + h_n l_n(x))^m.$$

De la sorte la quantité (15) peut être échangée par l'expression polynomiale

$$(17) \quad p_h \left\{ \prod_{a=1}^t \left(e_{0,a}^\vee(z_0) + \sum_{j=1}^n x_j e_{0,a}^\vee \left(\sum_{i=1}^n l_i(e_j) \lambda(e_i) \right) \right)^{h_{0,a}} \right\} \left(\prod_{j=1}^n e^{h_j z_j} \right) Q_{h,\tau}(x).$$

La fonction longueur $P \mapsto L(P)$ est sous-multiplicative : $L(PQ) \leq L(P)L(Q)$ (voir [38, p. 76]). Cette propriété appliquée à la somme sur h des expressions (17) permet de majorer $\left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,\sigma}(z) \right|_p$ par

$$L(s)(\|z_0\|_{\overline{t_G}, \sigma} + n)^{D_0} \left\{ \prod_{j=1}^n \max(1, |e^{z_j}|_p)^{D_j} \right\} \max_h \{L(Q_{h,\tau})\}$$

(on notera que le vecteur $e_{0,a}^\vee$ est de norme 1 et donc $|e_{0,a}^\vee(z)|_p \leq \|z\|_{\overline{t_G}, \sigma}$ pour tout $z \in k^n/W_0 \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$). Le terme $\|z_0\|_{\overline{t_G}, \sigma} + n$ du majorant peut être remplacé

par $\max(1, \|z_0\|_{\overline{t_G}, \sigma})$ si σ est un plongement ultramétrique. On obtient ainsi

$$\left| \frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^{\tau} F_{s, \sigma}(z) \right|_p \leq L(s) \text{ moy}_{\sigma}(1, |n|_p)^{D_0} \text{ moy}_{\sigma}(1, \|z_0\|_{\overline{t_G}, \sigma})^{D_0} \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^n \max(1, |e^{z_j}|_p)^{D_j} \right\} \max_{\mathbf{h}} \{L(Q_{\mathbf{h}, \tau})\}.$$

Pour conclure, il suffit d'estimer le maximum qui apparaît à la fin de cette expression. Lorsque le plongement σ est archimédien, la longueur de $Q_{\mathbf{h}, \tau}$ est majorée par

$$\sum_{m=0}^{|\tau|} \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=1}^n D_j |l_j(1, \dots, 1)| \right)^m.$$

Or $\sum_{j=1}^n |l_j(1, \dots, 1)| e_j$ est la composante sur $\mathbf{C}_p^n$ de $\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_n$ et donc $\sum_{j=1}^n |l_j(1, \dots, 1)|^2 \leq n^2$. Ainsi on a $\sum_{j=1}^n D_j |l_j(1, \dots, 1)| \leq \sqrt{D_1^2 + \dots + D_n^2} \times n \leq n\sqrt{n} \max\{D_1, \dots, D_n\}$. On en déduit dans ce cas

$$(18) \quad L(Q_{\mathbf{h}, \tau}) \leq e^{n\sqrt{n} \max\{D_1, \dots, D_n\}}.$$

Lorsque σ est ultramétrique alors, pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $|m!|_p^{-1} \leq p^{m/(p-1)} \leq e^m$. Dans ce cas la longueur de $Q_{\mathbf{h}, \tau}$ est plus petite que $e^{|\tau|}$ et la proposition 6.14 est démontrée. $\square$

COROLLAIRE 6.15. — *Pour tout $\sigma \in v_0$, la norme d'opérateur de la matrice A_{σ} , matrice définie au § 6.6, est inférieure à e^{4nU_0} .*

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour $\sigma = \sigma_0$. On applique la proposition 6.14 à chacune des fonctions F_{s_i, σ_0} qui intervient dans la définition (14) des coefficients de A_{σ_0} avec $\sigma = \sigma_0$, $\mathbf{w} = w$ et $z = m(u_0, u)$. Supposons dans un premier temps que σ_0 est archimédien. D'après la fin du paragraphe 3.7, la longueur de s_i est plus petite que

$$(19) \quad \sqrt{t}^{D_0} \sqrt{2}^{D_1 + \dots + D_n} \leq (n2^n)^{\max\{D_0, \dots, D_n\}/2} \leq e^{n \max\{D_0, \dots, D_n\}}.$$

Ainsi les coefficients de A_{σ_0} sont inférieurs à $e^{3n\sqrt{n} \max_{0 \leq i \leq n} \{D_i\}}$, quantité elle-même plus petite que e^{nU_0} car $\log C_0 \geq 3n$ et car le maximum des $\widetilde{D}_i$ est plus petit que $U_0/(D \log C_0)$ (choix des paramètres, début du § 6.3). En la comparant à la norme de Hilbert-Schmidt, on constate que la norme d'opérateur de A_{σ_0} est plus petite que $(\nu\mu)^{1/2} e^{nU_0}$. La dimension ν de E vaut $\binom{D_0+t}{t} (D_1+1) \dots (D_n+1)$ et donc

$$(20) \quad \nu \leq (D_0+1)^t \prod_{j=1}^n (D_j+1) \leq e^{tD_0 + \sum_{j=1}^n D_j} \leq e^{2n \max\{D_0, \dots, D_n\}} \leq e^{U_0/D} \leq e^{U_0}.$$

De même, μ est le cardinal de Υ (introduit après les remarques 6.5). Il est inférieur à

$$\begin{aligned} \binom{2(n+t)T+n}{n} S(n+t) &\leq (2(n+t)T+1)^n S(n+t) \\ &\leq (4n+1)^n (2n)^n T^n S \\ &\leq \frac{(4n+1)^n (2n)^n (n+1)!}{C_0} \frac{U_0^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{car } S \leq U_0/C_0 \\ &\leq 1 \times e^{U_0} = e^{U_0}. \end{aligned}$$

Ainsi on trouve $\|A_{\sigma_0}\|_{\sigma_0} \leq e^{(n+1)U_0} \leq e^{4nU_0}$ lorsque σ_0 est archimédien. Dans le cas ultramétrique, la norme d'opérateur de A_{σ_0} est le maximum des coefficients de A_{σ_0} (voir proposition 3.15). D'après la proposition 6.14, on a $\|A_{\sigma_0}\|_{\sigma_0} \leq e^{2(n+t)T} \leq e^{4nU_0}$ car chacun des s_i est de longueur 1. $\square$

6.9. Construction d'une section auxiliaire

PROPOSITION 6.16. — Soit $\alpha > 0$ tel que $\log \alpha = C_0^{3/2} U_0$. Il existe une section $s \in E \otimes_{\sigma_0} \bar{k}$, non nulle, telle que

$$h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{[k_{\sigma_0} : \mathbf{Q}_{p_0}] \times 3(4n+1)^{3n} C_0^{1/2} U_0}{D}.$$

Démonstration. — D'après le lemme de Siegel approché absolu du § 4, il existe un vecteur non nul $s \in E \otimes_{\sigma_0} \bar{k}$ tel que

$$h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{\rho}{\nu D} \left(\sum_{\sigma \in v_0} \log \text{moy}_\sigma(1, \alpha) + \log \max \{1, \|A_\sigma\|_\sigma\} \right) + \frac{1}{2} \log \nu - \hat{\mu}(\bar{E})$$

(on notera que le rang ρ de A_{σ_0} est aussi celui de A_σ). Dans le membre de droite, on majore ρ/ν avec la proposition 6.13 et $\|A_\sigma\|_\sigma$ est évalué au moyen du corollaire 6.15 par e^{4nU_0} . De plus, grâce au lemme 6.11, à la proposition 6.1, au choix des paramètres D_0 et $x \leq 1$, on a

$$-\hat{\mu}(\bar{E}) \leq \frac{D_0 h(\bar{W}_0)}{t+1} \leq \frac{n^3 U_0}{D}.$$

Enfin, on a $\frac{1}{2} \log \nu \leq U_0/(2D)$ d'après (20). En remplaçant ces estimations dans la majoration de $h_{\bar{E}_\alpha}(s)$, on trouve

$$h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{2(4n+1)^{3n} [k_{\sigma_0} : \mathbf{Q}_{p_0}]}{D C_0} \times (\log \sqrt{2} + C_0^{3/2} U_0 + 4n U_0) + \frac{U_0}{2D} + \frac{n^3 U_0}{D}.$$

On obtient alors la majoration

$$h_{\bar{E}_\alpha}(s) \leq \frac{c[k_{\sigma_0} : \mathbf{Q}_{p_0}] C_0^{1/2} U_0}{D}$$

avec

$$c := (4n+1)^{3n} \left(2 + \frac{8n}{C_0^{3/2}} + \frac{2 \log \sqrt{2}}{C_0^{3/2} U_0} + \frac{n^3 + 1/2}{(4n+1)^{3n} C_0^{1/2}} \right).$$

La borne $c \leq 3(4n+1)^{3n}$ se déduit de $U_0 \geq C_0$ et de la valeur de $C_0 = (10n)^{6n}$. $\square$

La démonstration du théorème 5.1 s'effectue avec la section s que l'on vient de construire dans cette proposition. *A priori* cette section n'est pas définie sur k mais sur une extension finie K de k . Cette complication technique n'a pas de conséquence. En effet, le degré relatif $[K : k]$ n'intervient pas car les estimations des jets de s en les plongements σ' de K qui prolongent $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ sont de la forme $\mathbf{c}_\sigma \|s\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma'}$, où $\mathbf{c}_\sigma$ ne dépend que de σ (et des autres données) et pas de σ' . C'est la raison pour laquelle nous *supposons* — et ceci sans perte de généralité — que s est définie sur k .

