

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA

Pascal Boyer

Tome 142

Fascicule 4

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 777-814

FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES

PAR PASCAL BOYER

RÉSUMÉ. — Nous définissons et étudions de nouvelles filtrations dites de stratification d'un faisceau pervers sur un schéma; contrairement au cas de la filtration par les poids, ou de monodromie, ces filtrations sont valables quel que soit l'anneau Λ de coefficients. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, nous illustrons ces constructions dans le contexte des variétés de Shimura unitaires simples de [7] pour les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents introduits et étudiés dans [2]. Nous montrons aussi comment utiliser ces filtrations afin de simplifier l'étape principale de [2]. Les cas de $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ et $\overline{\mathbb{F}}_l$ seront étudiés dans un prochain article.

ABSTRACT (*Filtration of stratification of some simple Shimura varieties*)

We define and study new filtrations called of stratification of a perverse sheaf on a scheme; beside the cases of the weight or monodromy filtrations, these filtrations are available whatever are the ring of coefficients. For $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, we illustrate these constructions in the geometric situation of the simple unitary Shimura varieties of [7] for the perverse sheaves of Harris-Taylor and the complex of vanishing cycles introduced and studied in [2]. We also show how to use these filtrations to simplify the principal step of [2]. The cases of $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ and $\overline{\mathbb{F}}_l$ will be studied in another paper.

Texte reçu le 3 septembre 2012, révisé le 18 février 2014, accepté le 5 mai 2014.

PASCAL BOYER, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France) • *E-mail* : boyer@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 11G10, 11G18, 18E40, 18A20.

Mots clefs. — Faisceaux pervers, catégorie quasi-abélienne, filtration de stratification, théories de torsion, variétés de Shimura, cycles évanescents, systèmes locaux d'Harris-Taylor.

Introduction

Pour $l \neq p$ deux nombres premiers distincts, dans [2] nous avons explicité le faisceau pervers des cycles évanescents à coefficients dans \mathbb{Q}_l , d'une certaine classe de variétés de Shimura unitaires X qualifiée de « simple » dans [7], en une place de caractéristique résiduelle p . Rappelons que cette description ne repose pas sur une étude géométrique de ces variétés qui consisterait à se ramener à une situation semi-stable ; pour l'essentiel les arguments se ramènent à de la combinatoire sur les représentations admissibles des groupes linéaires sur un corps local et automorphes d'un groupe symplectique sur un corps de nombres. Au cœur de ces arguments, on trouve la formule des traces de Selberg qui calcule la somme alternée des groupes de cohomologie de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor, introduits dans [7], et définis sur certaines strates de la fibre spéciale de ces variétés de Shimura. L'apport principal de [2] est l'étude des prolongements de ces systèmes locaux à toute la fibre spéciale. Pour l'essentiel la preuve consiste

- à décrire, dans un certain groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke, les images des extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor puis d'en déduire celle du faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{J}}$ des cycles évanescents.
- Ensuite on étudie la suite spectrale associée à la filtration par les poids de $\Psi_{\mathcal{J}}$, calculant ses faisceaux de cohomologie.

Un fait remarquable est que, pour des raisons combinatoires, cette suite spectrale dégénère nécessairement en E_2 et l'étape la plus complexe consiste à montrer que, lorsque ce n'est pas trivialement faux, les $d_1^{p,q}$ sont non nulles. Pour ce faire, on utilise

- soit, cf. [2], une propriété d'autodualité à la Zelevinsky sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate qui passe par un théorème difficile de comparaison avec l'espace de Drinfeld dû à Faltings et développé par Fargues dans [6] ;
- soit, cf. [3], des arguments combinatoires complexes reposant sur le théorème de Lefschetz difficile, à propos la cohomologie de la variété de Shimura.

Une autre façon de voir ces calculs est de considérer la filtration par les noyaux itérés de la monodromie auquel cas la suite spectrale associée, calculant les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{J}}$, dégénère en E_1 . Cette observation nous suggère une stratégie pour montrer que ces $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{J}}$ sont sans torsion : il suffirait

- de construire une filtration entière de $\Psi_{\mathcal{J}}$ qui coïnciderait sur $\overline{\mathbb{Q}_l}$ avec celle par les noyaux itérés de la monodromie puis

- de montrer que les faisceaux de cohomologie de ces gradués sont sans torsion.

Le point de départ de ce travail est donc de construire une telle filtration entière, l'étude de la torsion des $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{J}}$ étant repoussée à un prochain article.

L'idée la plus naturelle pour qu'une telle filtration existe quels que soient les coefficients, est de lui trouver une nature géométrique et donc d'utiliser des stratifications de l'espace. Ainsi pour un faisceau pervers P sur un schéma muni d'une stratification quelconque, on le filtre au moyen des morphismes d'adjonction $j_! j^* P \rightarrow P$ et $P \rightarrow j_* j^* P$, cf. le §2. Pour $\Lambda = \mathbb{Z}_l$, on travaille dans la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres », cf. le §1.3 au sens où étant donné un faisceau pervers « libre », on lui associe une filtration dont les gradués sont « libres ». Pour ce faire on est amené à prendre les coimages, et non les images, des morphismes d'adjonction. Nous verrons dans un prochain papier que ce phénomène qu'il est naturel de nommer « saturation », est directement lié à la torsion. On étudie, §2.3, plus particulièrement deux de ces constructions, la première dite filtration exhaustive de stratification et la deuxième qui lui est duale, la cofiltration exhaustive de stratification.

Au §3, on explicite ces constructions pour les extensions par zéro des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -systèmes locaux d'Harris-Taylor, §3.3, puis §3.4 pour le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau pervers des cycles évanescents $\Psi_{\mathcal{J}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$. En particulier on vérifie que la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \overline{\mathbb{Q}}_l}$ est égale à celle par les noyaux de la monodromie, alors que la cofiltration coïncide à celle par les images.

Rappelons que l'un des intérêts de cet article est de fournir l'ingrédient théorique pour contrôler la torsion des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{J}}$. Nous montrerons dans un prochain travail que cette torsion est toujours nulle ce qui, par le théorème de Berkovich couplé à l'analogue du théorème de Serre-Tate, montre que la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. [2], est sans torsion et non divisible. Afin d'illustrer les techniques qui seront développées dans ce prochain papier, nous montrons en appendice, comment d'une part obtenir la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}}$ à partir seulement des arguments de somme alternée de [2], puis comment en déduire les $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{J}}$.

La lisibilité du texte doit beaucoup à la relecture précise et aux suggestions de J.-F. Dat qui, en particulier, m'a incité à utiliser le langage des catégories quasi-abéliennes ; je l'en remercie vivement. Merci enfin à D. Juteau pour m'avoir expliqué son travail sur les faisceaux pervers à coefficients entiers.

1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion

Dans tout le texte, \mathbb{K} désignera une extension finie de \mathbb{Q}_l ou $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau des entiers \mathbb{O} et de corps résiduel $\mathbb{F} = \mathbb{O}/(\varpi)$. La lettre Λ désignera une des trois lettres \mathbb{K}, \mathbb{O} ou \mathbb{F} .

1.1. Théories de torsion. — Une théorie de torsion, cf.[10, définition 2.7], sur une catégorie abélienne \mathcal{A} est un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de sous-catégories pleines tel que :

- pour tout objet T dans \mathcal{T} et L dans \mathcal{F} , on a $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(T, L) = 0$;
- pour tout objet A de \mathcal{A} , il existe des objets $A_{\mathcal{T}}$ et $A_{\mathcal{F}}$ de respectivement \mathcal{T} et \mathcal{F} , ainsi qu'une suite exacte courte $0 \rightarrow A_{\mathcal{T}} \rightarrow A \rightarrow A_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$.

Remarque. — \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est stable par quotients et extensions (resp. sous-objets et extensions). On dira de $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ est une théorie de torsion *héréditaire* (resp. *co-héréditaire*) si \mathcal{T} (resp. \mathcal{F}) est stable par sous-objets (resp. par quotients).

Dans une catégorie abélienne \mathcal{A} qui est \mathbb{O} -linéaire, un objet A de \mathcal{A} est dit de ϖ -torsion (resp. ϖ -libre, resp. ϖ -divisible) si $\varpi^N 1_A$ est nul pour un certain entier N (resp. $\varpi.1_A$ est un monomorphisme, resp. un épimorphisme).

1.1.1. PROPOSITION (cf. [10] 2.14). — *Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire; on note \mathcal{T} (resp. \mathcal{F} , resp. \mathcal{Q}) la sous-catégorie pleine des objets de ϖ -torsion (resp. ϖ -libres, resp. ϖ -divisibles) de \mathcal{A} . Si \mathcal{A} est noethérienne (resp. artinienne) alors $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$) est une théorie de torsion héréditaire (resp. co-héréditaire) sur \mathcal{A} .*

Remarque. — Dans une catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire noethérienne (resp. artinienne) tout A admet un plus grand sous-objet de ϖ -torsion A_{tor} (resp. ϖ -divisible A_{div}) : A/A_{tor} (resp. A/A_{div}) est sans ϖ -torsion (resp. de ϖ -torsion) et $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}(A/A_{tor})$ (resp. $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}A_{div}$).

1. NOTATIONS. — *Soit \mathcal{D} une catégorie triangulée munie d'une t-structure $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ au sens de [1] définition 1.3.1; on notera \mathcal{C} son cœur, $\tau_{\leq n}$ et $\tau_{\geq n}$, les foncteurs de troncation ainsi que $\mathcal{H}^n := \tau_{\leq n}\tau_{\geq n} = \tau_{\geq n}\tau_{\leq n}$. Pour $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ un foncteur triangulé, on note pT pour $\mathcal{H}^0 \circ T \circ \epsilon_1$, où $\epsilon_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1$ est l'inclusion du cœur.*

Remarque. — On rappelle qu'un foncteur triangulé $T : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2$ est dit t -exact à droite (resp. à gauche), si $T(\mathcal{D}_1^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\leq 0}$ (resp. $T(\mathcal{D}_1^{\geq 0}) \subset \mathcal{D}_2^{\geq 0}$) et t -exact s'il l'est à droite et à gauche. Si (T^*, T_*) est une paire de foncteurs triangulés adjoints, alors T^* est t -exact à droite si et seulement si T_* est t -exact à gauche et alors $({}^pT^*, {}^pT_*)$ est une paire de foncteurs adjoints de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

1.1.2. COROLLAIRE. — (cf. [10] 2.15) Si \mathcal{C} est munie d'une théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$

$$\begin{aligned} +\mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\leq 1} : \mathcal{H}^1(A) \in \mathcal{F}\} \\ +\mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in \mathcal{D}^{\geq 0} : \mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

définissent une nouvelle t -structure sur \mathcal{D} dont on note ${}^+\mathcal{C}$ le cœur lequel est en outre munie d'une théorie de torsion $(\mathcal{F}, \mathcal{F}[-1])$.

Remarque. — On retrouve la t -structure p à partir de $p+$ via les formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{A \in {}^+\mathcal{D}^{\leq 0} : {}^+\mathcal{H}^0(A) \in \mathcal{F}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{A \in {}^+\mathcal{D}^{\geq -1} : {}^+\mathcal{H}^{-1}(A) \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

de sorte que ${}^{++}\mathcal{C} = \mathcal{C}[-1]$. En particulier pour $A \in \mathcal{C}$ (resp. $A \in {}^+\mathcal{C}$), on a

$$A_{\mathcal{F}} = {}^+\mathcal{H}^{-1}A \text{ et } A_{\mathcal{F}} = {}^+\mathcal{H}^0A. \quad (\text{resp. } A_{\mathcal{F}} = \mathcal{H}^0A \text{ et } A_{\mathcal{F}[-1]} = \mathcal{H}^1A).$$

1.2. Recollement. — On suppose données trois catégories triangulées \mathcal{D} , \mathcal{D}_U et \mathcal{D}_F ainsi que des foncteurs triangulés $i_* : \mathcal{D}_F \rightarrow \mathcal{D}$ et $j^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_U$, vérifiant les conditions de recollement de [1] §1.4.3

1. i_* possède un adjoint à gauche noté i^* et un adjoint à droite $i^!$;
2. j^* possède un adjoint à gauche $j_!$ et un adjoint à droite j_* ;
3. on a $j^*i_* = 0$ et donc par adjonction $i^*j_! = 0$ et $i^!j_* = 0$; pour $A \in \mathcal{D}_F$ et $B \in \mathcal{D}_U$

$$\text{Hom}(j_!B, i_*A) = 0 \text{ et } \text{Hom}(i_*, j_*B) = 0;$$

4. pour tout $K \in \mathcal{D}$, il existe $d : i_*i^*K \rightarrow j_!j^*K[1]$ (resp. $d : j_*j^*K \rightarrow i_*i^!K[1]$), nécessairement unique, tel que le triangle suivant est distingué

$$j_!j^*K \rightarrow K \rightarrow i_*i^*K \rightsquigarrow^d \quad (\text{resp. } i_*i^!K \rightarrow K \rightarrow j_*j^*K \rightsquigarrow^d);$$

5. les foncteurs i_* , $j_!$ et j_* sont pleinement fidèles : les morphismes d'adjonction $i^*i_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow i^!i_*$ et $j^*j_* \rightarrow \text{Id} \rightarrow j^*j_!$ sont des isomorphismes.

