Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# UN PRODUIT D'INTERSECTION NON BORNÉ DANS LA K-HOMOLOGIE DES PSEUDOVARIÉTÉS

Michel Hilsum

Tome 142
Fascicule 2

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 177-192

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 142, juin 2014



***Diffusion***

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

***Tarifs***

*Vente au numéro :* 43 € ($ 64)
*Abonnement* Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

*Bulletin de la Société Mathématique de France*
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/



ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

*Bull. Soc. math. France*
**142** (2), 2014, p. 177–192

# UN PRODUIT D'INTERSECTION NON BORNÉ DANS LA K-HOMOLOGIE DES PSEUDOVARIÉTÉS

PAR MICHEL HILSUM

RÉSUMÉ. — Une relation en K-théorie bivariante entre l'opérateur de signature de J. Cheeger sur une pseudovariété admissible et celui sur l'espace total d'un fibré vectoriel réel orienté est établie grâce à un calcul de produit intersection de cycles non bornés. Ceci permet de montrer en corollaire l'égalité entre les classes caractéristiques à la Fulton et les $\mathscr{L}$-classes de Goresky-MacPherson pour un ensemble analytique complexe localement complète intersection.

ABSTRACT (*An unbounded intersection product in pseudomanifold K-homology*)
A cup-product in unbounded bivariant $K$-theory is computed relating the signature operator on an admissible pseudomanifold defined by J. Cheeger with the total space of an oriented vector bundle on it. As a result, equality between Fulton characteristic classes and Goresky-MacPherson $\mathscr{L}$-classes for an analytic set locale complete intersection is established.

*Texte reçu le 17 octobre 2011 et accepté le 1^er mars 2013.*

MICHEL HILSUM, UMR 7586 du CNRS, case 7012, bâtiment Sophie Germain, 5, rue Thomas Mann, 75205 Paris Cedex 13

Classification mathématique par sujets (2000). — 14C17, 19K35, 32C18, 32S60, 46L80, 46L85, 57R20, 58K65.

Mots clefs. — K-théorie bivariante, produit intersection, pseudovariété, classes caractéristiques, localement complète intersection.

## Introduction

La K-théorie bivariante de G. G. Kasparov peut se calculer à partir d'opérateurs non bornés et à résolvante compacte [18, 2]. Cette formulation est très utile pour calculer de éléments de K-théorie à partir d'opérateurs différentiels sur des variétés singulières ou non différentielles, et pour lesquelles il n'y a pas de calcul pseudodifférentiel. Le produit intersection externe s'exprime très simplement à partir de cycles non bornés [2].

Mais le calcul du produit intersection dans la forme la plus générale, fondamental dans la K-théorie bivariante, s'avère très compliqué en théorie non bornée. Il n'y a même pas de preuve directe de l'existence du produit intersection en non borné.

Cependant, D. Kucerovsky a dégagé des critères utiles permettant de caractériser ce produit intersection [19]. Mais, aucun exemple non trivial n'a à ce jour été calculé.

Dans ce travail, nous nous proposons d'expliciter un produit intersection de cycles non bornés, qui utilise les critères de [19] : soit $V$ une pseudovariété orientée, semi-linéaire sans bord et admissible au sens de J. Cheeger [6]. Par les travaux de J. Cheeger [6] et de H. Moscovici et F.B. Wu [21], il y a un opérateur de signature autoadjoint et à résolvante compacte sur la partie régulière de $V$ et qui détermine un élément $\Sigma_V$ du groupe de K-homologie analytique $K_0(V) := KK(C_0(V), \mathbb{C})$.

Soit $E \to V$ un fibré vectoriel réel orienté sur $V$ : alors l'espace total de $E$ est lui-même une pseudovariété orientée, admissible et donc admet aussi une classe $\Sigma_E \in K_0(C_0(E))$. Si $V$ est une variété, alors $\Sigma_E$ est le produit intersection de $p_\sigma \in KK(C_0(E), C_0(V))$ avec $\Sigma_V$, où $p_\sigma$ est donné par la famille des opérateurs de signature sur les fibres de $E$.

L'objet de ce travail est de montrer l'analogue de cette formule pour une pseudovariété admissible (théorème 4.4).

En conséquence de ce résultat, nous établissons une égalité entre deux définitions des $\mathscr{L}$-classes pour un sous-espace analytique complexe $V \subset W$ d'une variété complexe qui est une locale complète intersection.

Généralisant une construction de R. Thom, M. Goresky et R. Mac Pherson [11] ont montré l'existence des $\mathscr{L}$-classes dans l'homologie singulière rationnelle d'une pseudovariété stratifiée n'ayant pas de strates de codimension impaire. Cette construction est une conséquence de l'homologie d'intersection et reste valable pour un espace de Witt [25].

La deuxième définition est directement inspirée de celle de W. Fulton pour les classes de Chern et provient des $\mathscr{L}$-classes de F. Hirzebruch du fibré vectoriel $N$ normal à $V$ dans $W$ : la $\mathscr{L}$-classe $\mathscr{L}^F(V)$ est alors l'image de la $\mathscr{L}$-classe du fibré tangent virtuel par l'homomorphisme de Poincaré $H^*(V, \mathbb{Q}) \to H_*(V, \mathbb{Q})$ donné par la classe fondamentale $V$ dont l'existence a été montrée par A. Haefliger et F. Hirzebruch [3].

C'est l'égalité de ces $\mathscr{L}$-classes est établie dans le théorème 7.3.

La démonstration passe par l'identification respective de chacune de ces classes avec l'image par le caractère de Chern en K-homologie de $\Sigma_V$. L'égalité de $\operatorname{ch}\Sigma_V$ avec les $\mathscr{L}$-classes de [11] est établie par [6, 21].

Notons que l'image par le caractère de Chern en K-homologie de $\Sigma_V$ pourrait constituer une troisième définition de la $\mathscr{L}$-classe. Cette approche a l'avantage de ne pas requérir les conditions de transversalité.

L'égalité de $\operatorname{ch}\Sigma_V$ avec les classes *à la* Fulton utilise la déformation au cône normal de R. MacPherson [10] qui a été défini pour pallier l'absence en général de voisinage tubulaire de $V$ dans $W$. Cette déformation au cône normal comprend un cobordisme entre la fibre en 0 de la déformation (qui contient $N$) et $W$.

L'opérateur de signature sur $N$ est alors cobordant au sens de [16, 17] à la signature sur $W$. Notre formule de produit intersection conduit alors à retrouver l'opérateur de signature sur $V$ à partir de celui sur $N$, ce qui permet de conclure.

## 1. Pseudovariétés stratifiées

Dans toute la suite, une *pseudovariété* de dimension $n$ est un complexe simplicial localement fini $V$ qui vérifie les conditions de [26, page 150] : il est en particulier la réunion de ses $n$-simplexes et tout $(n-1)$-simplexe est face d'au plus deux $n$-simplexes. Le complémentaire $V^\infty \subset V$ du squelette de codimension deux du complexe est alors une variété semi-linéaire.

