

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

**PROBLÈME DE PLATEAU COMPLEXE  
FEUILLETÉ. PHÉNOMÈNES DE  
HARTOGS-SEVERI ET BOCHNER  
POUR DES FEUILLETAGES  
CR SINGULIERS**

Gennadi Henkin & Vincent Michel

**Tome 142**

**Fascicule 1**

**2014**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 95-125

---

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un  
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

---

*Comité de rédaction*

Jean BARGE	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhelm SCHLAG
Charles FAVRE	
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
<a href="mailto:smf@smf.univ-mrs.fr">smf@smf.univ-mrs.fr</a>	Inde	<a href="http://www.ams.org">www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 43 € (\$ 64)

*Abonnement* Europe : 300 €, hors Europe : 334 € (\$ 519)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

*Bulletin de la Société Mathématique de France*

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

[revues@smf.ens.fr](mailto:revues@smf.ens.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2014

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

## PROBLÈME DE PLATEAU COMPLEXE FEUILLETÉ. PHÉNOMÈNES DE HARTOGS-SEVERI ET BOCHNER POUR DES FEUILLETAGES CR SINGULIERS

PAR GENNADI HENKIN & VINCENT MICHEL

---

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de généraliser géométriquement des théorèmes de Severi, Brown et Bochner portant sur le prolongement analytique des fonctions réelles analytiques qui sont holomorphes par rapport à l'une de leurs variables. Nous établissons en particulier que si  $N$  est un anneau Lévi-plat réel analytique d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$ , il est possible de trouver  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$  tel que  $\mathcal{X} \cup N$  soit un sous-ensemble réel analytique qui remplisse  $N$  au sens où le bord du courant d'intégration porté par  $\mathcal{X}$  est une sous-variété lisse de  $N$  feuilletée par des courbes réelles. En outre, les fonctions réelles analytiques sur  $N$  dont les restrictions aux feuilles complexes sont harmoniques se prolongent à  $\mathcal{X}$  en fonction du même type. Nous donnons aussi un théorème quand le bord prescrit est un cycle.

ABSTRACT (*Foliated complex Plateau problem. Hartogs-Severi and Bochner phenomenon for singular CR foliations*)

The purpose of this paper is to generalise in a geometric setting theorems of Severi, Brown and Bochner about analytic continuation of real analytic functions which are holomorphic or harmonic with respect to one of its variables. We prove in particular that if  $N$  is a real analytic levi-flat annulus in an open set of  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$ , then one can find  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$  such that  $\mathcal{X} \cup N$  is a levi-flat real analytic subset and  $\mathcal{X}$  fills  $N$  in the sense that the boundary of the integration current of  $\mathcal{X}$  is a prescribed smooth submanifold of  $N$  foliated by real curves. Moreover, real analytic functions on  $N$  whose

---

*Texte reçu le ??? et accepté le ???.*

GENNADI HENKIN • *E-mail* : [henkin@math.jussieu.fr](mailto:henkin@math.jussieu.fr), Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. CEMI, Academy of Science, Moscow, Russia

VINCENT MICHEL • *E-mail* : [michel@math.jussieu.fr](mailto:michel@math.jussieu.fr), Université Pierre et Marie Curie, Paris

Classification mathématique par sujets (2000). — 32D15, 32C25, 32V15, 35R30, 58J32.

Mots clefs. — Problème de Plateau complexe feuilleté, phénomène de Severi-Brown-Bochner, fonction de Green, feuilletage singulier.

restrictions to complex leaves are harmonic extend to  $\mathcal{X}$  in functions of the same kind. We give also a theorem when the prescribed boundary is a cycle.

### 1. Enoncés

Lorsque  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{C}$  dont le bord est lisse et connexe, on sait depuis les travaux de Sohotsky en 1873 qu'une fonction  $u$  définie et continue sur le bord  $\gamma$  de  $\Omega$  se prolonge holomorphiquement à  $\Omega$  si et seulement si elle vérifie la condition des moments, à savoir que

$$\int_{\gamma} h u d z = 0$$

pour toute fonction entière  $h$ . Une version géométrique et plus générale de ce résultat est établie dans [30], [19, th. 4.2] et [7, th. 4] : étant donné un couple  $(\gamma, \mu)$  où  $\gamma$  est une courbe réelle orientée connexe de  $\mathbb{C}^n$  satisfaisant une hypothèse de régularité très faible et  $\mu$  une mesure sur  $\gamma$ , l'annulation de tous les moments de  $\mu$  sur  $\gamma$ , c'est à dire

$$(1) \quad \forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \int_{\gamma} h d\mu = 0$$

caractérise l'existence d'une courbe complexe<sup>(1)</sup>  $\mathcal{X}$  de volume fini dont  $\gamma$  est le bord au sens des courants et d'une  $(1, 0)$ -forme holomorphe  $\varphi$  sur  $\mathcal{X}$  dont  $\mu$  est la valeur au bord, c'est à dire vérifie au sens des courants  $d([\mathcal{X}] \wedge \varphi) = \mu$ ,  $[\mathcal{X}]$  étant le courant d'intégration sur  $\mathcal{X}$  et  $\mu$  étant identifiée à son extension simple à  $\mathbb{C}^n$ . Précisons que  $\mathcal{X}$  n'étant pas forcément lisse, une  $(1, 0)$ -forme (faiblement) holomorphe  $\varphi$  sur  $\mathcal{X}$  est localement la restriction à  $\mathcal{X}$  d'une  $(1, 0)$ -forme méromorphe  $\tilde{\varphi}$  telle que  $\bar{\partial}([\mathcal{X}] \wedge \tilde{\varphi}) = 0$ .

Il s'avère que la condition des moments gouverne aussi la possibilité de réaliser un triplet  $(\gamma, u, \alpha)$  où  $u \in C^1(\gamma)$  et  $\alpha \in C^1(\gamma, \Lambda^{1,0} T^* \mathbb{C}^n)$  comme une donnée de Cauchy du Laplacien d'une courbe complexe  $\mathcal{X}$  à construire dans  $\mathbb{C}^n$  que  $\gamma$  borderait. Lorsque  $\mathcal{X}$  est une surface de Riemann ouverte bordée par  $\gamma$  au sens des variétés à bord, une telle donnée est un triplet  $(\gamma, u, \alpha)$  comme ci-dessus avec la condition que  $\alpha$  est la valeur au bord du courant  $\partial \tilde{u}$  où  $\tilde{u}$  est le prolongement harmonique de  $u$  à  $\mathcal{X}$ . Dans cette situation,  $\alpha$  peut être exprimée à partir de l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann  $N_{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$ , c'est à dire de l'opérateur qui à  $u \in C^1(\gamma, \mathbb{R})$  associe  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} |_{\gamma}$  où  $\tilde{u}$  est le prolongement harmonique de  $u$  à  $\mathcal{X}$  et  $\nu$  est le champ de vecteurs unitaires qui dirigent le long de  $\gamma$  la normale extérieure à  $\mathcal{X}$ . En effet, si on désigne par  $\tau$  le champ

<sup>(1)</sup> Une courbe complexe est dans cet article un ensemble (complexe) analytique de dimension 1 et une surface de Riemann est une courbe complexe lisse et connexe.

des vecteurs tangents à  $\gamma$  tel qu'en chaque point  $x$  de  $\gamma$ ,  $(\nu_x, \tau_x)$  soit une base orthonormée directe de  $T_x \mathcal{X}$ , si on note  $(\nu^*, \tau^*)$  la duale de  $(\nu, \tau)$  et si pour  $u \in C^1(\gamma)$  on pose

$$L_{\mathcal{X}}u = \frac{1}{2} (N_{\mathcal{X}}u - iTu)$$

où  $T$  désigne la dérivation par rapport à  $\tau$ , alors

$$\forall u \in C^1(\gamma), \partial \tilde{u}|_{\gamma} = (L_{\mathcal{X}}u)(\nu^* + i\tau^*).$$

Pour qu'un triplet  $(\gamma, u, \alpha)$  puisse être une donnée de Cauchy,  $\alpha$  doit donc être de la forme  $\frac{1}{2} (u' - iTu)(\nu^* + i\tau^*)$  où  $u' \in C^0(\gamma)$ , condition qui garde un sens même lorsque l'existence même de  $\mathcal{X}$  n'est pas connue pour peu que  $\gamma$  soit plongée dans une variété complexe car  $\nu^*$  peut être alors défini a priori de façon naturelle. Une donnée de Cauchy étant ainsi posée dans  $\mathbb{C}^n$ , le problème de construire à la fois  $\mathcal{X}$  et un prolongement harmonique à la fonction donnée sur  $\gamma$  s'inscrit dans le problème de reconstruire une surface de Riemann à partir de son opérateur de Dirichlet-à-Neumann. Dans le cas général, il est naturel qu'une courbe complexe  $\mathcal{X}$  bordée par une courbe réelle présente des singularités et la notion de fonction harmonique doit être étendue pour que le problème précédent garde un sens.

Par définition, une fonction harmonique sur une courbe complexe  $\mathcal{X}$  est une fonction  $u$  qui est harmonique au sens usuel sur la partie régulière  $\text{Reg } \mathcal{X}$  de  $\mathcal{X}$  et faiblement harmonique sur  $\mathcal{X}$ , ce qui signifie que  $\partial u$  est faiblement holomorphe. Une fonction  $u$  est dite harmonique multivaluée sur  $\mathcal{X}$  si elle admet le long de tout chemin tracé dans la partie régulière de  $\overline{\mathcal{X}}$  une détermination en fonction harmonique usuelle et si  $\partial u$  est une  $(1, 0)$ -forme faiblement holomorphe (univaluée) sur  $\mathcal{X}$ .

La proposition 1 est une sorte de complément au théorème 3c de [17] quand un plongement dans un espace affine complexe est imposé :

PROPOSITION 1 (Sur un problème de Plateau complexe)

On considère dans  $\mathbb{C}^n$  une courbe réelle  $\gamma$  lisse, orientée, compacte et connexe. On fixe des champs de vecteurs  $\nu$  et  $\tau$  définis sur  $\gamma$  et de classe  $C^1$  tels que pour tout  $x \in \gamma$ ,  $(\nu_x, \tau_x)$  est orthonormée et  $\tau_x$  définit l'orientation de  $\gamma$  en  $x$ . On note  $z \mapsto z^*$  l'isomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  sur son dual naturellement associé à sa structure hermitienne standard. On se donne alors des fonctions  $u \in C^1(\gamma, \mathbb{R})$  et  $u' \in C^0(\gamma, \mathbb{R})$  puis on pose  $\alpha = \frac{1}{2} (u' - iTu)(\nu^* + i\tau^*) \in C^0(\gamma, \Lambda^{1,0}T^*\mathbb{C}^n)$ . Si  $\alpha \neq 0$ , alors la condition

$$(2) \quad \forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \int_{\gamma} h\alpha = 0$$

est nécessaire et suffisante à l'existence dans  $\mathbb{C}^n \setminus \gamma$  d'une courbe complexe connexe  $\mathcal{X}$  de volume fini bordée par  $\gamma$  à laquelle  $u$  se prolonge en une fonction harmonique multivaluée  $\tilde{u}$  telle que  $\alpha$  est la valeur au bord de  $\partial\tilde{u}$ .

Il ne fait pas de doute que si  $\gamma$  n'est plus supposée connexe et que  $\alpha \neq 0$  sur chaque composante de  $\gamma$ , la conclusion devient que  $\mathcal{X}$  est une 1-chaine holomorphe et  $\tilde{u}$  une fonction harmonique multivaluée vérifiant  $\partial\tilde{u} \wedge \mathcal{X} = \alpha[\gamma]$ .

Dans l'énoncé ci-dessus,  $(\gamma, u, \alpha)$  est réalisé comme une donnée de Cauchy du Laplacien d'une fonction harmonique multivaluée. Le fait que cette fonction soit univaluée est aussi déterminé par une condition de moments qui s'exprime comme dans [17, th. 3a/C] à l'aide d'une fonction de Green.

Dans le cas d'une courbe complexe éventuellement singulière  $\mathcal{Y}$  de  $\mathbb{C}^n$  une fonction de Green est une fonction  $g$  définie sur  $\text{Reg } \mathcal{Y} \times \text{Reg } \mathcal{Y}$  privé de sa diagonale telle que pour tout  $z_* \in \text{Reg } \mathcal{Y}$ ,  $g_{z_*} = g(z_*, \cdot)$  est harmonique sur  $\mathcal{Y}^*$  (au sens précisé précédemment) et qui au sens des courants vérifie  $i\partial\bar{\partial}g_{z_*} = \delta_{z_*} dV$  où  $dV = i\partial\bar{\partial}|\cdot|^2$  et  $\delta_{z_*}$  est la mesure de Dirac portée par  $\{z_*\}$ .

PROPOSITION 2 (Fonction de Green pour une courbe singulière)

Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans la proposition 1, on considère le double  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{X}$ . Alors il existe un domaine  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{Z}$  contenant  $\overline{\mathcal{X}}$  qui admet une fonction de Green  $g$  et pour que  $(\gamma, u, \alpha)$  soit la donnée de Cauchy du Laplacien d'une fonction univaluée, il suffit que

$$0 = \int_{\gamma} u\partial g(z, \cdot) + g(z, \cdot)\bar{\alpha}$$

pour tout  $z \in \mathcal{Y} \setminus \overline{\mathcal{X}}$ . Quand cette condition est vérifiée,  $(\gamma, u, \alpha)$  est la donnée de Cauchy du Laplacien de la fonction  $U$  définie sur  $\text{Reg } \mathcal{X}$  par  $U(z) = \frac{2}{i} \int_{\gamma} u\partial g(z, \cdot) + g(z, \cdot)\bar{\alpha}$ .

L'existence de fonctions de Green pour une courbe singulière n'était à notre connaissance pas connue. Ces fonctions qui jouent un rôle crucial dans la preuve du théorème 4 sont construites à partir de formules explicites.

Le but principal de cet article est de prouver que contrairement à ce qui se produit pour une courbe réelle orpheline, les conditions de moments impliquées sont automatiquement validées lorsque la courbe considérée appartient à une famille soumise à des conditions naturelles si ce n'est génériques. Le premier cas de validation automatique de conditions de moments remonte à une démonstration qu'a faite Poincaré en 1907 dans [25] pour prouver le théorème d'extension de Hartogs dans le cas particulier de la sphère. Ce phénomène a été ensuite observé par Severi dans un théorème concernant des familles de fonctions holomorphes, ou, plus précisément, de fonctions de classe  $CR^\omega$  de  $\mathbb{E}^{n,m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m$

c'est à dire de fonctions réelles analytiques qui sont holomorphes par rapport à leur  $m$  variables complexes :

THÉORÈME (Severi-Brown-Bochner). — Soient dans  $\mathbb{E}^{n,m}$  ( $n, m \in \mathbb{N}^*$ ) un domaine  $\Omega$  borné de bord connexe et  $f$ , une fonction de classe  $CR^\omega$  au voisinage de  $b\Omega$ . Alors  $f$  se prolonge en fonction du même type au voisinage de  $\bar{\Omega}$ .

Ce résultat a été démontré en 1932 par Severi [29] lorsque  $m = 1$  et que les sections complexes de  $\Omega$  sont simplement connexes, restriction que Brown aurait levée dans [3] en même temps qu'il aurait donné la première démonstration complète du théorème d'extension décrit par Hartogs en 1903. Si l'on se réfère à [24], des doutes demeurent quant aux arguments de Brown. Quoiqu'il en soit, Fueter puis Bochner ont apporté une preuve de ces résultats dans [12] et [2, ch. 4, §2, th. 1 et th. 2][1, th. 6] (voir aussi [20]). Bochner [1] y a ajouté des versions pour des fonctions CR-harmoniques, c'est à dire harmoniques sur chaque section complexe de  $\Omega$ .

L'hypothèse d'analyticité réelle du théorème de Severi-Brown-Bochner ne peut être significativement affaiblie lorsque  $m = 1$  car dans cette situation, le bord de  $\Omega$  est génériquement totalement réel et la condition pour une fonction définie sur  $b\Omega$  d'être  $CR$  est génériquement vide, ce qui exclu qu'elle puisse être a priori prolongée holomorphiquement aux sections complexes de  $\Omega$ . Lorsque  $m \geq 2$ , l'exemple 6.2 de [20] illustre que cette hypothèse est nécessaire pour avoir un résultat ne dépendant pas de la taille de  $\Omega$ .