6.10. Estimations générales. — Soit $(m, \ell) \in \mathbf{N}^2$. Considérons la section s construite dans la proposition 6.16. Soit $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ une k -base de W . Il existe des formes linéaires $l_1, \dots, l_n$ sur k^n telles que, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un n -uplet de variables, on ait

$$\sum_{j=1}^n x_j w_j = (\lambda(l_1(x), \dots, l_n(x)), l_1(x), \dots, l_n(x)).$$

Tous les coefficients de Taylor à l'origine — $a(s, \mathbf{w}, m, \tau)$, $\tau \in \mathbf{N}^n$ — de la série formelle

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto s \left((1, mu_0 + \lambda(l_1(x), \dots, l_n(x))), (1, \alpha_1^m e^{l_1(x)}), \dots, (1, \alpha_n^m e^{l_n(x)}) \right)$$

sont des éléments de k . Étant donné un plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ pour laquelle $m\mathbf{p}$ possède un logarithme $z \in t_G(\mathbf{C}_p)$, l'image du coefficient $a(s, \mathbf{w}, m, \tau)$ dans $\sigma(k)$ est égale à $\frac{1}{\tau!} D_{\mathbf{w}}^\tau F_{s, \sigma}(z)$ définie au § 6.6.

DÉFINITION 6.17. — Soit $(w_1^\vee, \dots, w_n^\vee)$ la base duale de $\mathbf{w}$. Le *jet de s d'ordre ℓ le long de W au point $m\mathbf{p}$* , noté $\text{jet}_W^\ell s(m\mathbf{p})$, est le vecteur

$$\text{jet}_W^\ell s(m\mathbf{p}) := \sum_{\substack{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n \\ |\tau| = \ell}} a(s, \mathbf{w}, m, \tau) \cdot \prod_{j=1}^n (w_j^\vee)^{\tau_j}$$

de $S^\ell(W^\vee)$.

Tel que nous venons de le définir, le terme $\text{jet}_W^\ell s(m\mathbf{p})$ dépend du choix de la base $\mathbf{w}$. Toutefois, lorsque $\text{jet}_W^h s(m\mathbf{p}) = 0$ pour tout entier $h \in \{0, \dots, \ell-1\}$, ce n'est plus le cas. Considérons le couple $(m, \ell) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \in \{0, \dots, (n+t)S\}$, $\ell \in \{0, \dots, (n+t)T\}$ et (m, ℓ) *minimal* pour la propriété $\text{jet}_W^\ell s(m\mathbf{p}) \neq 0$. L'adjectif *minimal* s'entend par rapport à l'ordre lexicographique sur $\mathbf{N}^2$.

Seconde torsion de norme. — Il serait naturel (et possible) de travailler dans la suite avec $S^\ell(W^\vee)$ muni de la structure de puissance symétrique définie au § 3.7. Toutefois il s'avère plus pratique de modifier légèrement les normes sur $\overline{S^\ell(W^\vee)}$ de la manière suivante : pour un plongement σ quelconque de k , considérons le coefficient $\alpha_\sigma(m(u_0, u))$ introduit lors de la définition de A_{σ_0} (voir (13), p. 38). L'égalité $\alpha_{\iota \circ \sigma}(m(u_0, u)) = \alpha_\sigma(m(u_0, u))$ pour tout automorphisme continu ι de $\mathbf{C}_p$ légitime la

DÉFINITION 6.18. — Le fibré adélique hermitien $\overline{\mathfrak{J}et}$ est le fibré sur k d'espace sous-jacent $S^\ell(W^\vee)$ et sa norme en $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ est donnée par : pour tout $x \in S^\ell(W^\vee) \otimes_\sigma \mathbf{C}_p$, on a

$$\|x\|_{\overline{\mathfrak{J}et}, \sigma} := \alpha_\sigma(m(u_0, u)) \|x\|_{\overline{S^\ell(W^\vee)}, \sigma}.$$

PROPOSITION 6.19. — *La pente maximale de $\overline{\mathfrak{J}et}$ est plus petite que $8n^2 U_0/D$.*

Pour établir cette majoration, nous nous appuyerons sur deux résultats auxiliaires.

LEMME 6.20. — *La pente maximale de $\overline{S^\ell(W^\vee)}$ est inférieure à $2n^2 U_0/D$.*

Démonstration. — Commençons par montrer que $\hat{\mu}_{\max}(\overline{W^\vee})$ est majoré par $(\log 2)/2$. L'application k -linéaire $\iota : k^n \rightarrow W$, $\iota(y) := (\lambda(y), y)$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les normes σ -adiques de l'application duale $\iota^\vee : W^\vee \rightarrow (k^n)^\vee$ sont plus petites que $(\sqrt{2})^{\epsilon_\sigma}$ avec $\epsilon_\sigma := 1$ si σ est archimédien et 0 sinon. L'inégalité de pentes

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{W^\vee}) \leq \hat{\mu}_{\max}((k^n, |\cdot|_2)^\vee) + h(\iota^\vee)$$

(voir [12, lemme 6.4]) entraîne le résultat voulu car la première quantité du majorant est nulle et l'autre inférieure à $(\log 2)/2$. Par la proposition 3.16, la pente maximale de $\overline{S^\ell(W^\vee)}$ est plus petite que $\ell(\hat{\mu}_{\max}(\overline{W^\vee}) + 2 \log n)$. On utilise alors $\ell \leq (n + t)U_0/D$ et $2n((\log 2)/2 + 2 \log n) \leq 2n^2$ pour conclure. $\square$

LEMME 6.21. — *Pour tout entier m , la hauteur $h_{\overline{E_0}}(1, mu_0)$ de $(1, mu_0)$ relative au fibré hermitien $\overline{E_0} = \overline{k \oplus (k^n/W_0)}$ est inférieure à $\log m + (2n^2 \log b)/D$.*

Démonstration. — Dans cet énoncé, u_0 désigne la préimage de $-(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})$ par l'application $\varphi : k^n/W_0 \rightarrow k^t$, qui, à la classe d'équivalence de $z = (z_1, \dots, z_n)$ modulo W_0 , associe $(\ell_1(z), \dots, \ell_t(z))$ (voir § 6.2). Ainsi, pour tout $z \in k^n$ tel que $\ell_i(z) = -\beta_{i,0}$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, la norme de u_0 relative à k^n/W_0 est inférieure à la norme de z dans $(k^n, |\cdot|_2)$. En particulier, on a $h_{\overline{E_0}}(1, mu_0) \leq h_{(k^{n+1}, |\cdot|_2)}(1, mz)$. Au moyen d'une matrice extraite, il existe un ensemble $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ à t éléments, des déterminants $(\Delta_i)_{i \in I}$, Δ de matrices à coefficients dans $\{\pm \beta_{u,v}; 0 \leq u \leq t, 1 \leq v \leq n\}$ et une solution z du système

$\ell_i(z) = -\beta_{i,0}$, $1 \leq i \leq t$, telle que $z_i = \Delta_i/\Delta$ pour $i \in I$ et $z_i = 0$ sinon. On a alors

$$h_{(k^{n+1}, |\cdot|_2)}(1, mz) = h_{(k^{t+1}, |\cdot|_2)}(\Delta, m(\Delta_i)_{i \in I}).$$