Étant données des t -structures $(\mathcal{D}_U^{\leq 0}, \mathcal{D}_U^{\geq 0})$ sur \mathcal{D}_U et $(\mathcal{D}_F^{\leq 0}, \mathcal{D}_F^{\geq 0})$ sur \mathcal{D}_F , on définit une t -structure sur \mathcal{D} par recollement :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^*K \in \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D} : j^*K \in \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^!K \in \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

1.2.1. PROPOSITION. — ([10] proposition 2.30) Supposons \mathcal{C}_F et \mathcal{C}_U munies de théorie de torsion $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$ et $(\mathcal{T}_U, \mathcal{F}_U)$. On définit alors une théorie de torsion sur \mathcal{C} par :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &:= \{P \in \mathcal{C} : {}^p i^* P \in \mathcal{T}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{T}_U\} \\ \mathcal{F} &:= \{P \in \mathcal{C} : {}^p i^! P \in \mathcal{F}_F \text{ et } j^* P \in \mathcal{F}_U\} \end{aligned}$$

1.2.2. COROLLAIRE. — ([10] lemme 2.32) On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} {}^p i_*(\mathcal{T}_F) \subset \mathcal{T} \quad {}^p j_!(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \quad {}^p j_{!*}(\mathcal{T}_U) \subset \mathcal{T} \\ {}^p i_*(\mathcal{F}_F) \subset \mathcal{F} \quad {}^p j_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \quad {}^p j_{!*}(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F} \end{aligned}$$

Démonstration. — Le résultat découle de la nullité de ${}^p i^* {}^p j_{!*}, {}^p i^! {}^p j_{!*}$ ainsi que celle, cf. [1] proposition 1.4.17 (i), des composés ${}^p j_* \circ {}^p i_*, {}^p i^* \circ {}^p j_!$ et ${}^p i^! \circ {}^p j_*$. \square

Remarque. — La t -structure $({}^+ \mathcal{D}^{\leq 0}, {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0})$ du corollaire 1.1.2 s’obtient par recollement, i.e.

$$\begin{aligned} {}^+ \mathcal{D}^{\leq 0} &:= \{K \in \mathcal{D}^{\leq 1} : \mathcal{H}^1(K) \in \mathcal{T}\} = \{K \in \mathcal{D} : j^* K \in {}^+ \mathcal{D}_U^{\leq 0} \text{ et } i^* K \in {}^+ \mathcal{D}_F^{\leq 0}\} \\ {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0} &:= \{K \in \mathcal{D}^{\geq 0} : \mathcal{H}^0(K) \in \mathcal{F}\} = \{K \in \mathcal{D} : j^* K \in {}^+ \mathcal{D}_U^{\geq 0} \text{ et } i^! K \in {}^+ \mathcal{D}_F^{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

En effet pour $K \in \mathcal{D}^{\leq 1}$ avec $\mathcal{H}^1(K) \in \mathcal{T}$, du triangle distingué $\tau_{\leq 0} K \rightarrow K \rightarrow \mathcal{H}^1(K) \rightsquigarrow$, par application de j^* (resp. i^*), on en déduit, comme $j^*(\mathcal{D}^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_U^{\leq 0}$ (resp. $i^*(\mathcal{D}^{\leq 0}) \subset \mathcal{D}_F^{\leq 0}$), que $\mathcal{H}^1(j^* K) = j^* \mathcal{H}^1(K)$ (resp. $\mathcal{H}^1(i^* K) = i^* \mathcal{H}^1(K)$) est de torsion et donc $j^* K \in {}^+ \mathcal{D}_U^{\leq 0}$ (resp. $i^* K \in {}^+ \mathcal{D}_F^{\leq 0}$). Réciproquement si $j^* K \in {}^+ \mathcal{D}_U^{\leq 0}$ et $i^* K \in {}^+ \mathcal{D}_F^{\leq 0}$ alors $K \in \mathcal{D}^{\leq 1}$ avec $j^* \mathcal{H}^1(K) \in \mathcal{T}_U$ et $i^* \mathcal{H}^1(K) \in \mathcal{T}_F$, soit $\mathcal{H}^1(K) \in \mathcal{T}$. Le cas de ${}^+ \mathcal{D}^{\geq 0}$ se traite de même.

1.3. La catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers libres. — Notons tout d’abord qu’il découle du corollaire 1.1.2 et de la remarque qui le suit que

$$\mathcal{F} := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+ \mathcal{D}^{\geq 0} = \mathcal{C} \cap {}^+ \mathcal{C}$$

est la sous-catégorie pleine des objets libres (resp. divisibles) de \mathcal{C} (resp. de ${}^+ \mathcal{C}$). Les catégories \mathcal{C} et ${}^+ \mathcal{C}$ étant abéliennes, elles possèdent des noyaux, images, conoyaux et coimages ; cependant ces notions peuvent être distinctes selon qu’on considère \mathcal{C} ou ${}^+ \mathcal{C}$, i.e. elles ne fournissent pas nécessairement des objets de \mathcal{F} .

1.3.1. LEMME. — La catégorie \mathcal{F} admet des noyaux et des conoyaux. Plus précisément pour $L, L' \in \mathcal{F}$ et $f : L \rightarrow L'$, le noyau $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f$ (resp. le conoyau $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f$) de f dans \mathcal{F} est égal à celui $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$ (resp. $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$) de f dans \mathcal{C} (resp. ${}^+ \mathcal{C}$).

Démonstration. — Le noyau $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$ (resp. $\text{Coker}_{+\mathcal{C}} f$) est un objet de \mathcal{F} et $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f \rightarrow L \rightarrow L'$ (resp. $L \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{+\mathcal{C}} f$) est l'application nulle. Si $X \rightarrow L$ (resp. $L' \rightarrow X$) est un morphisme de \mathcal{F} dont le composé avec $L \rightarrow L'$ est nul alors, X étant un objet de \mathcal{C} (resp. de $+\mathcal{C}$), la propriété universelle de $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$ (resp. de $\text{Coker}_{+\mathcal{C}} f$), nous fournit une flèche $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f \rightarrow L$ (resp. par $L' \rightarrow \text{Coker}_{+\mathcal{C}} f$) qui factorise $X \rightarrow L$ (resp. $L' \rightarrow X$). Ainsi $\text{Ker}_{\mathcal{C}} f$ (resp. $\text{Coker}_{+\mathcal{C}} f$) est un noyau (resp. conoyau) de f dans \mathcal{F} . \square

Remarque. — D'après la remarque suivant 1.1.2, $+\mathcal{H}^0 \text{Coker}_{\mathcal{C}} f$ est le quotient libre de $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$. Si $L' \rightarrow X$ est un morphisme de \mathcal{F} dont le composé avec $L \rightarrow L'$ est nul, alors X étant un objet de \mathcal{C} , on a une flèche $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f \rightarrow X$ telle que le composé $(\text{Coker}_{\mathcal{C}} f)_{\text{tor}} \hookrightarrow \text{Coker}_{\mathcal{C}} f \rightarrow X$ est nul, i.e. $L' \rightarrow X$ se factorise par $+\mathcal{H}^0 \text{Coker}_{\mathcal{C}} f$. Ce dernier est donc égal à $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f = \text{Coker}_{+\mathcal{C}} f$. De la même façon on a $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f = \mathcal{H}^0 \text{Ker}_{+\mathcal{C}} f$.

1.3.2. DÉFINITION. — Pour $L, L' \in \mathcal{F}$ et $f : L \rightarrow L'$, on rappelle que l'image $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$ (resp. la coimage $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$) de f dans \mathcal{F} est $\text{Ker}_{\mathcal{F}}(L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f)$ (resp. $\text{Coker}_{\mathcal{F}}(\text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L)$).

1.3.3. LEMME. — Pour f un morphisme de \mathcal{F} , on a $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f = \text{Coim}_{\mathcal{C}} f = \text{Im}_{\mathcal{C}} f$ et $\text{Im}_{\mathcal{F}} f = \text{Im}_{+\mathcal{C}} f = \text{Coim}_{+\mathcal{C}} f$. En outre f induit une flèche canonique $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$.

Démonstration. — On procède comme dans la preuve du lemme précédent en notant que dans \mathcal{C} on a $\text{Im}_{\mathcal{C}} f \hookrightarrow L'$ et donc $\text{Im}_{\mathcal{C}} f$ est un objet de \mathcal{F} . De même dans $+\mathcal{C}$, on a $L \rightarrow \text{Coim}_{+\mathcal{C}} f$ et donc $\text{Coim}_{+\mathcal{C}} f$ est un objet de \mathcal{F} .

En outre $f : L \rightarrow L'$ se factorise par $\text{Im}_{\mathcal{F}} f$ et comme le composé $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ est nul, il induit un morphisme canonique $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$. \square

1.3.4. DÉFINITION (cf. [11] §1.1.3). — La flèche f est dite *stricte* si le morphisme canonique $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ est un isomorphisme; on notera alors $f : L \dashrightarrow L'$. Une suite $0 \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_3 \rightarrow 0$ sera dite *strictement exacte* si L_1 est un noyau de $L_2 \rightarrow L_3$ et L_3 un conoyau de $L_1 \rightarrow L_2$.

Remarque. — $(f : L \rightarrow L')$ est un monomorphisme strict et on note $L \dashrightarrow L'$ (resp. un épimorphisme strict et on note $L \dashrightarrow L'$) si et seulement si son conoyau dans \mathcal{C} (resp. son noyau dans $+\mathcal{C}$) est un objet de \mathcal{F} . Dans ce cas $0 \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow \text{Coker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow 0$ (resp. $0 \rightarrow \text{Ker}_{\mathcal{F}} f \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow 0$) est strictement exacte.

Remarque. — La composée de deux monomorphismes (resp. épimorphismes) stricts est strict ; réciproquement si $u \circ v$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme) strict alors v (resp. u) est strict.⁽¹⁾

1.3.5. PROPOSITION. — La catégorie $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap {}^+\mathcal{C}$ des objets libres (resp. divisibles) de \mathcal{C} (resp. de ${}^+\mathcal{C}$) est quasi-abélienne au sens de la définition 1.1.3 de [11].

Démonstration. — Nous avons déjà vu que \mathcal{F} possédait des noyaux et conoyaux. Soit alors $f : L_1 \dashrightarrow L_2$ un épimorphisme strict et

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ L'_1 & \longrightarrow & L'_2 \end{array}$$

un diagramme cartésien. Notons $L = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L_1 \longrightarrow L_2)$ de sorte que $0 \rightarrow L \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de \mathcal{C} . Soit alors \tilde{L}_1 le tiré en arrière dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \tilde{L}_1 & \dashrightarrow & L'_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Comme L et L'_2 sont libres dans \mathcal{C} alors \tilde{L}_1 est un objet de \mathcal{F} et l'épimorphisme strict $\tilde{L}_1 \dashrightarrow L'_2$ se factorise par L'_1 de sorte que $L'_1 \rightarrow L'_2$ est strict d'après la remarque précédente. Dualement pour $L_1 \rightarrow L_2$ un monomorphisme strict et un diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} L'_1 & \longrightarrow & L'_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ L_1 & \longrightarrow & L_2, \end{array}$$

le conoyau L dans \mathcal{C} de $L_1 \dashrightarrow L_2$ est libre. On note \tilde{L}_2 le poussé en avant dans \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L'_1 & \dashrightarrow & \tilde{L}_2 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

⁽¹⁾ Ces propriétés sont générales dans les catégories quasi-abéliennes cf. la proposition 1.1.8 de [11].

Comme précédemment \tilde{L}_2 est un objet de \mathcal{F} et le monomorphisme strict $L'_1 \hookrightarrow \tilde{L}_2$ se factorise par L'_2 de sorte que d'après la remarque précédente, $L'_1 \hookrightarrow L'_2$ est strict. Ainsi les conditions (QA) et (QA*) de [11] sont vérifiées et \mathcal{F} est quasi-abélienne. \square

1. NOTATION. — Un morphisme $f : L \rightarrow L'$ qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme sera noté $f : L \hookrightarrow L'$; on dit aussi que f est un *bimorphisme*.

Remarque. — La flèche canonique $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f \rightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f$ est un exemple de bimorphisme. Avec ces notations la factorisation canonique d'une flèche dans une catégorie quasi-abélienne s'écrit comme suit.

1.3.6. PROPOSITION. — Tout $f : L \rightarrow L'$ admet une factorisation canonique $L \dashrightarrow \text{Coim}_{\mathcal{F}} f \hookrightarrow \text{Im}_{\mathcal{F}} f \hookrightarrow L'$.

1.3.7. DÉFINITION. — Pour f un monomorphisme, $\text{Im}_{\mathcal{F}}$ est appelé le *saturé* de $\text{Coim}_{\mathcal{F}} f$.

1.3.8. LEMME. — Dans le cas où \mathcal{C} est \mathbb{O} -linéaire, un morphisme f de \mathcal{F} est un bimorphisme si et seulement si $f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est un isomorphisme. Dans ce cas pour tout entier n assez grand, il existe $g : L' \hookrightarrow L$ tel que $g \circ f = \varpi^n \text{Id}$.

Démonstration. — Soit $f : L \hookrightarrow L'$ un bimorphisme; f est un monomorphisme de \mathcal{C} (resp. un épimorphisme de ${}^+\mathcal{C}$) de sorte que $f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme). Comme dans une catégorie abélienne les notions de bimorphisme et isomorphisme coïncident, on en déduit que $f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est un isomorphisme. Réciproquement si $f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ est un isomorphisme alors $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ et $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{K}$ sont nuls et donc $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f$ et $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f$ aussi. Or $\text{Ker}_{\mathcal{F}} f = \text{Ker}_{\mathcal{C}} f$ (resp. $\text{Coker}_{\mathcal{F}} f = \text{Coker}_{+ \mathcal{C}} f$) de sorte que f est un monomorphisme de \mathcal{C} (resp. un épimorphisme de ${}^+\mathcal{C}$).

Au bimorphisme $L \hookrightarrow L'$ est associé une suite exacte dans \mathcal{C} , $0 \rightarrow L \rightarrow L' \rightarrow T \rightarrow 0$ où T est un objet de ϖ^n torsion de \mathcal{C} pour n assez grand. Soit alors

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L_0 & \dashrightarrow & T \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \times \varpi^n \\
 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \times \varpi^n & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & L & \dashrightarrow & L_0 & \longrightarrow & T \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où $L_0 \simeq L \oplus T$. La composée $L' \rightarrow L_0 \rightarrow L$ est alors un monomorphisme de \mathcal{C} dont le conoyau est de torsion, i.e. $L' \hookrightarrow L$. \square

Remarque. — La relation $L \hookrightarrow L'$ est d'équivalence sur \mathcal{F} .

1.3.9. DÉFINITION. — Pour L un objet de \mathcal{F} , on dira que

$$L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_e = L$$

est une \mathcal{F} -filtration si pour tout $1 \leq i \leq e - 1$, le monomorphisme $L_i \hookrightarrow L_{i+1}$ est strict. Dualement $L = L_{-e} \twoheadrightarrow L_{1-e} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow L_{-1}$ est une \mathcal{F} -cofiltration si pour tout $1 \leq i \leq e - 1$, l'épimorphisme $L_{-i-1} \twoheadrightarrow L_{-i}$ est strict.

Considérons à nouveau une situation de recollement comme dans le paragraphe précédent. Selon la notation 1, considérons les foncteurs ${}^p j_!$, ${}^{p+} j_!$, ${}^p j_*$, ${}^{p+} j_*$ ainsi que les foncteurs extensions intermédiaires ${}^p j_{!*}$ et ${}^{p+} j_{!*}$. D'après [10] 2.42-2.46, on a les triangles distingués :

$$\begin{aligned} {}^p j_! &\rightarrow {}^{p+} j_! \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ {}^{p+} j_! &\rightarrow {}^p j_{!*} \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{libre}^{-1} i^* j_*[1] \rightsquigarrow \\ {}^p j_{!*} &\rightarrow {}^{p+} j_{!*} \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^{p+} j_{!*} &\rightarrow {}^p j_* \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{libre}^0 i^* j_* \rightsquigarrow \\ {}^p j_* &\rightarrow {}^{p+} j_* \rightarrow {}^p i_* \mathcal{H}_{tors}^1 i^* j_*[-1] \rightsquigarrow \end{aligned}$$

1.3.10. LEMME. — Soit $L \in \mathcal{F}_U$ alors ${}^{p+} j_! L$, ${}^p j_{!*} L$, ${}^{p+} j_{!*} L$ et ${}^p j_* L$ sont des objets de \mathcal{F} .

2. NOTATION. — Pour $L, L' \in \mathcal{F}$, on notera $f : L \hookrightarrow_+ L'$ un bimorphisme dont le conoyau dans \mathcal{C} est dans l'image essentielle de \mathcal{C}_F .