Le bord $\partial V$ de la pseudovariété est la réunion des $(n-1)$-simplexes qui sont la face d'un seul $n$-simplexe. La pseudovariété est donc sans bord si tout $(n-1)$-simplexe est la face d'exactement deux $n$-simplexes.

Une *pseudovariété stratifiée* de dimension $n$ se définit par récurrence sur la dimension : en dimension 0, c'est une famille discrète de points et pour $n \geq 0$, c'est une pseudovariété (au sens précédent) $V$ filtré par des sous-complexes :

$$\emptyset \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

avec $V_{n-1} = V_{n-2}$ et où $V_k - V_{k-1}$ est une variété différentielle (*i.e.*, $\mathrm{C}^\infty$) de dimension $k$, et tel que pour tout $x \in V_k - V_{k-1}$, il existe un voisinage $U$ de $x$ dans $V_k - V_{k-1}$ et un voisinage $\mathcal{O}$ de $x$ dans $V$, une pseudovariété stratifiée $L$ de dimension $n-k-1$ et un isomorphisme stratifié de $\mathcal{O}$ avec $U \times C(L)$ où $C(L) = L \times [0,1]/L \times \{0\}$ est le cône associé ; $L$ est appelé le *lien* de $x$. Précisons qu'une pseudovariété stratifiée est en particulier un ensemble stratifié au sens de [23], et qu'un isomorphisme stratifié est ici un homéomorphisme semi-linéaire qui envoie strate sur strate et de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur chaque strate. Enfin le cône

$C(L)$ est l'espace quotient $[0,1] \times L/\{0\} \times L$, le sommet du cône est le point $s$ image dans $C(L)$ du sous-espace $\{0\} \times L$ par la projection $[0,1] \times L \to C(L)$. C'est une pseudovariété stratifiée $C(L)$ pour la stratification produit sur le complémentaire du sommet $]0,1] \times L$ et avec une strate de dimension 0 réduit au sommet du cône. C'est un exemple non trivial de pseudovariété à bord.

Une variété algébrique projective ou un ensemble analytique est une pseudovariété stratifiée [11].

Notons qu'une pseudovariété stratifiée étant par hypothèse triangulée est munie d'une structure d'espace métrique complet, pour la distance simpliciale, ou pour la distance associée à une réalisation géométrique $j : V \to \mathbb{R}^N$ comme polyèdre. En particulier, la sous-algèbre $\mathbb{C}^l(V)$ de $C(V)$ des fonctions lipschitziennes sur V est bien déterminée. Nous noterons $C^\infty(V)$ l'algèbre des fonctions lipschitziennes et dont la restriction à chaque strate de $V$ est de classe $\mathrm{C}^\infty$. Notons que si $\varphi \in C^\infty(V)$ est à support dans la partie lisse $V^\infty$, alors $\varphi \in C_c^\infty(V^\infty)$ au sens usuel, et donc il n'y pas de conflit de notation. Naturellement, $C^\infty(V)$ est non vide, puisqu'il contient les fonctions constantes. Plus précisément le lemme suivant montre que $C^\infty(V)$ est dense dans $C(V)$, par le théorème de Stone-Weierstrass :

Lemme 1.1 (Partition de l'unité). — *Pour tout recouvrement ouvert localement fini de $V$, il existe une partition de l'unité affiliée au recouvrement et composée de fonctions dans $C^\infty(V)$.*

*Démonstration.* — Soit $x \in V^k$, et $\mathcal{U} = U \times C(L)$ un voisinage de $x$ comme décrit ci-avant. Il suffit de montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(V)$ telle $\varphi = 1$ au voisinage de $x$ et à support compact dans $\mathcal{U}$. Soit $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante de classe $\mathrm{C}^\infty$, telle que $\psi(0) = 1$ et $\psi(\pi/4) = 0$. La fonction $\tilde{\psi} = \psi \circ p$, où $p : C(L) \to [0,1]$ est la projection canonique, est alors stratifiée (c'est à dire semi-linéaire et dont la restriction à chaque strate est $C^\infty$). Le produit cartésien d'une fonction convenable sur $U$ par $\tilde{\psi}$ convient alors. □

Une pseudovariété stratifiée de dimension $n$ est dite orientée si le groupe d'homologie de Borel-Moore $H^n(V^\infty)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Par un résultat de A. Borel et A. Haefliger [4], toute variété complexe quasi-projective irréductible est une pseudovariété stratifiée orientée

## 2. Analyse sur les pseudovariétés admissibles

**2.1. Variétés riemanniennes. —** Soit $Z$ une variété de classe $\mathrm{C}^\infty$, orientée et $\Omega_c^\infty(Z)$ l'algèbre des formes différentielles de classe $\mathrm{C}^\infty$ à support compact dans $Z$, et $d_\mu^\infty$ l'opérateur de de Rham ou de dérivée extérieure agissant sur

$\omega_c^\infty(Z)$. A toute structure riemannienne $g$ de classe $C^\infty$ sur $Z$ est associé l'espace de Hilbert $\omega(Z)$ des formes différentielles de carré intégrable, complété de $\omega_c^\infty(Z)$ au moyen de $g$ ; il est canoniquement isomorphe à son dual par la forme bilinéaire non dégénérée :

$$\alpha, \beta \to \int_V \alpha \wedge \beta.$$

Soit $d_\mu$ la fermeture dans $\omega(Z)$ de $d_\mu^\infty$ et $d_m$ l'opérateur « maximal », c'est à dire le transposé de $d_\mu$ pour l'isomorphisme canonique de $\omega(Z)$ avec son dual pour l'orientation choisie. Le sous-espace $\operatorname{dom} d_m \cap C^\infty$ est un domaine essentiel pour $d_m$ [6].

Les opérateurs $\delta^\star = (-1)^{n+1}\tau d_\star \tau$, pour $\star = \mu, m$, et où $\tau$ est l'involution de Hodge, sont les adjoints dans $\omega(V)$ respectivement de $d_\dagger$ pour respectivement $\dagger = m, \mu$. Comme $d_m^2 = 0$, les opérateurs $d_\mu + \delta_m$ et $d_m + \delta_\mu$ sont autoadjoints, et à résolvante localement compacte : pour toute $\varphi \in C_c(Z)$, les opérateurs de $\omega(V)$ $\varphi(i + d_\mu + \delta_m)^{-1}$ et $\varphi(i + d_m + \delta_\mu)^{-1}$ sont compacts.

**2.2. Pseudovariétés admissibles. —** Soit $V$ est une pseudovariété stratifiée de dimension $n$ avec une structure riemannienne $g$ sur $V^\infty$ : par abus de langage et notation, nous dirons que $V$ est une *pseudovariété riemannienne* et $\omega(V)$ désignera encore l'espace de Hilbert des formes différentielles de carré intégrables sur la partie régulière $V^\infty \subset V$. Notons que $g$ induit une structure riemannienne sur toute pseudovariété stratifiée plongée, et en particulier sur le lien $L_x$ de tout $x \in V$. Les espaces de cohomologie $L^2$ sont définis par $H_2^*(V) = \ker d / \operatorname{im} d$ et sont les mêmes pour deux structures riemanniennes uniformément équivalentes.