Des majorations grossières des déterminants qui apparaissent ici conduisent à

$$|(\Delta, m(\Delta_i)_{i \in I})|_{2,\sigma} \leq \prod_{u,v} \max\{1, |\beta_{u,v}|_\sigma\} \times \begin{cases} (1+m^2t)^{1/2}t! & \text{si } p = \infty, \\ 1 & \text{si } p \neq \infty. \end{cases}$$

Par conséquent, si $t \leq n-1$, on a

$$h_{(k^{t+1}, |\cdot|_2)}(\Delta, m(\Delta_i)_{i \in I}) \leq (t+1)n \max_{u,v} \{h(\beta_{u,v})\} + \log m + \log n!$$

et la définition de $\log b$ permet de conclure. Si $t = n$ on a $W_0 = \{0\}$ et nécessairement $z = u_0 = -(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{n,0})$. Dans ce cas, on a

$$|(1, mz)|_{2,\sigma} \leq (1+m^2n)^{\epsilon_\sigma/2} \prod_{i=1}^n \max(1, |\beta_{i,0}|_\sigma)$$

pour tout plongement $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ (rappelons que $\epsilon_\sigma \in \{0, 1\}$ est nul si et seulement si $p \neq \infty$). On obtient alors

$$h_{(k^{n+1}, |\cdot|_2)}(1, mz) \leq \log m + \frac{\log(n+1)}{2} + \frac{n \log b}{D}.$$

On conclut en utilisant $(\log b)/D \geq 1$ et $n + (\log(n+1))/2 \leq 2n^2$. $\square$

Démonstration de la proposition 6.19. — Comme la pente maximale est un maximum, il existe un sous-espace vectoriel $J \subseteq S^\ell(W^\vee)$ tel que $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t}}) = \widehat{\mu}(J, (\|\cdot\|_{\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t},\sigma}})_\sigma)$, pente qui est elle-même égale à

$$\widehat{\mu}(J, (\|\cdot\|_{\overline{S^\ell(W^\vee),\sigma}})_\sigma) - \frac{1}{D} \sum_{\sigma} \log \alpha_\sigma(m(u_0, u)).$$

Dans cette différence, la première quantité est inférieure à $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{S^\ell(W^\vee)})$, qui a été estimée dans le lemme 6.20 ci-dessus. L'autre, avec le signe moins, est exactement égale à

$$D_0 h_{\overline{k \oplus (k^n/W_0)}}(1, mu_0) + \sum_{j=1}^n D_j h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_j^m).$$

En vertu du lemme 6.21, le premier terme dans cette expression est majoré par $D_0(\log((n+t)S) + (2n^2 \log b)/D) \leq 3n^2 U_0/D$. Par ailleurs, comme $(1+x^2)^{1/2} \leq \sqrt{2} \max\{1, |x|\}$, on a

$$\begin{aligned} h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_j^m) &\leq \log \sqrt{2} + h(\alpha_j^m) = \log \sqrt{2} + mh(\alpha_j) \\ &\leq \log \sqrt{2} + (n+t)S \log \alpha_j \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n D_j h_{(k^2, |\cdot|_2)}(1, \alpha_j^m) &\leq \left(\sum_{j=1}^n D_j \right) \log \sqrt{2} + (n+t) \sum_{j=1}^n D_j S \log a_j \\ &\leq \frac{U_0 n}{D} \log \sqrt{2} + 2n^2 \frac{U_0}{D} \\ &\leq \frac{3n^2 U_0}{D}. \end{aligned}$$

En regroupant ces différentes majorations, on trouve

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t}}) \leq \frac{2n^2 U_0}{D} + \frac{3n^2 U_0}{D} + \frac{3n^2 U_0}{D} = \frac{8n^2 U_0}{D}. \quad \square$$

Dorénavant, la majeure partie de la démonstration du théorème 5.1 va consister à évaluer chacune des normes σ -adiques de $\text{jet}_W^\ell s(mp)$ dans le but d'estimer sa hauteur, relative au fibré adélique hermitien $\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t}}$.

6.10.1. Estimations archimédiennes

PROPOSITION 6.22. — *Pour tout plongement complexe $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}$, on a*

$$\|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t}}, \sigma} \leq \exp\{nU_0/D\} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma}.$$

Démonstration. — Soit $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}$. Dans la définition 6.17 du jet, choisissons pour w une base orthonormée de $W \otimes_\sigma \mathbf{C}$ et fixons un logarithme mu de $mp \in G(k_\sigma)$. La norme $\|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t}}, \sigma}$ est majorée par

$$(21) \quad \binom{n+\ell-1}{\ell}^{1/2} \max_{|\tau|=\ell} \left\{ \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma}(mu) \right|_\sigma \alpha_\sigma(m(u_0, u)) \right\}.$$

La racine du facteur binomial est inférieure à

$$(\ell+1)^{(n-1)/2} \leq ((n+t)T+1)^{(n-1)/2}$$

et donc à

$$(2n+1)^{(n-1)/2} \left(\frac{U_0}{D} \right)^{(n-1)/2} \leq (2n+1)^{(n-1)/2} (n-1)! e^{\sqrt{U_0/D}} \leq e^{U_0/(2D)}$$

car $T \leq U_0/D$ et $x^{n-1} \leq (n-1)!e^x$ pour $x \geq 0$. La proposition 6.14 majore la dérivée de $F_{s, \sigma}$ et l'on obtient alors

$$\|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\overline{\mathfrak{J}\mathfrak{e}\mathfrak{t}}, \sigma} \leq e^{U_0/(2D)} e^{2n\sqrt{n} \max_{0 \leq j \leq n} \{D_j\}} L(s).$$

La longueur de s qui apparaît ici peut être estimée comme à la fin du § 3.7, en utilisant (19), et l'on a $L(s) \leq \|s\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma} \exp\{n \max_{0 \leq j \leq n} D_j\}$. Le choix des paramètres montre que le maximum des D_j est plus petit que $U_0/(D \log C_0)$, ce qui permet de conclure. $\square$

6.10.2. Estimations ultramétriques. — Étant donné des entiers ℓ et h strictement positifs, on définit l'entier $\delta_\ell(h)$ comme le ppcm des produits $i_1 \cdots i_{h'}$, où $h' \in \{1, \dots, h\}$, $i_j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ et $i_1 + \cdots + i_{h'} \leq \ell$. Le théorème des nombres premiers assure l'existence d'une constante absolue $c > 0$ telle que $\log \delta_\ell(h) \leq \ell \log(ch)$. Au § 6.12, nous utiliserons la valeur $c = 4$ obtenue par Bruiliet dans [4].

PROPOSITION 6.23. — *Pour tout plongement ultramétrique $\sigma: k \hookrightarrow \mathbf{C}_p$, pour tous entiers $m, \ell \geq 0$, pour toute section globale s de M , le jet de s , d'ordre ℓ le long de W au point m_p , est de norme σ -adique inférieure à $\|s\|_{\overline{E}, \sigma} / |\delta_\ell(D_0)|_p$.*

La démonstration est une variante plus simple de l'énoncé équivalent montré dans le cadre des variétés abéliennes au § 5.8 de [10], au moyen du procédé de changement de variables de Chudnovsky. Nous renvoyons le lecteur à cet article pour plus de précisions.

6.11. Extrapolation sur les dérivations. — L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer, pour tout plongement σ conjugué à σ_0 , la σ -norme de $\text{jet}_W^\ell s(m_p)$ en tenant compte de la construction de s . Comme les $\sigma \in v_0$ jouent tous le même rôle, il suffit d'établir les estimations pour $\sigma = \sigma_0$ (ce que nous supposons dorénavant). Comme de coutume, nous allons devoir séparer les cas périodique et non périodique. Nous distinguerons aussi suivant le caractère archimédien ou ultramétrique de σ_0 .