Remarques : a) pour tout $L \in \mathcal{F}_U$, on voit que ${}^{p+} j_! L \twoheadrightarrow {}^p j_{!*} L$ (resp. ${}^{p+} j_{!*} L \twoheadrightarrow {}^p j_* L$) est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) strict, et que

$${}^{p+} j_! L \dashrightarrow {}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L \dashrightarrow {}^p j_* L$$

est la factorisation canonique du morphisme ${}^{p+} j_! L \twoheadrightarrow {}^p j_* L$ au sens de 1.3.6.

b) La construction de la preuve du lemme 1.3.8, fournit ${}^{p+} j_{!*} L \hookrightarrow {}^p j_{!*} L$ dont le conoyau dans \mathcal{C} est $j_{!*}(L/l^n L)$.

1.3.11. LEMME. — Soient $L \in \mathcal{F}_U$, $M \in \mathcal{F}_X$ et $f : {}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ M$. Alors il existe $g : M \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$ tel que $g \circ f : {}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$ est le morphisme canonique.

Démonstration. — Soit $M \twoheadrightarrow {}^p j_* j^* M$ le morphisme d'adjonction et notons Q le conoyau dans \mathcal{F} de ${}^{p+} j_{!*} j^* M \dashrightarrow {}^p j_* j^* M$. De la nullité de $\text{Hom}({}^p j_{!*} L, Q)$, on en déduit, via l'épimorphisme ${}^p j_{!*} L \twoheadrightarrow M$ que $M \twoheadrightarrow Q$ est nulle ce qui fournit, en utilisant $j^* M \simeq L$, une flèche $M \twoheadrightarrow {}^{p+} j_{!*} L$ qui factorise ${}^p j_{!*} L \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$ et donc $M \hookrightarrow_+ {}^{p+} j_{!*} L$. \square

Remarque. — Dualement si $f : M \hookrightarrow {}^{p+}j_{!*}L$ est telle que $\text{Coker}_{\mathcal{C}} f$ est dans l'image essentielle de \mathcal{C}_F alors $f : M \hookrightarrow_+ {}^{p+}j_{!*}L$ factorise ${}^p j_{!*}L \hookrightarrow {}^{p+}j_{!*}L$. En particulier on notera que $f : M \hookrightarrow_+ {}^p j_{!*}L$ (resp. $f : {}^{p+}j_{!*}L \hookrightarrow_+ M$) est nécessairement un isomorphisme.

1.3.12. PROPOSITION. — *On suppose que j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour \mathcal{C} (resp. ${}^+\mathcal{C}$) alors $j_*(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$ (resp. $j_!(\mathcal{F}_U) \subset \mathcal{F}$).*

Démonstration. — Soit $L \in \mathcal{F}_U$; comme ${}^p j_* = j_*$, $j_*L \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0} = \mathcal{F}$. Le cas de $j_!$ est dual : comme ${}^+j_! = j_!$, alors $j_!L \in \mathcal{D}^{\leq 0} \cap {}^+\mathcal{D}^{\geq 0}$ d'où le résultat. \square

1.4. t -structures perverses. — Dans la suite S désigne le spectre soit d'un corps, soit d'un anneau de valuation discrète hensélien A , ou celui du normalisé \bar{A} de A dans une clôture algébrique du corps des fractions de A . On rappelle en outre que Λ désigne une des trois lettres \mathbb{K}, \mathbb{O} ou \mathbb{F} introduites plus haut. Soit alors X un schéma de type fini sur S . On note $\mathcal{D} := D_c^b(X, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $D(X, \Lambda)$ formée des complexes à cohomologie bornée constructible.

3. NOTATION. — *Dans la suite du texte, \mathcal{H}^i désignera le foncteur cohomologique associée à la t -structure naturelle sur la catégorie dérivée considérée.*

(a) *Cas où S est le spectre d'un corps* : on considérera dans cette situation la t -structure perverse p définie par :

$$\begin{aligned} A \in {}^p D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^* A = 0, \forall k > -\dim \overline{\{x\}} \\ A \in {}^p D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^k i_x^! A = 0, \forall k < -\dim \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

où $i_x : \text{Spec } \kappa(x) \hookrightarrow X$. On note alors ${}^p \text{FP}(X, \Lambda)$ le cœur de cette t -structure : c'est une catégorie abélienne noethérienne et Λ -linéaire.

Remarque. — Un objet A de $D_c^b(X, \mathbb{O})$ est dans ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathbb{O})$ si et seulement si $A \otimes_{\mathbb{O}} \mathbb{F}$ est un objet de ${}^p D^{\leq 0}(X, \mathbb{F})$.

4. NOTATION. — *Les foncteurs cohomologiques associés à la t -structure perverse ci-avant seront notés ${}^p \mathcal{H}^i$.*

Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{O}$, en tant que catégorie abélienne \mathbb{O} -linéaire, on obtient comme précédemment une autre t -structure $p+$

$$\begin{aligned} A \in {}^{p+} D^{\leq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} \mathcal{H}^i i_x^* A = 0, & \forall i > -\dim \overline{\{x\}} + 1 \\ \mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}} + 1} i_x^* A \text{ de torsion} \end{cases} \\ A \in {}^{p+} D^{\geq 0}(X, \Lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in X, \begin{cases} \mathcal{H}^i i_x^! A = 0, & \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \\ \mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}} i_x^! A \text{ libre} \end{cases} \end{aligned}$$

dont on notera ${}^{p+} \text{FP}(X, \mathbb{O})$ le cœur et ${}^{p+} \mathcal{H}^i$ les foncteurs cohomologiques. C'est une catégorie abélienne artinienne et \mathbb{O} -linéaire.

Remarque. — A est un objet de ${}^{p+}D^{\geq 0}$ si et seulement si $A \otimes_{\mathbb{0}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}$ est un objet de ${}^pD^{\geq 0}(X, \mathbb{F})$.

5. NOTATION. — Nous noterons $\text{FPL}(X, \mathbb{0}) := {}^{p+}\text{FP}(X, \mathbb{0}) \cap {}^p\text{FP}(X, \mathbb{0})$ la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres ».

Remarque. — Un objet A de ${}^p\text{FP}(X, \mathbb{0})$ est libre si et seulement si $A \otimes_{\mathbb{0}}^{\mathbb{L}} \mathbb{0}/(\varpi)$ est pervers.

Remarque. — La dualité de Grothendieck échange les deux t -structures perverses p et $p+$ de sorte que si f est un foncteur exact à droite pour la t -structure p et commute à la dualité de Grothendieck alors il préserve la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers libres.

1.4.1. PROPOSITION. — Pour $j : U \hookrightarrow X$ affine et $P \in \text{FPL}(U, \mathbb{0})$ on a

$$j_*P = {}^pj_*P = {}^{p+}j_*P, \quad j_!P = {}^pj_!P = {}^{p+}j_!P,$$

et donc j_*P et $j_!P$ sont des objets de $\text{FPL}(X, \mathbb{0})$.

Démonstration. — Comme j est affine, j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour p (resp. $p+$) et le résultat découle de la proposition 1.3.12. □

(b) Cas où $S = \text{Spec } A$: on note

- $f : X \rightarrow S$ le morphisme structural ;
- $s = \text{Spec } k$ (resp. $\eta = \text{Spec } K$) le point fermé (resp. générique) de S ;
- X_s (resp. X_η) la fibre spéciale (resp. générique) de X ;
- $i : X_s \hookrightarrow X$ (resp. $j : X_\eta \hookrightarrow X$) l’inclusion fermée (resp. ouverte).

Le complexe $f^!\Lambda_S[2](1)$ est dualisant sur X d’après [5] Th. finitude §4. On considère alors la t -structure sur X obtenue par recollement de la perversité autoduale p sur la fibre spéciale X_s de X et de la t -structure $({}^pD^{\leq -1}(X_\eta, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_\eta, \Lambda))$, notée $p[1]$, où p est la perversité autoduale sur la fibre générique X_η de X . Autrement dit, en posant, d’après [4] XIV 2.2, pour x un point de X d’image y dans S , $\delta(x) = \deg \text{Tr } \kappa(x)/\kappa(y) + \dim \overline{\{y\}}$, on a

$$A \in {}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda) \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^q(i_x^*A) = 0, \forall q > -\delta(x)$$

$$A \in {}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda) \Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{H}^q(i_x^!A) = 0, \forall q < -\delta(x)$$

On définit de même la t -structure $p+$ sur X de sorte que le foncteur dualisant $D_X = R\text{Hom}(-, K_X)$ échange ${}^pD^{\leq 0}(X, \Lambda)$ (resp. ${}^{p+}D^{\leq 0}(X, \Lambda)$) et ${}^{p+}D^{\geq 0}(X, \Lambda)$ (resp. ${}^pD^{\geq 0}(X, \Lambda)$).

1.4.2. PROPOSITION. — Le foncteur j_* (resp. $j_!$) est t -exact pour X_η muni de la t -structure $p[1]$ (resp. $p + [1]$) et X de la t -structure p (resp. $p+$) définie ci-dessus.

Démonstration. — Pour j_* , cf. par exemple [8] bas de la page 48; le cas de $j_!$ est dual. □

On note alors ${}^{p[1]}FPL(X_\eta, \mathbb{O}) := {}^pD^{\leq -1}(X_\eta, \mathbb{O}) \cap {}^{p+}D^{\geq -1}(X_\eta, \mathbb{O})$ la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres ».

1.4.3. COROLLAIRE (cf. la proposition 1.3.12). — Si $L_{\mathbb{O}} \in {}^{p[1]}FPL(X_\eta, \mathbb{O})$ alors $j_!L_{\mathbb{O}}$, $j_*L_{\mathbb{O}}$, ${}^pj_{!*}L_{\mathbb{O}}$ et ${}^{p+}j_{!*}L_{\mathbb{O}}$ appartiennent à $FPL(X, \mathbb{O})$, i.e. sont aussi « libres ».

(c) Cas où $S = \text{Spec } \bar{A}$: on note

- $\bar{s} = \text{Spec } \bar{k}$ (resp. $\bar{\eta} = \text{Spec } K$) le point fermé (resp. générique) de S ;
- $X_{\bar{s}}$ (resp. $X_{\bar{\eta}}$) la fibre spéciale (resp. générique) de X ;
- $\bar{i} : X_{\bar{s}} \hookrightarrow X$ (resp. $\bar{j} : X_{\bar{\eta}} \hookrightarrow X$) l'inclusion fermée (resp. ouverte).

Remarque. — Dans cette situation, il n'y a plus de complexe dualisant.

On considère alors les t -structures suivantes :

- $p(1)$ en recollant $({}^pD^{\leq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq -1}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$ et $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$;
- $p(0)$ en recollant $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda))$ et $({}^pD^{\leq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda), {}^pD^{\geq 0}(X_{\bar{s}}, \Lambda))$.

Remarque. — On notera $p(1)+$ et $p(0)+$ les t -structures obtenues en recollant comme ci-dessus à partir des versions $p+$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et $X_{\bar{s}}$.

1.4.4. PROPOSITION. — (i) Pour $X_{\bar{\eta}}$ et X munis des t -structures $p[1]$ et $p(1)$ (resp. $p[1]+$ et $p(1)+$), les foncteurs \bar{j}_* et $\bar{j}_!$ sont t -exacts. Pour $L_{\mathbb{O}} \in {}^{p[1]}FPL(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O})$, on a

$$\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} = {}^{p(1)+}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} \in {}^{p(1)}FPL(X, \mathbb{O})$$

et on a la suite exacte courte dans ${}^{p(1)}FPL(X, \mathbb{O})$:

$$0 \rightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

(ii) Pour $X_{\bar{\eta}}$ et X munis des t -structures p et $p(0)$ (resp. $p+$ et $p(0)+$), les foncteurs \bar{j}_* et $\bar{j}_!$ sont t -exacts. Pour $L_{\mathbb{O}} \in {}^pFPL(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{O})$, on a

$$\bar{j}_!L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} = {}^{p(0)+}\bar{j}_{!*}L_{\mathbb{O}} \in {}^{p(0)}FPL(X, \mathbb{O})$$

et on a la suite exacte courte dans ${}^{p(0)}FPL(X, \mathbb{O})$:

$$0 \rightarrow \bar{j}_!L_{\mathbb{O}} \rightarrow j_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow \bar{i}_*\bar{i}^*\bar{j}_*L_{\mathbb{O}} \rightarrow 0.$$

Remarque. — Le complexe $\bar{i}^* \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ est le complexe des cycles proches notés $\Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ que l'on considère muni de son action du groupe de Galois.

Démonstration. — (i) Le foncteur \bar{j}_* (resp. $\bar{j}!$) est t -exact à gauche (resp. à droite) pour p et $p+$. Par ailleurs comme d'après [8] §4, $\bar{i}^* \bar{j}_*$ est t -exact relativement à p sur $X_{\bar{\eta}}$ et p sur $X_{\bar{s}}$, on en déduit que \bar{j}_* est t -exact relativement à $p[1]$ sur $X_{\bar{\eta}}$ et $p(1)$ sur X . En ce qui concerne $\bar{j}!$, considérons le triangle distingué $\bar{j}! \bar{j}^* K \rightarrow K \rightarrow \bar{i}_* \bar{i}^* K \rightsquigarrow$ pour $K = \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ avec $L_\mathbb{O}$ qui est $p[1]$ pervers. La suite exacte longue de $p(1)$ -cohomologie et le fait que ${}^p \mathcal{H}^r \bar{i}^* \bar{j}_* L_\mathbb{O}$ est nul pour tout $r \neq -1$, donnent la nullité des ${}^{p(1)} \mathcal{H}^r \bar{j}! \bar{j}^* K$ pour tout $r \neq 0$ ainsi que la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bar{i}_* {}^{p(1)} \mathcal{H}^{-1} \bar{i}^* K \rightarrow \bar{j}! \bar{j}^* K \rightarrow K \rightarrow 0$$

avec ${}^{p(1)} \mathcal{H}^{-1} \bar{i}^* K = \Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ qui est p -pervers. On en déduit alors que $\bar{j}!$ est t -exact relativement à $p[1]$ et $p(1)$ ainsi que $\bar{j}_* L_\mathbb{O} = {}^{p(1)} \bar{j}! L_\mathbb{O}$.

Soit alors $L_\mathbb{O}$ qui est $p[1]+$ pervers et soit ${}^{p[1]} \mathcal{H}^0 L_\mathbb{O} \rightarrow L_\mathbb{O} \rightarrow {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O} \rightsquigarrow$ le triangle distingué associé où ${}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$ est $p[1]$ pervers de torsion et ${}^{p[1]} \mathcal{H}^0 L_\mathbb{O}$ est libre. Après application du foncteur exact \bar{j}_* on obtient $\bar{j}_* {}^{p[1]} \mathcal{H}^0 L_\mathbb{O} \rightarrow \bar{j}_* L_\mathbb{O} \rightarrow \bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O} \rightsquigarrow$ où $\bar{j}_* {}^{p[1]} \mathcal{H}^0 L_\mathbb{O}$ et $\bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$ sont $p(1)$ -pervers. Par ailleurs comme pour tout M qui est $p[1]$ -pervers, $\bar{j}_* M = {}^{p(1)} \bar{j}! M$, il découle du corollaire 1.2.2 que $\bar{j}_* {}^{p[1]} \mathcal{H}^0 L_\mathbb{O}$ (resp. $\bar{j}_* {}^{p[1]} \tau_{\geq 1} L_\mathbb{O}[1]$) est libre (resp. de torsion). On en déduit alors que \bar{j}_* est t -exact à gauche relativement à $p[1]+$ et $p(1)+$ et donc t -exact. La t -exactitude de $\bar{j}!$ relativement à $p[1]+$ et $p(1)+$ s'en déduit alors comme précédemment.