DÉFINITION 2.1 (J. Cheeger). — *Une pseudovariété admissible est une pseudovariété riemannienne $V$ telle que la distance induite par $g$ soit équivalente à la distance simpliciale, et telle que pour tout $x \in V_{n-2k-1}$, le lien $L_x$ vérifie la condition cohomologique $H^k_{(2)}(L_x) = \{0\}$. La structure riemannienne sur $V$ est alors dite admissible.*

Notons que les espaces de cohomologie $L^2$ sont isomorphes à la cohomologie d'intersection médiane de $V$ [6].

Il résulte immédiatement de cette définition que le produit de deux pseudovariétés admissibles est encore admissible. En particulier $V \times [0,1]$ avec la structure riemannienne $g \oplus dt^2$ est admissible.

Une variété complexe quasi projective est admissible : en effet, il existe une stratification de Whitney par des variétés analytiques complexes et donc il n'y a pas de strate de codimension impaire.

**2.3. Pseudovariété riemannienne à bord. —** Une pseudovariété $Z$ de dimension $n$ est dite sans bord si toute $(n-1)$-face appartient exactement à deux $n$-simplexes, et est dite à bord si le sous-complexe $V = \partial Z$ des $(n-1)$-faces qui appartiennent à un unique $n$-simplexe est lui-même une pseudovariété, et si la réunion du complémentaire dans $Z - V$ du sous-complexe des $k$ faces pour $k \geq n-2$ et du complémentaire dans $V$ du sous-complexe des $k$ faces pour $k \geq n-3$ est une variété à bord de classe $C^\infty$.

Le bord est dit colleté s'il existe un voisinage $U$ de $V$ dans $Z$ et un isomorphisme stratifié de $U$ avec $V \times [0,1]$. Notons qu'en général $\tilde{Z} = Z \cup_V V \times [0,1]$ est une pseudovariété à bord colleté pour toute pseudovariété à bord $Z$.

**2.4. L'opérateur de signature (d'après J. Cheeger). —** Soit $V$ une pseudovariété riemannienne admissible sans bord. Le résultat important suivant est démontré dans [6] :

THÉORÈME 2.2. — *Les opérateurs $d_\mu$ et $d_m$ sont égaux et l'opérateur $D = d + (-1)^{n+1}\tau d\tau$ est autoadjoint et à résolvante localement compacte.*

Rappelons que la K-homologie analytique de $V$ peut-être décrite par des triplets $(\mathcal{E}, T, \gamma)$, où $\mathcal{E}$ est un espace Hilbert muni d'une représentation $C(V) \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$, $T$ est un opérateur autoadjoint à résolvante compacte sur $\mathcal{E}$ et $\gamma$ une involution unitaire qui anticommute à $T$, et tels qu'il existe une sous-algèbre involutive dense $\mathcal{A} \subset C(V)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{A}$, $f(\operatorname{dom} D) \subset \operatorname{dom} D$ et le commutateur $[D, f]$ est borné. Il est démontré dans [21] :

THÉORÈME 2.3 (H.Moscovici, F.B. Wu). — *Supposons que $V$ est de dimension paire. Le triplet $(\Omega(V,g), D, \tau)$ est un cycle non-borné et détermine une classe du groupe de K-homologie $K_0(V)$, où $D = d - \tau d\tau$. Si $V$ est de dimension impaire, alors $(\Omega^+(V,g), D)$ détermine une classe de $K_1(V)$, avec $\Omega^+(V,g)$ le sous-espace des formes différentielles de degré pair, et $D = d\tau + \tau d$. Cette classe est indépendant du choix de $g$ admissible.*

**2.5. $\mathcal{L}$-classes analytiques. —** Soit $V$ une pseudovariété admissible orientée et $\Sigma_V \in K_*(V)$ la classe de K-homologie donnée par le théorème 2.3. Rappelons que le caractère de Chern est un homomorphisme du groupe $K^*(V)$ vers l'homologie singulière rationnelle $H^*(V, \mathbb{Q})$, qui induit un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{Q}$, et que par dualité et la formule des coefficients universels, il induit un isomorphisme entre $K_*(V) \otimes \mathbb{Q}$ et $H_*(V, \mathbb{Q})$.

DÉFINITION 2.4. — *La $\mathcal{L}$-classe analytique de $V$ est la classe $\mathcal{L}(V) \in H_*(V, \mathbb{Q})$ image de $\Sigma_V \in K_0(V)$ par le caractère de Chern.*

Si $V$ est une variété orientée, cette classe analytique est l'image par la dualité de Poincaré des classes caractéristiques de F. Hirzebruch. Notons que $\mathcal{L}(V)$ est nulle en degré différent de $n-4k$, et selon l'usage nous notons $\mathcal{L}_k(V) \in H_{n-4k}(V)$ le composant de degré $n-4k$ de $\mathcal{L}(V)$. Dans le cas général (cf. section 8), cette $\mathcal{L}$-classe analytique est égale à la $\mathcal{L}$-classe de Goresky-MacPherson [11, 7].

## 3. Invariance de la classe d'indice par cobordisme

Ici nous montrons que la classe de K-homologie d'une pseudovariété riemannienne admissible est un invariant de cobordisme. C'est une conséquence du théorème principal de [17].

Soit $V$ une pseudovariété riemannienne admissible compacte, sans bord et $R$ une pseudovariété, dont le bord $\partial R$ est isomorphe à $V$, et telle que $R - V$, *i.e.*, l'intérieur de $R$ est une variété de classe $C^\infty$. Notons $R^\infty$ le sous-ensemble des points de $R$ au voisinage desquels $R$ est une variété avec ou sans bord, et $R^1 = R - R^\infty$. Fixons une triangulation de $R$ qui étend la triangulation de $V$ et soit $g$ une structure riemanienne sur $R^\infty$ simpliciale : la restriction de $g$ à $V$ est alors une structure riemannienne $g_b$ admissible.

PROPOSITION 3.1. — *Avec les notations précédentes, soit $K$ un espace topologique localement compact, $\mathcal{O} \subset R$ un ouvert $f : \mathcal{O} \to K$ une application continue propre, et $f_b$ la restriction de $f$ à $\partial\mathcal{O} = \mathcal{O} \cap V$. Si $R$ est compacte, il y a l'égalité $f_{b,*}(\Sigma_V) = 0$ dans $K^*(C_0(K))$.*

L'homomorphisme $f_{b,*}$ de $K_0(V)$ dans

$$K_*(K) = K^*(C_0(K)) = KK^*(C_0(K), \mathbb{C})$$

est le composé de $f_b^* : C_0(K) \to C_0(\mathcal{O}_b)$ bien défini car $f$ et $f_b$ sont propres, et de l'élément excisif $j_{b,*}$ de $KK(C_0(\mathcal{O}_b), C(V))$ où $j_b : \mathcal{O}_b \to V$ est l'inclusion canonique.