Soit w la base particulière de $W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$ introduite au § 6.6, utilisée dans la définition de la matrice A_{σ_0} . D'après la majoration (21) appliquée avec $\sigma = \sigma_0$, $w = w$ et $z = m(u_0, u)$, le problème est d'estimer $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u))$. Si $(m, \tau) \in \Upsilon$ alors la définition (14) des coefficients de la matrice A_{σ_0} implique

$$(22) \quad \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u)) \right|_{p_0} \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \leq \alpha^{-1} \|s\|_{\overline{E}, \sigma_0}$$

et l'on obtient directement une estimation de $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u))$, qui est meilleure que celle que l'on aura pour $(m, \tau) \notin \Upsilon$. C'est la raison pour laquelle nous supposons maintenant que $(m, \tau) \notin \Upsilon$. On ramène alors le problème à $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(\lambda(u), u))$ grâce au lemme de comparaison suivant :

LEMME 6.24. — *Soit $w = (w_1, \dots, w_n)$ une base de $W \otimes_{\sigma_0} \mathbf{C}_{p_0}$. Pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $\|m(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{t}_G, \sigma_0} \leq 1$ et pour tout $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$, de longueur $\leq 2(n+t)T$, la valeur absolue p_0 -adique de la différence $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(\lambda(u), u))$ est majorée par*

$$e^{4nU_0} \left\{ \prod_{j=1}^n \|w_j\|_{\overline{t}_G, \sigma_0}^{\tau_j} \right\} \|m(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{t}_G, \sigma_0} \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1} \|s\|_{\overline{E}, \sigma_0}.$$

Démonstration. — Reprenons le début de la démonstration de la proposition 6.14 (avec $\sigma = \sigma_0$) et les formes linéaires $l_1, \dots, l_n$ associées à la base w :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}_{p_0}^n, \quad \sum_{j=1}^n x_j w_j = (\lambda(l_1(x), \dots, l_n(x)), l_1(x), \dots, l_n(x)).$$

On peut supposer $\|w_j\|_{t_G, \sigma_0}^- = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Désignons par $(p_h)_{h \in \mathbf{N}^t \times \mathbf{N}^n}$ les coefficients de s dans une écriture du type (3). La différence $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(\lambda(u), u))$ est la somme sur h des coefficients devant x^τ des fonctions

$$(23) \quad p_h \times \left(\prod_{j=1}^n \alpha_j^{mh_j} \right) \times e^{h_1 l_1(x) + \dots + h_n l_n(x)} \\ \times \left\{ \prod_{i=1}^t \left(m e_{0,i}^\vee(u_0) + \sum_{j=1}^n l_j(x) e_{0,i}^\vee(\lambda(e_j)) \right)^{h_{0,i}} \right. \\ \left. - \prod_{i=1}^t \left(m e_{0,i}^\vee(\lambda(u)) + \sum_{j=1}^n l_j(x) e_{0,i}^\vee(\lambda(e_j)) \right)^{h_{0,i}} \right\}.$$

Dans cette expression, $h_0 = (h_{0,1}, \dots, h_{0,t}) \in \mathbf{N}^t$, $h_1, \dots, h_n \in \mathbf{N}$ sont les coordonnées de h . Comme h_0 est de longueur D_0 , la différence des quantités entre accolades est une expression du type

$$\prod_{i=1}^{D_0} (X_i + Y_i) - \prod_{i=1}^{D_0} (X'_i + Y_i)$$

où X_i, X'_i sont les composantes de $m u_0, m \lambda(u)$ respectivement dans la base orthonormée $e_0 := (e_{0,1}, \dots, e_{0,t})$ et où Y_i est l'une des composantes de $l(x) := \lambda(l_1(x), \dots, l_n(x))$ dans la base e_0 (répétée le bon nombre de fois pour avoir la puissance $h_{0,a}$ dans (23)). Or cette différence est égale à

$$\sum_{i=1}^{D_0} (X_i - X'_i) \left(\prod_{m=1}^{i-1} (X'_m + Y_m) \right) \left(\prod_{m=i+1}^{D_0} (X_m + Y_m) \right)$$

(on écrit $X_i - X'_i = (X_i + Y_i) - (X'_i + Y_i)$ et on développe ; les produits se simplifient deux à deux). Ainsi la différence des produits entre accolades dans (23), que l'on peut écrire symboliquement sous la forme

$$(m e_0^\vee(u_0) + e_0^\vee(l(x)))^{h_0} - (m e_0^\vee(\lambda(u)) + e_0^\vee(l(x)))^{h_0},$$

est une somme de D_0 termes de la forme

$$\delta(i, h_0)(x) := e_{0,i}^\vee(m(u_0 - \lambda(u))) \times (m e_0^\vee(u_0) + e_0^\vee(l(x)))^{h_0'} (m e_0^\vee(\lambda(u)) + e_0^\vee(l(x)))^{h_0''}$$

où h'_0, h''_0 sont des vecteurs entiers (qui dépendent de i) dont la somme des longueurs vaut $D_0 - 1$. On notera que ce coefficient $\delta(i, h_0)$ est une fonction polynomiale de la variable x . La suite de la démonstration repose alors sur les mêmes considérations que celle de la proposition 6.14. Plus précisément, soit $Q_{h,\tau}$ le polynôme de Taylor défini par (16). Le coefficient de x^τ de (23) est égal à celui du polynôme

$$\sum_{D_0 \text{ termes}} p_h \delta(i, h_0)(x) \left(\prod_{j=1}^n \alpha_j^{mh_j} \right) Q_{h,\tau}(x).$$

Ce coefficient est en valeur absolue plus petit que la longueur du polynôme. Ainsi la quantité $\left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,\sigma_0}(m(u_0, u)) - \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,\sigma_0}(m(\lambda(u), u)) \right|_{p_0}$ est inférieure à

$$\begin{aligned} & \|mu_0 - m\lambda(u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} \times L(s) \max_h \{L(Q_{h,\tau})\} \times \prod_{j=1}^n \max\{1, |\alpha_j|_{p_0}\}^{mD_j} \\ & \times \begin{cases} D_0(m\|u_0\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} + 1 + n)^{D_0-1} & \text{si } p_0 = \infty \\ \max\{1, \|mu_0\|_{\overline{t_G}, \sigma_0}\}^{D_0-1} & \text{si } p_0 \neq \infty \end{cases} \end{aligned}$$

(l'hypothèse $\|m(u_0 - \lambda(u))\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} \leq 1$ a permis ici de majorer la norme de $m\lambda(u)$ et l'estimation de la longueur de l repose sur les estimations des sommes $\sum_{j=1}^n l_i(e_j)\lambda(e_i)$ introduites lors de la démonstration de la proposition 6.14). Pour conclure et si σ_0 est complexe, on majore $L(s)$ par $e^{U_0}\|s\|_{\overline{E_\alpha}, \sigma_0}$ (fin du § 3.7), on majore $\max_h \{L(Q_{h,\tau})\}$ par e^{U_0} grâce à (18) et l'on majore $D_0(m\|u_0\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} + 1 + n)^{D_0-1}$ par

$$D_0(n+2)^{D_0-1} \max\{1, \|mu_0\|_{\overline{t_G}, \sigma_0}\}^{D_0} \leq e^{2nU_0} \text{moy}_{\sigma_0}(1, \|mu_0\|_{\overline{t_G}, \sigma_0})^{D_0}.$$

Si σ_0 est ultramétrique, on a $L(s) = \|s\|_{\overline{E_\alpha}, \sigma_0}$ et $\max_h \{L(Q_{h,\tau})\} \leq e^{|\tau|} \leq e^{2(n+t)T} \leq e^{4nU_0}$. $\square$

L'estimation de $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s,\sigma_0}(m(\lambda(u), u))$ repose sur une version légèrement affaiblie des lemmes d'interpolation de Waldschmidt [37] (cas archimédien) et de Roy [30] (cas ultramétrique, voir aussi [11, lemme 4.21] pour les simplifications faites ici). Si x est un nombre réel positif et f une fonction définie sur le disque fermé $\overline{D}(0, x) = \{z \in \mathbf{C}_{p_0}; |z|_{p_0} \leq x\}$, on note $|f|_x$ la borne supérieure des $|f(z)|$, $z \in \overline{D}(0, x)$. Rappelons que $\epsilon_0 = 0$ si σ_0 est ultramétrique et 1 sinon. On pose $r'_{p_0} = \min(1, r_{p_0})$.

LEMME 6.25. — Soit S_1, T_1 des entiers naturels ≥ 2 et R, r des nombres réels vérifiant $R \geq r \geq (2S_1)^{\epsilon_0}$. Soit f une fonction analytique dans le disque $\overline{D}(0, R)$.

On a alors

$$|f|_r \leq S_1^{T_1} \max \left\{ \left(\frac{2^{\epsilon_0} r}{r'_{p_0} R} \right)^{T_1 S_1} |f|_R, \left(\left(\frac{10}{S_1} \right)^{\epsilon_0} \frac{r}{r'_{p_0}} \right)^{T_1 S_1} \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{\sigma_0} \right\} \right\}.$$

La suite de la démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde, au moyen de l'hypothèse suivante.