Remarque. — Pour tout M qui est $p[1]+$ pervers, $\bar{j}_* M = {}^{p(1)+} \bar{j}! M$.

(ii) Le raisonnement est strictement identique en notant que relativement aux t -structures p et $p(0)$, $\bar{i}_* \bar{j}^*$ est t -exact de sorte que pour $K = \bar{j}_* L_\mathbb{O}$, $\bar{i}_* \bar{i}^* K$ et ${}^{p(1)} \bar{i}^* K = \Psi_\eta(L_\mathbb{O})$ sont p -pervers alors que ${}^{p(1)} \mathcal{H}^{-1} \bar{i}^* K$ est nul. \square

2. Filtrations de stratification d'un faisceau pervers sans torsion

On suppose le schéma X muni d'une stratification $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supseteq X^{\geq 2} \supseteq \dots \supseteq X^{\geq e}\}$ où pour tout $1 \leq h \leq e$, la strate $X^{\geq h}$ est de pure dimension d_h où $\dim X = d_1 > d_2 > \dots > d_e \geq 0$. On notera $j^{\geq h} : X^=h \hookrightarrow X^{\geq h}$, $i_h : X^{\geq h} \hookrightarrow X$ et $j^{=h} := i_h \circ j^{\geq h}$. On rappelle, cf. la définition 5, que $\text{FPL}(X, \Lambda)$ désigne la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres » ; en indice dans les notations, on la notera simplement \mathcal{F} .

2.1. Cas d'une situation de recollement. — Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas où $e = 2$; on notera simplement $j : U := X^{\geq 1} - X^{\geq 2} \hookrightarrow X$ et $i : F := X^{\geq 2} \hookrightarrow X$. Pour $L \in \text{FPL}(X, \Lambda)$, on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L & & \\
 & \nearrow^{\text{can}_{!,L}} & & \searrow_{\text{can}_{*,L}} & \\
 {}^{p^+}j_!j^*L & \dashrightarrow & {}^{p^+}j_!j^*L & \xrightarrow{C} & {}^{p^+}j_!j^*L & \dashrightarrow & {}^{p^+}j_!j^*L
 \end{array}$$

où la ligne du bas est la factorisation canonique de ${}^{p^+}j_!j^*L \rightarrow {}^{p^+}j_!j^*L$, cf. la proposition 1.3.6, et les flèches « en biais » données par adjonction.

2.1.1. DÉFINITION. — On note $P_L := i_* {}^p\mathcal{H}_{\text{libre}}^{-1} i^* j_* j^* L = \text{Ker}_{\mathcal{G}} \left({}^{p^+}j_!j^*L \rightarrow {}^{p^+}j_!j^*L \right)$. Avec les notations du diagramme ci-dessus, on pose

$$\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Im}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Im}_{\mathcal{G}}\left((\text{can}_{!,L})|_{P_L} \right).$$

2.1.2. LEMME. — Avec les notations précédentes, $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$ est une \mathcal{G} -filtration au sens de 1.3.9, avec $L/\text{Fil}_{U,!}^0(L) \simeq i_* {}^{p^+}i^*L$ et

$${}^{p^+}j_!j^*L \hookrightarrow_+ \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L).$$

Démonstration. — Le premier isomorphisme est immédiat en utilisant la suite exacte longue de cohomologie associée aux foncteurs ${}^p\mathcal{H}^i$ sur $j_!j^*F \rightarrow F \rightarrow i_*i^*F \rightsquigarrow$.

Comme $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Im}_{\mathcal{G}}\left(\text{can}_{!,L} : P_L \rightarrow \text{Fil}_{U,!}^0(L) \right)$, par définition de l'image, le monomorphisme $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \hookrightarrow \text{Fil}_{U,!}^0(L)$ est strict, i.e. $\text{gr}_{U,!}^0(L) := \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)$ est un objet de $\text{FPL}(X, \Lambda)$. Ainsi l'épimorphisme ${}^{p^+}j_!j^*L \rightarrow \text{Fil}_{U,!}^0(L) \dashrightarrow \text{gr}_{U,!}^0(L)$ se factorise en un épimorphisme $f : {}^{p^+}j_!j^*L \rightarrow \text{gr}_{U,!}^0(L)$. Or ce dernier étant un isomorphisme sur U , $\text{Ker}_{\mathcal{G}} f$ est de la forme i_*L' avec $L' \in \text{FPL}(F, \Lambda)$; comme $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(i_*L', {}^{p^+}j_!j^*L)$ est nul on en déduit que L' est nul et donc que f est un monomorphisme de $\text{FPL}(X, \Lambda)$, d'où le résultat. \square

Remarque. — D'après le lemme 1.3.11, il existe une flèche

$$\text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \hookrightarrow_+ {}^{p^+}j_!j^*L$$

dont la composée avec celle de l'énoncé est la flèche canonique ${}^{p^+}j_!j^*L \hookrightarrow_+ {}^{p^+}j_!j^*L$.

$$\begin{array}{ccc}
 {}^{p^+}j_!j^*L & \xrightarrow{C} & \text{Fil}_{U,!}^0(L)/\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & {}^{p^+}j_!j^*L
 \end{array}$$

On résume les constructions précédentes par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 p_{j!}j^*L & \xrightarrow{+} & \text{gr}_{U,!}^0(L) & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 p^+j!j^*L & \twoheadrightarrow & \text{Fil}_{U,!}^0(L) & \xrightarrow{+} & L \xrightarrow{+} i_*p^+i^*L \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 p\mathcal{H}_{\text{libre}}^{-1}i^*j_*j^*L & \xrightarrow{=} & P_L & \twoheadrightarrow & \text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)
 \end{array}$$

Remarque. — En utilisant le morphisme $\text{can}_{*,L}$ du diagramme du début de ce paragraphe, le lecteur vérifiera aisément que $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Ker}_{\mathcal{G}}\left((\text{can}_{*,L})|_{\text{Im}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L})}\right)$ et $\text{gr}_{U,!}^0(L) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}\left((\text{can}_{*,L})|_{\text{Im}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L})}\right)$ lequel est bien « coincé » entre

$$p_{j!}j^*L = \text{Coim}_{\mathcal{G}}\left((\text{can}_{*,L})|_{\text{Coim}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L})}\right) \text{ et } p^+j_*j^*L = \text{Im}_{\mathcal{G}}\left((\text{can}_{*,L})|_{\text{Im}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L})}\right).$$

2.1.3. DÉFINITION. — La filtration $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \subset \text{Fil}_{U,!}^0(L) \subset L$ est dite saturée si $\text{can}_{!,L}$ est strict i.e. si $\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L})$.

Remarque. — Si $\text{Fil}_{U,!}^0(L) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{!,L})$ alors la composée $P_L \hookrightarrow j!j^*L \twoheadrightarrow \text{Fil}_{U,!}^0(L)$ est stricte i.e. $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}\left((\text{can}_{!,L})|_{P_L}\right)$. De même l'épimorphisme $p_{j!}j^*L \twoheadrightarrow \text{Fil}_{U,!}^0(L) \twoheadrightarrow \text{gr}_{U,!}^0(L)$ est strict de sorte que ce dernier est un isomorphisme.

Remarque. — La dualité D de Grothendieck-Verdier stabilise $\text{FPL}(X, \Lambda)$, échange les monomorphismes (resp. stricts) avec les épimorphismes (resp. stricts). En utilisant $D(\text{Im}_{\mathcal{G}} f) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}(Df)$ et $D(\text{can}_{!,L}) = \text{can}_{*,D(L)}$, on peut dualiser les constructions précédentes, ce qui donne des cofiltrations définies comme suit.

2.1.4. DÉFINITION. — On note

$$Q_L = i_*p\mathcal{H}_{\text{libre}}^0i^*j_*j^*L = \text{Coker}_{\mathcal{G}}\left(p^+j!j^*L \longrightarrow p_{j!}j^*L\right)$$

et p_L l'épimorphisme $p_L : p^+j!j^*L \twoheadrightarrow Q_L$. On définit alors

$$\text{CoFil}_{U,*,0}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}(\text{can}_{*,L}) \quad \text{et} \quad \text{CoFil}_{U,*,1}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{G}}(p_L \circ \text{can}_{*,L}).$$

On obtient ainsi une \mathcal{F} -cofiltration, $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L)$ dont le noyau $\text{gr}_{U,*,1}(L)$ de $\text{CoFil}_{U,*,0}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L)$ s'inscrit dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 p j_! j^* L \subset & \xrightarrow{\quad + \quad} & \text{gr}_{U,*,1}(L) \\
 & \searrow + & \downarrow + \\
 & & p^+ j_! j^* L.
 \end{array}$$

En ce qui concerne le noyau de $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L)$, en vertu de la suite exacte dans \mathcal{C} :

$$0 \rightarrow i_* p^! L \rightarrow L \rightarrow p j_! j^* L \rightarrow i_* p \mathcal{H}^1 i^! L \rightarrow 0,$$

on en déduit qu'il est isomorphe à $i_* p^! L$. On résume cette construction par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{gr}_{U,*,1}(L) \subset & \xrightarrow{\quad + \quad} & p^+ j_! j^* L \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 i_* p^! L \subset & \xrightarrow{\quad + \quad} & L \twoheadrightarrow & \text{CoFil}_{U,*,0}(L) \subset & \xrightarrow{\quad + \quad} & p j_! j^* L \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{CoFil}_{U,*,1}(L) \subset & \xrightarrow{\quad + \quad} & Q_L = & p \mathcal{H}_{\text{libre}}^0 i^* j_! j^* L
 \end{array}$$

avec $\text{CoFil}_{U,*,0}(L) \simeq D\left(\text{Fil}_{U,1}^0(D(L))\right)$ et $\text{CoFil}_{U,*,1}(L) \simeq D\left(\text{Fil}_{U,1}^{-1}(D(L))\right)$.

2.1.5. DÉFINITION. — La cofiltration $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L)$ est dite saturée si $\text{can}_{*,L}$ est strict, i.e. si les coimages de la définition 2.1.4 sont égales aux images.

Remarque. — Le lecteur notera que p_L étant strict si $\text{can}_{*,L}$ est strict alors $p_L \circ \text{can}_{*,L}$ aussi. L'auteur préférant les filtrations aux cofiltrations, on utilisera la définition suivante.

2.1.6. DÉFINITION. — Pour $\delta = 0, 1$, on note $\text{Fil}_{U,*}^\delta(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,\delta}(L))$, i.e.

$$\text{Fil}_{U,*}^0(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{*,L}) \quad \text{et} \quad \text{Fil}_{U,*}^1(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(p_L \circ \text{can}_{*,L}).$$

On obtient ainsi une \mathcal{F} -filtration $\text{Fil}_{U,*}^0(L) \hookrightarrow \text{Fil}_{U,*}^1(L) \hookrightarrow L$.

Remarque. — De la même façon la filtration $\text{Fil}_U^{-1}(L) \subset \text{Fil}_U^0(L) \subset L$ définit une \mathcal{F} -cofiltration

$$L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,!,-1}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,! ,0}(L)$$

avec $\text{CoFil}_{U,!,-1}(L) := L / \text{Fil}_{U,!}^{-1}(L)$ et $\text{Fil}_{U,! ,0}(L) := L / \text{Fil}_{U,!}^0(L)$. La dualité de Verdier-Grothendieck échange ces notions, i.e. pour $\delta = 0, 1$ on a $\text{Fil}_{U,*}^\delta(L) \simeq D\left(\text{CoFil}_{U,!,-\delta}(D(L))\right)$ et $\text{Fil}_{U,!}^\delta(L) \simeq D\left(\text{CoFil}_{U,* ,\delta}(D(L))\right)$.

2.2. Filtration et cofiltration de stratification. — Traitons à présent le cas général où la stratification \mathfrak{S} admet éventuellement plus de deux strates, i.e. $e \geq 2$. Pour tout $1 \leq h < e$, on notera $X^{1 \leq h} := X^{\geq 1} - X^{\geq h+1}$ et $j^{1 \leq h} : X^{1 \leq h} \hookrightarrow X^{\geq 1}$ l'inclusion correspondante.

2.2.1. DÉFINITION. — Pour L un objet de \mathcal{F} et $1 \leq r \leq e - 1$, soit

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \text{Im}_{\mathcal{F}}\left({}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L \right).$$

2.2.2. PROPOSITION. — La définition précédente munit fonctoriellement tout objet L de \mathcal{F} d'une \mathcal{F} -filtration, au sens de 1.3.9, dite de \mathfrak{S} -stratification

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^2(L) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{e-1}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^e(L) = L.$$

Démonstration. — Par construction les $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ et $L / \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ sont des objets de \mathcal{F} . En outre comme $j^{1 \leq r-1,*} \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) \simeq j^{1 \leq r-1,*} L$, le morphisme d'adjonction ${}^{p+}j_!^{1 \leq r-1} j^{1 \leq r-1,*} L \longrightarrow L$ se factorise par $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) & \\ & \swarrow & \downarrow \\ \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) & \hookrightarrow & L \end{array}$$

de sorte que $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \longrightarrow \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ est un monomorphisme strict. □

2.2.3. DÉFINITION. — On dira que L est \mathfrak{S}_1 -saturé si pour tout $1 \leq r \leq e - 1$, le morphisme d'adjonction ${}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L$ est strict, i.e. si $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}\left({}^{p+}j_!^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L \longrightarrow L \right)$. Autrement dit si pour tout $1 \leq r \leq e - 1$, ${}^p i_{r+1}^* L$ est un objet de \mathcal{F} .

Remarque. — $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)$ étant construit, on peut aussi obtenir $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ comme suit. Le quotient $L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)$ est à support dans $X^{\geq r}$ et on considère $i_{r,*} \text{Fil}_{X=r,!}^0(L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L))$ au sens de la définition 2.1.1 pour $U = X^=r \hookrightarrow X^{\geq r}$. Soit alors $\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L) & \hookrightarrow & \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L) & \dashrightarrow & i_{r,*} \text{Fil}_{X=r,!}^0(L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)) \end{array}$$

Par construction $p^+ \mathcal{H}^0 i_r^* (\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L))$ est nul et donc $p^+ \mathcal{H}^0 i_{r+1}^* (\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L))$ aussi. Ainsi la nullité de $p^+ \mathcal{H}^0 i_{r+1}^* (i_{r,*} \text{Fil}_{X=r,!}^0(L/\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)))$ implique celle de $p^+ \mathcal{H}^0 i_{r+1}^* \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ de sorte que $\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ est la coimage du morphisme d'adjonction $p^+ j_!^{\geq r} j^{\geq r,*} (\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)) \rightarrow \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$. En prenant le $j^{1 \leq r,*}$ du diagramme précédent, on en déduit que $j^{1 \leq r,*} L \simeq j^{1 \leq r,*} \widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$ de sorte que $\widetilde{\text{Fil}}_{\mathfrak{S},!}^r(L) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$.