*Démonstration.* — Soit $\Omega(R)$ l'espace de Hilbert des formes différentielles dans l'intérieur de $R$ de carré intégrable pour la structure riemannienne $g$ et désignons par $d_{R,m}$ l'opérateur de Rham maximal sur $\Omega(R)$ et $d_{R,\mu}$ le minimal. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $V$ dans $R$ et une rétraction triangulée $r_1 : \mathcal{U} \to V$. Soit $\varphi_1 : \mathcal{U} \to [0,1]$, à support compacte , telle que $\varphi_1 = 1$ au voisinage de $V$. L'application $\omega \to \varphi_1 r_1^*(\omega)$ détermine une application continue de $\Omega(V) \to \Omega(R)$, et de $\operatorname{dom} d_V \to \operatorname{dom} d_{R,m}$ continue pour les normes du graphe. En effet, comme $r_1$ est lipschitzienne, alors $r_1^*(\omega)$ est bien défini si $\omega$ est à support compact dans $V^\infty$ et $d_{R,m}(\varphi_1 r_1^*(\omega)) = d_{R,m}\varphi_1 \wedge r_1^*(\omega) + \varphi_1 r_1^*(d_V\omega)$. Si $\omega \in \operatorname{dom} d_V$ est quelconque, alors comme $V$ est admissible, il existe une suite $\omega_k \in \Omega(V)$ à support compact dans $V^\infty$ et de classe $\mathrm{C}^\infty$ qui converge dans $\operatorname{dom} d_V$ vers $\omega$ pour la norme du graphe, d'où l'assertion puisque $d_{R,m}$ est fermé.

L'application $\omega \to \varphi_1 r_1^*(\omega)$ permet d'exprimer le domaine de $d_{R,m}$ comme somme du domaine de $d_{R,\mu}$ et du domaine de $d_V$.

Soit $\tilde{R} = R \cup_V (V \times [0,1])$ muni de la structure riemannienne $\tilde{g}$ qui est équivalente à $g$ sur $R$ et $g_b \oplus dt^2$ sur $V \times [0,1]$. Etendons $f$ sur $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup_{\mathcal{O}_b} (\mathcal{O}_b \times [0,1])$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{O}$ et $f(x,u) = f_b(x)$ si $x \in \mathcal{O}_b \times [0,+\infty[$.

Au moyen de l'application $\varphi_1 r_1^*$, les conditions du théorème principal de [17] peuvent être établies, d'où le résultat. $\square$

## 4. Fibrés vectoriels : un produit intersection

Soit $(V,g)$ une pseudovariété riemannienne admissible, compacte sans bord, et $p : E \to V$ un fibré vectoriel réel orienté sur $E$. Dans le cas où $V$ est une variété, les éléments de K-homologie de $V$ et de l'espace total de $E$ sont reliés par un produit intersection $p_\sigma \otimes_V \Sigma_V = \Sigma_E$, l'élément de $p_\sigma \in KK(C_0(E), C(V))$ provenant de la signature *fibrée*. C'est cette formule qui est généralisée dans la proposition ci-dessous.

Comme $C^\infty(V)$ est dense dans $C(V)$, tout fibré vectoriel est muni d'une structure sur $C^\infty(V)$, et il n'y a donc aucune restriction à supposer que $E$ est muni d'une telle structure. Par abus de notation, et lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, $E$ désigne encore l'espace total de $E$.

Soit $h$ une structure euclidienne sur $E$, dont les coefficients sont dans $C^\infty(V)$. Il existe alors un élement $p^\sigma \in KK(C_0(E), C_0(V))$ qui est décrit par le couple $(\mathcal{E}, \mathcal{D}, \tau)$ où $\mathcal{E}$ est le champ continu sur $V$ dont la fibre en $x \in V$ est donnée par $\mathcal{E}_x = \omega(p^{-1}(x), h_x)$ et $\mathcal{D}$ est le champ continu d'opérateurs dont la fibre en $x$ est l'opérateur de signature $\mathcal{D}_x$ sur $\mathcal{E}_x$. Un tel opérateur est régulier sur $\mathcal{E}$ par [15].

Soit $S_V$ l'opérateur de signature correspondant à la structure riemannienne simpliciale $g$ sur $V$. Si $E = V \times \mathbb{R}^N$ est trivial, l'espace tangent $TE^\infty$ est canoniquement isomorphe à $p^*(E^\infty) \oplus TV^\infty$ et à partir de $(g,h)$ nous avons une structure riemannienne sur $E^\infty = V^\infty \times \mathbb{R}^N$ somme directe $k_0 = g \oplus h$.

Lorsque $E$ n'est pas un fibré trivial (ou trivialisable) nous allons considérer les structures riemanniennes $k$ de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur la partie régulière de l'espace total de $E$ obtenue à partir d'un recouvrement localement fini $\mathcal{O}_j$ de $V$ par des ouverts de trivialisation de $E$ et par recollement au moyen d'une partition de l'unité dans $C^\infty(V)$ de structures « sommes directes » comme ci-dessus définies sur chaque $\mathcal{O}_j$. Une telle métrique est compatible avec $(g,h)$ au sens où sa restriction aux fibres de $E$ est égale à $h$, et son quotient par les vecteurs tangents verticaux est égale à $g$ en tout point.

A une telle structure correspond une distribution $M_\xi \subset T_\xi E^\infty$, $\xi \in E^\infty$ d'espaces supplémentaires aux vecteurs tangents verticaux, ou un relèvement de $TV^\infty$ dans le tangent de la partie régulière de l'espace total du fibré $E$. Notons que dans une trivialisation locale $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{R}^N$, où $U \subset V$ est un ouvert, $M_\xi$ est donné par un opérateur linéaire $a(x) : TV_x^\infty \to E_x$ avec $x = p(\xi) \in V^\infty$ ; comme $E_x \simeq \mathbb{R}^N$, $a$ est alors une forme différentielle à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, c'est à dire une famille finie $a_i$, $1 \le i \le N$ de formes différentielles sur $U \cap V^\infty$.

Avant de formuler le lemme qui suit, rappelons que la structure riemannienne $g$ sur $V^\infty$ détermine une structure euclidienne $\lambda_g$ sur le fibré vectoriel de $\Lambda(T^*V^\infty)$, et que, par définition, une forme différentielle est bornée pour $g$ si sa norme ponctuelle pour $\lambda(g)$ est une fonction bornée sur $V^\infty$.