HYPOTHÈSE 6.26. — $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t}_G, \sigma_0} \leq \exp \left(-(C_0^{3/2} + 4n)U_0 \right).$

Notons $\mathbf{D}$ le disque ouvert $\{z \in \mathbf{C}_{p_0} ; |z|_{p_0} < \min \{r_{p_0}/|u_i|_{p_0} ; 1 \leq i \leq n\}\}$ si σ_0 est ultramétrique et l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes sinon. On notera que les disques fermés, centrés en 0 et de rayons 1 et ϵ/r_{p_0} respectivement, sont tous les deux inclus dans $\mathbf{D}$.

6.11.1. *Cas non périodique.* — Soit $\tau \in \mathbf{N}^n$ de longueur ℓ (on rappelle que cet entier ℓ , fixé après la définition 6.17, est inférieur à $(n+t)T$). Soit $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}_{p_0}$ l'application analytique définie par :

$$\forall z \in \mathbf{D}, \quad f(z) = \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(z(\lambda(u), u)).$$

Observons que, pour tout $h \in \mathbf{N}$ et tout $z \in \mathbf{D}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f^{(h)}(z)}{h!} &= \frac{1}{\tau! h!} D_w^\tau D_{(\lambda(u), u)}^h F_{s, \sigma_0}(z(\lambda(u), u)) \\ (24) \quad &= \sum_{\substack{j \in \mathbf{N}^n \\ |j|=h}} \binom{\tau+j}{\tau} u^j \frac{D_w^{\tau+j}}{(\tau+j)!} F_{s, \sigma_0}(z(\lambda(u), u)) \end{aligned}$$

($u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}_{p_0}^n$ est le vecteur des coordonnées de $(\lambda(u), u)$ dans la base $(w_1, \dots, w_n)$). Pour estimer $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u))$, nous allons utiliser le lemme d'interpolation 6.25 afin de majorer $|f(m)|_{p_0}$, avec les paramètres suivants :

- (i) Si σ_0 est un plongement *complexe* alors $S_1 := S_0$, $r := 2m$, $R := 2re$, $T_1 := (n+t)T$ et $f := f$.
- (ii) Si σ_0 est un plongement *ultramétrique* alors $S_1 := S_0$, $r := 1$, $R := \epsilon/r_{p_0}$, $T_1 := (n+t)T$ et $f := f$.

Avec ces choix, la proposition 6.14 fournit l'estimation suivante :

PROPOSITION 6.27. — On a $\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))|f|_R \leq \exp \{17n^2 U_0\} \|s\|_{\overline{E}_\alpha, \sigma_0}.$

Démonstration. — En remarque liminaire, mentionnons que les majorations qui suivent sont volontairement très larges, afin de rester valide dans le cas périodique, qui sera étudié au prochain paragraphe.

D'après la proposition 6.14, on a

$$|f(z)|_{p_0} \cdot \alpha_{\sigma_0}(z(\lambda(u), u)) \leq L(s) \times \begin{cases} e^{2n\sqrt{n} \max_{0 \leq j \leq n} D_j} & \text{si } p_0 = \infty \\ e^{4nT} & \text{si } p_0 \neq \infty. \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà vu (voir fin de la démonstration de la proposition 6.22), la longueur de s est plus petite que $e^{n \max_{0 \leq j \leq n} D_j} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}}$ si $p_0 = \infty$ et $L(s) \leq \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}}$ si $p_0 \neq \infty$. Le choix des paramètres donne alors

$$|f(z)|_{p_0} \cdot \alpha_{\sigma_0}(z(\lambda(u), u)) \leq e^{4nU_0} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}}.$$

En utilisant la définition (13) de α_{σ_0} , la quantité $\alpha_{\sigma_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}$ est, pour $|z|_{p_0} \leq R$, majorée par

$$\begin{cases} (1 + 64(nS\epsilon \|\lambda(u)\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}})^2)^{D_0/2} \prod_{j=1}^n (1 + e^{16nS\epsilon |u_j|_{p_0}})^{D_j/2} & \text{si } p_0 = \infty, \\ \max \{1, 2\epsilon \|\lambda(u)\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}\}^{D_0} & \text{si } p_0 \neq \infty \end{cases}$$

(dans le deuxième cas, nous avons majoré $r_{p_0}^{-1} = p_0^{\frac{1}{p_0-1}}$ par 2). Dans le cas ultramétrique l'hypothèse 6.26 implique $\|\lambda(u)\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}} = \|u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}$ et

$$\max \{1, 2\epsilon \|u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}\}^{D_0} \leq (2\epsilon)^{D_0} \max \{1, \|u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}\}^{D_0}.$$

On trouve ainsi

$$\frac{\alpha_{\sigma_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}}{\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1}} \leq (2\epsilon)^{D_0} \leq e^{2U_0}.$$

Le résultat est alors acquis car $2 + 4n \leq 17n^2$. Dans le cas archimédien, on majore $\|\lambda(u)\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}^2$ par $2(\|\lambda(u) - u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}^2 + \|u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}^2)$. Le quotient

$$\frac{\alpha_{\sigma_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}}{\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1}}$$

est majoré par

$$\sqrt{2}^{\sum_{j=0}^n D_j} (8n\epsilon S)^{D_0} (1 + \|u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}}^2)^{D_0/2} \exp \left\{ 8nS\epsilon \left(\sum_{j=1}^n D_j |u_j|_{p_0} \right) \right\}.$$

Le choix des paramètres entraîne

- (i) $8nS\epsilon (\sum_{j=1}^n D_j |u_j|_{p_0}) \leq 8n^2 U_0$,
- (ii) $\sqrt{2}^{\sum_{j=0}^n D_j} (8n\epsilon S)^{D_0} \leq e^{3U_0}$,
- (iii) $\text{moy}_{\sigma_0}(1, \|u_0\|_{\overline{t}_{G, \sigma_0}})^{D_0} \leq \exp(DD_0 h_{\overline{E}_0}(1, u_0)) \leq e^{2n^2 U_0}$ (lemme 6.21).

On trouve ainsi

$$(25) \quad \frac{\alpha_{\sigma_0}(z(\lambda(u), u))^{-1}}{\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1}} \leq e^{(10n^2+3)U_0} \quad (\text{pour } |z|_{p_0} \leq R)$$

et l'on conclut avec $10n^2 + 3 + 4n \leq 17n^2$. $\square$

Par ailleurs, au moyen de la formule (24), du lemme 6.24 et de la construction de la section s , on a

$$\max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{p_0} \right\} \leq \theta_0 \left(e^{4nU_0} \|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} + \alpha^{-1} \right) \|s\|_{\overline{E_\alpha}, \sigma_0}$$

où

$$\theta_0 := \max_{0 \leq m < S_0} \{ \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1} \} \times \begin{cases} (n + \sum_{j=1}^n |u_j|_{p_0})^{2(n+t)T} & \text{si } p_0 = \infty, \\ 1 & \text{si } p_0 \neq \infty. \end{cases}$$

La somme des $|u_j|_{p_0}$ est majorée par $\sqrt{n} \|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0}$, lui-même plus petit que $\sqrt{2n} |u|_{2, \sigma_0}$. On a $|u|_{2, \sigma_0} \leq \sum_{j=1}^n |u_j|_{p_0}$ et avec la définition de $\log a_j$ on trouve

$$\begin{aligned} n + \sum_{j=1}^n |u_j|_{p_0} &\leq n + \sqrt{2n} \left(\frac{D}{\epsilon} \right) \log \prod_{j=1}^n a_j \\ &\leq n + \sqrt{2n} \exp \{ 2\alpha \log \epsilon \}. \end{aligned}$$

En posant $\mathfrak{r} := \alpha \log \epsilon \geq 1$, on a

$$(n + \sqrt{2n} e^{2\mathfrak{r}})^{4n/\mathfrak{r}} \leq e^{8n} (n e^{-2} + \sqrt{2n})^{4n} \leq e^{10n^2}.$$

La majoration $T \leq U_0/(\alpha \log \epsilon)$ entraîne alors

$$\theta_0 \leq \max_{0 \leq m < S_1} \{ \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1} \} \exp \{ 10n^2 U_0 \}.$$