2.2.4. DÉFINITION. — Pour L un objet de \mathcal{F} et $1 \leq r \leq e - 1$, soit

$$\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L) = \text{Coim}_{\mathcal{F}}(L \rightarrow p_j^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L).$$

2.2.5. PROPOSITION. — La définition précédente munit fonctoriellement tout objet L de \mathcal{F} d'une \mathcal{F} -cofiltration dite de \mathfrak{S} -stratification

$$L = \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,e}(L) \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,e-1}(L) \rightarrow \dots \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,1}(L) \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,0}(L) = 0.$$

Remarque. — Comme précédemment, on peut construire cette cofiltration de manière itérative. Supposons construit $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L)$ et notons $K_r = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L \dashrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L))$ à support dans $X^{\geq r}$. Soient alors $K_r \dashrightarrow i_{r,*} \text{CoFil}_{X=r,*,0}(K_r)$ et le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccc} K_r & \hookrightarrow & L & \twoheadrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ i_{r,*} \text{CoFil}_{X=r,*,0}(K_r) & \dashrightarrow & \widetilde{\text{CoFil}}_{\mathfrak{S},*,r}(L) & \twoheadrightarrow & \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r-1}(L). \end{array}$$

Comme précédemment on montre que $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L) \simeq \widetilde{\text{CoFil}}_{\mathfrak{S},*,r}(L)$.

2.2.6. DÉFINITION. — Pour tout $0 \leq r \leq e$, on note

$$\text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) := \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)),$$

i.e. $\text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(\text{can}_{*,L} : L \rightarrow {}^p j_*^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} L)$. On obtient ainsi une \mathcal{F} -filtration

$$0 = \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-e}(L) \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{1-e}(L) \subset \dots \subset \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^0(L) = L$$

dont on note $\text{gr}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L)$ les gradués. On dit que L est \mathfrak{S}_* -saturé si pour tout $1 \leq r \leq e - 1$, l'épimorphisme $L \rightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)$ est strict.

Remarque. — On peut aussi définir la cofiltration $\text{CoFil}_{\mathfrak{S},!, -r}(L) := L / \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(L)$. Comme précédemment la dualité de Verdier échange ces notions, i.e. $D(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},!, -r}(L)) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(D(L))$, et $D(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)) \simeq \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^r(D(L))$.

2.3. Filtrations exhaustives de stratification. — Dans ce paragraphe on cherche à raffiner les filtrations du paragraphe précédent de façon à obtenir la filtration la plus fine possible « adaptée » à la stratification \mathfrak{S} au sens suivant.

2.3.1. DÉFINITION. — Un faisceau pervers $L \in \text{FPL}(X, \Lambda)$ est dit *adapté à la stratification* \mathfrak{S} s'il existe $1 \leq h \leq e$ tel que $L \simeq i_{h,*} i_h^* L$ et que le morphisme d'adjonction $j_!^{\geq h} j^{\geq h,*} (i_h^* L) \rightarrow i_h^* L$ induit un bimorphisme ${}^p j_{!*}^{=h} j^{=h,*} L \hookrightarrow_+ L$ où l'on rappelle que $i_{h,*} = i_{h,!} = {}^p i_{h,!*} = {}^{p+} i_{h,!*}$ et $j^{=h} := i_h \circ j^{\geq h}$. Une \mathcal{F} -filtration sera dite *adaptée* à \mathfrak{S} si tous ses gradués le sont.

Remarque. — Les filtrations $\text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^\bullet$ et $\text{Fil}_{\mathfrak{S},*}^\bullet$ du paragraphe précédent ne sont, en général, pas adaptées à \mathfrak{S} . Une façon d'y remédier serait de les combiner en considérant les $\text{gr}_{\mathfrak{S},*}^{i_1} \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{j_1} \dots \text{gr}_{\mathfrak{S},*}^{i_e} \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^{j_e}(L)$. Une autre, plus simple, consiste à utiliser les $\text{Fil}_{U,!}^{-1}$ du §2.1.

6. NOTATION. — Pour $e \geq 2$ et $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$, on note $v_{2,e}(r)$ la valuation 2-adique de r i.e. $r = 2^{v_{2,e}(r)} m$ avec m impair et on pose $v_{2,e}(0) = e - 1$.

2.3.2. PROPOSITION. — Étant donnée une stratification $\mathfrak{S} = \{X = X^{\geq 1} \supseteq \dots \supseteq X^{\geq e}\}$ de X , tout objet L de $\text{FPL}(X, \Lambda)$ est muni fonctoriellement d'une \mathcal{F} -filtration dite *exhaustive de \mathfrak{S} -stratification adaptée à \mathfrak{S}* au sens de la définition précédente

$$0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}}(L) \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-1}+1}(L) \subset \dots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \subset \dots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-1}-1}(L) = L,$$

telle que pour tout $|r| < 2^{e-1}$, il existe $P_r \in \text{FPL}(X^{=e-v_2(r)}, \Lambda)$ tel que $\text{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(L) := \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r(L)/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{r-1}(L)$ s'inscrive dans un diagramme commutatif de bimorphismes

$$\begin{array}{ccc}
 {}^{p}j_{!*}^{j=e-v_2(r)} P_r & \xrightarrow{+} & {}^{p+}j_{!*}^{j=e-v_2(r)} P_r \\
 \searrow + & & \swarrow + \\
 & \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^r(L) &
 \end{array}$$

Démonstration. — On va montrer le résultat par récurrence sur e , le cas $e = 2$ étant donné par la construction $\text{Fil}_{U,!}^{-1}(L) \hookrightarrow \text{Fil}_{U,!}^0(L) \hookrightarrow \text{Fil}_{U,!}^1(L) := L$ du §2.1. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $e - 1$ et traitons le cas de e . Partant d'un objet L de $\text{FPL}(X, \Lambda)$, on note $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) := \text{Fil}_{\mathfrak{S},!}^1(L) = \text{Fil}_{X=1}^0(L)$ et $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L) = \text{Fil}_{X=1}^{-1}(L)$ où le gradué $\text{gr}_{\mathfrak{S},!}^0(L) := \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)$ « factorise » le morphisme canonique ${}^{p}j_{!*}^{\geq 1}(j^{\geq 1,*}L) \hookrightarrow {}^{p+}j_{!*}^{\geq 1}(j^{\geq 1,*}L)$, i.e.

$$\begin{array}{ccc}
 {}^{p}j_{!*}^{\geq 1}(j^{\geq 1,*}L) & \xrightarrow{+} & {}^{p+}j_{!*}^{\geq 1}(j^{\geq 1,*}L) \\
 \searrow + & & \swarrow + \\
 & \text{gr}_{\mathfrak{S},!}^0(L) &
 \end{array}$$

Comme $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)$ (resp. $L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)$) est à support dans $X^{\geq 2}$, muni de la stratification $\mathfrak{S}^1 := \{X^{\geq 2} \supseteq \dots \supseteq X^{\geq e}\}$, il est, d'après l'hypothèse de récurrence, muni d'une filtration

$$0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-2}}(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)) \subset \dots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)) \subset \dots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-2}-1}(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L)) = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-1}(L),$$

$$\text{(resp. } 0 = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-2}}(L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)) \subset \dots \subset \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-2}-1}(L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)) = L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L).\text{)}$$

Pour tout $|r| < 2^{e-2}$, on pose $\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{-2^{e-2}+r}(L) = \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r(\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L))$ ainsi que le tiré en arrière :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L) & \longrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^{2^{e-2}+r}(L) & \dashrightarrow & \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r(L/\text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^0(L)) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

En notant que pour $|r| < 2^{e-2}$, $v_{2,e}(r) = v_{2,e}(\pm 2^{e-2} + r)$, on voit que la propriété sur les gradués est clairement vérifiée. \square

2.3.3. DÉFINITION. — On dira que L est exhaustivement $\mathfrak{S}_!$ -saturé si dans la construction précédente tous les morphismes d'adjonction considérés $\text{can}_{!,P_r}$ sont stricts, cf. 2.1.3.

Remarque. — Comme précédemment, en utilisant les $L' \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,0}(L') \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{U,*,1}(L')$, on construit une cofiltration exhaustive de \mathfrak{S} -stratification

$L = \text{CoFill}_{\mathfrak{S},*,2^{e-1}}(L) \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{\mathfrak{S},*,2^{e-1}-1}(L) \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{\mathfrak{S},*, -2^{e-1}}(L) = 0$
 vérifiant des propriétés analogues à celles de la proposition précédente.

2.3.4. DÉFINITION. — Avec les notations précédentes, pour tout $|r| < 2^{e-1}$,

$$\text{Fill}_{\mathfrak{S},*}^{-r}(L) = \text{Ker}_{\mathcal{F}}(L \twoheadrightarrow \text{CoFill}_{\mathfrak{S},*,r}(L))$$

définit une \mathcal{F} -filtration dont on note $\text{grr}_{\mathfrak{S},*}^r(L)$ les gradués. Cette filtration sera dite \mathfrak{S}_* -saturée si les épimorphismes $L \twoheadrightarrow \text{CoFil}_{\mathfrak{S},*,r}(L)$ sont stricts.

Remarque. — Comme précédemment la dualité de Verdier échange filtrations et cofiltrations, i.e. $D(\text{CoFill}_{\mathfrak{S},*,r}(L)) \simeq \text{Fill}_{\mathfrak{S},!}^r(D(L))$ et $D(\text{CoFil}_{\mathfrak{S},!,r}(L)) \simeq \text{Fill}_{\mathfrak{S},*}^r(D(L))$. En particulier si $L \simeq D(L)$ est autodual, alors il est $\mathfrak{S}_!$ -saturé si et seulement s'il est \mathfrak{S}_* -saturé.

Remarque. — Pour \mathbb{O} un anneau de coefficients, soit $L_0 \hookrightarrow L_1$ un monomorphisme strict de $\text{FPL}(X, \mathbb{O})$ dont le conoyau est de la forme $\bar{i}_*^p j_{!*} P \hookrightarrow L_1/L_0 \hookrightarrow \bar{i}_*^{p+j} j_{!*} P$ où $j : U \hookrightarrow \bar{U}$ est une inclusion ouverte et $i : \bar{U} \hookrightarrow X$ est une immersion fermée. On suppose donné $G \in \text{FPL}(X, \mathbb{O})$ tel que $\bar{i}_*^p j_{!*} P \hookrightarrow G \hookrightarrow \bar{i}_*^{p+j} j_{!*} P$. Comme d'après le lemme 1.3.8, \hookrightarrow est une relation d'équivalence et que L_1/L_0 et G sont équivalents à $\bar{i}_*^p j_{!*} P$, il existe une flèche $G \hookrightarrow L_1/L_0$ de sorte que le tiré en arrière

$$\begin{array}{ccccc} L_0 & \hookrightarrow & L'_1 & \dashrightarrow & G \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ L_0 & \longrightarrow & L_1 & \twoheadrightarrow & L_1/L_0 \end{array}$$

fournit un objet $L'_1 \hookrightarrow L_1$ munit d'une \mathcal{F} -filtration $L_0 \subset L'_1$ dont on a modifié « la position » du gradué L'_1/L_0 par rapport à celle de L_1/L_0 . Plus généralement le lecteur se convaincra qu'étant donnés :

- un objet L de \mathcal{F} dont la filtration de \mathfrak{S} -stratification exhaustive fournit pour tout $r \in \mathbb{Z}$ tel que $|r| < 2^{e-1}$ des faisceaux pervers P_r sur $X^{=e-v_2(r)}$ et ${}^p j_{!*}^{=e-v_2(r)} P_r \hookrightarrow \text{grr}_{\mathfrak{S}}^r(L) \hookrightarrow {}^{p+j} j_{!*}^{=e-v_2(r)} P_r$,
- pour tout $|r| < 2^{e-1}$ des ${}^p j_{!*}^{=e-v_2(r)} P_r \hookrightarrow G_r \hookrightarrow {}^{p+j} j_{!*}^{=e-v_2(r)} P_r$,

on peut construire L' dont les gradués de la filtration exhaustive sont les G_r .

3. Faisceaux pervers sur les variétés de Shimura simples

Désormais nous nous placerons dans le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$; le but de ce paragraphe est d'expliciter les constructions précédentes sur le faisceaux pervers des cycles évanescents des variétés de Shimura simples de [7].

3.1. Rappels sur les représentations de $GL_n(K)$. — Dans la suite K désigne un corps local non archimédien dont le corps résiduel est de cardinal q une puissance de p et on rappelle quelques notations de [2] sur les représentations admissibles de $GL_n(K)$ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ où l un nombre premier distinct de p .

7. NOTATION. — Une racine carrée $q^{\frac{1}{2}}$ de q dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ étant fixée, pour $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, nous noterons $\pi\{k\}$ la représentation tordue de π de sorte que l'action d'un élément $g \in GL_n(K)$ est donnée par $\pi(g)\nu(g)^k$ avec $\nu : g \in GL_n(K) \mapsto q^{-\text{val}(\det g)}$.

3.1.1. DÉFINITION. — Pour (π_1, V_1) et (π_2, V_2) des R -représentations de respectivement $GL_{n_1}(K)$ et $GL_{n_2}(K)$, et P_{n_1, n_2} le parabolique standard de $GL_{n_1+n_2}$ de Levi $M = GL_{n_1} \times GL_{n_2}$, on notera

$$\pi_1 \times \pi_2 := \text{ind}_{P(K)}^{GL_{n_1+n_2}(K)} \pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\}.$$

On rappelle qu'une représentation irréductible admissible π de $GL_n(K)$ est dite *cuspidale* si elle n'est pas un sous-quotient d'une induite parabolique propre. Pour g un diviseur de $d = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(K)$, l'induite parabolique

$$\pi\left\{\frac{1-s}{2}\right\} \times \pi\left\{\frac{3-s}{2}\right\} \times \cdots \times \pi\left\{\frac{s-1}{2}\right\}$$

possède un unique quotient (une unique sous-représentation) irréductible noté $\text{St}_s(\pi)$ (resp. $\text{Speh}_s(\pi)$). D'après [12] 2.10, l'induite parabolique $\text{St}_{s-t}(\pi\{-\frac{t}{2}\}) \times \text{Speh}_t(\pi\{\frac{s-t}{2}\})$ admet une unique sous-représentation irréductible que l'on note $LT_\pi(s, t)$. Afin d'éviter d'avoir à écrire systématiquement toutes ces torsions, on introduit la notation suivante.