Lemme 4.1. — *Avec les notations précédentes, $a_i$ et $da_i$ sont des formes différentielles $C^\infty$ et bornées dans $\mathcal{O}$ pour la structure riemannienne $g$.*

*Démonstration.* — En effet, soit $\mathcal{O}_i$ un recouvrement ouvert localement fini de $V$, trivialisant pour $E$ et $\varphi_i$ une partition de l'unité dans $C^\infty(V)$. Les trivialisations de $E$ sur $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_j$ sont reliés par des sections $\sigma_j : \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_j \to GL(\mathbb{R}^N)$, dont les coefficients sont dans $C^\infty(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_j)$ : donc il existe des fonctions $\beta_j, \gamma_j : \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_j \to \mathbb{R}^N$ dans $C^\infty(\mathcal{O} \cap \mathcal{O}_j)$, telles que $a = \sum_j \varphi_j d_V \gamma_j$, et donc $da = \sum_j d_V\varphi_j \wedge \beta_j \wedge d_V\gamma_j + \varphi_j \wedge d_V\beta_j \wedge d_V\gamma_j$, d'où l'énoncé. □

Il existe une et (donc plusieurs) structures riemannienne $k$ compatible avec $(g,h)$, et deux structures riemanniennes compatibles sont équivalentes. L'espace total de $E$ est admissible, puisque $V$ l'est et une structure riemannienne $k$ sur $E^\infty$, compatible avec $(h,g)$ est simpliciale et donc l'opérateur de signature donné par la construction de J. Cheeger est bien défini.

Une structure riemannienne $k$ sur l'espace total de $E$ compatible avec $(g,h)$ détermine un isomorphisme $\theta_k : \mathcal{E} \otimes_{C(V)} \Omega(V,g) \to \Omega(E,k)$ qui est implémenté par l'isomorphisme unitaire $\theta : E^\infty \oplus p^*(TV^\infty) \to TE^\infty$ donné par le relèvement $M_\xi$. Soit alors $D = \theta_{k,*}\mathcal{D} \otimes 1$ l'opérateur conjugué par $\theta_k$, et $S$ l'opérateur de signature sur l'espace total de $E$ associé à $k$. Soit $\mathcal{W}(S)$ (resp. $\mathcal{W}(D)$) l'espace de Hilbert (resp. le $C(V)$-module de Hilbert) obtenu en munissant $\operatorname{dom} S$ (resp. $\operatorname{dom} D$) de la norme du graphe égale à $\{\|\xi\|^2 + \|S\xi\|\}^{\frac12}$ pour $\xi \in \operatorname{dom} S$ (resp $\xi \in \operatorname{dom} D$) .

Lemme 4.2. — *Avec les notations précédentes, l'inclusion suivante est vraie :* $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} D$. *Par suite l'inclusion $\mathcal{W}(S) \to \mathcal{W}(D)$ est continue.*

*Démonstration.* — Il est suffisant de supposer que le fibré $E$ est le fibré trivial de dimension $N$, et alors $d_E = d_N \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} d_V$ (où $d_N$ est la dérivée extérieure sur $\mathbb{R}^N$). Soit $k_0 = g \oplus h$ la somme directe des structures riemanniennes correspondant à la trivialisation canonique $TE^\infty = p^*(E^\infty \oplus TV^\infty)$, et $S_0, D_0$

les opérateurs de signature correspondant sur $\Omega(E, k_0)$. Soit $\tau$ (resp. $\tau_0$) l'involution de Hodge correspondant à la structure riemannienne $k$ (resp. $k_0$), et $\gamma = (\gamma_x)_{x\in V}$ le champ d'opérateurs de Hodge sur les fibres de $E$ pour $h$. Il y a l'égalité :

$$\tau(\operatorname{dom} d_N \otimes \Omega(V)) = (\gamma \operatorname{dom} d_N) \otimes \Omega(V) = \gamma \otimes 1(\operatorname{dom}(d_N \otimes 1)).$$

L'égalité $d_E = d_N \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} d_V$ montre l'inclusion $\operatorname{dom} d_E \subset \operatorname{dom} d_N \otimes \Omega(V) = \operatorname{dom} d_N \otimes 1$. Soit $\theta : \Omega(V, k_0) \to \Omega(V, k)$ le composé des isomorphismes :

$$\Omega(V, k_0) \to \mathscr{E} \otimes_{C(V)} \Omega(V, g) \leftarrow \Omega(V, k).$$

Le calcul symbolique montre, par le lemme précédent, qu'il existe des opérateurs $l_0, b_0$ bornés sur $\Omega(E, k_0)$ tels que $\theta^{-1} d_E \theta = d_E + l_0 \circ d_N + b_0$, et donc $\theta^{-1}(\operatorname{dom} d_E) = \operatorname{dom}(\theta^{-1} d_E \theta) \subset \operatorname{dom}(d_N \otimes 1)$.

Comme $\theta^{-1} \tau \theta = \tau_0$, $\theta^{-1} \tau \operatorname{dom} d_E = \tau_0 \theta^{-1}(\operatorname{dom} d_E) \subset \tau_0 \operatorname{dom} d_N \otimes 1$, et comme $\tau_0 \operatorname{dom} d_N \otimes 1 = \gamma \otimes 1 \operatorname{dom}(d_N \otimes 1)$, il y a $\theta^{-1} \operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom} D_0$, et donc $\operatorname{dom} S \subset \theta \operatorname{dom} D_0 = \operatorname{dom} D$ car $D_0 = \theta^*(D)$.

La continuité de l'inclusion $\mathscr{W}(S) \to \mathscr{W}(D)$ résulte alors du théorème du graphe fermé. □

LEMME 4.3. — *Il existe $\kappa \geq 0$ tel que pour tout $\xi \in \operatorname{dom} S$, l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$<D\xi, S\xi> + <S\xi, D\xi> + \kappa \|\xi\|^2 \geq 0.$$

*Démonstration.* — L'opérateur $R = SD + DS$ est bien défini sur $\Omega_c^\infty(E^\infty)$, c'est à dire sur l'espace des formes différentielles de classe $C^\infty$ sur la partie régulière de l'espace total de $E$.

C'est une famille $R_x$ d'opérateurs différentiels sur les fibres de $E^\infty$, paramétrée par $x \in V^\infty$. Plus précisément, $R_x = D_x^2 + L_x$ ou $L_x$ est pour $x \in V^\infty$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur $E_x$, dont les coefficients sont bornés sur $V^\infty$. Soit $r_x(y, \xi) = \|y\|_x^2 + \cdots$, $(y, \xi) \in T_x^E$ le symbole de $R_x$ : c'est un polynôme matriciel de degré 2 et il existe $c \geq 0$ tel que $r_x(y, \xi) + c \geq 0$ pour tout $(y, \xi)$. Par l'inégalité affinée de Gärding pour les systèmes, (Hörmander, Fefferman-Phong [9], Parmeggiani [22, Theorem 2], il existe $\kappa \geq 0$ tel que : $<D_x\eta, D_x\eta>_x + <L_x\eta, \eta>_x \|\eta\|_x^2 \geq -\kappa \|\eta\|_x^2$ pour $\eta \in \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (la norme est prise pour $h_x$). La valeur de $\kappa$ ne dépend que du sup des coefficients de $L_x$, et comme ceux-ci sont bornés uniformément sur $V^\infty$, on peut donc choisir $\kappa$ tel que cette inégalité reste valide pour tout $x$. En intégrant sur $V^\infty$, il vient l'inégalité, pour $\xi \in \Omega_c^\infty(V^\infty \times \mathbb{R}^N)$ pour la norme associée à $k$ :

$$<DS\xi, \xi> + <SD\xi, \xi> + \kappa \|\xi\|^2 \geq 0.$$

Soit $\bar{R}$ la fermeture de $R$ sur $\Omega_c^\infty(E^\infty)$ et dans $\Omega(E, k)$. C'est un opérateur autoadjoint, et son domaine contient en particulier $\operatorname{dom} S_V \otimes \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour

$\xi \in \operatorname{dom} S_V \otimes \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $<DS\xi,\xi> + <SD\xi,\xi> = <D\xi,S\xi> + <S\xi,D\xi>$ est vraie, et donc l'inégalité précédente se réécrit pour un tel $\xi$ :

$$<S\xi,D\xi> + <D\xi,S\xi> + \kappa\|\xi\|^2 \geq 0.$$

Mais $\operatorname{dom} S_V \otimes \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est un domaine essentiel pour $S$, et donc, par le lemme précédent, cette inégalité demeure vraie pour $\xi \in \operatorname{dom} S$. □

THÉORÈME 4.4. — *La classe fondamentale de l'espace total de $E$ est égale au produit intersection de $p^\sigma$ avec la classe fondamentale de $V$ ; en d'autre termes, on a la relation :*

$$[D_E] = p^\sigma \otimes_V [D_V].$$

*Démonstration.* — Soit $k$ une métrique riemannienne admissible compatible avec $(g,h)$. Il s'agit de démontrer que le cycle non borné $(\Omega(E,k),S,\tau)$ est un produit de Kasparov de $(\mathcal{E},D,\tau_E)$ par $(\Omega(V,k),S_V,\tau_V)$.

Nous utilisons alors la caractérisation du produit intersection de Kasparov en non borné explicitée par le théorème 13 de l'article de D. Kucerovsky [19, Theorem 13]. Les deux lemmes qui précèdent montrent que les conditions (i) et (iii) énoncées dans [19, Theorem 13] sont satisfaites ici. Par ailleurs, pour $\xi \in \Omega_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, l'opérateur $ST_\xi + S_VT_\xi$ (resp. $S_V^*T_\xi + S^*T_\xi$) est défini et borné sur $\operatorname{dom} S_V$ (resp. $\Omega_c^\infty(\mathbb{R}^N) \otimes \operatorname{dom} S_V$) ce qui montre la condition (ii) de [19, Theorem 13].

D'où le résultat. □

## 5. Classes de Chern et $L$-classes d'un fibré vectoriel

Rappelons que si $E$ est un fibré vectoriel complexe sur le complexe cellulaire $W$, il existe des classes de Chern $c^k(E) \in H^{2k}(W,\mathbb{Z})$. Si $E$ est seulement supposé réel, les classes de Pontryagin $p^k(E) \in H^{4k}(W,\mathbb{Z})$, sont données par $p^k(E) = c_{2k}(E \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C})$, c'est à dire que la $k$-ième classe de Pontryagin du fibré réel $E$ est par définition la $2k$-ième classe de Chern du fibré complexifié de $E$. Par définition, les classes de Chern d'une variété analytique complexe sont celles de son fibré vectoriel complexe tangent, et les classes de Pontryagin d'un variété différentielle sont celles de son fibré tangent [20].

Notons que si $E$ est complexe, alors les classes de Pontryagin de $E_\mathbb{R}$ ($E$ vu comme fibré réel) sont alors déterminées par l'équation [20, Corollary 15.5] :

$$\sum_k (-1)^k p^k(E_\mathbb{R}) = \sum_p c^p(E) \sum_p (-1)^p c^p(E). \tag{1}$$

Les $\mathcal{L}$-classes ont été introduites par F. Hirzebruch et sont des polynômes universels en les classes de Pontryagin. Les $\mathcal{L}$-classes d'une variété différentielle sont celles de son fibré vectoriel tangent et donc les $\mathcal{L}$-classes d'une variété analytique complexe sont des polynômes universels en les classes de Chern de la variété.

Le théorème d'indice d'Atiyah-Singer énonce que, si $V$ est une variété différentielle orientée compacte et sans bord, la classe d'homologie singulière rationnelle de $V$, image par le caractère de Chern de la classe de K-homologie de l'opérateur de signature sur $V$ est précisément égal à l'image par la dualité de Poincaré de la $\mathcal{L}$-classe totale de $V$.

La $\mathcal{L}$-classe d'un fibré vectoriel réel orienté apparait lorsque les isomorphismes de Thom en cohomologie et en K-théorie sont comparés. Notons $\Phi_H : H^*(V, \mathbb{Q}) \to H^*(N, \mathbb{Q})$ l'isomorphisme de Thom en cohomologie, et $\Phi_K : K_*(C_0(V)) \to K_*(C_0(N))$ l'isomorphisme de Thom en K-théorie pour les fibrés réels orientés. L'énoncé suivant est classique :

Proposition 5.1. — *Soit $Z$ un espace localement compact, et $E \to V$ un fibré vectoriel réel orienté. Alors pour tout $\alpha \in K^*(Z)$, on a $\mathrm{ch}\, \Phi_K(\alpha \cup \mathcal{L}(E)) = \Phi_H(\mathrm{ch}\, \alpha)$.*

La classe $\mathcal{L}(E)$ est toujours inversible dans l'anneau de cohomologie $H^*(V, \mathbb{Q})$, car $\mathcal{L}^0 = 2^n \neq 0$ dans $H^0(V, \mathbb{Q})$.

## 6. Classes de Fulton d'un locale intersection complète

Soit $W$ une variété analytique complexe de dimension complexe $n_W$ et $V \subset W$ un sous-espace analytique complexe réduit de dimension $n_V$. La sous-variété est une locale complète intersection [10] s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $V$, un fibré vectoriel complexe $\tilde{\mathbf{N}}$ de dimension $n$ sur $\mathcal{U}$ et une section $s : \mathcal{U} \to \tilde{\mathbf{N}}$ holomorphe telle que $V$ soit exactement égale à l'ensemble des points de $\mathcal{U}$ où $s$ s'annule.

Notons $p : \mathbf{N} \to V$ la restriction de $\tilde{\mathbf{N}}$ à $V$. La déformation au cône normal est la variété $M$ obtenue par éclatement de $\mathbb{C} \times W$ le long de $\{0\} \times V$. Il y a un morphisme analytique $q : M \to \mathbb{C} \times W$, qui est un isomorphisme en dehors de $q^{-1}(\{0\} \times V)$. Un ouvert de $q^{-1}(\{0\} \times W)$ est isomorphe à l'espace total de $\mathbf{N} \to V$, et en particulier $\mathbb{C} \times V$ est analytiquement plongé dans $M$.