En procédant de la même manière que pour la majoration (25), on a, pour tout entier m entre 1 et S_1 ,

$$\begin{aligned} \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1} &\leq (2nS)^{D_0} e^{2n^2 U_0} \prod_{j=1}^n \left(\sqrt{2} e^{D_m \log a_j} \right)^{D_j} \\ &\leq \exp \left(\left(1 + \frac{\log(2n)}{\log C_0} + 2n^2 + \frac{n \log \sqrt{2}}{C_0} + n(n+t) \right) U_0 \right) \\ &\leq e^{5n^2 U_0}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \leq 1$, on en déduit

$$\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \cdot \max_{0 \leq m < S_1} \{ \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))^{-1} \} \leq e^{5n^2 U_0}.$$

De plus $\log \alpha = C_0^{3/2} U_0$ (proposition 6.16) et $\|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t}_G, \sigma_0}$ est plus petit que $e^{-(C_0^{3/2} + 4n)U_0}$ d'après l'hypothèse 6.26. Les calculs ci-dessus montrent alors que

$$\begin{aligned}
 (26) \quad \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) & \max_{\substack{0 \leq h < T_1 \\ 0 \leq m < S_1}} \left\{ \left| \frac{1}{h!} f^{(h)}(m) \right|_{p_0} \right\} \\
 & \leq e^{15n^2 U_0} \left(e^{4n U_0} \|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t}_G, \sigma_0} + \alpha^{-1} \right) \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}} \\
 & \leq e^{(16n^2 - C_0^{3/2})U_0} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}}.
 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme d'interpolation 6.25, qui, *via* la majoration $|f(m)|_{p_0} \leq |f|_r$, permet de majorer $\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u))|f(m)|_{p_0}$ par

$$e^{2n U_0 (\log C_0 + (\log \epsilon)^{-1})} \max \left\{ e^{(17n^2 - C_0)U_0}, (40nC_0^2)^{2nC_0 U_0} e^{(16n^2 - C_0^{3/2})U_0} \right\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}},$$

quantité plus petite que $e^{-(3/4)C_0 U_0} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}}$. En effet, dans le maximum, la première quantité $e^{17n^2 - C_0}$ l'emporte sur la seconde car

$$C_0 (2n \log(40n) + 4n \log C_0 + 1) \leq C_0^{3/2} \leq C_0^{3/2} + n^2$$

grâce au choix de $C_0 = (10n)^{6n}$. Grâce à $\epsilon \geq e$, on a alors

$$2n(\log C_0 + (\log \epsilon)^{-1}) + 17n^2 - C_0 \leq -3C_0/4.$$

En utilisant une nouvelle fois le lemme 6.24 pour passer de $f(m)$ à $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u))$, on trouve

$$\alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \left| \frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u)) \right|_{p_0} \leq 2e^{-(3/4)C_0 U_0} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma_0}}.$$

Cette estimation est valide pour tout $\tau \in \mathbf{N}^n$ de longueur ℓ et, *a priori*, pour $(m, \tau) \notin \Upsilon$. Mais l'inégalité (22) montre qu'elle reste vraie pour $(m, \tau) \in \Upsilon$ puisque $\alpha^{-1} \leq \exp \{-C_0^{3/2} U_0\}$. La définition 6.17 du jet de s (voir aussi (21)) conduit alors au résultat suivant.

PROPOSITION 6.28. — *On a $\|\text{jet}_W^\ell s(m\mathbf{p})\|_{\overline{\mathfrak{J}}_{\epsilon t}, \sigma} \leq \exp \{-C_0 U_0/2\} \|s\|_{\overline{E}_{\alpha, \sigma}}$ pour tout plongement σ conjugué à σ_0 .*

6.11.2. Cas périodique. — Rappelons tout d'abord qu'il a été vu au § 6.4 que le cas périodique n'est possible que lorsque σ_0 est complexe. Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbf{N}^n$ de longueur ℓ et $\tau' := (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, 0)$. Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ l'application analytique définie par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = \frac{1}{\tau'!} D_w^{\tau'} F_{s, \sigma_0}(z(\lambda(u), u)).$$

Afin d'évaluer $\text{jet}_W^\ell s(mp)$, nous allons donner une majoration fine de la dérivée $f^{(\tau_n)}(m)/\tau_n!$ au moyen du lemme d'interpolation 6.25. Observons tout d'abord que

$$(27) \quad \left| \frac{1}{\tau_n!} f^{(\tau_n)}(m) \right| \leq |f|_{1+m}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy usuelle pour les fonctions holomorphes complexes. Le terme $|f|_{1+m}$ peut être majoré au moyen du lemme d'interpolation 6.25 avec les paramètres suivants : $S_1 := (n+t)S$, $r := 2(n+t)S$, $R := 2re$, $T_1 := T_0$ et $f := f$. Dans ce lemme d'interpolation intervient $|f|_R$ que l'on peut estimer en suivant la démonstration de la proposition 6.27, dont les calculs ont été faits de telle sorte qu'ils conviennent encore ici. Par ailleurs, grâce à la formule (24), au lemme de comparaison 6.24, et par construction de s , les dérivées de f jusqu'à l'ordre T_0 en les nombres $z \in \{0, \dots, (n+t)S\}$ sont petites comme dans l'estimation (26). En réalité une fois que l'on a observé qu'avec les choix de paramètres ci-dessus le produit $T_1 S_1$ était presque le même que dans le cas précédent, tout se passe à l'identique, si ce n'est que l'on doit se servir de (27). Un dernier passage par le lemme de comparaison 6.24 permet alors d'obtenir *in fine* :

$$(28) \quad \alpha_{\sigma_0}(m(u_0, u)) \left| \frac{1}{\tau!} D_w^{\tau'} D_{(\lambda(u), u)}^{\tau_n} F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u)) \right| \leq 2 \exp \{-(3/4)C_0 U_0\} \|s\|_{\bar{E}_{\alpha, \sigma_0}}$$

(majoration valide pour tout $\tau = (\tau', \tau_n)$ de longueur ℓ). Même si nous n'obtenons pas une estimation de $\frac{1}{\tau!} D_w^\tau F_{s, \sigma_0}(m(u_0, u))$, ceci n'a pas d'importance car ce qui nous intéresse est le jet d'ordre ℓ de s , qui lui ne dépend pas du choix de la base considérée pour le définir (voir le commentaire qui suit la définition 6.17). Choisissons la base $w := (w_1, \dots, w_{n-1}, (\lambda(u), u))$ dans la définition 6.17. Si $x \in W \otimes_{\sigma_0} \mathbb{C}$ a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base w alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad w_i^\vee(x) = x_i - x_n \frac{u_i}{u_n} \quad \text{et} \quad (\lambda(u), u)^\vee(x) = \frac{x_n}{u_n}.$$

Par conséquent on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \|w_i^\vee\|_{\bar{t}_{G, \sigma_0}^\vee} = \left(1 + \left(\frac{|u_i|}{|u_n|} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|(\lambda(u), u)^\vee\|_{\bar{t}_{G, \sigma_0}^\vee} = \frac{1}{|u_n|}.$$

De ce fait et de la majoration (28), l'on déduit

$$\|\text{jet}_W^\ell s(mp)\|_{\bar{J}_{\text{et}, \sigma_0}} \leq 2 \left(\frac{\max\{1, \|(\lambda(u), u)\|_{\bar{t}_{G, \sigma_0}^\vee}\}}{|u_n|} \right)^\ell \exp \{-(3/4)C_0 U_0\} \|s\|_{\bar{E}_{\alpha, \sigma_0}}.$$

L'hypothèse 6.26 et l'inégalité triangulaire donnent la majoration

$$\|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} \leq 1 + \|(u_0, u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} \leq 1 + \|u_0\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma_0} + \sum_{j=1}^n |u_j|.$$

L'hypothèse c) du théorème 5.1 permet de majorer $\|u_0\|_{\overline{k^n/W_0}, \sigma_0} \leq 1$ et, comme

$$|u_j| \leq (D \log a_j)/\epsilon \leq (\log a_j) \exp \{(\mathfrak{a} \log \epsilon)/D\},$$

on en déduit

$$\|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} \leq \left(2 + \log \prod_{j=1}^n a_j\right) \exp \{(\mathfrak{a} \log \epsilon)/D\} \leq \exp \{(2\mathfrak{a} \log \epsilon)/D\}.$$

De plus, en vertu des propositions 6.7 et 6.8, on a $|u_n|^{-1} \leq C_0 \mathfrak{a}(n+t)! \widetilde{D}_0/t!$. La proposition 6.3, (iv), permet de majorer $T \log \widetilde{D}_0$ par $(7n \log C_0)U_0$. On trouve alors

$$2 \left(\frac{\max \{1, \|(\lambda(u), u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0}\}}{|u_n|} \right)^\ell \leq \exp \{(C_0/4)U_0\}.$$

Reportée dans l'estimation de la norme du jet, ce résultat montre que la proposition 6.28 reste vraie dans le cas périodique.