L'équivalent géométrique de cette hypothèse d'analyticité réelle est l'existence d'un anneau réel analytique Lévi-plat dans lequel est plongée le cycle qu'on cherche à réaliser comme bord ; elle est analogue aux hypothèses utilisées par Rothstein [27][28] pour réaliser des cycles comme bord d'espace complexe. Un anneau réel analytique Lévi-plat de  $\mathbb{E}^{n,2}$  est par définition un sous-ensemble réel analytique  $N$  d'un ouvert de  $\mathbb{E}^{n,2}$  qui est localement la réunion de sous-variétés de  $\mathbb{E}^{n,2}$  de dimension  $n + 2$ , de classe  $C^\omega$  et dont les sections sont des courbes complexes de volume fini ; les composantes irréductibles d'un anneau Lévi-plat en un point sont donc des sous-variétés de  $\mathbb{E}^{n,2}$  de dimension  $n + 2$ . Notons que cette hypothèse entraîne aussi que  $N$  est coupée transversalement par les sous-espaces  $\mathbb{C}_t^2 = \{t\} \times \mathbb{C}^2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Notre premier théorème qui généralise géométriquement celui de Severi-Brown concerne les sous-variétés  $M$  de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty, \omega\}$ ) de  $\mathbb{E}^{n,2}$  plongées dans un anneau réel analytique Lévi-plat  $N$ , c'est à dire telles que pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et une composante irréductible  $\tilde{N}_p$  de  $N \cap U$  en  $p$  tels que  $M \cap U$  est une hypersurface de classe  $C^k$  de  $\tilde{N}_p$ .

On utilise les notations suivantes :  $E_t$  pour  $E \cap \mathbb{C}_t^2$  lorsque  $E \subset \mathbb{E}^{n,2}$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E^t$  pour la projection naturelle de  $E_t$  sur  $\mathbb{C}^2$ ,  $\mathcal{H}^d$  pour désigner la mesure  $d$ -dimensionnelle de Hausdorff et  $[V]$  pour désigner un courant d'intégration

sur  $V$  quand  $V$  est une sous-variété orientée ou plus généralement un sous-ensemble réel analytique orienté d'un ouvert de  $\mathbb{E}^{n,2}$ .

**THÉORÈME 3** (Phénomène de Hartogs-Severi pour des feuilletages CR singuliers)

*On considère dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  une sous-variété  $M$  de classe  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$ , compacte, connexe, orientée, de dimension  $n + 1$ , plongée dans un anneau réel analytique Lévi-plat  $N$  et dont les sections  $M_t = M \cap \mathbb{C}_t^2$  sont des courbes réelles de longueur finie, éventuellement réduites à un point. Il existe alors dans  $\mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  un unique sous-ensemble réel analytique orienté connexe  $\mathcal{X}$  de dimension  $n + 2$ , de volume fini, dont les sections sont des courbes complexes de volume fini et tel que  $d[\mathcal{X}] = \pm[M]$ ; lorsque  $N$  est lisse,  $\mathcal{X}$  contient près de  $M$  une seule des deux composantes de  $N \setminus M$  dont  $M$  est le bord. En dehors d'un compact  $A$  de  $M$  tel que  $\mathcal{H}^{n+1}(A) = 0$ ,  $\overline{\mathcal{X}} \setminus A$  est localement une variété à bord de classe  $C^r$  de bord  $M$ . L'ensemble singulier de  $\mathcal{X}$  est de  $\mathcal{H}^n$ -mesure finie et pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathcal{H}^1(M_t) > 0$ ,  $\mathcal{X}_t$  est une courbe complexe de  $\mathbb{C}_t^2 \setminus M_t$  dont l'ensemble singulier est  $\text{Sing } \mathcal{X}_t = (\text{Sing } \mathcal{X})_t$ . Enfin,  $\mathcal{X}$  est un ensemble réel analytique cohérent au sens de Cartan [4].*

*Remarques.* — 1.  $\overline{\mathcal{X}}$  n'est pas nécessairement une variété à bord car le phénomène décrit dans [14, § 10] et [15, p. 346] est possible : il se peut que dans un voisinage  $V$  d'un point  $p$  de  $M$ ,  $\overline{\mathcal{X}}$  contienne non seulement une sous-variété à bord de bord  $M \cap V$  mais aussi une sous-variété coupant  $M \cap V$  uniquement en  $p$ .

2. Dans [4], Cartan donne des exemples d'ensembles réels analytiques qui ne peuvent pas être définis par des équations réelles analytiques globales. Il caractérise cette propriété par la cohérence du faisceau d'idéaux naturellement attaché à l'ensemble considéré ou encore à l'existence d'un complexifié global. La cohérence de  $\mathcal{X}$  qui par ailleurs implique celle de  $N$  permet donc d'affirmer que  $\mathcal{X}$  peut être défini par une équation réelle analytique globale et  $\mathcal{X}$  possède dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  un voisinage qui dans chaque  $\mathbb{C}_t^2$  est un voisinage de Stein de  $\mathcal{X}_t$ .

3. Ce résultat est énoncé dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  car c'est le point de départ de la preuve du théorème 4 pour lequel le cas général est considérablement plus compliqué. Cependant, la preuve du théorème 3 hormis sa dernière conclusion fonctionne sans changement pour  $\mathbb{E}^{n,m}$  avec  $m \geq 3$ .

Le théorème 3 entraîne que pour des fonctions qui se présentent en famille non seulement la condition des moments nécessaire dans la proposition 1 est automatiquement validée mais qu'en outre, les prolongements sont univalués. Le théorème ci-dessous généralise et précise celui de Bochner sur l'extension des fonctions CR-harmoniques dans [1, th. 6].

**THÉORÈME 4** (Phénomène de Bochner pour des feuilletages CR singuliers)

*Les hypothèses et les notations étant celles du théorème 3, on suppose en outre que  $N$  est lisse. On se donne alors une fonction réelle  $u$  qui est réelle analytique et CR-harmonique au voisinage de  $M$  dans  $N$ . Alors  $u$  se prolonge à  $\mathcal{X}$  en une fonction CR-harmonique et analytique réelle au voisinage de tout point de  $\text{Reg } \mathcal{X}_t$  quand cet ensemble n'est pas vide.*

Dans cet énoncé, une fonction  $u$  est dite réelle analytique au voisinage de  $M$  dans  $N$  si pour chaque point  $p$  de  $M$ ,  $u$  est réelle analytique dans un voisinage de  $p$  dans la sous-variété qui est la composante  $N_p$  du germe de  $N$  en  $p$  dans laquelle  $M$  est plongée au voisinage de  $p$ ;  $u$  est dite CR-harmonique si en outre pour chaque  $p = (t, z) \in M$ ,  $u(t, \cdot)$  est harmonique au voisinage de  $z$  dans la projection naturelle sur  $\mathbb{C}^2$  de  $N_p$ . Une fonction  $U$  sur  $\mathcal{X}$  est dite CR-harmonique si pour tout paramètre  $t$  tel que  $\mathcal{H}^1(M_t) > 0$ ,  $U(t, \cdot)$  est harmonique sur  $\mathcal{X}_t$ ; l'analyticité de  $U$  par rapport au paramètre s'entend au voisinage de tout point  $(t, z)$  de  $\text{Reg } \mathcal{X}_t$ .

*Remarques.* — 1. Un théorème analogue existe sans aucun doute dans  $\mathbb{E}^{n,m}$  avec  $m \geq 3$  mais pour l'obtenir, il faudrait surmonter les difficultés techniques liées à l'écriture d'un noyau permettant de résoudre le  $\bar{\partial}$  dans une courbe complexe singulière de  $\mathbb{C}^m$  dépendant analytiquement d'un paramètre réel. En outre, de tels noyaux ne sont explicitement connus que dans le cas des intersections complètes.

2. L'hypothèse d'analyticité réelle de  $N$  est cruciale pour notre démonstration car le prolongement que nous exhibons est construit à l'aide d'une famille de fonctions de Green dépendant analytiquement de  $t$ . Cette hypothèse pourrait être nécessaire comme le laisse penser la découverte par Jörnicke et Porten [22] dans  $\mathbb{C}^2$  d'une boule réelle  $\mathcal{B}$  de dimension 3 feuilletée par des courbes complexes ainsi qu'une fonction holomorphe au voisinage de  $b\mathcal{B}$  qui ne se prolonge pas holomorphiquement à un voisinage de  $\overline{\mathcal{B}}$ .

Le théorème 3 s'inscrit dans la problématique de réaliser un cycle CR comme le bord d'une chaîne CR. Pour être plus précis, considérons un ouvert  $U$  de l'espace  $\mathbb{E}^{n,m}$  orienté par  $dt \wedge \bigwedge_{1 \leq j \leq m} i dz_j \wedge d\bar{z}_j$  où  $dt = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$ . Si  $\mathcal{X}$  est une partie de  $U$  pour laquelle il existe un fermé  $S$  contenu dans  $\mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{H}^d(S) = 0$  et  $\mathcal{X} \setminus S$  est une sous-variété CR de dimension  $d$  et de classe  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty, \omega\}$ , on dit que  $\mathcal{X}$  est un *sous-ensemble CR* de classe  $C^r$  de  $U$  à singularités négligeables et on pose  $\dim_{CR} \mathcal{X} = \dim_{CR} \mathcal{X} \setminus S$ ;  $\text{Sing } \mathcal{X}$  est le plus petit fermé  $S$  ayant cette propriété. Si en outre  $\mathcal{X} \setminus S$  est une variété orientée de volume fini,  $[\mathcal{X} \setminus S]$  est noté abusivement mais plus simplement,  $[\mathcal{X}]$  et  $\mathcal{X}$  est dit presque orienté. Quand  $\mathcal{H}^{d-1}(S) = 0$ , cette notation n'est plus ambiguë et on dit que  $\mathcal{X}$  est orienté;  $\mathcal{X}$  est orientable

lorsque par exemple les conditions suivantes sont réunies :  $d = n + 2$ ,  $\mathcal{X}$  est feuilleté par des courbes complexes, son volume est fini et sa partie singulière  $\mathcal{X}^s$  vérifie  $\mathcal{I}^{n+1}(\mathcal{X}^s) = 0$  : si  $p = (t, z)$  est un point régulier de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}$  est au voisinage de  $p$  transversalement sectionné par  $\mathbb{C}_t^2$  en une courbe complexe de sorte que  $idt \wedge (dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2)$  est une forme volume pour  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^s$  ; on convient dans ce cas que cette forme volume définit l'orientation naturelle de  $\mathcal{X}$  et que  $[\mathcal{X}]$  est son courant d'intégration associé.

On définit une  $(d, k)$ -chaîne-CR de  $U$  comme étant une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de courants d'intégration de sous-ensembles CR de  $U$  presque orientés de dimension  $d$  et de dimension CR  $k$  ; la chaîne est dite orientée si la combinaison linéaire précédente ne fait intervenir que des courants d'intégration sur des sous-ensembles CR orientés ; un  $(d, k)$ -cycle-CR est une  $(d, k)$ -chaîne-CR fermée au sens des courants. Un problème naturel dans cette situation est de savoir si un  $(d, k)$ -cycles-CR  $T$  donné de masse finie peut être réalisé comme le bord dans  $\mathbb{E}^{n,m}$  de l'extension simple d'une  $(d + 1, k + 1)$ -chaîne-CR de masse finie de  $\mathbb{E}^{n,m} \setminus M$  où  $M$  est le support de  $T$ .

Lorsque dans  $\mathbb{E}^{1,m}$ ,  $m \geq 3$ , on considère un  $(2m - 2, m - 2)$ -cycle  $T$  de masse finie dont le support  $M$  est une sous-variété  $C^\infty$  à singularités négligeables, Dolbeault, Tomassini et Zaitsev ont prouvé dans [10] que  $T$  est d'une unique façon le bord dans  $\mathbb{E}^{1,m}$  de l'extension simple d'une  $(2m - 1, m - 1)$ -chaîne CR de masse finie de  $\mathbb{E}^{1,m} \setminus M$  ; ils utilisent ce résultat pour obtenir une condition qui donne l'existence et l'unicité d'une hypersurface Lévi-plate de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n > 2$ , dont le bord est un compact prescrit. Le cas d'une chaîne est traité dans [8] quand celle-ci est la trace sur  $\mathbb{E}^{1,m}$  du support d'un cycle maximale complexe de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m$ .

Lorsque  $M$  est essentiellement une famille de courbes réelles, c'est à dire quand  $T$  est un  $(2, 0)$ -cycle-CR de masse finie de  $\mathbb{E}^{1,2}$ , il est énoncé dans [9] que  $T$  est le bord d'une  $(3, 1)$ -chaîne-CR s'il vérifie une condition de moments CR. Dans les deux références citées la  $(d + 1, k + 1)$ -chaîne-CR trouvée pour border le  $(d, k)$ -cycle-CR donné est feuilletée par des  $(k + 1)$ -chaînes holomorphes.

Dans le théorème ci-après, on considère un  $(n + 1, 0)$ -cycle dont le support est un sous-ensemble réel analytique  $M$  de  $\mathbb{E}^{n,2}$  plongé dans un anneau réel analytique Lévi-plat  $N$ , ce qui signifie que pour tout  $p \in M$  et toute composante irréductible  $\widetilde{M}$  de  $M$  en  $p$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et une composante irréductible  $\widetilde{N}$  de  $N$  en  $p$  tels que  $\widetilde{M} \cap U$  est un sous-ensemble réel analytique de la sous-variété  $\widetilde{N}$ . Si  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{E}^{n,2}$  et si  $M$  est coupée transversalement par  $\mathbb{C}_t^2 = \{t\} \times \mathbb{C}^2$  ( $t \in \mathbb{R}^n$ ) le long de  $M_t = M \cap \mathbb{C}_t^2$ , on dit que  $M_t$  est une section régulière de  $M$  ; l'ensemble des paramètres  $t$  pour lesquels  $M_t$  est une section régulière de  $V$  est noté  $\mathcal{I}(M)$ . Lorsque  $M$  est un sous-ensemble réel analytique de  $\mathbb{E}^{n,2}$  plongé dans un anneau réel analytique Lévi-plat  $N$ ,

$\mathcal{J}(M)$  désigne l'ensemble des paramètres  $t$  tels que chaque composante locale de  $M$  est coupée transversalement par  $\mathbb{C}_t^2$ .

Les sections d'un courant sont comprises au sens de [11, sec. 4.3]; si  $\mu$  est un courant localement plat de  $\mathbb{E}^{n,2}$  de dimension  $d \geq n$ , on peut définir un courant  $\mu_{t_*}$  de dimension  $d - n$  pour presque tout  $t_*$  dans  $\mathbb{R}^n$  par la formule

$$(3) \quad \forall \varphi \in D_{d-n}(\mathbb{E}^{n,2}), \langle \mu_{t_*}, \varphi \rangle = \lim_{r \downarrow 0^+} \frac{1}{c_n r^n} \langle \mu, \mathbf{1}_{B_{\mathbb{R}^n}(t_*, r)} dt \wedge \varphi \rangle$$

où  $D_{d-n}(\mathbb{E}^{n,2})$  est l'espace des  $(d - n)$ -formes de classe  $C^\infty(\mathbb{E}^{n,2})$  à support compact,  $c_n$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ ;  $\text{Spt } \mu_{t_*} \subset \mathbb{C}_{t_*}^2 \cap \text{Spt } \mu$  et  $d\mu_{t_*} = (-1)^n (d\mu)_{t_*}$  si  $(d\mu)_{t_*}$  est aussi défini.

**THÉORÈME 5 (Phénomène de Hartogs-Severi pour des cycles CR)**

Soit  $T$  un  $(n + 1, 0)$ -cycle CR de  $\mathbb{E}^{n,2}$  dont le support  $M$  est un sous-ensemble réel analytique compact de  $\mathbb{E}^{n,2}$  plongé dans un anneau réel analytique Lévi-plat  $N$  de  $\mathbb{E}^{n,2}$ . Il existe alors dans  $\mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  une unique  $(n + 2, 1)$ -chaîne CR orientée  $X$  de masse finie telle que  $dX = T$ .

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $X_t$  est une 1-chaîne holomorphe de  $\mathbb{C}_t^2 \setminus M_t$  de masse finie telle que  $dX_t = T_t$  dont le lieu singulier est la trace sur  $\mathbb{C}_t^2$  de  $\text{Sing } \mathcal{X}$ .

En outre, pour tout point  $p$  de  $M$ , il existe un voisinage  $W$  de  $p$  tel que  $W \cap \mathcal{X}$  contienne au moins l'une des composantes connexes de  $(W \cap N) \setminus M$ ; si  $p = (t, z)$  est un point régulier de  $M$  où  $M$  est transverse à  $\mathbb{C}_t^2$  et si  $W$  est suffisamment petit, chaque composante connexe de  $\overline{\mathcal{X}} \cap W$  est soit une variété à bord réelle analytique de bord  $M \cap W$ , soit un sous-ensemble réel analytique de  $W$ .