Les classes de Chern du fibré $\mathbf{N}$ sont alors bien définies dans l'anneau de cohomologie de $V$, et la classe totale de Chern de $\mathbf{N}$ vérifie l'équation $c^*(\mathbf{N})^{-1} \cap [V] = s_*(V)$, où $s_*(V)$ désigne la classe de Segre de $N$ [12]. La $\mathcal{L}$-classe $\mathcal{L}(\mathbf{N})$, polynôme universel en ces classes de Chern est alors bien définie aussi. Soit $j : V \to W$ l'inclusion cantonique.

Définition 6.1. — *La $\mathcal{L}$-classe de Fulton est définie par la formule $\mathcal{L}^F(V) = j^*(\mathcal{L}(W)) \cup \mathcal{L}^{-1}(N) \cap [V]$.*

C'est la $\mathcal{L}$-classe du fibré tangent virtuel à $V$. Dans ce qui suit, nous comparons $\mathcal{L}_F^*(V)$ avec les classes analytiques.

**6.1. Le cobordisme associé à la déformation au cône normal. —** Avec les notations précédentes, munissons $N$ d'une structure hermitienne $h$, soit $B(N)$ son fibré en boules ouvertes de rayon 1. Soit $R = q^{-1}([0,1])$, et $\tilde{W} = q^{-1}(\{0\} \times W)$. C'est un exemple de cobordisme décrit à la section 3 : $R$ est une pseudovariété à bord égal à la pseudovariété admissible orientée $(-W) \cup \tilde{W}$, et dont l'intérieur égal à $]0,1[\times W$ est une variété analytique réelle.

## 7. Une formule cohomologique

Avec les notations de la section précédente, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O} \subset R$ de $V \times [0,1]$ et une rétraction propre $Q : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_0$, où $\mathcal{O}_t = \mathcal{O} \cap (W \times \{t\})$ si $t \in ]0,1]$ et $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O} \cap \tilde{W}$. Quitte à restreindre $\mathcal{O}$, nous pouvons supposer en plus que $\mathcal{O}_0 \subset B(N)$ et que si $Q_t$ est la restriction de $Q$ à $\mathcal{O}_t$, alors $r = p \circ Q_1 : \mathcal{O}_1 \to V$ est une rétraction par déformation (et donc en particulier $j \circ r$ est homotope à l'identité).

En effet, l'espace analytique $\tilde{W}$ étant un espace « rétracte absolu de voisinage » [14], il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $(V \times [0,1]) \cup \tilde{W} \subset M$ et une application continue $Q : \mathcal{O} \to \mathcal{O}_0$ dont la restriction à $(V \times [0,1]) \cup \mathcal{O}_0$ est la projection naturelle sur $\mathcal{O}_0$. Soit $j_t : V \times \{0\} \to W \times \{t\}$ l'inclusion canonique et soit $r_t : \mathcal{O}_t \to V$ donné par $r_t = j_t \circ p \circ R_t$. Comme $r_t$ est une rétraction, après éventuellement modification de $\mathcal{U}_t$, c'est donc une équivalence d'homotopie.

Dans l'énoncé qui suit, l'homologie de Borel-Moore est considérée et ce sont les classes fondamentales dans cette homologie dont il est question. Soit $\Sigma_W \in K_0(W)$ (resp. $\Sigma_N \in K_0(N)$) l'opérateur de signature sur $W$ (resp. l'espace total de $N$), et soit $\kappa_t : \mathcal{O}_t \to (W \times \{t\})$ pour $t \in [0,1]$ les inclusions canoniques, ce qui détermine des éléments $\kappa_{t,*} \in KK(\mathcal{U}_t, W)$ (excision).

L'énoncé suivant a bien un sens car $Q_1$ est une application propre.

Lemme 7.1. — *L'égalité suivante est vraie dans $K_0(\mathcal{O}_0)$ :*

$$Q_1^* \otimes_{\mathcal{O}_1} \kappa_{1,*} \otimes_W \Sigma_W = \kappa_{0,*} \otimes_N \Sigma_N.$$

*Démonstration.* — Le résultat d'invariance par cobordisme de la proposition 3.1, avec $\mathcal{O} = \mathcal{U}$ et $K = \mathcal{U}_0$ montre l'égalité $Q_1^* \otimes_{\mathcal{O}_1} \kappa_{1,*} \otimes_W \Sigma_W = \kappa_{0,*} \otimes_{\tilde{W}} \Sigma_{\tilde{W}}$. Mais comme $\mathcal{O}_0 \subset B_N$, $\kappa_{0,*} \otimes_{\tilde{W}} \Sigma_{\tilde{W}} = \kappa_{0,*} \otimes_N \Sigma_N$. □

Lemme 7.2. — *Soit $\alpha \in H_c^*(\mathcal{O}_0, \mathbb{R})$ une classe de cohomologie à support compact, $[\mathcal{O}_t]$ la classe fondamentale de l'homologie de Borel-Moore de $\mathcal{O}_t$, pour $t \in [0,1]$. Alors :*

$$<\alpha, [\mathcal{O}_0]> = <R_1^*\alpha, [\mathcal{O}_1]>$$

*Démonstration.* — Par excision, $<\alpha, [\mathcal{O}_0]> = <\alpha, [\tilde{W}]>$ et $<R_1^*\alpha, [\mathcal{O}_1]> = <R_1^*\alpha, [W]>$ et cela résulte encore de l'invariance par cobordisme, mais cette fois en homologie. □

Nous pouvons énoncer une égalité principale :

THÉORÈME 7.3. — *Soit $W$ une variété analytique complexe compacte et $j : V \hookrightarrow W$ un sous-espace analytique complexe, locale intersection complète, $N$ le fibré vectoriel normal et $\mathcal{L}^F(V)$ la classe caractéristique de W. Fulton (définition 6.1). La classe fondamentale en K-homologie $\Sigma_V$ vérifie alors :*

$$\mathrm{ch}\,\Sigma_V = \mathcal{L}^F(V).$$

*Démonstration.* — Rappelons que $\Phi_H : H^*(V, \mathbb{Q}) \to H^*(B_N, \mathbb{Q})$ est l'isomorphisme de Thom en cohomologie, et $\Phi_K \in KK(C_0(V), C_0(N)) \otimes Q$ l'isomorphisme de Thom en K-théorie bivariante pour les fibrés réels orientés.