8. NOTATION. — Un entier $g \geq 1$ étant fixé, pour π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{t_1g}(K)$ et $GL_{t_2g}(K)$, on notera

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 = \pi_1\left\{-\frac{t_2}{2}\right\} \times \pi_2\left\{\frac{t_1}{2}\right\}.$$

3.2. Variétés de Shimura unitaires simples. — Soit $F = F^+E$ un corps CM avec E/\mathbb{Q} quadratique imaginaire pure, dont on fixe un plongement réel $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Dans [7], les auteurs justifient l'existence d'un groupe unitaire G_τ vérifiant les points suivants :

- $G_\tau(\mathbb{R}) \simeq U(1, d - 1) \times U(0, d)^{r-1}$;
- $G_\tau(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{\text{op}})^\times$ où $v = v_1, v_2, \dots, v_r$ sont les places de F au dessus de la place u de E telle que $p = u^c u$ et où B est une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 vérifiant certaines propriétés, cf. [7], dont en particulier d'être soit décomposée soit une algèbre à division en toute place et décomposée à la place v .

Pour tout sous-groupe compact U^p de $G_\tau(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, on pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\theta_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\theta_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times)$$

3.2.1. DÉFINITION. — Pour U^p « assez petit »⁽²⁾ soit $X_{U^p(m)}$ « la variété de Shimura associée à G » construite dans [7]. On notera \mathcal{J} l'ensemble de ces U^p .

On note \mathcal{J} l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts « assez petits » de G , de la forme $U^p(m)$ et donc muni d'une application $m_1 : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{N}$.

Pour tout $I \in \mathcal{J}$, X_I est un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$; les $(X_I)_{I \in \mathcal{J}}$ forment un système projectif noté simplement $X_{\mathcal{J}}$ muni d'une action par correspondance de $G_\tau(\mathbb{A}^\infty)$, où les morphismes de restriction du niveau $g_{J,I}$ sont finis et plats et même étale si $m_1(I) = m_1(J)$.

3.2.2. DÉFINITION (cf. [2] §1.3). — Pour tout $1 \leq h \leq d$, $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$ (resp. $X_{I,\bar{s}}^{=h}$) désigne la strate fermée (resp. ouverte) de Newton de hauteur h de la fibbre spéciale géométrique $X_{I,\bar{s}}$ de X_I , i.e. le sous-schéma dont la partie connexe du groupe de Barsotti-Tate en chacun de ses points géométriques est de rang $\geq h$ (resp. égal à h).

3.2.3. PROPOSITION (cf. [9]). — Les $X_{I,\bar{s}}^{=h}$ sont affines de pure dimension $d - h$.

⁽²⁾ Tel qu'il existe une place x pour laquelle la projection de U^p sur $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contienne aucun élément d'ordre fini autre que l'identité, cf. [7] bas de la page 90.

Remarque. — Ces $X_{\mathcal{J},\bar{s}}^{\geq h}$ munissent $X_{\mathcal{J},\bar{s}}$ d'une stratification \mathfrak{S} dite de Newton qui sera la seule considérée de sorte que l'on fera disparaître le symbole \mathfrak{S} de toutes les notations.

3.2.4. PROPOSITION (cf. [7, p. 116]). — *Pour tout $1 \leq h < d$, les strates $X_{I,\bar{s}}^=h$ sont géométriquement induites sous l'action du parabolique $P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v)$, au sens où il existe un sous-schéma fermé $X_{I,\bar{s},1}^=h$ tel que :*

$$X_{I,\bar{s}}^=h \simeq X_{I,\bar{s},1}^=h \times_{P_{h,d-h}(\mathcal{O}_v/v^{m_1(I)})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1(I)}).$$

9. NOTATION. — *On notera $X_{I,\bar{s},1}^{\geq h}$ l'adhérence de $X_{I,\bar{s},1}^=h$ dans $X_{I,\bar{s}}^{\geq h}$.*

Remarque. — L'action de $P_{h,d-h}(F_v)$ sur $X_{\mathcal{J},\bar{s},1}^=h$ se factorise par l'application $\begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix} \mapsto (v(\det g_v^c), g_v^{et})$. En outre l'action d'un élément $w_v \in W_v$ est donnée par celle de $-\deg(w_v)$ sur le facteur \mathbb{Z} ci-dessus, où \deg est la composée du caractère non ramifié de W_v , qui envoie les Frobenius géométriques sur les uniformisantes, avec la valuation v de F_v .

10. NOTATION. — *On notera comme précédemment*

$$i_h : X_{\mathcal{J},\bar{s}}^{\geq h} \hookrightarrow X_{\mathcal{J},\bar{s}} = X_{\mathcal{J},\bar{s}}^{\geq 1}, \quad j^{\geq h} : X_{\mathcal{J},\bar{s}}^=h \hookrightarrow X_{\mathcal{J},\bar{s}}^{\geq h}, \\ j_1^{\geq h} : X_{\mathcal{J},\bar{s},1}^=h \hookrightarrow X_{\mathcal{J},\bar{s},1}^{\geq h} \text{ et } j^=h := i_h \circ j^{\geq h}.$$

3.3. **Systèmes locaux d'Harris-Taylor.** — Soit $D_{v,d}$ l'algèbre à division centrale sur F_v d'invariant $1/d$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{v,d}$. À toute représentation irréductible admissible τ_v de $\mathcal{D}_{v,h}^\times$, Harris et Taylor associent un système local $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{J},1}$ sur $X_{\mathcal{J},\bar{s},1}^=h$ muni d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_{h,d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{\text{op}})^\times \times \mathbb{Z}$ qui d'après [7] p.136, se factorise par $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty)/\mathcal{D}_{F_v,h}^\times$ via

$$(3.3.1) \quad (g^{\text{op},p}, g_{p,0}, c, g_v, g_{v_i}, k) \mapsto (g^{p,\infty}, g_{p,0} q^{k-v(\det g_v^c)}, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta).$$

où $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-h}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{\text{op}})^\times \times D_{F_v,h}^\times$, et où $g_v = \begin{pmatrix} g_v^c & * \\ 0 & g_v^{et} \end{pmatrix}$ et $\delta \in D_{v,h}^\times$ sont tels que $v(\text{rn}(\delta)) = k + v(\det g_v^c)$. On note $\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{J}}$ le faisceau sur $X_{\mathcal{J},\bar{s}}^=h$ induit

$$\mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{J}} := \mathcal{F}_{\tau_v,\mathcal{J},1} \times_{P_{h,d-h}(F_v)} GL_d(F_v).$$

11. NOTATION. — *Toute représentation irréductible τ_v de $D_{v,h}^\times$ est l'image par la correspondance de Jacquet-Langlands locale d'une représentation de la forme $\text{St}_t(\pi_v)$ où π_v est une représentation irréductible admissible cuspidale de*

$GL_g(F_v)$ avec $h = tg$. On la notera $\pi_v[t]_D$ et pour $(\pi_v[t]_D)|_{\mathcal{D}_{v,h}^\times} = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ avec $\rho_{v,i}$ irréductible, soient

$$\mathcal{F}(\pi_v, t)_1 = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathcal{F}_{\rho_{v,i}, \mathcal{J}, 1} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\pi_v, t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)_1 \times_{P_{tg, d-tg}(F_v)} GL_d(F_v)$$

le faisceau sur $X_{\mathcal{J}, \bar{s}, 1}^{-tg}$ et sa version induite sur $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{-tg}$.

3.3.2. DÉFINITION (Systèmes locaux dits d’Harris-Taylor)

Pour Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, on note

$$HT(\pi_v, \Pi_t) := \mathcal{F}(\pi_v, t)[d - tg] \otimes \Xi^{\frac{tg-d}{2}} \otimes \Pi_t,$$

où l’action se déduit par induction par celle de $(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{ct}, g_{v_i}, g_v^c, \sigma)$ dans

$$G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_{d-tg}(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{\text{op}})^\times \times GL_{tg}(F_v) \times W_v$$

sur le faisceau non induit, où le radical unipotent de $P_{tg, d}(F_v)$ agit trivialement, g_v^c agit sur Π_t et pour $\gamma \in D_{v, tg}^\times / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$ tel que $v(\text{rn}\gamma) = v(\det g_v^c) - \text{deg } \sigma$,

$$(g^p, g_{p,0} q^{-c+v(\det g_v^c) - \text{deg } \sigma}, \gamma, g^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^\infty) / \mathcal{D}_{v, tg}^\times$$

agit sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$.

Remarque. — Les $\mathcal{F}(\pi_v, t)$ n’étant pas irréductibles, $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ n’est pas irréductible.

Soit alors π_v une représentation irréductible admissible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et on note $s = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$. Pour tout $1 \leq t \leq s$, considérons la filtration de stratification du §2.2

$$0 = \text{Fil}_*^{-d}(\pi_v, \Pi_t) \subset \text{Fil}_*^{1-d}(\pi_v, \Pi_t) \subset \dots \subset \text{Fil}_*^0(\pi_v, \Pi_t) = j_1^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t).$$

3.3.3. PROPOSITION. — La filtration $\text{Fil}_*^\bullet(\pi_v, \Pi_t)$ est adaptée à la stratification de Newton au sens de la définition 2.3.1. Ses gradués $\text{gr}_*^{-r}(\pi_v, \Pi_t) := \text{Fil}_*^{-r}(\pi_v, \Pi_t) / \text{Fil}_*^{-r-1}(\pi_v, \Pi_t)$ sont tous nuls sauf pour $r = kg - 1$ pour $t \leq k \leq s$ auquel cas

$$\text{gr}_*^{1-kg}(\pi_v, \Pi_t) \simeq j_{!*}^{-kg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{k-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{(t-k)/2}.$$

Démonstration. — On rappelle que d’après [2] proposition 4.3.1 et corollaire 5.4.1, pour tout $1 \leq t \leq s$, les constituants simples de $j_1^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ sont les

$$P_k := j_{!*}^{-kg} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_{k-t}(\pi_v)) \otimes \Xi^{(t-k)/2},$$

pour $t \leq k \leq s$. Pour tout $tg \leq r \leq d$, l’image $\text{CoFil}_{\mathfrak{S}, *, r}(\pi_v, \Pi_t)$ du morphisme d’adjonction

$$j_1^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) = p_j^{1 \leq r} j_1^{1 \leq r, *} (j_1^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \longrightarrow p_j^{1 \leq r} j_1^{1 \leq r, *} (j_1^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$$

est, par définition de la notion d'extension intermédiaire,

$$j_{1*}^{1 \leq r} j^{1 \leq r,*} (j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t)).$$

Comme le noyau de ce morphisme d'adjonction est à support dans $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\geq r+1}$, on en déduit que l'image de $\text{CoFil}_{\mathcal{S}, *, r}(\pi_v, \Pi_t)$ dans le groupe de Grothendieck est supérieure ou égale à $\sum_{k=t}^{\lfloor \frac{r}{g} \rfloor} P_k$ et l'énoncé consiste à montrer l'égalité. Soit alors k_0 maximal tel que P_{k_0} et $\text{CoFil}_{\mathcal{S}, *, r}(\pi_v, \Pi_t)$ aient un constituant Z en commun lequel sera donc pur de poids $t - k_0$ puisque les P_k sont purs de poids $t - k$. La filtration par les poids de $\text{CoFil}_{\mathcal{S}, *, r}(\pi_v, \Pi_t)$ nous donne alors que Z est un facteur direct du socle de $\text{CoFil}_{\mathcal{S}, *, r}(\pi_v, \Pi_t)$. Or celui-ci est le $j_{1*}^{1 \leq r}$ du socle de $j^{1 \leq r,*} (j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$, et donc somme directe de certains P_k pour $1 \leq k \leq \lfloor \frac{r}{g} \rfloor$ de sorte que $k_0 = \lfloor \frac{r}{g} \rfloor$ et $Z = P_{k_0}$. \square

Remarque. — Le raisonnement précédent se généralise au cas d'un faisceau pervers dont les constituants irréductibles sont ordonnés simultanément par la dimension de leur support et leur poids, i.e. ceux dont la dimension du support est la plus grande sont ceux de plus haut poids. Dualement si ceux de plus haut poids sont ceux dont la dimension du support est minimale, le raisonnement précédent s'adapte aux $\text{Fil}_!^\bullet$.

3.3.4. PROPOSITION. — *La filtration de stratification $\text{Fil}_!^\bullet(\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t))$ de*

$$\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t) = \text{Ker}_{\mathcal{G}}(j_!^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{1*}^{-tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$$

est triviale, i.e. tous ses gradués sont nuls sauf $\text{gr}_1^{(t+1)g}(\text{Fil}_^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)) \simeq \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$.*

Démonstration. — Il s'agit donc de montrer que le morphisme d'adjonction

$$j_!^{=(t+1)g} j^{=(t+1)g,*} (\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)) \longrightarrow \text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t)$$

est surjectif. Raisonnons par l'absurde et soit $k_0 \geq t + 2$ minimal tel que, avec les notations précédentes, P_{k_0} et le conoyau de ce morphisme d'adjonction aient un constituant Z en commun. Ainsi Z est un facteur direct de $j^{1 \leq k_0 g,*} (\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t))$, puisqu'il est, par construction, un quotient, et un sous-objet via la filtration par les poids. Pour z un point générique de $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{=k_0 g}$, on en déduit donc que la fibre en z de $\mathcal{H}^{-\dim z}(\text{Fil}_*^{-tg}(\pi_v, \Pi_t))$ est non nulle. Comme la fibre en z de $\mathcal{H}^{-\dim z} j_!^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est nulle, on en déduit alors que la fibre en z de $\mathcal{H}^{-\dim z - 1} j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est non nulle ce qui, comme $k_0 \geq t + 2$, contredit le résultat principal de [2] que nous rappelons au théorème 3.3.5 ci-après. \square

Remarque. — On pourrait montrer de même que $\text{Fil}_!^p(\text{Fil}_*^q(\pi_v, \Pi_t))$ est soit nul soit égal à $\text{Fil}_*^q(\pi_v, \Pi_t)$.

3.3.5. THÉORÈME (cf. [2] théorème 2.2.5). — *La fibre en un point générique de $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\leq h}$ de $\mathcal{H}^i j_{!*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ est nulle sauf pour $(h, i) = ((t+r)g, (t+r)g - d - r)$ avec $0 \leq r \leq \lfloor \frac{d}{g} \rfloor - t$. Dans ce cas, dans le groupe de Grothendieck des représentations de $GL_{(t+r)g}(F_v) \times \mathbb{Z}$, elle est un multiple de $\Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_r(\pi_v) \otimes \Xi^{-\frac{(t+r)g-d-r}{2}}$.*

Remarque. — Au §A.2, nous proposerons une démonstration cohomologique de la proposition précédente ainsi qu’une nouvelle preuve du théorème ci-dessus.

En itérant la proposition précédente, dans la filtration exhaustive de stratification

$$0 = \text{Fill}_!^{2^{d-1}}(\pi_v, \Pi_t) \subset \dots \subset \text{Fill}_!^0(\pi_v, \Pi_t) \subset \dots \subset \text{Fill}_!^{2^{d-1}}(\pi_v, \Pi_t) = j_!^{\leq tg} HT(\pi_v, \Pi_t),$$

l’ordre d’apparition des P_k est aussi donné par les poids. Les indices précis des gradués non triviaux étant plus complexes nous aurons besoin des notations suivantes.