Enfin, si  $M \setminus \text{Sing } M$  est connexe, alors  $\mathcal{X}$  est irréductible et  $X \in \mathbb{Z}[\mathcal{X}]$ .

**2. Preuves des résultats**

**2.1. Preuve du théorème 3.** — Soit  $N$  un anneau réel analytique Lévi-plat de  $\mathbb{E}^{n,2}$  et  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{E}^{n,2}$  plongée dans  $N$  et satisfaisant aux hypothèses du théorème 3. Compte tenu des restrictions sur les singularités que  $N$  pourrait présenter, on peut sélectionner une partie  $N^\circ$  de  $N$  telle  $N^\circ \cap \text{Reg } N$  est ouverte dans  $\text{Reg } N$  et  $N^\circ \setminus M$  a exactement deux composantes connexes  $N^+$  et  $N^-$  qui sont des variétés ouvertes à bord de bord respectifs  $M^+ \cup M$  et  $M^- \cup M$ ,  $M^+$  et  $M^-$  étant des variétés de classe  $C^r$  plongées dans  $N$  et bien sûr connexes, compactes, orientées. Afin de fixer les idées, on convient de noter  $N^+$  la composante de  $N^\circ$  dont le bord est  $[M] - [M^+]$ .

On note  $\pi_{\mathbb{R}}$  la projection naturelle de  $\mathbb{E}^{n,2}$  sur son premier facteur et  $\pi_{\mathbb{C}}$  celle sur son second facteur;  $\mathcal{J}$  est défini avec les notations précédent le théorème 5.

Le lemme 6 ci dessous permet de traiter une section donnée de  $M$  comme une section régulière.

LEMME 6. — *Pour tout  $t \in \pi_{\mathbb{R}}(M)$ , il existe dans tout voisinage  $U$  de  $\widehat{M}$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  une sous-variété ouverte à bord  ${}^t N$  de bord  ${}^t M \cup M$  telle que  ${}^t N \subset \overline{N^+} \cap U$ ,  ${}^t M$  est une sous-variété connexe compacte orientée de classe  $C^\omega$  plongée dans  $N$ ,  $d[{}^t N] = [M] - [{}^t M]$  et  $t \in \mathcal{F}({}^t M)$ .*

*Démonstration.* — Fixons un paramètre  $t$  dans  $\pi_{\mathbb{R}}(M)$  et supposons d'abord que  $N$  est une sous-variété d'un ouvert de  $\mathbb{E}^{n,2}$ . Soit alors un voisinage  $G$  de  $M$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  tel que la fonction  $\rho$  de  $N \cap G$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\overline{N^\pm} \cap G \ni p \mapsto \pm \text{dist}_{\mathbb{E}^{n,2}}(p, M)$ , est de classe  $C^1$  et de différentielle ne s'annulant pas. Le théorème de Sard appliqué à  $\rho(\cdot, t)$  fournit  $\lambda_t \in \mathbb{R}_+^*$  arbitrairement petit tel que  $\{0 \leq \rho \leq \lambda_t\}$  a les propriétés requises hormis peut être l'analyticité réelle de  $\{\rho = \lambda_t\}$ , lacune qui peut être comblée en considérant une approximation  $C^1$  de  $\{\rho = \lambda_t\}$  par une variété réelle analytique  ${}^t M$  suffisamment proche.

Supposons maintenant que  $N$  étant seulement un anneau réel analytique Lévi-plat,  $M$  est une hypersurface plongée dans  $N$ . On considère un revêtement de  $N$  par une variété lisse  $\widetilde{N}$ ; on note  $\varphi$  la projection naturelle de  $\widetilde{N}$  sur  $N$ .  $\varphi^{-1}(M)$  est alors une hypersurface lisse de  $\widetilde{N}$ . Par ailleurs, les sections  $N_t$  de  $N$  étant par hypothèse des courbes complexes,  $N$  et  $\mathbb{C}_t^2$  se coupent transversalement et  $\varphi^{-1}(N_t)$  est donc lisse. Dans des voisinages arbitrairement petits de  $\varphi^{-1}(M)$  dans  $\widetilde{N}$ , une approximation réelle analytique générique  $\widehat{M}$  de  $\varphi^{-1}(M)$  coupe donc  $\varphi^{-1}(N_t)$  transversalement et a la propriété que  $[\varphi^{-1}(M)] - [\widehat{M}]$  est le bord au sens de la formule de Stokes d'un domaine lisse et borné  ${}^t D$  de  $\widetilde{N}$ , ce qui entraîne que  $[M] - [\varphi(\widehat{M})]$  est le bord au sens de la formule de Stokes de  ${}^t N = \varphi({}^t D)$ .  $\varphi$  étant de rang maximal,  ${}^t N$  a les propriétés requises et particulier,  ${}^t M = \varphi(\widehat{M})$  coupe transversalement  $\mathbb{C}_t^2$ . □

COROLLAIRE 7. — *Pour tout  $t \in \pi_{\mathbb{R}}(M)$ , les intersections de  $\mathbb{C}_t^2$  avec  ${}^t M$  et  ${}^t N$  sont transverses, ce qui permet de définir  $[M]_t$  par la formule  $[M]_t = [{}^t M]_t + d[{}^t N]_t$  où  $[{}^t M]_t$  et  $[{}^t N]_t$  sont définis de manière usuelle.*

*Démonstration.* — Lorsque  $t \in \mathcal{F}(M)$ ,  $M$  et  $\mathbb{C}_t^2$  se coupent transversalement de sorte que  $[M]_t$  est bien défini et vaut  $[M_t]$ . Lorsque  $t \in \pi_{\mathbb{R}}(M)$  est quelconque,  $t$  est par construction un paramètre régulier de  ${}^t M$  de sorte que  $[{}^t M]_t$  est bien défini et vaut  $[({}^t M)_t]$ . Par ailleurs, les sections  $N_\tau$  étant par hypothèse des courbes complexes,  $N$  et  $\mathbb{C}_t^2$  se coupent transversalement, ce qui implique que  $[N]_t$  a un sens et coïncide avec  $[N_t]$ . Lorsque  $t \in \mathcal{F}(M)$ , la formule  $[M]_t = [{}^t M]_t + d[{}^t N]_t$  découle donc directement de l'égalité  $[M] - [{}^t M] = d[{}^t N]$ . Lorsque  $t \in \pi_{\mathbb{R}}(M) \setminus \mathcal{F}(M)$ , elle permet de définir  $[M]_t$  de façon cohérente. □

Considérons comme dans [20] la forme de Poincaré ; pour  $t$  fixé dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est la forme différentielle réelle  $P_t$  de degré  $n - 1$  définie sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{t\}$  par la formule

$$P_t = \frac{1}{c_n} \sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{j-1} \frac{\theta_j - t_j}{|\theta - t|^n} d\theta^{\widehat{j}}$$

D'où  $d\theta^{\widehat{j}} = \bigwedge_{\nu \neq j} d\theta_\nu$  ;  $\int_{|\theta-t|=1} P_t(\theta) = 1$ ,  $P_t$  est fermée sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{t\}$  et  $dP_t = \delta_t d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_n$  où  $\delta_t$  est la mesure de Dirac en  $t$ . La singularité de  $P_t$  étant intégrable sur  $M$ , on peut poser,  $h$  étant une  $(1, 0)$ -forme différentielle fixée de classe  $CR^\omega$  sur  $\mathbb{E}^{n,2}$ ,

$$(4) \quad I_{M,h}(t) = \int_{(\theta,z) \in M} \partial h(\theta, z) \wedge P_t(\theta)$$

LEMME 8. — Pour tout  $t \in \mathcal{F}(M)$ , on a

$$(5) \quad I_{M,h}(t) = \int_{M_t} h.$$

*Démonstration.* — Soit  $t \in \mathcal{F}(M)$ . Puisque  $\mathbb{C}_t^2$  coupe transversalement  $M$  le long de  $M_t$ , pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  suffisamment petit  $M \cap [B_{\mathbb{R}^n}(t, \varepsilon) \times \mathbb{C}^2]$  est une variété à bord de bord  $\sigma_t^\varepsilon = \bigcup_{\theta \in S(t, \varepsilon)} M_\theta$  et  $M_t^\varepsilon = M \setminus [B_{\mathbb{R}^n}(t, \varepsilon) \times \mathbb{C}^2]$  est un ensemble analytique orienté bordé (topologiquement) par  $\sigma_t^\varepsilon$ . Comme  $\partial h \wedge P_t = d(h \wedge P_t)$  au voisinage de  $\overline{M}_t^\varepsilon$ , la formule de Stokes livre

$$(6) \quad \int_{M_t^\varepsilon} \partial h \wedge P_t = \int_{\sigma_t^\varepsilon} h \wedge P_t.$$

La singularité de  $P_t$  étant intégrable sur  $M$ , le membre de gauche de (6) tend vers l'intégrale de  $\partial h \wedge P_t$  sur  $M$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Par ailleurs, la forme particulière de  $h \wedge P_t$  permet d'utiliser le théorème de Fubini et d'obtenir

$$\int_{\sigma_t^\varepsilon} h \wedge P_t = \int_{\theta \in S(0,1)} I_{M,h}(t + \varepsilon\theta) P_t(\theta).$$

En passant à limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, il apparaît que  $I_{M,h}(t)$  tend vers le membre de droite de (5). Le lemme est prouvé. □

LEMME 9. —  $I_{M,h}$  est la fonction nulle et pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 = I_{M,h}(t) = \langle [M]_t, h \rangle$ .

*Démonstration.* — Soient  $t$  et  $s$  deux paramètres fixés dans  $\pi_{\mathbb{R}}(M)$ . On se donne  ${}^t M$  et  ${}^t N$  comme dans le lemme 6. Avec la formule de Stokes on obtient

$$\int_M \partial h \wedge P_s = \int_{{}^t M} \partial h \wedge P_s + \int_{{}^t N} \partial h \wedge \delta_s dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{{}^t M} \partial h \wedge P_s + \langle [{}^t N]_s, \partial h \rangle.$$

Or le support de  $[{}^t N]_s$  est contenu dans  $N_s$  qui est une courbe complexe et  $\partial h$  est une  $(2, 0)$ -forme différentielle holomorphe. Par conséquent  $\langle [{}^t N]_s, \partial h \rangle = 0$  et il s'avère que  $I_{M,h}(s) = I_{{}^t M,h}(s)$ . Puisque  $t \in \mathcal{J}({}^t M)$  la formule (5) s'applique à  ${}^t M$  au lieu de  $M$  pour  $s$  voisin de  $t$ , ce qui donne  $I_{M,h}(s) = I_{{}^t M,h}(s) = \int_{({}^t M)_s} h$ .  ${}^t M$  étant réel analytique et coupé transversalement par  $\mathbb{C}_s^2$  lorsque  $s$  est suffisamment voisin de  $t$ , on en déduit que  $I_{M,h}$  est réelle analytique au voisinage de  $t$ . Il s'ensuit que  $I_{M,h} \in C^\omega(\mathbb{R}^n)$  puis que  $I_{M,h}$  est la fonction nulle car si  $t \in \mathbb{R}^n \setminus \pi_{\mathbb{R}}(M)$ ,  $M_t = \emptyset$  et la relation  $\partial h \wedge P_t = d(hP_t)$  est vraie dans un voisinage de  $M$ . La formule annoncée dans le lemme découle directement des relations  $[{}^t M]_t = [M]_t + d[{}^t N]_t$  et  $I_{M,h}(t) = I_{{}^t M,h}(t)$ .  $\square$

Lorsque  $t \in \mathcal{J}(M)$ ,  $M$  est coupée transversalement par  $\mathbb{C}_t^2$  et assimilant avec un léger abus de langage  $[M]_t = [M_t]$  à un courant de  $\mathbb{C}_t^2$ , on obtient un MC-cycle au sens de [14]. Puisque  $0 = I_{M,h}(t) = \int_{M_t} h$ , ce cycle vérifie la condition des moments.  $\mathbb{C}_t^2 \setminus \text{supp}[M]_t$  contient par conséquent d'après [14] une 1-chaîne holomorphe  $X_t$  de masse finie vérifiant  $dX_t = [M]_t$ . On sait en outre d'après [23, p. 411][6, prop. 4.4] que si  $B_{\mathbb{E}^{n,2}}(0, A)$  contient  $M$ , la masse de  $X_t$  est au plus  $2A \mathcal{H}^1(M_t)$ ; elle est donc localement majorée par rapport à  $t$  dans  $\mathcal{J}(M)$ .

Si  $t \in \pi_{\mathbb{R}}(M) \setminus \mathcal{J}(M)$ , les mêmes arguments donnent l'existence dans  $\mathbb{C}_t^2 \setminus \text{supp}[{}^t M]_t$  d'une 1-chaîne holomorphe  ${}^t X_t$  de masse finie vérifiant  $d{}^t X_t = [{}^t M]_t$ ; compte tenu du lemme 7, en posant  $X_t = {}^t X_t + [{}^t N]_t$ , on obtient dans  $\mathbb{C}_t^2 \setminus \text{supp}[M]_t$  une 1-chaîne holomorphe de masse finie  $X_t$  telle que  $dX_t = [M]_t$ .

Si  $t \in \mathbb{R}^n$  on note  $\mathcal{X}_t$  le support de la 1-chaîne  $X_t$  et on pose

$$(7) \quad \widetilde{\mathcal{X}} = \bigcup_{t \in \mathcal{J}(M)} \mathcal{X}_t, \quad \mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^n} \mathcal{X}_t.$$

Vérifions tout d'abord l'absence de pathologie :

LEMME 10. —  $N^+ \subset \mathcal{X}$ .

*Démonstration.* — Soit  $t \in \pi_{\mathbb{R}}(M)$ . Supposons tout d'abord que  $t \in \mathcal{J}(M)$  et fixons une composante connexe  $\gamma_t$  de  $M_t$ . D'après [15, th. 3.3], il existe dans  $\gamma_t$  un compact  $A_t$  dont la mesure 1-dimensionnelle de Hausdorff est nulle et tel que  $\mathcal{X}_t \cup \gamma_t$  est au voisinage de chacun des points de  $\gamma_t \setminus A_t$  une sous-variété de classe  $C^r$  de  $\mathbb{C}_t^2$ . Soit  $p \in \gamma_t \setminus A_t$ . Puisque  $N$  est un anneau Lévi-plat,  $N_t$  est au voisinage de  $p$  une réunion de courbes complexes lisses.  $M$  étant plongée dans  $N$  et  $t$  étant régulier pour  $M$ ,  $M_t$  est, au voisinage de  $p$ , une sous-variété de l'une de ces courbes complexes. Notons la  $C_p$  et posons  $C_p^+ = C_p \cap N^+$ . Alors, dans un voisinage ouvert relativement compact suffisamment petit de  $p$  dans  $N$ , les courbes complexes  $C_p^+$  et  $\mathcal{X}_t$  coïncident car bordées au sens des courants par la même courbe réelle  $\gamma_t$ . Puisque  $\mathcal{X}_t$  est bordée par  $M_t$ , on en

déduit par un principe d'unicité de prolongement analytique que  $\mathcal{X}_t$  contient  $N_t^+$ .

Supposons maintenant que  $t \notin \mathcal{F}(M)$ . On se donne alors un  $(n + 1, 0)$ -cycle  ${}^t M$  et un ouvert  ${}^t N$  de  $N$  comme dans le lemme 6.  $N^o \setminus {}^t M$  a deux composantes connexes ; on note  ${}^t N^+$  celle qui ne rencontre pas  $M$ . Appliquant ce qui précède au cycle  ${}^t M$  pour lequel  $t$  est régulier, on obtient que le support de  $X_t$  contient  $({}^t N^+)_t$ . Le support  $\mathcal{X}_t$  du courant  $X_t = [({}^t X)_t] + [({}^t N)_t]$  contient donc  $({}^t N^+)_t \cup ({}^t N)_t$ , c'est à dire  $N_t^+$ . □

Pour démontrer le lemme ci-dessous, on utilise les formules de Harvey et Lawson [14] revisitées par [6].

LEMME 11. —  *$\mathcal{X}$  est un sous-ensemble réel analytique connexe de  $\mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  de dimension pure  $n + 2$ , ses sections sont des courbes complexes et sa partie singulière  $\mathcal{X}^s$  est de  $\mathcal{H}^n$ -mesure finie.*

*Démonstration.* — Pour établir ce lemme, il suffit de fixer un paramètre  $t_*$  et de prouver que  $\mathcal{X}$  a les propriétés requises au dessus d'un voisinage de  $t_*$ . Etant donné que  $\mathcal{X}$  contient  $N^+$  et que pour tous les paramètres  $t$ ,  ${}^t M \cup M$  borde un ouvert de  $N^+$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $M$  est réelle analytique et que  $t_*$  est régulier pour  $M$  ; autrement dit, il suffit de prouver le lemme pour  $\mathcal{X}$ .