Soit $\xi \in K^0(V)$, et $\Sigma_V \in K_*(V)$ la classe fondamentale donnée par l'opérateur de signature ; il faut montrer l'égalité :

$$<\xi, [D_V]> = <\mathrm{ch}(\xi) \cup \mathcal{L}^{-1}(N) \cup j^*\mathcal{L}^*(W), [V]>.$$

Soit $\Sigma_N$ l'opérateur de signature sur l'espace total du fibré $N$. Par le théorème 4.4, il y a l'égalité $<\xi, \Sigma_V> = <\Phi_K(\xi), \Sigma_N>$. Le théorème d'invariance par cobordisme et le lemme précédent montrent alors l'égalité :

$$<\Phi_K(\xi), \Sigma_N> = <\Phi_K(\xi)), R_{1,*}\Sigma_W>$$

Par le lemme précédent et la proposition 5.1, comme $j \circ r$ est homotope à l'identité de $\mathcal{U}_1$ et que $r = p \circ R_1$ :

$$\begin{aligned} <R_1^*(\Phi_K(\xi)), \Sigma_W> &= <R_1^*(\mathrm{ch}\,\Phi_K(\xi)) \cup r^* \circ j^*(\mathcal{L}^*(W)), [\mathcal{O}_0]> \\ &= <\mathrm{ch}\,\Phi_K(\xi) \cup p^* \circ j^*(\mathcal{L}^*(W)), [N]> \\ &= <\Phi_H(\mathrm{ch}\,\xi) \cup \mathcal{L}^{-1}(N) \cup p^* \circ j^*(\mathcal{L}^*(W)), [N]> \\ &= <\mathrm{ch}\,\xi \cup \mathcal{L}^{-1}(N) \cup j^*\mathcal{L}^*(W), [V]> \end{aligned}$$ □

## 8. $\mathcal{L}$-classes de Goresky-Mac Pherson

Si $V$ est une pseudovariété stratifiée de dimension paire n'admettant que des strates de codimension paire, M. Goresky et R. MacPherson [11] ont montré l'existence de $\mathcal{L}$-classes en homologie singulière rationnelle, en utilisant l'homologie d'intersection et par une méthode qui généralise celle de Thom pour les $\mathcal{L}$-classes des variétés semi-linéaire. Cette méthode reste valable pour les espaces de Witt [25].

Les espaces de Witt sont des pseudovariétés admissibles [8], et donc par les résultats de Cheeger, Moscovici et Wu, les classes de Goresky-MacPherson et l'opérateur de signature de Cheeger, et donc les classes analytiques sont reliés par :

$$\mathrm{ch}\,\Sigma_V = \mathscr{L}_*^{\mathrm{GM}}(V). \tag{2}$$

Toutefois la définition de ces $\mathscr{L}$-classes requiert la transversalité. Notons que les classes analytiques ne nécessitent aucune propriété de transversalité.

Il résulte alors de ce qui précède :

Théorème 8.1. — *Soit $V$ une sous-variété analytique, locale intersection complète, de la variété complexe compacte $W$. Alors l'égalité suivante est vraie*

$$\mathscr{L}_*^F(V) = \mathscr{L}_*^{\mathrm{GM}}(V).$$

*Démonstration.* — D'un côté, $\mathscr{L}_F^*(V) = \mathscr{L}^{-1}(N) \cup j^* \mathscr{L}^*(W) \cap [V] = \mathrm{ch}\,\Sigma_V$, et d'un autre côté, $\mathscr{L}_*^{\mathrm{GM}}(V) = \mathrm{ch}\,\Sigma_V$. □

## BIBLIOGRAPHIE


[1] P. Alexandrov – *Introduction à la théorie homologique de la dimension et la topologie combinatoire*, Éditions Mir, 1977, Traduit du russe par A. Sosinski.

[2] S. Baaj & P. Julg – « Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les $c^*$-modules hilbertiens », *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I* **296** (1983), p. 875–878.

[3] A. Borel et al. – *Intersection cohomology*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser, 2008.

[4] A. Borel & A. Haefliger – « La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique », *Bull. Soc. Math. France* **89** (1961), p. 461–513.

[5] J.-P. Brasselet – « From Chern classes to Milnor classes—a history of characteristic classes for singular varieties », in *Singularities—Sapporo 1998*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 29, Kinokuniya, 2000, p. 31–52.

[6] J. Cheeger – « On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds », in *Geometry of the Laplace operator*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXXVI, A.M.S., Providence RI, 1980, p. 133–139.

[7] ———, « Spectral geometry of singular Riemannian spaces », *J. Differential Geom.* **18** (1983), p. 575–657 (1984).

[8] J. Cheeger, M. Goresky & R. MacPherson – « $L^2$-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties », in *Seminar on Differential Geometry*, Ann. of Math. Stud., vol. 102, Princeton Univ. Press, 1982, p. 303–340.

[9] C. Fefferman & D. Phong – « On positivity of pseudo-differential operators », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **75** (1978), p. 4673–4674.

[10] W. Fulton – *Intersection theory*, 2e éd., Ergebn. Math. Grenzg., Springer, 1998.

[11] M. Goresky & R. MacPherson – « Intersection homology theory », *Topology* **19** (1980), p. 135–162.

[12] A. Grothendieck – « La théorie des classes de Chern », *Bull. Soc. Math. France* **86** (1958), p. 137–154.

[13] A. Haefliger – « Introduction to piecewise linear intersection homology », in *Intersection cohomology (Bern, 1983)*, Progr. Math., vol. 50, Birkhäuser, 1984, p. 1–21.

[14] O. Hanner – « Some theorems on absolute neighborhood retracts », *Ark. Mat.* **1** (1951), p. 389–408.

[15] M. Hilsum – « Fonctorialité en K-théorie bivariante pour les variétés lipschitziennes », *K-theory* **3** (1989), p. 401–440.

[16] ———, « Hilbert modules of foliated manifolds with boundary », in *Foliations : geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*, World Sci. Publishing, 2002, p. 315–332.

[17] ———, « Bordism invariance in $KK$-theory », *Math. Scand.* **107** (2010), p. 73–89.

[18] G. G. Kasparov – « The operator K-functor and extensions of C*-algebras », *Math. U.S.S.R. Izv.* **16** (1981), p. 513–572.

[19] D. Kucerovsky – « The $KK$-product of unbounded modules », *K-Theory* **11** (1997), p. 17–34.

[20] J. Milnor & J. Stasheff – *Lectures on characteristic classes*, Ann. of Math. Studies, vol. 45, Princeton Univ. Press, 1985.

[21] H. Moscovici & F. Wu – « Straight Chern character for Witt spaces », in *Cyclic cohomology and noncommutative geometry (Waterloo, ON, 1995)*, Fields Inst. Commun., vol. 17, Amer. Math. Soc., 1997, p. 103–113.

[22] A. Parmeggiani – « On positivity of certain systems of partial differential equations », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **104** (2007), p. 723–726 (English).

[23] M. J. Pflaum – *Analytic and geometric study of stratified spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 1768, Springer, 2001.

[24] C. P. Rourke & B. J. Sanderson – *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer Study Edition, Springer, 1982.

[25] P. H. Siegel – « Witt spaces : a geometric cycle theory for $K$O-homology at odd primes », *Amer. J. Math.* **105** (1983), p. 1067–1105.

[26] E. H. Spanier – *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., 1966.

[27] A. Verona – *Stratified mappings - structure and triangulability*, Lecture Notes in Math., vol. 1102, Springer, 1984.