12. NOTATION. — *Pour tout $h \geq 2$ on note $r_h = 2^{d-2} + \dots + 2^{d-h}$ et on pose $r_1 = 0$. Pour $k \geq 1$ on note $\delta_k(g) = \sum_{i=1}^k 2^{-ig}$ et on pose $\delta_0 = 0$.*

3.3.6. COROLLAIRE. — *Les gradués $\text{grr}_!^r(\pi_v, \Pi_t) := \text{Fill}_!^r(\pi_v, \Pi_t) / \text{Fill}_!^{r-1}(\pi_v, \Pi_t)$ sont tous nuls sauf ceux de la forme $r = r_{tg} - 2^{d-t} \delta_k(g)$ pour $k = 0, \dots, s-1$ auquel cas*

$$\text{grr}_!^{r_{tg} - 2^{d-t} \delta_k(g)}(\pi_v, \Pi_t) \simeq j_{!*}^{=(t+k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-k/2}.$$

Remarque. — En utilisant que l’extension intermédiaire est le top de l’extension par zéro, on notera que $\text{Fil}_*^\bullet(\pi_v, \Pi_t)$ et $\text{Fill}_!^\bullet(\pi_v, \Pi_t)$ coïncident, à la numérotation près, avec la filtration par les socles de $j_!^{\leq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$.

3.4. Faisceau pervers de Hecke des cycles proches

3.4.1. DÉFINITION. — Pour tout $J \in \mathcal{J}$, les faisceaux pervers des cycles évanescents $R\Psi_{\bar{\eta}_v, J}(\overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1](\frac{d-1}{2})$ sur $X_{J, \bar{s}}$ définissent un W_v -faisceau pervers de Hecke, au sens de la définition 1.3.6 de [2], que l’on note $\Psi_{\mathcal{J}}$.

Remarque. — Dans [2] §2.2, on utilise l'action de la monodromie pour découper $\Psi_{\mathcal{J}}$

$$\Psi_{\mathcal{J}} = \bigoplus_{\substack{1 \leq g \leq d \\ \pi_v \in \text{Cusp}_v(g)}} \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$$

où $\text{Cusp}_v(g)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielles, cf. définition 1.1.3 de [2], des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$.

3.4.2. DÉFINITION (Faisceau pervers dits d'Harris-Taylor)

On note $P(t, \pi_v)$ le W_v -faisceaux pervers de Hecke sur $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\geq 1}$ de support $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\geq h}$ et de poids zéro défini par

$$j_{!*}^{\text{--}tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes \mathcal{L}(\pi_v),$$

où \mathcal{L}^{\vee} est la correspondance de Langlands, cf. [7] et où l'action de $G(\mathbb{A}^{\infty}) \times W_v$ sur $P(t, \pi_v)$ se définit par induction en faisant agir

$$(g^p, g_{p,0}, g_v^c, g_v^{et}, g_{v_i}, \sigma) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{\text{op}})^{\times} \times W_v$$

via l'action de :

- $(g^p, g_{p,0} q^{-\text{deg } \sigma}, \gamma, g_v^{et}, g_{v_i}) \in G^{(tg)}(\mathbb{A}^{\infty}) / \mathcal{D}_{v, tg}^{\times}$ sur $\mathcal{F}(t, \pi_v)$ où $\gamma \in D_{v, tg}^{\times}$ est tel que $v(\text{rd}) = v(\det g_v^c) - \text{deg } \sigma$;
- (g_v^c, σ) sur $\text{St}_t(\pi_v) \otimes \mathcal{L}(\pi_v)$.

Remarque. — On notera que $P(t, \pi_v)$ ne dépend, en tant que W_v -faisceau pervers de Hecke, que de la classe d'équivalence inertielle de π_v . D'après la remarque qui suit le théorème 2.4.4 de [2], les faisceaux pervers d'Harris-Taylor $P(t, \pi_v)$ sont de la forme $e_{\pi_v} \mathcal{P}(t, \pi_v)$ où $\mathcal{P}(t, \pi_v)$ est un faisceau pervers simple, où e_{π_v} est le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de π_v , cf. loc. cit. définition 1.1.3. Pour ce qui concerne les groupes de Grothendieck de faisceaux pervers dits de Hecke, on renvoie le lecteur au §7 de [2].

3.4.3. PROPOSITION. — *Soit*

$$0 = \text{Fil}_!^0(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \subset \text{Fil}_!^1(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \subset \dots \subset \text{Fil}_!^d(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$$

la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ de la proposition 2.2.2. Pour tout r non divisible par g , le gradué $\text{gr}_!^r(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ est nul et pour $r = tg$ avec $1 \leq t \leq s$, il est à support dans $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\geq tg}$ avec $j^{\geq tg, *}\text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \simeq HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2})$. La surjection

$$j_!^{\text{--}tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{1-t}{2}) \twoheadrightarrow \text{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}),$$

a alors pour image dans le groupe de Grothendieck $\sum_{i=t}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(\frac{1+i-2t}{2})$.

Démonstration. — D’après [2] corollaire 5.4.2, dans le groupe de Grothendieck on a

$$[\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}] = \sum_{t=1}^s \left(\sum_{i=t}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{1+i-2t}{2} \right) \right).$$

Ainsi par construction, les $\text{gr}_r^+(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ sont nuls si r n’est pas de la forme kg pour $1 \leq k \leq s$. Par ailleurs comme les constituants de $j^{=kg,*}\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ sont les $j^{=kg,*}\mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{1+i-2t}{2} \right)$ pour $1 \leq t \leq i \leq k$, on en déduit que les constituants communs à $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ et à $j_1^{=kg} j^{=kg,*}\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ sont les $\mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{1+i-2t}{2} \right)$ pour $1 \leq t \leq k$ et $t \leq i \leq s$ de sorte que, dans le groupe de Grothendieck, l’image $\text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ de $j_1^{=kg} j^{=kg,*}\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v} \rightarrow \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ est inférieure à $\sum_{t=1}^k \sum_{i=t}^s \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{1+i-2t}{2} \right)$. Supposons par l’absurde qu’il existe k tel que $\text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ soit strictement inférieure à la somme ci-dessus. Soient alors $i_0 > k$ minimal tel que $\mathcal{P}(i_0, \pi_v) \left(\frac{1+i_0-2t}{2} \right)$ ne soit pas un constituant de $\text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ et z un point générique de $X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{=i_0g}$. D’après 3.3.5, dans le groupe de Grothendieck des représentations de $GL_{i_0g}(F_v) \times W_v$, la fibre en z de $\mathcal{H}^{-\dim z} \mathcal{P}(i_0, \pi_v) \left(\frac{1+i_0-2t}{2} \right)$ (resp. de $\mathcal{H}^{-\dim z-1} \mathcal{P}(i_0-1, \pi_v) \left(\frac{i_0-2t}{2} \right)$) est supérieure à $\text{St}_{i_0}(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{i_0g-d+1+i_0-2t}{2} \right)$; par ailleurs ce n’est jamais le cas pour tout autre $\mathcal{H}^{-\dim z-\delta} \mathcal{P}(i, \pi_v) \left(\frac{1+i-2t'}{2} \right)$ quel que soit $\delta \geq 0$. Comme par hypothèse $\mathcal{P}(i_0-1, \pi_v) \left(\frac{i_0-2t}{2} \right)$ est un constituant de $\text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ et que $\mathcal{P}(i_0, \pi_v) \left(\frac{1+i_0-2t}{2} \right)$ n’en est pas un, on en déduit que $\mathcal{H}^{-\dim z}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v} / \text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}))$, et donc $\mathcal{H}^{-\dim z} \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$, est supérieure à $\text{St}_{i_0}(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v) \left(\frac{i_0g-d+1+i_0-2t}{2} \right)$, ce qui n’est pas d’après le calcul des germes des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{J}}$ donné au corollaire 2.2.10 de [2]. \square

Remarque. — La figure 1 illustre la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ où chaque cercle représente un faisceau pervers d’Harris-Taylor $\mathcal{P}(t, \pi_v) \left(\frac{1-t}{2} + k \right)$. L’utilisation de 3.3.5 et le corollaire 2.2.10 dans la preuve précédente revient à dire que pour tout $1 \leq t \leq s-1$ et pour tout $0 \leq k \leq s-t-1$, dans toute filtration croissante de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ l’indice k_1 du gradué contenant $\mathcal{P}(t-k, \pi_v) \left(\frac{t-k-1}{2} \right)$ est inférieur ou égal à l’indice k_2 du gradué contenant $\mathcal{P}(t-k+1, \pi_v) \left(\frac{t-k-2}{2} \right)$. Le lecteur pourra trouver une illustration graphique de ces contraintes à la figure 2 où lorsque deux cercles sont reliés il faut que l’indice de celui qui est le plus bas soit supérieur ou égal à l’autre. Au §A.3 nous proposerons une preuve cohomologique de la proposition 3.4.3 et nous en déduirons une nouvelle démonstration du calcul des $\mathcal{H}^i \Psi_{\mathcal{J}}$.

Le lecteur notera qu’en supprimant les gradués nuls de $\text{Fil}_1^\bullet(\Psi_{\mathcal{J}})$, la filtration obtenue coïncide avec la filtration par les noyaux itérés de la monodromie. Par dualité, la filtration $\text{Fil}_*^\bullet(\Psi_{\mathcal{J}})$ à laquelle on supprime les gradués nuls, coïncide

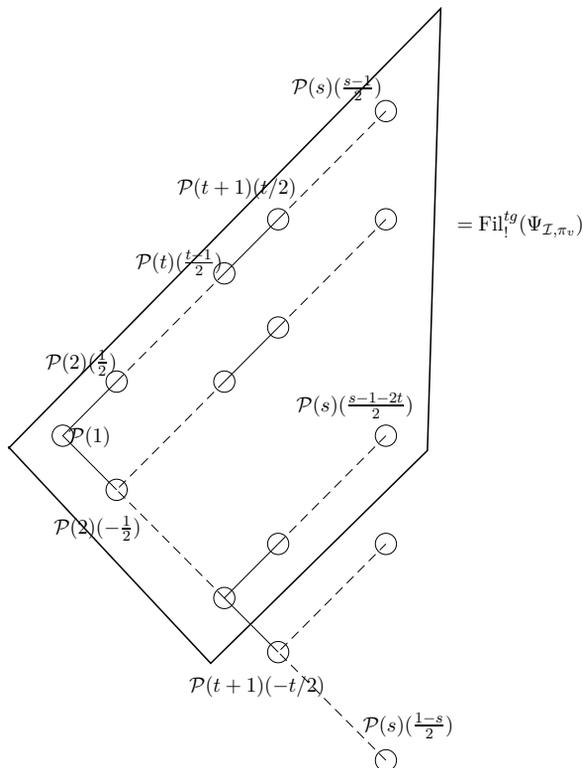


FIGURE 1. Illustration de la filtration de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$.

avec celle par les images itérées de la monodromie. Ainsi la bifiltration de monodromie s'obtient en considérant les $\text{Fil}_*^i(\text{Fil}_1^j(\Psi_{\mathcal{J}}))$. Précisément, en couplant les propositions 3.3.4 et 3.4.3, on obtient la description suivante.

3.4.4. COROLLAIRE. — Avec les notations précédentes les bigradués $\text{gr}_*^i(\text{gr}_1^j(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}))$ (resp. $\text{gr}_1^i(\text{gr}_*^j(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}))$) de la bifiltration $\text{Fil}_*^i(\text{Fil}_1^j(\Psi_{\mathcal{J}}))$ (resp. de $\text{Fil}_1^i(\text{Fil}_*^j(\Psi_{\mathcal{J}}))$) sont nuls sauf pour (i, j) de la forme $(t'g, tg)$ avec $1 \leq t \leq t' \leq s$ auquel cas

$$\text{gr}_*^{t'g}(\text{gr}_1^{tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})) \simeq \mathcal{P}(t', \pi_v)\left(\frac{1 - 2t + t'}{2}\right),$$

$$\left(\text{resp. } \text{gr}_1^{t'g}(\text{gr}_*^{tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})) \simeq \mathcal{P}(t', \pi_v)\left(\frac{2t - 1 - t'}{2}\right)\right).$$

Remarque. — Pour $s = 3$ et $g = 1$, le lecteur trouvera à la figure 3 une illustration des $\text{Fil}_1^\bullet(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ et $\text{Fil}_*^\bullet(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$.

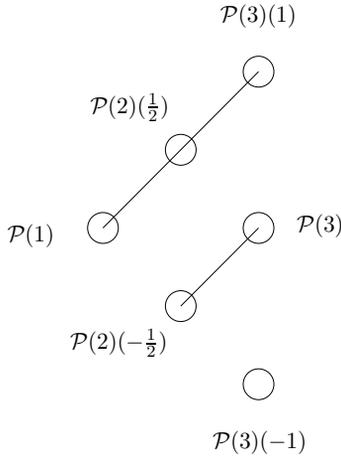


FIGURE 2. Illustration des contraintes d'une filtration de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ avec $s = 3$.

En ce qui concerne la filtration exhaustive de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$, avec les notations de 12, la chasse aux indices fournit le corollaire suivant.

3.4.5. COROLLAIRE. — *Les gradués de la filtration exhaustive de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$*

$$0 = \text{Fill}_1^{2^{d-1}}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \subset \dots \subset \text{Fill}_1^0(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \subset \dots \subset \text{Fill}_1^{2^{d-1}}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) = \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$$

sont nuls pour r qui n'est pas de la forme $i_{t_g} - 2^{d-t} \delta_k(g)$ pour $1 \leq t + k \leq s$ avec $t \geq 1$ et $k \geq 0$, et sinon isomorphe à $\text{grr}_1^{i_{t_g} - 2^{d-t} \delta_k(g)}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \simeq \mathcal{P}(t + k, \pi_v)^{\binom{k+1-2t}{2}}$.

Appendice A

Retour sur les résultats faisceautiques de [2]

L'objectif de cet appendice est de revenir sur la preuve des principaux résultats de [2] en utilisant les filtrations de stratification, l'intérêt étant de simplifier les arguments et de dégager une future stratégie d'étude sur $\overline{\mathbb{Z}}_l$. Rappelons tout d'abord la stratégie de loc. cit.

Étape 1 : on utilise tout d'abord le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues afin de relier les germes des faisceaux de cohomologie du complexe des cycles évanescents à la cohomologie des espaces de Lubin-Tate.

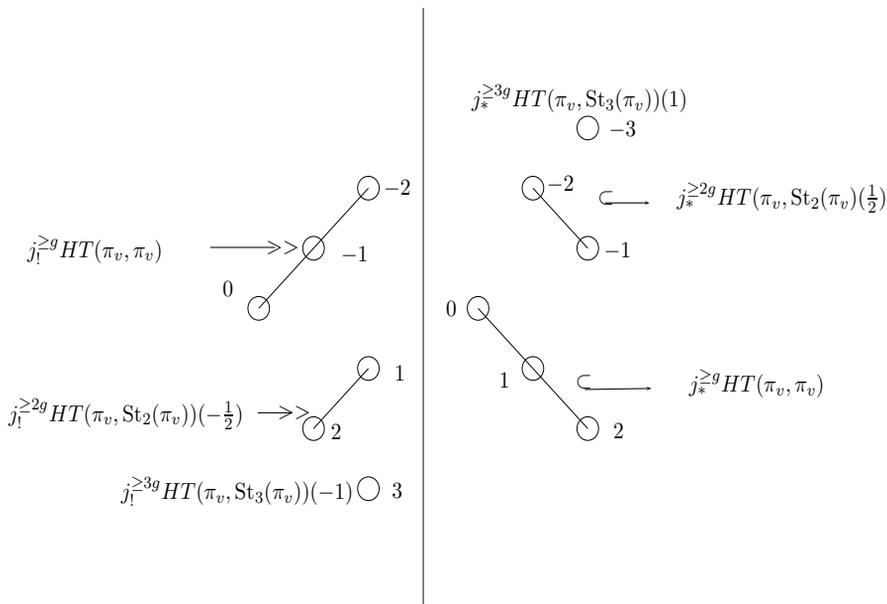


FIGURE 3. Illustration de la filtration (fig. à gauche) et de la cofiltration (fig. à droite) de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ avec $s = 3$.