Soient alors  $p_* = (t_*, \omega_*) = (t_*, \zeta_*, w_*) \in \mathcal{X}_{t_*}$  et  $\pi$  une projection de  $\mathbb{C}^2$  sur une droite complexe de  $\mathbb{C}^2$  telle que lorsque  $t$  est dans l'adhérence d'un voisinage ouvert  $\Theta_*$  suffisamment petit de  $t_*$ ,  $\omega_*$  n'appartienne pas à l'image par  $\pi_t : \mathbb{C}_t^2 \ni (t, z) \mapsto \pi(z)$  de  $\widetilde{M}_t = \pi_{\mathbb{C}}(M_t)$ . Quitte à changer de coordonnées dans  $\mathbb{C}^2$ , on suppose que  $\pi(z_1, z_2) \equiv z_1$  et quitte à diminuer  $\Theta_*$ , on suppose que  $\pi_t$  projette la courbe réelle analytique lisse  $M_t$  sur une courbe réelle compacte ; l'ouvert  $\Gamma^t = \mathbb{C} \setminus \pi_t(M_t)$  n'a alors qu'un nombre fini de composantes connexes qu'on note  $\Gamma_0^t, \dots, \Gamma_{m_t}^t$ ,  $\Gamma_0^t$  étant celle qui est non bornée. On pose  $\Gamma_* = \bigcup_{t \in \Theta_*} \{t\} \times \Gamma^t$  ;

$\Gamma_*$  est un ouvert de  $\mathbb{E}^{n,1}$  qui contient  $(t_*, \zeta_*)$ .

On sait d'après les travaux cités précédemment que

$$X_t \Big|_{\mathbb{C}_t^2 \setminus \pi_t^{-1}(\Gamma^t)} = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \ln |R_t|$$

où  $R_t$  est une fonction qui sur  $\Gamma^t \times \mathbb{C}$  est holomorphe par rapport à la première variable et rationnelle par rapport à la seconde sur chacun des ouverts  $\pi_t^{-1}(\Gamma_j^t)$  ( $0 \leq j \leq m_t$ ). Pour  $(t, \zeta) \in \Gamma_*$ ,  $R_t(\zeta, \cdot)$  est donnée explicitement pour  $|w| \gg 1$  par les formules suivantes :

(8)

$$R_t(\zeta, w) = w^{S_{t,0}(\zeta)} \exp \left( - \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{S_{t,k}(\zeta)}{k} \frac{1}{w^k} \right), \quad S_{t,k}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \in M_t} z_2^k \frac{dz_1}{z_1 - \zeta}.$$

Cette formule indique non seulement que les fonctions  $S_k : (t, \zeta) \mapsto S_{t,k}(\zeta)$  sont réelles analytiques sur  $\Gamma_*$  mais aussi, en utilisant comme dans le lemme 8 la formule de Stokes, la forme de Poincaré et des déformations adéquates de  $M$  dans  $N$ , que pour chaque composante connexe  $\gamma$  de  $\Gamma_*$ , les fonctions  $S_k|_\gamma$  se prolongent en fonction réelles analytiques au voisinage de  $\bar{\gamma}$ . Le fait que les sections régulières de  $M$  satisfont à la condition des moments entraîne que  $S_{t,k} = 0$  sur  $\Gamma_0^t$  quelque soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $t \in \Theta_*$ . Notons que  $M_t$  étant une réunion de courbes réelles lorsque  $t \in \Theta_*$ ,  $S_0(t, \zeta)$  est un entier puisque c'est l'indice du cycle  $[M]_t$  par rapport au point  $(t, \zeta)$ ; si  $t \in \Theta_*$  et  $1 \leq j \leq m_t$ , on note  $s_{t,j}$  la valeur que prend  $S_0$  sur  $\Gamma_j^t$ .

Puisque nous savons a priori d'après [14] (voir aussi [15]) que les fonctions  $R_t(\zeta, \cdot)$  sont des fractions rationnelles en  $w$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $S_k(t, \zeta)$  est la différence entre la somme des puissances  $k$ -ièmes des racines de  $R_t(\zeta, \cdot)$  répétés avec leur multiplicité et la même somme mais portant sur les pôles de  $R_t(\zeta, \cdot)$ . Notons  $R$  la fonction  $R : (t, \zeta, w) \mapsto R_t(\zeta, w)$ . En ayant à l'esprit l'ajout d'un paramètre réel, il découle des arguments de Harvey et Lawson dans [14, th. 4.6] et [15, lemme 3.21 & 3.19] que sur chaque composante connexe  $\gamma$  de  $\Gamma_*$ ,  $R(t, \zeta, w) = \frac{P(t, \zeta, w)}{Q(t, \zeta, w)}$  où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes unitaires et irréductibles de l'anneau  $CR^\omega(\gamma)[w]$ .

Prouvons maintenant que pour toute composante connexe  $\gamma$  de  $\Gamma_*$ ,  $\widetilde{\mathcal{X}}$  coïncide au dessus de  $\gamma$  via la projection  $\pi_1 : \mathbb{E}^{n,2} \ni (t, z) \mapsto (t, z_1)$  avec l'ensemble des points  $(t, \zeta, w)$  de  $\mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  tels que  $(t, \zeta) \in \gamma$  et  $P(t, \zeta, w)Q(t, \zeta, w) = 0$ . Puisque  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $CR^\omega(\gamma)[w]$ ,  $P(t, \zeta, \cdot)$  et  $Q(t, \zeta, \cdot)$  sont premiers entre eux pour  $(t, \zeta)$  variant dans un ouvert dense  $\gamma'$  de  $\gamma$ ; lorsque  $(t, \zeta) \in \gamma'$ ,  $\mathcal{X}_t$  contient l'ensemble des points  $(t, \zeta, w)$  de  $\mathbb{E}^{n,2}$  tels que  $(t, \zeta) \in \gamma'$  et  $P(t, \zeta, w)Q(t, \zeta, w) = 0$ . Soit  $(t_\infty, \zeta_\infty) \in \gamma$  et  $w_\infty \in \mathbb{C}$  tel que  $p_\infty = (t_\infty, \zeta_\infty, w_\infty) \in \mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  et annule  $PQ$ . Soit  $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}^*}$  une suite de points  $p_\nu = (t_\nu, \zeta_\nu, w_\nu)$  de  $\mathbb{E}^{n,2}$  convergeant vers  $p_\infty$  telle que  $(t_\nu, \zeta_\nu) \in \gamma'$  et  $(t_\nu, \zeta_\nu, w_\nu) \in \mathcal{X}_{t_\nu}$ . Puisque  $M_{t_\nu}$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) est une section régulière de  $M$ ,  $M_{t_\nu}$  est bien le support de  $[M]_{t_\nu}$  et  $M_{t_\nu}$  converge vers  $M_{t_\infty}$  au sens de la métrique de Hausdorff. Etant donné que  $\bar{\Theta}_* \subset \mathcal{J}(M)$ , les  $X_{t_\nu}$  ( $\nu \in \mathbb{N}^*$ ) sont de masse uniformément bornée. On peut donc d'après [15, th. 4.2] supposer, modulo une éventuelle extraction, que  $X_{t_\nu}$  converge au sens des courants vers une 1-chaine holomorphe  $X_\infty$  de  $\mathbb{C}_{t_\infty}^2 \setminus M_{t_\infty}$  vérifiant  $dX_\infty = [M]_{t_\infty} = dX_{t_\infty}$ , ce qui force  $X_\infty = X_{t_\infty}$ . Puisque  $p_\infty \notin M$ , on en déduit que  $p_\infty \in \text{Supp } X_{t_\infty} = \mathcal{X}_{t_\infty}$ .

Finalement, ceci prouve l'existence d'un voisinage  $G$  de  $p_*$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  tel que que  $\widetilde{\mathcal{X}} \cap G$  est l'ensemble des points  $(t, \zeta, w)$  de  $G \setminus M$  tels que  $(t, \zeta) \in \Gamma_*$  et  $P(t, \zeta, w)Q(t, \zeta, w) = 0$ . C'est donc un sous-ensemble réel analytique de  $G$  de dimension  $n + 2$ . Si  $V$  est l'image de  $G$  par  $\pi_1$  et si  $D_1, \dots, D_k$  sont les diviseurs irréductibles deux à deux distincts de  $PQ$  dans  $CR^\omega(V)[w]$ ,  $\widetilde{\mathcal{X}}^s \cap G$

est contenu dans l'ensemble des points  $(t, \zeta, w)$  de  $G$  tels que  $(t, \zeta)$  annule le discriminant  $\Delta$  de  $D_1 \cdots D_k$ . Etant donné que  $\Delta \in CR^\omega(V)$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $\Delta(t, \zeta) = 0$  à  $t$  fixé est au plus discret et il s'ensuit que  $\widetilde{\mathcal{X}}^s \cap G \cap \mathcal{X}_t$  est aussi au plus discret. Au voisinage de  $p_*$ ,  $\widetilde{\mathcal{X}}^s$  est donc de dimension au plus  $n$  et de  $\mathcal{H}^n$ -volume fini.  $\square$

LEMME 12. —  $\mathcal{X}$  est connexe, orientable et la formule de Stokes  $d[\mathcal{X}] = \pm[M]$  est valide. De plus, il existe un compact  $A$  de  $M$  tel que  $\mathcal{H}^{n+1}(A) = 0$  et  $\mathcal{X} \setminus A$  est localement une variété à bord de classe  $C^r$  de bord  $M$ .

Démonstration. —  $\mathcal{X}$  est connexe par arcs car  $\mathcal{X}$  contient  $N^+$  qui près de  $M$  est de classe  $C^1$  et bordée par  $M$  qui est elle-même connexe par arcs. Pour chaque paramètre  $t$  régulier pour  $M$ , il existe d'après [14] un compact  $A_t$  tel que  $\mathcal{H}^1(A_t) = 0$  et tel que  $\mathcal{X}_t \setminus A_t$  est localement une variété à bord de classe  $C^r$  de bord  $M_t$ . Puisque  $M$  est de classe  $C^1$ , le lemme de Sard donne que  $\mathcal{H}^n(\pi(M) \setminus \mathcal{F}(M)) = 0$ . Il en résulte que la réunion  $A$  de  $M \setminus \pi^{-1}(\mathcal{F}(M))$  et de  $\bigcup_{t \in \mathcal{F}(M)} A_t$  a les propriétés requises dans l'énoncé du lemme.

En tant que courbe complexe, chaque section  $\mathcal{X}_t$  de  $\mathcal{X}$  possède une orientation canonique qui est aussi celle de  $N_t$  puisque  $N^+ \subset \mathcal{X}$ . Lorsque  $t_*$  est un paramètre régulier de  $M$ , il est possible d'orienter de façon cohérente les sections  $M_t$  voisines de  $M_{t_*}$ , ce qui implique qu'il existe  $\varepsilon \in \{-1, +1\}$  tel que  $d[\mathcal{X}_t] = \varepsilon[M_t]$  lorsque  $t$  est voisin de  $t_*$ . Lorsque  $t_*$  n'est pas un paramètre régulier de  $M$ , la même conclusion s'applique à  ${}^{t_*}M$  et  $\mathcal{X}^{t_*}$  et, puisque  $N^+ \subset \mathcal{X}$ , à  $M$  et  $\mathcal{X}$ .  $M$  étant connexe, on en déduit qu'il existe  $\varepsilon$  dans  $\{-1, 1\}$  tel que  $d[\mathcal{X}_t] = \varepsilon[M_t]$ .  $\mathcal{X}$  est donc orientable et  $d[\mathcal{X}] = \varepsilon[M]$ .  $\square$

La synthèse des lemmes précédents établit l'existence d'un ensemble  $\mathcal{X}$  résolvant le problème posé dans le théorème 3. La preuve de ce théorème s'achève avec le lemme suivant :

LEMME 13. — Il existe au plus un ensemble réel analytique orienté de dimension  $n + 2$  remplissant les conditions (1) et (2) du théorème 3.

Démonstration. — Supposons que  $Z$  soit solution du problème posé dans le théorème 3. Soit  $t \in \mathcal{F}(M)$ .  $[Z]_t$  est une 1-chaîne holomorphe de masse finie de  $\mathbb{C}_t^2$  dont le support est contenu dans  $Z_t$  et donc dans  $\mathbb{C}_t^2 \setminus M_t$ . Comme  $(-1)^n d[Z]_t = (d[Z])_t = [M]_t = [M_t]$ , on en déduit que  $[Z]_t = \pm[\mathcal{X}_t]$  et donc que  $Z$  contient  $\mathcal{X}_t$ . Ainsi,  $Z$  contient  $\widetilde{\mathcal{X}}$  et donc  $\mathcal{X}$  puisque  $Z$  est fermé dans  $M^c = \mathbb{E}^{n,2} \setminus M$ . Notons  $S$  la réunion des ensembles singuliers de  $Z$  et  $\mathcal{X}$ .  $\mathcal{X} \setminus S$  et  $Z \setminus S$  sont donc deux variétés de même dimension  $n + 2$ ; comme  $\mathcal{X} \setminus S \subset Z \setminus S$ ,  $\mathcal{X} \setminus S$  est un ouvert de  $Z \setminus S$ ; c'est aussi un fermé de  $Z \setminus S$  car  $\mathcal{X}$  est fermé dans  $M^c$  et  $Z$  contenu dans  $M^c$ . Puisque  $Z$  et  $\mathcal{X}$  sont orientables,

$\mathcal{H}^{n+1}(S) = 0$  de sorte que  $Z \setminus S$  est connexe. Par conséquent  $\mathcal{X} \setminus S = Z \setminus S$  et par densité,  $\mathcal{X} = Z$ . □

LEMME 14. —  $\mathcal{X}$  est un ensemble réel analytique cohérent au sens de [4].

*Démonstration.* — D’après [4, prop. 12 p. 94], il s’agit de construire pour tout point  $p_*$  de  $X$ , un sous-ensemble analytique complexe  $Z$  d’un voisinage de  $p_*$  dans le complexifié  $\mathbb{C}\mathbb{E}^{n,2} = \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^2$  de  $\mathbb{E}^{n,2}$  tel que pour tout point  $p$  voisin de  $p_*$  dans  $X$ , le germe  $Z_p$  de  $Z$  en  $p$  soit le complexifié du germe  $X_p$  de  $X$  en  $p$ .

Notons tout d’abord que  $M$  étant une sous-variété réelle analytique de  $\mathbb{E}^{n,2}$  de dimension réelle  $n + 1$ , elle est cohérente ; sa complexifiée  $\widetilde{M}$  est une sous-variété complexe d’un voisinage ouvert de  $M$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{E}^{n,2}$  de dimension complexe  $n + 1$ .  $N$  n’est pas une sous-variété mais est localement une réunion de sous-variétés de  $\mathbb{E}^{n,2}$  et il est clair que  $N$  est cohérente ; on note  $\widetilde{N}$  le complexifié de  $N$  ; il est de dimension complexe  $n + 2$ .

Dans un premier temps, on construit un objet global candidat à être le complexifié de  $X$ . On complexifie les variables naturelles  $t, z_1 = x_1 + iy_1$  et  $z_2 = x_2 + iy_2$  de  $\mathbb{E}^{n,2}$  en posant  $\tau = t + is, \xi_j = x_j + ix'_j, \eta_j = y_j + iy'_j, \zeta_j = \xi_j + i\eta_j, j = 1, 2$ . Lorsque  $(s, x', y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  on pose

$$\mathbb{E}_{(s,x',y')}^{n,2} = \{(\tau, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathbb{C}\mathbb{E}^{n,2} ; \text{Im}(\tau, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (s, x', y')\} ;$$

si  $(s, x', y')$  est de norme infinie assez petite

$$\widetilde{N}_{(s,x',y')} = \widetilde{N} \cap \mathbb{E}_{(s,x',y')}^{n,2}$$

est par construction un anneau Lévi-plat dans lequel est plongé  $\widetilde{M}_{(s,x',y')} = \widetilde{M} \cap \mathbb{E}_{(s,x',y')}^{n,2}$ . Il s’ensuit qu’hormis sa conclusion finale, on peut appliquer le théorème 3 pour obtenir un sous-ensemble réel analytique  $Y_{(s,x',y')}$  de  $\mathbb{E}_{(s,x',y')}^{n,2}$  feuilleté par des courbes complexes  $Y_{(t,s,x',y')} = Y_{(s,x',y')} \cap \{\text{Re } \tau = t\}$ . Puisque  $X$  coïncide avec  $N$  dans un ouvert de  $\text{Reg } N \setminus M, Y$  coïncide avec  $\widetilde{N}$  dans un ouvert de  $\text{Reg } \widetilde{N} \setminus \widetilde{M}$  et y est donc un sous-ensemble analytique complexe de dimension complexe  $n + 2$ .