6.12. Conclusion. — La fin de la démonstration du théorème 5.1 repose sur le lemme 3.6 qui, compte tenu de la proposition 6.10, s'écrit ici sous la forme

$$h(\text{jet}_W^\ell s(mp)) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathfrak{J}\epsilon\mathfrak{t}}).$$

Nous allons montrer que cette minoration n'est pas compatible avec la majoration de la hauteur du jet que l'on peut trouver par le biais de l'hypothèse 6.26. En effet les propositions 6.22, 6.23 et 6.28 entraînent

$$h(\text{jet}_W^\ell s(mp)) \leq \frac{nU_0}{D} + (n+t)T \log(4D_0) - \frac{C_0 U_0 [k_{\sigma_0} : \mathbf{Q}_{p_0}]}{2D} + h_{\overline{E_\alpha}}(s).$$

La proposition 6.3, (iv), qui permet de majorer $T \log(4D_0)$ (en se rappelant que $D_0 \leq \widetilde{D}_0$ car $x \leq 1$) et la construction de s (proposition 6.16) conduisent à

$$h(\text{jet}_W^\ell s(mp)) \leq \left(n + 14n^2 \log C_0 - \frac{C_0}{2} + 3(4n+1)^{3n} C_0^{1/2}\right) \frac{[k_{\sigma_0} : \mathbf{Q}_{p_0}]U_0}{D}.$$

Comme la pente maximale de $\overline{\mathfrak{J}\epsilon\mathfrak{t}}$ est plus petite que $8n^2 U_0/D$ (proposition 6.19), on obtient l'inégalité

$$0 \leq n + 14n^2 \log C_0 - \frac{C_0}{2} + 3(4n+1)^{3n} C_0^{1/2} + 8n^2$$

qui entre en contradiction avec le choix de $C_0 = (10n)^{6n} \geq (1 + 6(4n + 1)^{3n})^2$. L'hypothèse 6.26 est donc fausse et $\log \|u_0 - \lambda(u)\|_{\overline{t_G}, \sigma_0} \geq -(C_0^{3/2} + 4n)U_0$. La proposition 6.2 entraîne

$$\log \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|_{p_0} \geq -n^3 \log b - \log \sqrt{n} - (C_0^{3/2} + 4n)U_0.$$

Il nous reste maintenant à simplifier le minorant pour obtenir le théorème 5.1. Tout d'abord on observe que

$$\log b + D \log S + S^y \log \mathfrak{e} \leq (C_0^3 + 2)(\log b + \mathfrak{a}^y \log \mathfrak{e} + (1 - y)D \log \mathfrak{a})$$

en utilisant la valeur $S = C_0^3 \mathfrak{a}$ et $D \log \mathfrak{a} \leq 2\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}$ (proposition 6.3, (iii)). La formule (9) pour U_0 permet de majorer $n^3 \log b + \log \sqrt{n} + (C_0^{3/2} + 4n)U_0$ par

$$C_1 \mathfrak{a}^{1/t} (\log b + \mathfrak{a}^y \log \mathfrak{e} + (1 - y)D \log \mathfrak{a}) \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}}\right)^{1/t}$$

avec

$$C_1 = n^3 + (C_0^{3/2} + 4n)(C_0^3 + 2)C_0^{\frac{3n-1}{t}} \left(\frac{t!(C_0^3 + 1)}{(n+t)!} \right)^{1/t}.$$

Comme $(n+t)! \geq 2t!$ le dernier terme est majoré par $C_0^{3/t}$. Comme $n \geq t \geq 1$, on a alors

$$C_1 \leq (1/10^6 + (1 + 4/10^9)(1 + 2/10^{18})) C_0^{9,5n/t} \leq (10n)^{58n^2/t}$$

et le théorème 5.1 est démontré.

7. Démonstration du théorème 2.1

Considérons un ensemble J tel que $(u_j)_{j \in J}$ soit une base du $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel engendré par $u_1, \dots, u_n$. Posons $M = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Pour $m \in M$, la famille $\{u_j\}_{j \in J} \cup \{u_m\}$ est liée sur $\mathbf{Q}$. Ainsi il existe un uplet $(\theta_{m,j})_{j \in J}$ de nombres rationnels telle que $u_m = \sum_{j \in J} \theta_{m,j} u_j$. Les formes linéaires $\Theta_m(x_1, \dots, x_n) = x_m - \sum_{j \in J} \theta_{m,j} x_j$ sont linéairement indépendantes et elles définissent T_u :

$$T_u = \bigcap_{m \in M} \ker \Theta_m \quad (\text{les noyaux sont dans } \mathbf{Q}^n).$$

Chaque $\ell_i(u)$, $1 \leq i \leq t$, est la valeur d'une forme linéaire L_i en les u_j , $j \in J$, avec des coefficients de la forme

$$\beta'_{i,j} := \beta_{i,j} + \sum_{m \in M} \beta_{i,m} \theta_{m,j}.$$

L'orthogonal dans k^J du k -espace vectoriel $V \subseteq (k^J)^\vee$ engendré par $L_1, \dots, L_t$ est $V^\perp = \bigcap_{i=1}^t \ker L_i$. Il est isomorphe à $W_0 \cap (T_u \otimes k)$ et, en particulier, on a

$$\dim_k V = \text{card } J - \dim_k (W_0 \cap (T_u \otimes k)) = s.$$

On peut donc extraire de $\{L_1, \dots, L_t\}$ une famille libre maximale, indexée par un sous-ensemble $S \subset \{1, \dots, t\}$ à s éléments. Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, on a $\Lambda_i = \beta_{i,0} + L_i((u_j)_{j \in J})$ et le maximum des $|\Lambda_i|_{p_0}$ que l'on cherche à minorer est plus grand que $\max_{s \in S} \{|\beta_{s,0} + L_s((u_j)_{j \in J})|_{p_0}\}$. Pour quantifier ces données, nous utiliserons le résultat suivant.

LEMME 7.1. — Soit $\sigma_0: k \hookrightarrow \mathbf{C}_{p_0}$ un corps de nombres plongé dans $\mathbf{C}_{p_0}$. Soit ℓ un entier ≥ 1 et $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell+1} \in \mathcal{T}_{p_0}$ tels que $e^{\lambda_j} \in k$ pour tout $j \in \{1, \dots, \ell+1\}$. Soit $\log A_j$ un majorant de $\max(h(e^{\lambda_j}), \epsilon_0 |\lambda_j|_{p_0} / [k : \mathbf{Q}])$. Il existe des entiers relatifs $\nu_1, \dots, \nu_{\ell+1}$, non tous nuls, tels que $\nu_1 \lambda_1 + \dots + \nu_{\ell+1} \lambda_{\ell+1} = 0$ et, pour tout $j \in \{1, \dots, \ell+1\}$,

$$|\nu_j| \leq (11\ell[k : \mathbf{Q}]^3)^\ell (\log A_1) \cdots (\log A_{\ell+1}) / \log A_j.$$

Démonstration. — Lorsque $p_0 = \infty$, il s'agit du lemme 7.19 de Waldschmidt [38, p. 222]. Si p_0 est premier, la démonstration du cas archimédien fonctionne encore et elle est même plus simple. En effet, les mêmes arguments de géométrie des nombres et de minoration de la hauteur montrent l'existence d'entiers $\nu_1, \dots, \nu_{\ell+1}$, non tous nuls, tels que $\prod_{j=1}^{\ell+1} e^{\nu_j \lambda_j}$ est une racine de l'unité. Comme tout multiple entier de $\sum_j \nu_j \lambda_j$ appartient à $\mathcal{T}_{p_0}$ et comme l'exponentielle p_0 -adique est injective sur ce disque, on en déduit que cette somme est nulle. $\square$