Fixons maintenant un point  $p_* = (t_*, z_*)$  de  $X$ . Puisque  $X$  coïncide avec  $N$  dans un ouvert de  $\text{Reg } N \setminus M$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $t_*$  est régulier pour  $M$ . Pour chaque point  $p$  de  $X_{t_*}$ , on peut alors trouver un voisinage de  $p$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  et des coordonnées  $z^p = (z_1^p, z_2^p)$  de  $\mathbb{C}^2$  centrées en  $p$  et telles que  $p$  est au-dessus de l’une des composantes connexes de  $(\pi_{t_*}^p)^{-1}(\pi_{t_*}^p(M))$  où  $\pi_{t_*}^p$  est la projection  $(t_*, z^p) \mapsto z_1^p$ . On sait alors que  $X$  est donné au voisinage de  $p$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  par une équation de la forme  $F^p(t, z^p) = 0$  où  $F^p$  est un polynôme de Weierstrass en  $z_2^p$ . Posons  $U^p = \text{Re } F^p$  et  $V^p = \text{Im } F^p$  ;  $X$  est défini par

les équations  $U^p(t, z) = V^p(t, z) = 0$ . Considérons dans un voisinage ouvert de  $p$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{E}^{n,2}$  le sous-ensemble analytique complexe  $Z^p$  défini par les équations

$$U^p(\tau, \zeta^p) = V^p(\tau, \zeta^p) = 0.$$

où  $\zeta^p = (\zeta_1^p, \zeta_2^p)$ ,  $\zeta_1^p = \xi_1^p + i\eta_1^p$  et  $\zeta_2 = \xi_2^p + i\eta_2^p$  complexifient les variables  $z_1^p = x_1^p + iy_1^p$  et  $z_2^p = x_2^p + iy_2^p$ ; on a donc

$$\begin{cases} U^p(\tau, \zeta^p) = \frac{1}{2} [F^p(\tau - \tau_*, \zeta^p) + \overline{F^p}(\tau - \tau_*, \xi_1 - i\eta_1, \xi_2 - i\eta_2)] \\ V^p(\tau, \zeta^p) = \frac{1}{2i} [F^p(\tau - \tau_*, \zeta^p) - \overline{F^p}(\tau - \tau_*, \xi_1 - i\eta_1, \xi_2 - i\eta_2)]. \end{cases}$$

Par construction les ensembles  $Z^p$ ,  $p$  variant dans  $X_{t_*}$ , se recollent le long de  $X_{t_*}$ . Si  $p$  est un point régulier de  $X_{t_*}$ ,  $Z^p$  est aussi régulière en  $p$  et est clairement une complexification de  $X_{t_*}$  au voisinage de  $p$ . L'unicité de cette complexification et le fait que les singularités de  $X_{t_*}$  sont isolées fait que les  $Z^p$ ,  $p$  variant dans  $X_{t_*}$ , se recollent près de  $X_{t_*}$ . Notons  $Z_{t_*}$  la réunion des  $Z^p$  lorsque  $p$  varie dans  $X_{t_*}$ . Alors  $Z_{t_*}$  est un sous-ensemble analytique complexe d'un ouvert de  $\mathbb{C}\mathbb{E}^{n,2} \setminus \widetilde{M}$  et par construction lorsque  $t$  est suffisamment voisin de  $t_*$ , la trace sur  $\mathbb{E}_{(0,0,0)}^{n,2} \cap \{\text{Re } \tau = t\}$  est  $X_t$ . Puisque  $X$  coïncide avec  $N$  dans un ouvert de  $\text{Reg } N \setminus M$  et que  $N$  est localement une réunion finie de sous-variétés de  $\mathbb{E}^{n,2}$ ,  $Z$  coïncide avec  $\widetilde{N}$  dans un ouvert de  $(\text{Reg } \widetilde{N} \setminus \widetilde{M}) \cap \{\|t - t_*\| < \varepsilon\}$  du moment que  $\varepsilon$  est assez petit. On en déduit que pour chaque triplet  $(s, x', y')$  de réels assez petits,  $Z \cap \mathbb{E}_{(s,x',y')}^{n,2}$  est feuilleté par les courbes complexes que sont les  $Y_{(t,s,x',y')}$ ,  $t$  variant dans un voisinage de  $t_*$ .  $Z$  a donc une structure de sous-ensemble analytique complexe feuilleté par des courbes complexes paramétrées par  $(t, s, x', y')$  variant dans un voisinage de  $(t_*, 0, 0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Il est donc de dimension réelle  $2n + 4$  et donc de dimension complexe  $n + 2$ . Il s'ensuit que  $Z$  est au voisinage de  $X_{t_*}$  un complexifié. En particulier,  $X$  est cohérent en  $p_*$ . □

## 2.2. Preuve des propositions 1, 2 et du théorème 4

2.2.1. *Preuve des propositions 1, 2.* — Notons  $\mu$  la mesure sur  $\mathbb{C}^n$  que  $\alpha$  définit par intégration sur  $\gamma$ . Les moments de  $\mu$  sont alors ceux de  $\alpha$  et d'après [19] et [7], il existe dans  $\mathbb{C}^n \setminus \gamma$  une courbe complexe  $\mathcal{X}$  de masse finie bordant  $\gamma$  au sens des courants et une  $(1,0)$ -forme holomorphe  $\tilde{\alpha}$  sur  $\mathcal{X}$  telles que  $d([\mathcal{X}] \wedge \tilde{\alpha}) = \mu$ . Notons  $\text{Reg } \overline{\mathcal{X}}$  la partie régulière de  $\overline{\mathcal{X}}$ , c'est à dire l'ensemble des points réguliers de la courbe complexe  $\mathcal{X}$  et des points de  $\gamma$  au voisinage desquels  $\overline{\mathcal{X}}$  est une variété à bord de bord  $\gamma$ . Puisque  $\gamma$  est lisse, on sait que  $\sigma = \gamma \setminus \text{Reg } \overline{\mathcal{X}}$  est de mesure 1-dimensionnelle nulle. La forme  $\tilde{\alpha} + \overline{\tilde{\alpha}}$  est fermée et la fonction multivaluée qui vaut  $u$  sur  $\gamma \cap \text{Reg } \overline{\mathcal{X}}$  et qui est obtenue par intégration de  $\tilde{\alpha} + \overline{\tilde{\alpha}}$  le long des chemins de  $\text{Reg } \overline{\mathcal{X}}$  est une solution au problème posé dans la proposition 1.

Dans le cas d'une courbe de  $\mathbb{C}^2$ , la preuve de la proposition 2 est contenue dans celle du théorème 4. L'adaptation au cas d'une courbe de  $\mathbb{C}^n$  ne présente d'autre difficulté que celle d'avoir à utiliser des notations plus lourdes et nous en omettons la preuve.

2.2.2. *Preuve du théorème 4.* — Plaçons nous maintenant dans la situation du théorème 4. Les conclusions et notations du théorème 3 ainsi que les lemmes qui ont servi à sa preuve sont donc en vigueur et en outre,  $N$  est lisse. En posant  $\alpha|_{N_t} = \partial \left( u \Big|_{\tilde{N}_t} \right)$  on définit donc au voisinage de  $M$  dans  $N$  une forme qui est une  $(1, 0)$ -forme holomorphe sur chaque section de  $N$ ; celle-ci peut être considérée comme une forme de  $\mathbb{E}^{n,2}$  en utilisant l'isomorphisme standard entre l'espace hermitien  $\mathbb{C}^2$  et son dual. En utilisant les arguments de la preuve du théorème 3, on peut obtenir que chaque section  $\alpha(t, \cdot)$  de  $\alpha$  vérifie la condition des moments (2) et donc appliquer la proposition 1 aux sections  $M_t$  de  $M$ . Cependant, plutôt que de prouver que les chaînes holomorphes ainsi produites sont des courants d'intégration sur des courbes complexes et d'établir ensuite que les fonctions harmoniques multivaluées obtenues sont univaluées et dépendent analytiquement de  $t$ , nous utilisons l'ensemble  $\mathcal{X}$  donné par le théorème 3 comme solution du problème de bord posé pour la famille  $(M_t)$ . Le prolongement escompté pour  $u$  s'explique alors par le biais de formules, classiques dans le cas lisse, faisant intervenir des familles de fonctions de Green associées à des familles de courbes complexes éventuellement singulières. Ces fonctions de Green sont obtenues dans la proposition 17 par dualité et la résolution du  $\bar{\partial}$  établie dans la proposition 15; Pour mettre en œuvre cette approche, nous introduisons quelques notations.

$\mathcal{X}$  coïncidant avec  $N$  dans un ouvert de  $N \setminus M$ , on obtient en réunissant  $\mathcal{X}$  avec un voisinage ouvert adéquat de  $M$  dans  $N$ , un ensemble réel analytique  $\mathcal{Y}$  dans lequel  $\mathcal{X}$  est relativement compact et bordé au sens des courants par  $\pm[M']$  où  $M'$  est une sous-variété plongée dans  $N$  ayant la même orientation que  $M$ . Puisque d'après le théorème 3  $\mathcal{X}$  est un ensemble réel analytique cohérent,  $\mathcal{Y}$  l'est aussi et à ce titre admet un complexifié global. En prenant la trace de ce complexifié sur  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$ , on obtient un sous-ensemble réel analytique cohérent  $\tilde{\mathcal{Y}}$  d'un ouvert  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$  dont la trace sur  $\mathbb{E}^{n,2}$  est  $\mathcal{Y}$ . Le fait que  $\mathcal{Y}$  soit un anneau Lévi-plat près de  $M$  entraîne que  $\tilde{\mathcal{Y}}$  est en fait un sous-ensemble analytique complexe de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$  qui est précisément le complexifié de  $\mathcal{Y}$  par rapport aux  $n$  premières variables réelles de  $\mathbb{E}^{n,2}$ . Sélectionnons pour  $\tilde{\mathcal{Y}}$  un voisinage de Stein  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$  et  $H$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  telle que  $\tilde{\mathcal{Y}} = \{H = 0\}$ ; on a donc  $\mathcal{Y} = \{F = 0\}$  où  $F = H|_{\Omega \cap \mathbb{E}^{n,2}}$ . Puisque  $\overline{\mathcal{X}}$  est un compact de  $\Omega$ , on peut aussi se donner dans  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2$  un domaine strictement

pseudoconvexe  $\Omega^*$  de classe  $C^\infty$  tel que

$$\mathcal{X} \subset\subset \mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \cap \Omega^* \subset\subset \Omega.$$

On sait d'après les travaux d'Oka et de Cartan qu'il existe une fonction symétrique  $Q \in \mathcal{O}(\Omega \times \Omega, \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^2)$  telle que pour tout  $(\tau', z'), (\tau, z) \in \Omega \times \Omega$ ,

$$H(\tau', z') - H(\tau, z) = \langle Q(\tau', z', \tau, z), (\tau' - \tau, z' - z) \rangle$$

où on a posé  $\langle v, w \rangle = \sum_{1 \leq j \leq d} v_j w_j$  lorsque  $v, w \in \mathbb{C}^d$ . D'après [16], on peut se

donner une fonction barrière pour  $\Omega^*$ , c'est à dire une fonction  $Q^{[0]}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^2$ , de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $\overline{\Omega^*} \times \overline{\Omega^*}$ , holomorphe par rapport à sa seconde variable et telle que

$$\left\langle Q^{[0]}(\tau', z', \tau, z), (\tau' - \tau, z' - z) \right\rangle \neq 0$$

lorsque  $((\tau', z'), (\tau, z)) \in b\Omega^* \times \Omega^*$ . Dans ce qui suit, si  $f$  est une fonction ou une forme définie sur une partie de  $\mathbb{E}^{n,2}$ , on écrira  $f_t$  pour  $f(t, \cdot)$ . Si  $j \in \{1, 2\}$ ,  $t \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $Q_j(t, z', z) = Q_{n+j}(t, z', t, z)$  lorsque  $z', z \in \Omega^t$  et  $Q_j^{[0]}(t, z', z) = Q_{n+j}^{[0]}(t, z', t, z)$  lorsque  $z', z \in \overline{\Omega^*}$ . Par construction  $Q = (Q_1, Q_2)$  et  $Q^{[0]} = (Q_1^{[0]}, Q_2^{[0]})$  vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \forall z, z' \in \Omega^t, F(t, z') - F(t, z) = \langle Q(t, z', z), z' - z \rangle$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \forall \zeta, z \in b\Omega^{*t} \times \Omega^{*t}, \left\langle Q^{[0]}(\zeta, z), \zeta - z \right\rangle \neq 0.$$

On définit sur  $\{dF_t \neq 0\}$  et en particulier sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}^t$  une  $(1, 0)$ -forme  $\omega_t$  en posant

$$\omega_t = \frac{-dz_1}{\partial F_t / \partial z_2} \text{ sur } \{\partial F_t / \partial z_2 \neq 0\}$$

$$\omega_t = \frac{+dz_2}{\partial F_t / \partial z_1} \text{ sur } \{\partial F_t / \partial z_1 \neq 0\}$$

puis on pose

$$k_t(z', z) = \det \left[ \begin{array}{c} \overline{z'} - \bar{z} \\ |z' - z|^2 \end{array}, Q_t(z', z) \right] \quad \& \quad K_t(z', z) = k_t(z', z) \omega_t(z').$$

Si  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $\Omega^\varepsilon = \{(\tau, z) \in \Omega; |F_\tau(z)| < \varepsilon\}$ . On choisit  $\varepsilon_0$  de sorte que  $b\Omega^{\varepsilon_0}$  soit lisse. Etant donné que par définition d'un anneau Lévi-plat, les espaces affines  $\mathbb{C}_t^2$  coupent transversalement  $N$ , on obtient que  $d_z F = \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial F}{\partial z_2} dz_2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{E}^{n,2} \cap b\Omega^{\varepsilon_0}$ . Dans ce qui suit, on se donne un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que pour tout  $t \in V$ ,  $\mathcal{Y}^t$  est non vide.

PROPOSITION 15. — *On suppose que  $\varphi_t, t \in V$ , est la restriction à  $\mathcal{Y}^t$  d'une  $(0, 1)$ -forme  $\Phi_t$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega^t$ , analytique réelle par rapport à  $t$ . Alors la formule*

$$(R_{0,1}^t \varphi_t)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z' \in \mathcal{Y}_0^t} K_t(z', z) \wedge \varphi_t(z')$$

définit sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $\bar{\partial} R_{0,1}^t \varphi_t = \varphi_t$  sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t$  et sur  $\mathcal{Y}_0^t$  au sens des courants. En outre  $R_{0,1}^t \varphi_t : \text{Reg } \mathcal{Y}_0^t \rightarrow \mathbb{C}$  est analytique réelle par rapport à  $t$ . Enfin, on dispose d'une formule de type Cauchy-Pompéiu : si  $\chi_t$  est la restriction à  $\mathcal{Y}^t$  d'une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega^t$  à support compact dans  $\mathcal{Y}_0^t$ ,  $R_{0,1}^t \bar{\partial} \chi_t = \chi_t$  sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t$ .

*Démonstration.* — La formule ci-dessus est implicitement contenue dans [21] et nous n'en proposons qu'une démonstration abrégée contrairement à la preuve de la dépendance par rapport au paramètre  $t$ . Soient  $q \in \{0, 1, 2\}$  et  $\Phi_t$  une  $(0, q)$ -forme de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega^t$  dont on note  $\varphi_t$  la restriction à  $\mathcal{Y}_t$ . Pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  tel que  $\{|F_t| = \varepsilon\}$  est lisse, on pose  $D_\varepsilon^t = \Omega^* \cap \Omega^{\varepsilon, t}$ ,  $\partial_1 D_\varepsilon^t = \bar{\Omega}^* \cap \{|F_t| = \varepsilon\}$  et  $\partial_0 D_\varepsilon^t = \partial \Omega^* \cap \bar{D}_\varepsilon^t$ . Pour écrire les formules intégrales dont nous avons besoin, nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 b^{[0]}(\zeta, z) &= \frac{Q^{[0]}(\zeta, z)}{\langle Q^{[0]}(\zeta, z), \zeta - z \rangle} \\
 b^{[1]}(t, \zeta, z) &= \frac{Q_t(\zeta, z)}{\langle Q_t(\zeta, z), \zeta - z \rangle} = \frac{Q_t(\zeta, z)}{F_t(\zeta) - F_t(z)} \\
 \beta(\zeta, z) &= \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \\
 \eta_t^{[\nu]}(\lambda, \zeta, z) &= (1 - \lambda) \beta(\zeta, z) + \lambda b_t^{[\nu]}(\lambda, z), \\
 \eta_{t,z}^{[\nu]}(\lambda, \zeta) &= \eta_t^{[\nu]}(\lambda, \zeta, z), \quad \nu = 0, 1,
 \end{aligned}$$

$$W(\zeta) = \bigwedge_{1 \leq j \leq 2} d\zeta_j$$

$$W'(\eta) = \sum_{1 \leq j \leq 2} (-1)^{j+1} \eta_j \bigwedge_{k \neq j} d\eta_k \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{1 \leq j \leq 2} (-1)^{j+1} \eta_j d\eta_{\widehat{j}}$$

et pour  $z \in D_\varepsilon^t$ ,  $\nu = 0, 1$ ,

$$\left( I_{D_\varepsilon^t}^{b\nu} \Phi_t \right) (z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{(\lambda, \zeta) \in [0, 1] \times \partial_\nu D_\varepsilon^t} \Phi_t(\zeta) \wedge W' \left( \eta_{t,z}^{[\nu]}(\lambda, \zeta, z) \right) \wedge W(\zeta),$$

$$\left( I_{D_\varepsilon^t}^b \Phi_t \right) (z) = \left( I_{D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) + \left( I_{D_\varepsilon^t}^{b1} \Phi_t \right) (z),$$

$$\left( B_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\zeta \in D_\varepsilon^t} \Phi_t(\zeta) \wedge W'(\beta(\zeta, z)) \wedge W(\zeta),$$

$$\left( R_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) = \left( B_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) + \left( I_{D_\varepsilon^t}^b \Phi_t \right) (z).$$

L'existence de ces int\u00e9grales ne posent pas de probl\u00e8me car le lieu singulier de  $\mathcal{Y}^t$  ne rencontre pas  $b\Omega^*$  quand on suppose  $N$  lisse, ce qui est le cas ici. On d\u00e9duit de [18] et [26] (voir aussi [16]) que

$$(9) \quad \forall z \in z \in D_\varepsilon^t, \quad (-1)^q \Phi_t(z) = \left( L_b^{t,\varepsilon} \Phi_t \right) (z) - \left( R_{D_\varepsilon^t} \bar{\partial} \Phi_t \right) (z) + \left( \bar{\partial} R_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z)$$

o\u00f9  $L_b^{t,\varepsilon} \Phi$  est un terme qui vaut 0 lorsque  $q = 1$  ou que le support de  $\Phi_t$  ne rencontre pas  $b\mathcal{Y}_0^t$ .

On suppose  $q = 1$  et on fixe  $z$  dans  $\mathcal{Y}_0^t \cap D_\varepsilon^t$ . La seule composante de  $\Phi_t \wedge W' \left( \eta_{t,z}^{[\nu]} \right) \wedge W$  qui ne donne pas a priori une int\u00e9grale nulle sur  $[0, 1] \times \partial_\nu D_\varepsilon^t$  est la forme  $\Psi_{t,z}^{[\nu]}$  d\u00e9finie par

$$\Psi_{t,z}^{[\nu]} = \Phi_t \wedge W'_\lambda \left( \eta_{t,z}^{[\nu]} \right) \wedge W$$

ou si  $x$  est l'une des variables  $\lambda$  ou  $\zeta$ , la notation  $W'_x(\eta_{t,z})$  signifie que dans la formule d\u00e9finissant  $W'(\eta_{t,z})$  on ne calcule de diff\u00e9rentielle que par rapport \u00e0  $x$ . Un calcul direct donne que

$$\int_0^1 W'_\lambda \left( \eta_{t,z}^{[\nu]} \right) = \int_0^1 \sum_{1 \leq j \leq 2} (-1)^{j+1} \eta_{t,z,j}^{[\nu]} d\lambda \eta_{t,z,\widehat{j}}^{[\nu]} = \det \left( \beta, b_t^{[\nu]} \right) |_{(\cdot, z)}.$$

Par ailleurs  $W$  se factorisant sous la forme  $\omega_t \wedge dF_t$  sur  $\{|F_t| = \varepsilon\}$ , il vient

$$\left( I_{D_\varepsilon^t}^{b1} \Phi_t \right) (z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\zeta \in \{|F_t| = \varepsilon\} \cap \Omega^*} k_t(\zeta, z) \Phi_t(\zeta) \wedge \omega_t(\zeta) \wedge \frac{dF_t(\zeta)}{F_t(\zeta)}$$

$$\left( I_{D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\zeta \in \{|F_t| \leq \varepsilon\} \cap \partial\Omega^*} \det \left( \beta(\zeta, z), b^{[0]}(\zeta, z) \right) \Phi_t(\zeta) \wedge W(\zeta)$$

Par ce que  $\text{Sing } \mathcal{Y}^t$  ne rencontre par  $b\Omega^*$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( I_{D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z)$  existe et vaut 0. Par ailleurs, les r\u00e9sultats de Coleff et Herrera [5] appliqu\u00e9s par [21] donnent

tout d'abord que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{D_\varepsilon^t}^{b1} \Phi_t$  existe au sens des courants et vaut  $-R_{0,1}^t \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{Y}_0^t} k_t(\zeta, \cdot) \varphi_t(\zeta) \wedge \omega_t(\zeta)$ , cette intégrale étant à comprendre au sens des valeurs principales, c'est à dire comme la limite lorsque  $\delta$  tend vers  $0^+$  de  $\int_{\mathcal{Y}_0^t \cap \{|d_z F_t| \geq \delta\}} k_t(\zeta, \cdot) \varphi_t(\zeta) \wedge \omega_t(\zeta)$ . Il s'ensuit que  $R_{0,1}^t \varphi_t = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_{D_\varepsilon^t} \Phi_t$  vérifie  $\bar{\partial}(R_{0,1}^t \varphi_t) = \varphi_t$  sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}^t$  et sur  $\mathcal{Y}^t$  au sens des courants. Les mêmes références donnent aussi que sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}^t$ ,  $R_{0,1}^t \varphi_t$  est de classe  $C^\infty$ .

Il reste à prouver l'analyticité de  $R_{0,1}^t \varphi_t$  par rapport à  $t$ . Fixons  $z$  dans  $\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t \cap D_\varepsilon^t$ . Un calcul élémentaire donne

$$d_\zeta \Psi_{t,z}^{[\nu]} = d_\lambda \left( \Phi_t \wedge W'_\zeta \left( \eta_{t,z}^{[\nu]} \right) \wedge W \right) + \bar{\partial}_\zeta \Phi_t \wedge W'_\lambda \left( \eta_{t,z}^{[\nu]} \right) \wedge W.$$

Puisque

$$\begin{aligned} & \left( I_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b1} \Phi_t \right) (z) - \left( I_{D_\varepsilon^t}^{b1} \Phi_t \right) (z) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{[0,1]} \left( \int_{\partial D_{\varepsilon_0}^t} \Psi_{t,z}^{[1]} - \int_{\partial D_\varepsilon^t} \Psi_{t,z}^{[1]} - \int_{\{\varepsilon \leq |F_t| \leq \varepsilon_0\} \cap b\Omega^*} \Psi_{t,z}^{[1]} \right) \end{aligned}$$

la formule de Stokes livre

$$\begin{aligned} & \left( I_{D_{\varepsilon_0}^t}^b \Phi_t \right) (z) - \left( I_{D_\varepsilon^t}^b \Phi_t \right) (z) \\ &= \left( A_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) - \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) - \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left( A_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \int_{[0,1]} d_\lambda \Psi_{t,z}^{[1]} \\ \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) &= \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int_{[0,1]} \int_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \bar{\partial}_\zeta \Phi_t \wedge W'_\lambda \left( \eta_{t,z}^{[1]} \right) \wedge W \\ \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{[0,1]} \int_{\{\varepsilon \leq |F_t| \leq \varepsilon_0\} \cap b\Omega^*} \left( \Psi_{t,z}^{[1]} - \Psi_{t,z}^{[0]} \right) \end{aligned}$$

Etant donné que  $\eta_{t,z}^{[1]}(1, \cdot)$  est holomorphe,  $W'_\zeta \left( \eta_{t,z}^{[1]} \right) = 0$ . Avec  $\eta_{t,z}^{[1]}(0, \cdot) = \beta(\cdot, z)$ , on obtient

$$\left( A_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \wedge W'_\zeta \left( \beta(\cdot, z) \right) \wedge W$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left( I_{D_{\varepsilon_0}^t}^b \Phi_t \right) (z) - \left( I_{D_\varepsilon^t}^b \Phi_t \right) (z) \\ &= - \left( B_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t \right) (z) + \left( B_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) - \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) - \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\{ \varepsilon \leq |F_t| \leq \varepsilon_0 \} \cap b\Omega^*} \det \left[ \beta(\cdot, z), b_t^{[1]}(\cdot, z) - b^{[0]}(\cdot, z) \right] \Phi_t \wedge W \\ \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) &= \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \det \left( \beta(\cdot, z), b_t^{[1]}(\cdot, z) \right) \bar{\partial} \Phi_t \wedge W \end{aligned}$$

Etant donné que  $\{F_t = 0\}$  est lisse près de  $b\Omega^*$ , on peut choisir  $F_t$  comme première coordonnée d'un système de coordonnées de  $\mathbb{C}^2$  qui dépend holomorphiquement de la complexification naturelle de la variable réelle  $t$  en une variable complexe  $\tau$  de  $\mathbb{C}^n$ . On constate alors qu'avec des notations évidentes,  $\left( J_{D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi \right) (z)$  est bien définie pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  et  $\tau$  suffisamment voisin de  $t$ , que  $\left| \left( J_{D_\tau^t}^b \Phi_\tau \right) (z') \right|$  est un  $O(\varepsilon)$  uniformément par rapport à  $(\tau, z')$  quand  $(\tau, z')$  varie dans un voisinage suffisamment petit de  $(t, z)$  dans  $\mathbb{C}^n \times \text{Reg } \mathcal{Y}_0^t$  et que

$$\left( J_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) = \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) - \left( J_{D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z).$$

De même, grâce aux résultats de [5], on peut définir  $\left( A'_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z)$  pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  comme la limite de  $\left( A'_{D_\eta^t \setminus D_\eta^t} \Phi_t \right) (z)$  lorsque  $\eta \downarrow 0^+$  et obtenir aussi que  $\left( A'_{D_\varepsilon^t} \Phi_\tau \right) (z') =_{\varepsilon \downarrow 0^+} o(1)$  uniformément en  $(\tau, z')$  lorsque  $(\tau, z')$  varie dans un voisinage suffisamment petit de  $(t, z)$  dans  $\mathbb{C}^n \times \text{Reg } \mathcal{Y}$ . Ecrivant

$$\left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t \setminus D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) = \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t \right) (z) - \left( A'_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z)$$

on obtient qu'en fin de compte,

$$\begin{aligned} (10) \quad \left( R_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t \right) (z) + \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) + \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t \right) (z) \\ = \left( R_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) + \left( A'_{D_\varepsilon^t} \Phi_t \right) (z) + \left( J_{D_\varepsilon^t}^{b0} \Phi_t \right) (z). \end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $0^+$ , il vient

$$(11) \quad \left( R_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t \right) (z) + \left( J_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b0} \Phi_t \right) (z) + \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t \right) (z) = \left( R_{0,1}^t \varphi \right) (z).$$

Etant donné que  $\{|F_t| = \varepsilon_0\}$  est lisse,  $\left( R_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_\tau \right) (z')$  dépend analytiquement de  $(\tau, z')$  au voisinage de  $(t, z)$  dans  $\mathbb{C}^n \times \text{Reg } \mathcal{Y}$ . Puisque  $\left( J_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b0} \Phi_\tau \right) (z') + \left( A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_\tau \right) (z') =_{\varepsilon_0 \downarrow 0^+} o(1)$  uniformément en  $(\tau, z')$  au voisinage de  $(t, z)$  dans  $\mathbb{C}^n \times \text{Reg } \mathcal{Y}$ , il apparaît grâce au théorème de Weierstrass sur les limites de fonctions holomorphes que  $\left( R_{0,1}^t \varphi_\tau \right) (\tau, z')$  est analytique au voisinage de  $(t, z)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \text{Reg } \mathcal{Y}$ .

Lorsque  $q = 0$  et que  $b\mathcal{Y}_0^t \cap \text{Supp } \Phi_t = \emptyset$ , la formule (9) devient  $\Phi_t = R_{D_\varepsilon^t} \bar{\partial} \Phi_t$  et ce qui précède montre qu'on peut passer à la limite pour obtenir  $\Phi_t \Big|_{\text{Reg } \mathcal{Y}^t} = R_{D_\varepsilon^t} \bar{\partial} \Phi_t \Big|_{\text{Reg } \mathcal{Y}^t}$  sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}^t$ . □

Le lemme ci-dessous est un complément nécessaire pour établir l'existence de fonctions de Green.

LEMME 16. — *Les notations étant celles de la proposition 15, on suppose qu'il existe un voisinage ouvert  $G^*$  de  $M$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  tel que pour tout  $t \in V$ ,  $\text{supp } \varphi_t \subset G^{*,t}$  et  $G_0^{*,t} \cap (\text{Sing } \mathcal{Y}_0^t \cup b\mathcal{Y}_0^t) = \emptyset$ .  $R_{0,1}^t \varphi_t$  est alors la restriction à  $\mathcal{Y}_0^t$  d'une fonction lisse de  $\Omega^t$  qui dépend analytiquement de  $t$ .*

Démonstration. — On peut se ramener au cas où pour tout  $t \in V$  le support de  $\Phi_t$  est contenu aussi dans  $G^* \cap \Omega^t$ . Le terme  $(J_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b_0} \Phi_t)(z)$  dans (11) est alors nul tandis que

$$(A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t)(z) = \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int_{G^* \cap D_{\varepsilon_0}^t} \det(\beta(\cdot, z), Q_t(\cdot, z)) \frac{\bar{\partial} \Phi_t}{F_t} \wedge W$$

Etant donné que  $G^* \cap D_{\varepsilon_0}^t \subset \text{Reg } \mathcal{Y}^t$ , il est standard que dans  $G^*$  on peut factoriser  $\bar{\partial} \Phi_t$  sous la forme  $F_t \Xi_t$  où  $\Xi_t$  est une  $(0, 1)$ -forme lisse de  $G^*$  qui dépend analytiquement de  $t$  et écrire

$$(A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t)(z) = \frac{-1}{(2\pi i)^2} \int_{G^* \cap D_{\varepsilon_0}^t} \det(\beta(\cdot, z), Q_t(\cdot, z)) \Xi_t \wedge W$$

Sous cette forme, il apparaît que  $(A'_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t)(z)$  est en fait la valeur en  $z$  de la restriction à  $\mathcal{Y}_0^t$  d'une fonction lisse de  $\Omega^t$  qui dépend analytiquement de  $t$ . Pour des raisons de support,

$$(R_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t)(z) = (B_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t)(z) + (I_{D_{\varepsilon_0}^t}^{b_1} \Phi_t)(z)$$

et il apparaît que cette conclusion est valide pour  $(R_{D_{\varepsilon_0}^t} \Phi_t)(z)$  et donc in fine, avec (11), pour  $(R_{0,1}^t \varphi_t)(z)$ . □

Pour énoncer la proposition nous devons préciser quelques notations. Si  $B$  est une sous-variété réelle compacte de  $\mathbb{C}^2$  et si  $U$  est un ouvert d'une courbe complexe  $Y$  de  $\mathbb{C}^2 \setminus B$  bordée au sens des courants de  $\mathbb{C}^2$  par  $B$ , on note  $\mathcal{E}_{p,q}(U)$  l'espace des restrictions à  $U$  de  $(p, q)$ -formes de  $\mathbb{C}^2$  de classe  $C^\infty$ ; on note  $\mathcal{D}_{p,q}(U)$  l'espace de ces formes dont le support est contenu dans  $U$ . On note  $\tilde{\mathcal{E}}_{p,q}(U)$  l'espace des  $(p, q)$ -formes de classe  $C^\infty$  sur  $\text{Reg } Y$  et qui au voisinage de  $\text{Sing } Y$  sont des courants, c'est à dire qui sont dans le dual de  $\mathcal{E}_{p,q}(U_s)$  pour un certain voisinage  $U_s$  de  $\text{Sing } Y$  dans  $Y$ .