En utilisant ce lemme, pour tous $m \in M$ et $j \in J$, on peut choisir $\theta_{m,j}$ de sorte que

$$h(\theta_{m,j}) \leq (\text{card } J) \log(11(\text{card } J)D^3) + \log \prod_{j \in J_m} \log a_j$$

où J_m est un sous-ensemble de $\subseteq J \cup \{m\}$, de même cardinal que J , choisi de sorte que le produit ci-dessus soit maximal. En utilisant la définition de $\mathfrak{a}$ et l'inégalité arithmético-géométrique, on majore le terme $\log \prod_{j \in J_m} \log a_j$ par $n \log \mathfrak{e} / D - (\text{card } J) \log(\text{card } J)$ et donc

$$h(\theta_{m,j}) \leq n \log(11) + 3n \log D + n \frac{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D}$$

puis

$$\max_{j \in J, m \in M} h(\theta_{m,j}) \leq 4n \left(\frac{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D} + \log D \right).$$

Si $p_0 = \infty$ notons $\mathbf{N}$ le premier entier supérieur à $|(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})|_{2,\sigma_0}$ et $\mathbf{N} = 1$ sinon. Comme $|\beta_{i,0}|_{\sigma_0} \leq b$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, on a $|(\beta_{1,0}, \dots, \beta_{t,0})|_{2,\sigma_0} \leq \sqrt{tb}$ et donc

$$\mathbf{N} \leq ([\sqrt{tb}] + 1)^{\epsilon_0} \leq (2nb)^{\epsilon_0}.$$

Les propriétés standard de la hauteur de Weil (voir [38, § 3.2]) permettent d'obtenir les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} h(\beta'_{s,j}/N) &\leq h(\beta'_{s,j}) + \log N \\ &\leq \log n + n \max_{m \in M} \{h(\beta_{s,m})\} + n \max_{m \in M} \{h(\theta_{m,j})\} + \epsilon_0 \log(2nb) \\ &\leq (n + \log(2n^2) + \epsilon_0 D) \frac{\log b}{D} + 4n^2 \left(\frac{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}{D} + \log D \right) \end{aligned}$$

et donc

$$D \max_{s \in S, j \in J} h(\beta'_{s,j}/N) \leq 4n^2 (\max(1, \epsilon_0 D) \log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} + D \log D).$$

On applique alors le théorème 5.1 avec les formes linéaires $(L_s/N)_{s \in S}$ et les logarithmes $(u_j)_{j \in J}$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \log \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i|_{p_0} &\geq \log \max_{1 \leq i \leq t} |\Lambda_i/N|_{p_0} \\ &\geq \log \max_{s \in S} \{|\beta_{s,0}/N + (1/N)L_s((u_j)_{j \in J})|_{p_0}\} \\ &\geq -(10 \operatorname{card} J)^{58(\operatorname{card} J)^2/s} \mathfrak{a}^{1/s} (\log b' + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e}) \prod_{j \in J} \left(1 + \frac{D \log a_j}{\log \mathfrak{e}} \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le terme $\log b'$ désigne

$$D \max_{s \in S, j \in J} \{1, h(\beta'_{s,j}/N), h(\beta_{s,0}/N)\}.$$

Il est majoré par $4n^2 (\max(1, \epsilon_0 D) \log b + \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} + D \log D)$. Pour obtenir le théorème 2.1, il ne reste plus qu'à observer que $(4n^2 + 1)(10n)^{58n}$ est majoré par $(10n)^{59n}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABLY & É. GAUDRON – « Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), p. 629–634.
- [2] D. BERTRAND & P. PHILIPPON – « Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs », *Illinois J. Math.* **32** (1988), p. 263–280.
- [3] E. BOMBIERI & J. VAALER – « On Siegel's lemma », *Invent. Math.* **73** (1983), p. 11–32, avec un addendum : *ibid.* **75** (1984), p. 377.
- [4] S. BRULTET – « D'une mesure d'approximation simultanée à une mesure d'irrationalité : le cas de $\Gamma(1/4)$ et $\Gamma(1/3)$ », *Acta Arith.* **104** (2002), p. 243–281.
- [5] S. DAVID – « Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **62** (1995).

- [6] S. DAVID & N. HIRATA-KOHNO – « Linear forms in elliptic logarithms », *J. reine angew. Math.* **628** (2009), p. 37–89.
- [7] S. DAVID & P. PHILIPPON – « Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **28** (1999), p. 489–543.
- [8] P. DONG – « Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes p -adiques de nombres algébriques », *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **343** (1995).
- [9] É. GAUDRON – « Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif », *Invent. Math.* **162** (2005), p. 137–188.
- [10] ———, « Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **39** (2006), p. 699–773.
- [11] ———, « Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes », *J. Number Theory* **127** (2007), p. 220–261.
- [12] ———, « Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **119** (2008), p. 21–95.
- [13] ———, « Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés », *Manuscripta Math.* **130** (2009), p. 159–182.
- [14] É. GAUDRON & G. RÉMOND – « Lemmes de Siegel d'évitement », *Acta Arith.* **154** (2012), p. 125–136.
- [15] ———, « Minima, pentes et algèbre tensorielle », *Israel J. Math.* **195** (2013), p. 565–591.
- [16] N. HIRATA-KOHNO – « Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques », *Invent. Math.* **104** (1991), p. 401–433.
- [17] ———, « Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs », *Compositio Math.* **86** (1993), p. 69–96.
- [18] J. H. LOXTON – « Some problems involving powers of integers », *Acta Arith.* **46** (1986), p. 113–123.
- [19] K. MAHLER – *Lectures on transcendental numbers*, Lecture Notes in Math., vol. 546, Springer, Berlin-New York, 1976.
- [20] E. M. MATVEEV – « An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. II », *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **64** (2000), p. 125–180.
- [21] M. MIGNOTTE – « Sur la résolution de systèmes linéaires en nombres entiers », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou 15e année (1973/74), Théorie des nombres, Fasc. 2, Exp. No. G16*, Secrétariat Mathématique, Paris, 1975.
- [22] J. NEUKIRCH – *Algebraic number theory*, Grundle Math. Wiss., vol. 322, Springer, Berlin, 1999.

- [23] C. PEREZ-GARCIA & W. H. SCHIKHOF – *Locally convex spaces over non-Archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 119, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [24] P. PHILIPPON – « Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs », *Rocky Mountain J. Math.* **26** (1996), p. 1069–1088.
- [25] P. PHILIPPON & M. WALDSCHMIDT – « Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs », in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87*, Progr. Math., vol. 75, Birkhäuser, 1988, p. 313–347.
- [26] ———, « Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs », *Illinois J. Math.* **32** (1988), p. 281–314.
- [27] K. RAMACHANDRA – « A note on Baker’s method », *J. Austral. Math. Soc.* **10** (1969), p. 197–203.
- [28] G. RÉMOND – « Sur les sous-variétés des tores », *Compositio Math.* **134** (2002), p. 337–366.
- [29] G. RÉMOND & F. URFELS – « Approximation diophantienne de logarithmes elliptiques p -adiques », *J. Number Theory* **57** (1996), p. 133–169.
- [30] D. ROY – « Interpolation sur des perturbations d’ensembles produits », *Bull. Soc. Math. France* **130** (2002), p. 387–408.
- [31] D. ROY & J. L. THUNDER – « An absolute Siegel’s lemma », *J. reine angew. Math.* **476** (1996), p. 1–26, avec un addendum et un erratum, *ibid.* **508** (1999), p. 47–51.
- [32] J-P. SERRE – « Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques », *Publ. Math. I.H.É.S.* **12** (1962), p. 69–85.
- [33] C. L. SIEGEL – « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen », *Abhandlungen der Preußischen Akad. der Wissenschaften* **1** (1929).
- [34] A. THUE – « Om en generel i store hele tal uløsbar ligning », *Kra. Videnskabens Selskabs Skrifter, Mat. Nat. Kl.* **7** (1908), p. 1–15.
- [35] ———, « Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen », *J. reine angew. Math.* **135** (1909), p. 284–305.
- [36] M. WALDSCHMIDT – *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Math., vol. 402, Springer, Berlin-New York, 1974.
- [37] ———, « A lower bound for linear forms in logarithms », *Acta Arith.* **37** (1980), p. 257–283.
- [38] ———, *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Grundle Math. Wiss., vol. 326, Springer, Berlin, 2000.
- [39] K. YU – « Report on p -adic logarithmic forms », in *A panorama of number theory or the view from Baker’s garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, p. 11–25.

- [40] S. ZHANG – « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), p. 187–221.