PROPOSITION 17. — Si  $z_* \in \text{Reg } \mathcal{Y}_0^t$ , l'expression

$$(12) \quad g_{t,z_*}(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{z' \in \mathcal{Y}_0^t} \overline{k_t(z', z)} k_t(z_*, z') \omega_t(z') \wedge \overline{\omega_t}(z').$$

est bien définie au sens des valeurs principales quand  $z \in (\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t) \setminus \{z_*\}$ . La fonction  $g_{t,z_*}$  se prolonge à  $\mathcal{Y}_0^t$  comme un courant et vérifie alors  $i\partial\bar{\partial}g_{t,z_*} = \Delta_{z_*}$  où  $\Delta_{z_*} = \delta_{z_*} dV$ ,  $dV = i\partial\bar{\partial}|\cdot|^2$  et  $\delta_{z_*}$  est la mesure de Dirac portée par  $\{z_*\}$ . En outre, si  $G^*$  un voisinage ouvert de  $M$  dans  $\mathbb{E}^{n,2}$  tel que pour tout  $t \in V$ ,  $G^{*,t} \cap (\text{Sing } \mathcal{Y}_0^t \cup b\mathcal{Y}_0^t) = \emptyset$ ,  $g_{t,z_*}|_{G^* \cap \mathcal{Y}_0^t}$  est un courant qui dépend analytiquement de  $t$ .

Démonstration. — D'après la proposition précédente, on dispose d'un opérateur  $R_{0,1}^t : \mathcal{E}_{0,1}(\mathcal{Y}_0^t) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{0,0}(\mathcal{Y}_0^t)$  qui vérifie  $\bar{\partial}R_{0,1}^t\varphi = \varphi$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}_{0,1}(\mathcal{Y}_0^t)$ . Puisque  $\Delta_{z_*}$  est lisse (et même nul) au voisinage de  $\text{Sing } \mathcal{Y}_0^t$ ,  $\Delta_{z_*}$  est un courant qui agit sur  $\tilde{\mathcal{E}}_{0,0}(\mathcal{Y}_0^t)$  et  $(R_{0,1}^t)^* : \tilde{\mathcal{E}}_{0,0}(\mathcal{Y}_0^t)' \rightarrow \mathcal{E}_{0,1}(\mathcal{Y}_0^t)'$  agit sur  $\Delta_{z_*}$  (les topologies utilisées sont précisées avant le lemme).  $(R_{0,1}^t)^* \Delta_{z_*}$  vérifie  $\bar{\partial}(R_{0,1}^t)^* \Delta_{z_*} = \Delta_{z_*}$  au sens des courants car si  $\chi \in \mathcal{D}_{0,0}(\mathcal{Y}_0^t)$ ,  $R_{0,1}^t \bar{\partial}\chi = \chi$  et donc

$$\langle \bar{\partial}(R_{0,1}^t)^* \Delta_{z_*}, \chi \rangle = \langle \Delta_{z_*}, R_{0,1}^t \bar{\partial}\chi \rangle = (R_{0,1}^t \bar{\partial}\chi)(z_*) = \chi(z_*).$$

Si  $\varphi \in \mathcal{E}_{0,1}(\mathcal{Y}_0^t)$

$$\begin{aligned} \langle (R_{0,1}^t)^* \Delta_{z_*}, \varphi \rangle &= \langle \Delta_{z_*}, R_{0,1}^t \varphi \rangle = (R_{0,1}^t \varphi)(z_*) \\ &= \int_{z' \in \mathcal{Y}_0^t} k_t(z', z_*) \omega_t(z') \wedge \varphi(z') = \langle k_t(\cdot, z_*) \omega_t, \varphi \rangle \end{aligned}$$

D'où  $(R_{0,1}^t)^* \Delta_{z_*} = k_{t,z_*} \omega_t$  où  $k_{t,z_*} = k_t(\cdot, z_*)$ .

Soit  $G^*$  comme dans l'énoncé. Compte tenu du lemme 16,  $R_{0,1}^t$  applique  $\mathcal{D}_{0,1}(G^* \cap \mathcal{Y}_0^t)$  dans  $\mathcal{E}_{0,0}(\mathcal{Y}_0^t)$  de sorte que pour  $\Theta_t = k_{t,z_*} \omega_t \wedge \overline{\omega_t}$  qui est une (1,1)-forme dont le support singulier est  $\{z_*\} \cup \text{Sing } \mathcal{Y}_0^t$ , on peut définir sur  $\mathcal{Y}_0^t$  un élément  $g_{t,z_*}$  de  $\mathcal{D}_{0,0}(G^* \cap \mathcal{Y}_0^t)'$  par la formule

$$\overline{g_{t,z_*}} = \omega_{t \perp} (R_{0,1}^t)^* (\overline{\Theta_t})$$

Au sens des courants sur  $G^* \cap \mathcal{Y}_0^t$ , on a donc  $\bar{\partial}\overline{g_{t,z_*}} \wedge \omega_t = \bar{\partial}(\overline{g_{t,z_*}} \omega_t) = \bar{\partial}(R_{0,1}^t)^* (\overline{\Theta_t}) = \overline{\Theta_t} = \overline{k_{t,z_*} \omega_t} \wedge \omega_t$ . Comme toute (0,1)-forme se factorise sur  $G^* \cap \mathcal{Y}_0^t$  par  $\overline{\omega_t}$ , on en déduit que  $\partial g_{t,z_*} = k_{t,z_*} \omega_t$  et donc que  $i\partial\bar{\partial}g_{t,z_*} =$

$\Delta_{z_*} \Big|_{G^* \cap \mathcal{Y}_0^t}$ . Puisque  $\bar{\partial}$  est elliptique sur  $\text{Reg } \mathcal{Y}^t$ ,  $g_{t,z_*}$  est en fait une fonction réelle analytique sur  $(G^* \cap \mathcal{Y}_0^t) \setminus \{z_*\}$ . Si  $\chi_t$  est la restriction à  $\mathcal{Y}_0^t$  d'une  $(1, 1)$ -forme lisse de  $\Omega^t$  dont le support est contenu dans  $G^*$ , il vient

$$\begin{aligned} \overline{\langle g_{t,z_*}, \chi_t \rangle} &= \overline{\langle \bar{g}_{t,z_*}, \omega_t \wedge (\omega_t \lrcorner \bar{\chi}_t) \rangle} = \left\langle (R_{0,1}^t)^* (\bar{\Theta}_t), \omega_t \lrcorner \bar{\chi}_t \right\rangle = \langle \bar{\Theta}_t, R_{0,1}^t (\omega_t \lrcorner \bar{\chi}_t) \rangle \\ \langle g_{t,z_*}, \chi_t \rangle &= \left\langle k_{t,z_*} \omega_t, \overline{R_{0,1}^t (\omega_t \lrcorner \bar{\chi}_t)} \right\rangle \end{aligned}$$

Cette dernière formule prouve aussi que si  $\chi_t$  dépend analytiquement de  $t$ , il en est de même de  $\langle g_{t,z_*}, \chi_t \rangle$ . Par ailleurs, comme

$$(R_{0,1}^t (\omega_t \lrcorner \bar{\chi}_t)) (z') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{Y}_0^t} k_t(\cdot, z') \omega_t \wedge (\omega_t \lrcorner \bar{\chi}_t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{Y}_0^t} k_t(\cdot, z') \bar{\chi}_t$$

on obtient

$$(13) \quad \overline{\langle g_{t,z_*}, \chi_t \rangle} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathcal{Y}_0^t} \left\langle \overline{k_{t,z_*} (z') \omega_t (z')}, k_t(\cdot, z') \omega_t (z') \right\rangle \bar{\chi}_t$$

ce qui implique que lorsque  $z \in G^* \cap \mathcal{Y}_0^t$ ,

$$\overline{g_{t,z_*} (z)} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \langle \overline{k_{t,z_*} \bar{\omega}_t}, k_{t,z} \omega_t \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{z' \in \mathcal{Y}_0^t} \overline{k_t(z_*, z')} k_t(z', z) \bar{\omega}_t(z') \wedge \omega_t(z').$$

On constate en particulier que  $g_{t,z_*}$  ne dépend pas de  $G^*$  et qu'on obtient ainsi une fonction définie et harmonique sur  $(\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t) \setminus \{z_*\}$  vérifiant  $i\partial\bar{\partial}g_{t,z_*} =$

$\Delta_{z_*} \Big|_{\text{Reg } \mathcal{Y}_0^t}$ . Ce qui achève la preuve de la proposition. □

Revenons à la fonction  $u$  considérée au début de la preuve du théorème 4. On se donne  $N^o$ ,  $N^+$  et  $N^-$  comme définis au début de la preuve du théorème 3. Pour  $t \in V$  et  $z \in (\mathcal{X} \cup N^o \setminus M)^t$ , on pose

$$U(t, z) = \frac{2}{i} \int_{\zeta \in M_t} u(t, \zeta) \partial_\zeta g_t(z, \zeta) + g_t(z, \zeta) \bar{\partial} u(t, \zeta)$$

où  $\partial u$  est définie comme plus haut et les intégrales étant à prendre au sens des courants. Par construction,  $U$  est une fonction réelle analytique univaluée et  $U(t, \cdot)$  est harmonique sur  $N^o \cup \text{Reg } \mathcal{X}^t$ . On convient de poser  $U^+(t, z) = U(t, z)$  si  $z \in \mathcal{X}^t$  et  $U^-(t, z) = U(t, z)$  lorsque  $z \in (N^-)^t$ . Bien que  $\mathcal{X}_t$  puisse être singulière, [17, lemme 15] s'applique et donne que les fonctions  $U^+(t, \cdot)$  et  $U^-(t, \cdot)$  se prolongent continûment à  $M_t$  et que si  $z \in M_t$ ,

$$u(t, z) = U^+(t, z) - U^-(t, z).$$

On note  $T_1$  l'ensemble des réels  $\tau$  tels que pour tout paramètre  $t = (t_1, \dots, t_n) \in V$  tels que  $t_1 < \tau$ ,  $U^-(t, z) = 0$  lorsque  $z \in (N^-)^t$ .  $T_1 \neq \emptyset$  car  $M_t = \emptyset$  si  $t \in V \setminus \pi_{\mathbb{R}}(M)$ .  $T_1$  est donc un intervalle non vide dont on note  $\tau_*$

la borne supérieure. Supposons  $\tau_* < \tau_\infty = \sup \{t_1; t \in \pi_{\mathbb{R}}(V)\}$ . Il existe alors nécessairement un paramètre dont la première coordonnées est  $\tau_*$  et dont la section correspondante de  $M$  est non vide. Soit  $t_*$  l'un de ces paramètres. On sait que  $U^- = 0$  dans  $N^-$  au dessus de  $\{t_1 < \tau_*\}$ . Soit  $(t_*, z_*)$  un point de  $\overline{N_{t_*}^-}$ . Puisque  $N$  est coupé transversalement par  $\mathbb{C}_{t_*}^2$ , un voisinage de  $(t_*, z_*)$  dans  $N$  rencontre forcément  $\{(t, z) \in N^-; t_1 < \tau_*\}$  sur un ouvert non vide de  $N$ . On en déduit que  $U^-$  est aussi nulle au voisinage de  $(t_*, z_*)$  dans  $N^-$ . Recouvrant  $\overline{N_{t_*}^-}$  par un nombre fini de tels voisinages, on en déduit que  $U^- = 0$  sur  $N_t^-$  pour tout  $t$  suffisamment voisin de  $t_*$ . Du coup,  $\tau_* < \sup T_1$ , ce qui est une contradiction. Ainsi,  $\tau_* \geq \tau_\infty$  et  $u_t$  se prolonge harmoniquement à  $\mathcal{X}_t$  pour toute valeur de  $t$  par la fonction  $U^+(t, \cdot)$

**2.3. Preuve du théorème 5.** — Cette preuve est essentiellement la même que celle du théorème 3 et nous nous bornons à indiquer les changements entre les deux démonstrations. On se donne  $T, M$  et  $N$  comme dans l'énoncé de théorème 5. Par hypothèse,  $M$  contient une partie fermée  $S$  telle que  $\mathcal{H}^{n+1}(S) = 0$  et  $M \setminus S$  est une variété orientée dont le courant d'intégration est  $T$ .

Puisque  $M$  est réel analytique, on sait d'après Hardt [13, th. 4.3], que  $\tau \mapsto T_\tau$  est définie et continu de  $Y = \{\tau \in \mathbb{R}^n; \dim_{\mathbb{R}}(M \cap \mathbb{C}_\tau^2) \leq 1\}$  dans l'espace des chaînes localement intégrales de  $N$ . Pour tout paramètre  $\tau$ ,  $\dim_{\mathbb{R}}(M \cap \mathbb{C}_\tau^2) \in \{0, 1, 2\}$  puisque  $M \cap \mathbb{C}_\tau^2 \subset N_\tau$ . Supposons que  $M \cap \mathbb{C}_{t_*}^2$  est de dimension 2 sur l'une de ses composantes connexes  $C$ . Cette intersection est alors non transverse en chacun de ses points car sinon  $M$  serait au voisinage de l'un de ses point de dimension  $n + 2$ . Soit  $p_*$  un point de  $C$ . Par hypothèse,  $M$  est incluse au voisinage de  $p_*$  dans l'une branche lisse de  $N$ ; on suppose pour ne pas introduire de notation supplémentaire que  $N$  est une sous-variété de  $\mathbb{E}^{n,2}$ . Modulo un changement de coordonnées, on se ramène au cas où  $p_*$  est l'origine;  $N$  est alors donnée au voisinage de  $p_* = 0$  par une équation de la forme  $z_2 = f(z_1, t)$  et  $M$  est caractérisée dans ce voisinage par une équation additionnelle  $\rho(z_1, t) = 0$ ,  $f$  et  $\rho$  étant des fonctions de classe  $C^1$ . Puisque  $M$  et  $\mathbb{C}_0^2$  se coupent non transversalement au voisinage de 0, il existe des fonctions continues  $\rho_1, \dots, \rho_n$  telles que  $\rho = \sum t_j \rho_j$ . On en déduit que  $C$  est ouverte dans  $N_t$  et donc, puisque  $\mathcal{C}_t$  est aussi fermée dans  $N_t$ , que  $C$  est une composante connexe de  $N_t$ . Puisque  $N_t$  est une sous-variété de  $\mathbb{C}^2$ , on en déduit que  $bC \subset bN_t \subset bN$ , ce qui est absurde. Ainsi,  $\tau \mapsto T_\tau$  est définie et continu sur  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,

$$I_{T,h} : t \mapsto \langle T_t, h \rangle,$$

$h$  forme différentielle fixée du type  $h_1 dz_1 + h_2 dz_2$  avec  $h_1, h_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^n)$ , est continue sur  $\mathbb{R}^n$ .

Comme dans la preuve du théorème 3, il s'agit dans un premier temps de prouver l'analyticité de  $I_{T,h}$ . Celle-ci étant triviale sur  $\mathbb{R}^n \setminus \pi_{\mathbb{R}}(M)$ , on raisonne

au voisinage d'un paramètre  $t_*$  fixé de  $M$ . Notons  $\Delta_d$  le simplexe de dimension  $d$  naturellement orienté, appelons *cellule analytique* de dimension de  $d$  un courant de la forme  $\varphi_* [\Delta_d]$  où  $\varphi$  est un difféomorphisme réel analytique au voisinage de  $\Delta_d$  et à valeurs dans  $N$ . Enfin, appelons *chaîne cellulaire analytique* de dimension  $d$  de  $N$  une somme finie de cellules de dimension  $d$  de  $N$ .

Fixons  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Il résulte de [11, th. 4.2.9] et du fait que  $N$  est localement une réunion de sous-variétés de  $\mathbb{E}^{n,2}$  qu'on peut trouver dans  $N$  une chaîne cellulaire analytique  $P_\varepsilon$  de dimension  $n + 1$  et un courant intégral  $\Theta_\varepsilon$  de dimension  $n + 2$  supporté par  $N$  tels que  $\text{Spt } P_\varepsilon \cup \text{Spt } \Theta_\varepsilon \subset \{ \text{dist}(\cdot, M) \leq \varepsilon \}$  et  $T = P_\varepsilon + d\Theta_\varepsilon$ . Si le support d'une cellule  $\varphi_* [\Delta_d]$  intervenant dans  $P_\varepsilon$  rencontre  $\mathbb{C}_{t_*}^2$  sur  $\varphi(b\Delta_d)$ , on remplace cette cellule par un courant de la forme  $\tilde{\varphi}_* [\Delta_d] - d\theta$  où,  $\tau$  étant un réel strictement positif assez petit,  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau Id_{\Delta_d}$  et  $\theta$  est le courant d'intégration naturel sur  $\{ \alpha x ; (\alpha, x) \in [\tau, 1] \times \Delta_d \}$ . En effectuant cette opération sur chaque cellule de  $\mathcal{P}_\varepsilon$  telle que  $\varphi(b\Delta_d) \cap \mathbb{C}_{t_*}^2 \neq \emptyset$ , on obtient, si  $\tau$  est assez petit et bien choisi, une décomposition  $T = P_\varepsilon^{t_*} + d\Theta_\varepsilon^{t_*}$  adaptée à  $t_*$  au sens où outre les propriétés de la décomposition précédente,  $(P_\varepsilon^{t_*}, \Theta_\varepsilon^{t_*})$  jouit aussi de celle que  $\mathbb{C}_{t_*}^2$  ne coupe les cellules de  $P_\varepsilon^{t_*}$  que sur leurs faces et transversalement. Dans une telle décomposition,  $(P_\varepsilon^{t_*})_t$  est bien défini pour  $t$  voisin de  $t_*$  et il résulte à nouveau de [13, th. 4.3] que pour  $t$  voisin de  $t_*$  les sections  $(\Theta_\varepsilon^{t_*})_t$  sont bien définies.

Soient  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$  d'intégrale 1 et  $(\rho_\alpha) = (\mathbb{R}^n \ni \theta \mapsto \alpha^{-n} \rho(\theta/\alpha))_{\alpha > 0}$ . On fixe  $t$  suffisamment voisin de  $t_*$  afin que les considérations précédentes s'appliquent. On a donc

$$\langle T, dh \wedge P_t \rangle = \lim_{\alpha \downarrow 0} \langle T, dh \wedge P_t^\alpha \rangle$$

où pour  $\alpha > 0$ ,  $P_t^\alpha$  est la forme obtenue en convolant les coefficients de  $P_t$  avec  $\rho_\alpha$ . Si  $\alpha > 0$ ,  $\langle T, dh \wedge P_t^\alpha \rangle = \langle T, h \wedge dP_t^\alpha \rangle$  (car  $T$  est fermé) et  $dP_t^\alpha = \rho_\alpha(\cdot - t) d\theta$ . D'après la définition des sections de  $T$ , on en déduit en faisant tendre  $\alpha$  vers  $0^+$  que

$$\langle T, dh \wedge P_t \rangle = \langle T_t, h \rangle = I_{T,h}(t)$$

De même,  $\langle P_\varepsilon^{t_*}, dh \wedge P_t \rangle = I_{P_\varepsilon^{t_*}, h}(t)$  et  $\langle d\Theta_\varepsilon^{t_*}, dh \wedge P_t \rangle = \langle (\Theta_\varepsilon^{t_*})_t, dh \rangle = 0$ , la dernière égalité étant due au fait que  $dh$  est une  $(2, 0)$ -forme différentielle de  $\mathbb{C}_t^2$  et que le support de  $(\Theta_\varepsilon^{t_*})_t$  est contenu dans  $N_t$  qui est une courbe complexe. D'où

$$I_{T,h}(t) = \langle T, dh \wedge P_t \rangle = \langle P_\varepsilon^{t_*}, dh \wedge P_t \rangle + \langle d\Theta_\varepsilon^{t_*}, dh \wedge P_t \rangle = I_{P_\varepsilon^{t_*}, h}(t).$$

La décomposition  $T = P_\varepsilon^{t_*} + d\Theta_\varepsilon^{t_*}$  étant adaptée à  $t_*$ ,  $I_{P_\varepsilon^{t_*}, h}$  et donc  $I_{T,h}$  est réelle analytique au voisinage de  $t_*$ .

Finalement,  $I_{T,h}$  est analytique sur  $\mathbb{R}^n$  et donc nulle puisque nulle à l'infini. Les sections  $T_t$  de  $T$  bordent donc des 1-chaînes holomorphes  $X_t$  de  $\mathbb{C}_t^2 \setminus \text{Spt } T_t$ .

De même, les sections  $(P_\varepsilon^{t_*})_t$  et  $P_\varepsilon^{t_*}$  sont aussi les bords de 1-chaines holomorphes  $Y_{\varepsilon,t}^{t_*}$  de  $\mathbb{C}_t^2 \setminus \text{Spt } T_t$ . Par construction,  $X_t$  et  $Y_{\varepsilon,t}^{t_*}$  coïncident en dehors d'un voisinage (fermé) d'ordre  $2\varepsilon$  de  $\text{Supp } T_t$  et si  $t$  est suffisamment voisin de  $t_*$ ,  $X_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (Y_\varepsilon^{t_*})_t$ .

Comme dans la section précédente, on définit ce qui sera le support de la chaîne CR cherchée par ses sections. Si  $t \in \mathbb{R}^n$  on note  $\mathcal{X}_t$  le support de la 1-chaîne  $X_t$  et on pose

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^n} \mathcal{X}_t .$$

Hormis l'utilisation du lemme 6 qui permet de se ramener au cas des sous-variétés réelles analytiques coupées transversalement par  $\mathbb{C}_{t_*}^2$  et qui ici est remplacée par la construction de  $P_\varepsilon^{t_*}$ , la preuve du lemme 11 s'applique et on obtient que  $\mathcal{X}$  est un sous-ensemble analytique de  $\mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  de dimension  $n + 2$ , que ses sections sont des courbes complexes et que la trace de son ensemble singulier  $\mathcal{X}^s$  sur ces sections sont des ensembles discrets et  $\mathcal{H}^n(\mathcal{X}^s) < +\infty$ .

Prouvons maintenant que  $\mathcal{X}$  est le support d'un courant d'intégration  $X$  de  $\mathbb{E}^{n,2} \setminus M$  vérifiant  $dX = T$  et  $dX_t = T_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $p_* = (\zeta_*, w_*, t_*)$  un point de la partie régulière  $\mathcal{X}^r$  de  $\mathcal{X}$ . Ayant fixé  $\varepsilon$  dans  $]0, \frac{1}{2} \text{dist}(p_*, M)[$  et noté  $\mathcal{X}^\varepsilon$  le support du courant  $P_\varepsilon^{t_*}$  précédemment défini, on utilise les notations de la preuve du lemme 11 pour  $\mathcal{X}^\varepsilon$  : pour un voisinage  $G$  de  $p_*$  et  $V = \pi(G)$ ,

$$\mathcal{X}^\varepsilon \cap G = \{(t, \zeta, w) \in G ; (\zeta, t) \in V \text{ et } (PQ)(\zeta, t, w) = 0\}$$

où  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $CR^\omega(V)[w]$ . Etant donné que  $\mathcal{X}^\varepsilon$  et  $\mathcal{X}$  coïncident sur  $\{\text{dist}(\cdot, M) > 2\varepsilon\}$  et que  $p_*$  est un point régulier de  $\mathcal{X}^\varepsilon$ ,  $\mathcal{X}^\varepsilon \cap G$  est, quitte à diminuer  $G$ , le graphe d'une application  $F$  de  $CR^\omega(V)$ . Puisque  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $CR^\omega(V)[w]$  et puisque  $p_*$  est un point régulier de  $\mathcal{X}^\varepsilon$ , on en déduit par un argument classique de formule de résidu logarithmique que  $R(\zeta, t, w) = \frac{P(\zeta, t, w)}{Q(\zeta, t, w)}$  se factorise dans  $G$  sous la forme  $[w - F(\zeta, t)]^{\mu(p_*)} S(\zeta, t, w)$  où  $S \in CR^\omega(V)(w)$  n'a ni pôle ni zéro dans  $G$  et  $\mu(p_*) = \pm m(p_*)$  selon que  $w_*$  est un zéro ou un pôle de  $R(\zeta_*, t_*, \cdot)$ . Si  $t$  est suffisamment voisin de  $t_*$  et si  $U$  un voisinage suffisamment petit de  $(\zeta_*, w_*)$ , on a donc

$$(14) \quad X_t|_U = \mu(p_*) [\mathcal{X}_t]|_U .$$

L'application  $\mathcal{X}^r \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}^*$  ainsi construite est localement constante. Notons  $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha \in A}$  la famille (forcément finie) des composantes connexes de  $\mathcal{X}$ . Puisque  $\mathcal{X}^s$  ne déconnecte aucune composante de  $\mathcal{X}^r$ ,  $\mu$  prend une valeur constante  $\mu_\alpha$  sur chaque  $\mathcal{X}_\alpha \cap \mathcal{X}^r$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$  on obtient

$$(15) \quad X_t = \sum_{\alpha \in A_t} \mu_\alpha [\mathcal{X}_{\alpha,t}] .$$

où  $A_t$  est une partie de  $A$ . Orientons chaque  $\mathcal{X}_\alpha$  par  $i(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + dz_2 \wedge d\bar{z}_2) \wedge dt$  de sorte que  $[\mathcal{X}_\alpha]_t = [\mathcal{X}_{\alpha,t}]$  et posons

$$X = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha [\mathcal{X}_\alpha].$$

Puisque  $[\mathcal{X}_\alpha]$  est un courant localement rectifiable de masse finie, son bord est de la forme  $\lambda[M \setminus S]$  où  $\lambda$  est localement intégrable sur  $M \setminus S$  (voir [11, 4.1.15 et 4.1.20]);  $\lambda$  est localement constante car  $d^2 = 0$ . Il en est donc de même pour  $dX$ . Ainsi  $\langle dX, \Phi \rangle = 0$  si  $\Phi \in C_{n+1}^\infty(\mathbb{E}^{n,2})$  a un support qui ne rencontre pas l'ensemble  $M'$  des points  $p = (t, z)$  où  $M$  et  $\mathbb{C}_t^2$  se coupent et sont transverses; notons que dans ce cas on a aussi  $\langle T, \Phi \rangle = 0$  puisque tout  $(n + 1)$ -champ de vecteurs qui oriente  $M \setminus S$  est  $\mathcal{H}^{n+1}$ -presque partout factorisable par  $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \partial/\partial t_j$ . Si par contre  $\Phi$  est de la forme  $dt \wedge \varphi$ , alors d'après [11, th. 4.3.2]

$$\begin{aligned} \langle dX, \Phi \rangle &= - \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha \langle [\mathcal{X}_\alpha], dt \wedge d_z \varphi \rangle = - \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha \int_{t \in \mathbb{R}^n} \langle [\mathcal{X}_\alpha]_t, d_z \varphi \rangle d\mathcal{H}^n(t) \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}^n} \left\langle d_z \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha [\mathcal{X}_{\alpha,t}], \varphi \right\rangle d\mathcal{H}^n(t) \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}^n} \langle T_t, \varphi \rangle d\mathcal{H}^n(t) = \langle T, dt \wedge \varphi \rangle = \langle T, \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{H}^{n+1}(M \setminus M') = 0$ , on en déduit que la formule  $dX = T$  est valable au sens des courants. Le fait que  $dX_t = T_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$  résulte de (15). Lorsque  $M \setminus S$  est connexe, on obtient que  $X \in \mathbb{Z}[\mathcal{X}]$  de la même façon que dans [15, th 3.3 & p. 370].

Lorsque  $p = (t, z)$  est en outre un point régulier de  $M$  où  $M$  est transverse à  $\mathbb{C}_t^2$ , on sait d'après [14, th. II] que si  $z$  possède dans  $\mathbb{C}_t^2$  un voisinage  $U_p$  tel que chaque composante connexe de  $\overline{\mathcal{X}_t} \cap U_p$  est soit une variété à bord réelle analytique de bord  $M_t \cap U_p$ , soit un sous-ensemble réel analytique de  $U_p$ ; en utilisant aussi [14, th. 4.7], on obtient que si  $C$  est une composante connexe de  $\mathcal{X}_t \cap U_p$ ,  $U_p \cap bC = M \cap U_p$  quitte à diminuer  $U_p$ . Par transversalité, cette conclusion s'étend à  $(\mathcal{X}, M, p)$  dans  $W_p$  si  $W_p$  est suffisamment petit. Si  $p$  n'est pas un point régulier de  $M$  où  $M$  est transverse à  $\mathbb{C}_t^2$ , ces arguments s'applique malgré tout à  $P_\varepsilon^t$  pour des réels  $\varepsilon$  arbitrairement petit. Il est clair que ceci entraîne que si  $W$  est un voisinage assez petit de  $p$ ,  $M$  contient au moins l'une des composantes connexes de  $(W \cap N) \setminus M$ . Ceci achève la preuve du théorème 5.

*Remerciements.* — Nous tenons à remercier le rapporteur pour sa lecture attentive et ses remarques constructives.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BOCHNER – « Green's formula and analytic continuation », in *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Math. Studies, vol. 33, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1954, p. 1–14.
- [2] S. BOCHNER & W. T. MARTIN – *Several Complex Variables*, Princeton Mathematical Series, vol. 10, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1948.
- [3] A. B. BROWN – « On certain analytic continuations and analytic homeomorphisms », *Duke Math. J.* **2** (1936), p. 20–28.
- [4] H. CARTAN – « Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes », *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), p. 77–99.
- [5] N. R. COLEFF & M. E. HERRERA – *Les courants résiduels associés à une forme méromorphe*, Lecture Notes in Math., vol. 633, Springer, Berlin, 1978.
- [6] T. C. DINH – « Enveloppe polynomiale d'un compact de longueur finie et chaînes holomorphes à bord rectifiable », *Acta Math.* **180** (1998), p. 31–67.
- [7] T.-C. DINH – « Orthogonal measures on the boundary of a Riemann surface and polynomial hull of compacts of finite length », *J. Funct. Anal.* **157** (1998), p. 624–649.
- [8] P. DOLBEAULT – « Sur les chaînes maximalement complexes de bord donné », in *Geometric measure theory and the calculus of variations (Arcata, Calif., 1984)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 171–205.
- [9] \_\_\_\_\_, « On CR-moment condition », *Riv. Mat. Univ. Parma* **3** (1994), p. 159–167 (1995).
- [10] P. DOLBEAULT, G. TOMASSINI & D. ZAITSEV – « On Levi-flat hypersurfaces with prescribed boundary », *Pure Appl. Math. Q.* **6** (2010), p. 725–753.
- [11] H. FEDERER – *Geometric measure theory*, Grundle. math. Wissensch., vol. 153, Springer, 1969.
- [12] R. FUETER – « Über einen Hartogs'schen Satz », *Comment. Math. Helv.* **12** (1939), p. 75–80.
- [13] R. M. HARDT – « Slicing and intersection theory for chains associated with real analytic varieties », *Acta Math.* **129** (1972), p. 75–136.
- [14] F. R. HARVEY & H. B. LAWSON – « On boundaries of complex analytic varieties, I », *Annals of Math.* **102** (1975), p. 233–290.
- [15] R. HARVEY – « Holomorphic chains and their boundaries », in *Several complex variables (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXX, Part 1, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975)*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977, p. 309–382.

- [16] G. HENKIN & J. LEITERER – *Theory of functions on complex manifolds*, Monographs in Math., vol. 79, Birkhäuser, 1984.
- [17] G. HENKIN & V. MICHEL – « On the explicit reconstruction of a Riemann surface from its Dirichlet-Neumann operator », *Geom. Funct. Anal.* **17** (2007), p. 116–155.
- [18] G. M. HENKIN – « A uniform estimate for the solution of the  $\bar{\partial}$ -problem in a Weil region », *Uspehi Mat. Nauk* **26** (1971), p. 211–212.
- [19] ———, « The Abel-Radon transform and several complex variables », in *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, Ann. of Math. Stud., vol. 137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995, p. 223–275.
- [20] G. M. HENKIN & V. MICHEL – « Principe de Hartogs dans les variétés CR », *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), p. 1313–1395.
- [21] G. M. HENKIN & P. L. POLYAKOV – « The Grothendieck-Dolbeault lemma for complete intersections », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), p. 405–409.
- [22] B. JÖRICKE & E. PORTEN – « On the continuity principle », *Asian J. Math.* **11** (2007), p. 167–178.
- [23] M. G. LAWRENCE – « Polynomial hulls of rectifiable curves », *Amer. J. Math.* **117** (1995), p. 405–417.
- [24] J. MERKER & E. PORTEN – « A Morse-theoretical proof of the Hartogs extension theorem », *J. Geom. Anal.* **17** (2007), p. 513–546.
- [25] H. POINCARÉ – « Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **23** (1907), p. 158–220.
- [26] P. L. POLJAKOV – « The Cauchy-Weil formula for differential forms », *Mat. Sb. (N.S.)* **85 (127)** (1971), p. 388–402.
- [27] W. ROTHSTEIN – « Bemerkungen zur Theorie komplexer Räume », *Math. Ann.* **137** (1959), p. 304–315.
- [28] W. ROTHSTEIN & H. SPERLING – « Einsetzen analytischer Flächenstücke in Zyklen auf komplexen Räumen », in *Festschr. Gedächtnisfeier K. Weierstrass*, Westdeutscher Verlag, Cologne, 1966, p. 531–554.
- [29] F. SEVERI – « Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa », *Atti Accad. Naz. Lincei* **6** (1932), p. 487–490.
- [30] J. WERMER – « The hull of a curve in  $\mathbb{C}^n$  », *Ann. of Math.* **68** (1958), p. 550–561.