Étape 2 : dans [7], les auteurs donnent une « recette » afin de calculer la somme alternée des groupes de cohomologie des $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ avec les notations précédentes. Ainsi au terme du §5.4 de [2], on connaît les constituants simples de $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ et $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$.

Étape 3 : il s’agit alors de calculer les faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d’Harris-Taylor ainsi que ceux du complexe des cycles évanescents. Pour ce faire :

- dans [2], on utilise une propriété d’auto dualité à la Zelevinski sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, prouvée par Fargues ;
- une deuxième solution est proposée dans [3] et repose sur le théorème de Lefschetz difficile et sur des calculs fastidieux de groupes de cohomologie.

Le but de cette section est de donner une preuve alternative de l’étape 3 en utilisant les filtrations de stratification ; en particulier nous n’utilisons plus 3.3.5 et en proposons même une nouvelle démonstration.

A.1. Rappels cohomologiques de [7]. — Dans ce paragraphe nous allons rappeler, en utilisant les étapes 1 et 2 ci-avant, lesquels des résultats de [3] nous

utiliserons. Notons que ceux-ci découlent des techniques habituelles de formules des traces.

On note H_{η}^i le i -ème groupe de cohomologie de la variété de Shimura $X_{\mathcal{J}, \eta}$. Pour Π^{∞} une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}^{\infty})$, on note $[H_{\eta}^i]\{\Pi^{\infty, v}\}$ la composante $\Pi^{\infty, v}$ -isotypique de H_{η}^i dans le groupe de Grothendieck des $GL_d(F_v) \times W_v$ -représentations. Rappelons que si celle-ci est non nulle alors $\Pi^{\infty, v}$ est la composante hors ∞, v d'une représentation automorphe cohomologique Π . On fixe alors jusque la fin de cet appendice une telle représentation automorphe Π telle que sa composante locale $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$ pour π_v une représentation irréductible admissible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$.

A.1.1. LEMME. — (cf. la proposition 3.5.1 de [3]) Pour tout $1 \leq t \leq s$, en tant que représentation de $GL_d(F_v)$, $[H^{t-s}(j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est égale à un multiple de $\Pi_t \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t}(\pi_v)$.

Remarque. — Rappelons que $[H^*(j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty, v}\}$ est calculée dans [7] de sorte que le calcul des $[H^i(j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))]$ se déduit, en utilisant la pureté, de l'égalité de [2]

(1.1.2)

$$j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) = \sum_{r=0}^{s-t} (-1)^r j_i^{\geq (t+r)g} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_r(\pi_v)) \otimes \Xi^{-r/2}.$$

A.1.3. PROPOSITION. — Dans la suite spectrale des cycles évanescents $E_2^{i,j} = H^i(\mathcal{H}^j \Psi_{\mathcal{J}}) \Rightarrow H_{\eta}^{i+j}$ si $\text{St}_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(-\frac{k}{2})$ est un sous-quotient de $[E_2^{i,j}]\{\Pi^{\infty, v}\}$ avec $i + j > 0$ alors $i + j = 1$, $j = -g$ et $k = s - 1$.

Démonstration. — Via la suite spectrale associée à la stratification de Newton, on se ramène à regarder les groupes de cohomologie des $(\mathcal{H}^j \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})|_{X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\geq tg}}$ ce qui impose de considérer les j de la forme $(t - s)g - r$ avec $1 \leq t \leq s$ et $0 \leq r \leq t - 1$. Comme on regarde $i + j > 0$ le cas $t = s$ est exclu. L'isomorphisme $(\mathcal{H}^{(t-s)g-r} \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})|_{X_{\mathcal{J}, \bar{s}}^{\geq tg}} \simeq HT(\pi_v, LT_{\pi_v}(t, r))[(t - s)g]$ nous amène à regarder, pour $r = 0$ et $i > 0$, les $[H^i(j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty, v}\}$. D'après [2] corollaire 5.4.1, l'égalité (1.1.2) s'inverse en

$$j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v)) = \sum_{k=0}^{s-t} j_{1*}^{\geq (t+k)g} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{St}_k(\pi_v)) \otimes \Xi^{-k/2}$$

ce qui nous ramène à regarder chacun des

$$[H^i(j_{1*}^{\geq (t+k)g} HT(\pi_v, \text{St}_t(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{St}_k(\pi_v)))]\{\Pi^{\infty, v}\}$$

pour $i > 0$. Le résultat découle alors du lemme précédent. □

A.2. Retour sur la filtration de stratification des $j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$. — Dans ce paragraphe, on fixe une représentation admissible irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$ où g est un diviseur de $d = sg$ et pour $1 \leq t \leq s$, on se propose tout d’abord de prouver la proposition 3.3.4 sans utiliser le théorème 3.3.5.

Remarque. — Dans le cas où g ne divise pas d , le calcul des faisceaux de cohomologie des $j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ de [2] découle assez simplement de l’hypothèse de récurrence sur le modèle local, puisque les points supersinguliers n’entrent pas en jeu.

Pour ce faire on raisonne par récurrence sur t de s à 1. Les cas $t = s$ et $s - 1$ étant évidents, supposons donc le résultat acquis jusqu’au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On pose $P := i_{tg+1,*} {}^p\mathcal{H}_{\text{libre}}^{-1} i_{tg+1}^* j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)$ avec

$$0 \rightarrow P \rightarrow j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow 0,$$

et il s’agit de montrer que le morphisme d’adjonction $j_1^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P \rightarrow P$ est surjectif. Notons alors P_0 l’image de ce morphisme. De la connaissance des constituants irréductibles de P et, d’après l’hypothèse de récurrence, des quotients de $j_1^{\geq (t+1)g} j^{\geq (t+1)g,*} P$, l’image de P_0 dans le groupe de Grothendieck est, en utilisant que les strates non supersingulières sont géométriquement induites, de la forme $[P_0] = \sum_{i=1}^{s-t-k} j_{1*}^{=(t+i)g} HT(\pi_v, \Pi_t \times St_i(\pi_v)) \otimes \Xi^{-i/2}$ pour un entier $0 \leq k \leq s - t - 1$. Par ailleurs la filtration par les poids de P fournit un quotient $P \rightarrow P'_0$ où $[P'_0] = [P_0]$ dans le groupe de Grothendieck de sorte que le composé $P_0 \hookrightarrow P \rightarrow P'_0$ est un isomorphisme. On obtient ainsi que P_0 est un facteur direct de $P \simeq P_0 \oplus Q_0$ et il nous faut alors prouver que Q_0 est nul. Pour ce faire nous allons raisonner sur la cohomologie des systèmes locaux d’Harris-Taylor, l’idée étant de montrer qu’il existe un indice $i \leq -k$ tel que $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ est non nul de sorte que comme $j^{\geq tg}$ est affine et donc que tous les $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t))$ sont nuls pour $i < 0$, on doit nécessairement avoir $k = 0$ et donc Q_0 est nul. Soit A le poussé en avant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_0 \oplus Q_0 & \longrightarrow & j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) & \longrightarrow & j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & P_0 & \dashrightarrow & A & \longrightarrow & j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \longrightarrow 0 \end{array}$$

de sorte que l’on a la suite exacte courte $0 \rightarrow Q_0 \rightarrow j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow A \rightarrow 0$ où la flèche $A \rightarrow Q_0[1]$ se factorise par $j_{1*}^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t) \rightarrow Q_0[1]$. Pour k non nul, par pureté on en déduit alors que les flèches $H^i(A) \rightarrow H^{1+i}(Q_0)$ sont nulles et donc $H^i(j_1^{\geq tg} HT(\pi_v, \Pi_t)) \simeq H^i(A) \oplus H^i(Q_0)$. Il suffit alors de prouver que $H^{-k}(A)$ est non nul. Soit alors Π la représentation automorphe du paragraphe précédent avec donc $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$. D’après

le lemme A.1.1, $\Pi_t \overrightarrow{\times} LT_{\pi_v}(s - t, k - 1) \otimes \Xi^{-\frac{s-t}{2}}$ est un constituant de $[H^{-k}(j_{!*}^{\geq(s-k)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} St_{s-t-k}(\pi_v)) \otimes \Xi^{-\frac{s-t-k}{2}})]\{\Pi^{\infty, v}\}$ et d'aucun autre des constituants irréductibles de A de sorte que, via la suite spectrale associée à la filtration par les poids de A , $\Pi_t \overrightarrow{\times} LT_{\pi_v}(s - t, k - 1) \otimes \Xi^{-\frac{s-t}{2}}$ est un constituant de $H^{-k}(A)[\Pi^{\infty, v}]$ qui est donc non nul, d'où le résultat.

Remarque. — La preuve du théorème 3.3.5 dans [2] procède par récurrence sur t de s à 1 comme suit. La suite spectrale $E_1^{p,q}(P) = \mathcal{H}^{p+g} \text{gr}^{-p}(P) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} P$ associée à la filtration par les poids de P dégénère en E_1 et le gros du travail consiste à montrer que pour tout $0 \leq p \leq s - t - 3$, la flèche $d_1^{p,t+1-s}$ induit un morphisme non nul

$$\left(\Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v\right) \overrightarrow{\times} St_p(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t-p-1}(\pi_v) \longrightarrow \left(\Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v\right) \overrightarrow{\times} St_{p+1}(\pi_v) \overrightarrow{\times} \text{Speh}_{s-t-p-2}(\pi_v).$$

Avec les notations précédentes, la surjection $j_1^{\geq(t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{-1/2} \rightarrow P$ fournit par functorialité un morphisme entre leurs filtrations exhaustives de stratification et donc des diagrammes commutatifs

$$\begin{CD} E_1^{p,q}(!) @>d_1^{p,q}(!)>> E_1^{p+1,q}(!) \\ @VVV @VVV \\ E_1^{p,q}(P) @>d_1^{p,q}(P)>> E_1^{p+1,q}(P), \end{CD}$$

où les $E_1^{p,q}(!)$ sont les termes initiaux de la suite spectrale calculant les faisceaux de cohomologie de $j_1^{\geq(t+1)g} HT(\pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_v) \otimes \Xi^{-1/2}$. La non nullité des $d_1^{\delta,t+1-s}(P)$ pour $(p, q) = (\delta, t + 1 - s)$ avec $0 \leq \delta < s - t - 1$, découle de celle évidente des $d_1^{\delta,t+1-s}(!)$.

A.3. Retour sur les filtrations de stratification de $\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$. — Reprenons la fin de preuve de la proposition 3.4.3 où, en raisonnant par l'absurde, nous avons considéré k tel que $\text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$ soit strictement inférieure à $\sum_{t=1}^k \sum_{i=t}^s \mathcal{P}(i, \pi_v)(\frac{1+i-2t}{2})$ et $i_0 > k$ minimal tel que $\mathcal{P}(i_0, \pi_v)(\frac{1+i_0-2t}{2})$ ne soit pas un constituant de $\text{Fil}_1^{kg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$. En raisonnant par récurrence sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, on se ramène au cas où $i_0 = s$.

Soit alors Π la représentation automorphe du §A.1 avec donc $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$. Notons tout d'abord que la fibre en un point supersingulier de $\mathcal{H}^0 \Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}$ admet $\pi_v[s]_D \otimes St_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s+1-2t}{2})$ comme sous-quotient de sorte que $[H^0(\mathcal{H}^0 \Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty, v}\}$ admet $St_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s+1-2t}{2})$ comme sous-quotient. D'après la proposition A.1.3, pour tout $i > 0$, $[H^i(\mathcal{H}^{1-i} \Psi_{\mathcal{J}})]\{\Pi^{\infty, v}\}$ n'admet pas $St_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s+1-2t}{2})$ comme sous-quotient de sorte que $[H_{\eta}^0]\{\Pi^{\infty, v}\}$ admet $St_s(\pi_v) \otimes L_g(\pi_v)(\frac{s+1-2t}{2})$ comme sous-quotient, ce qui

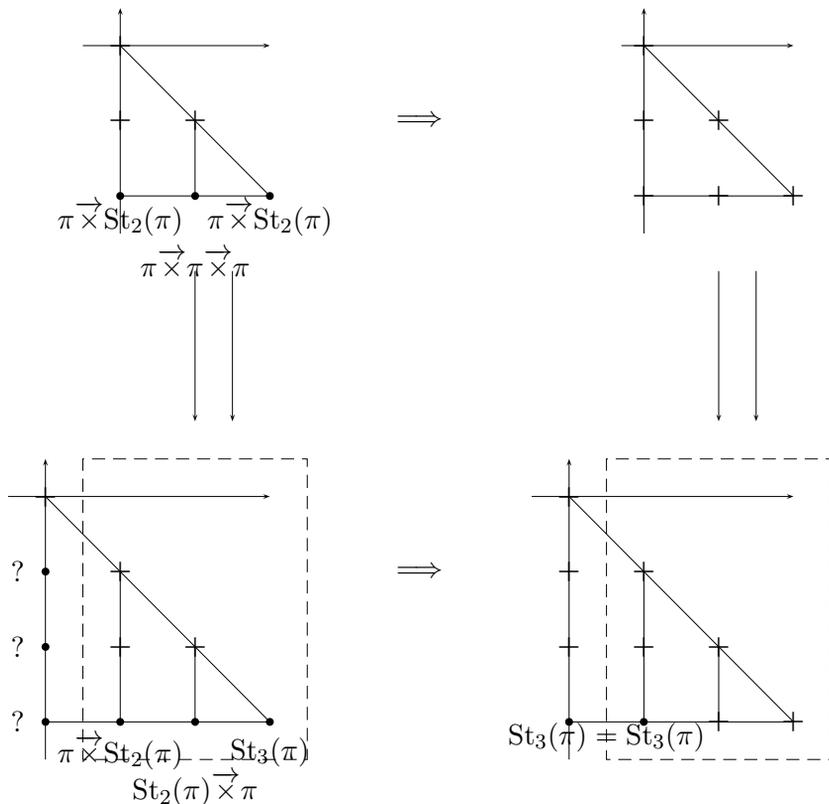


FIGURE 4. Germes en un point supersingulier spectrales $E_1^{p,q}(!) \rightarrow E_1^{p,q}(P)$; on explicite simplement l'action du groupe linéaire en « factorisant » par $\Pi_t \times$, i.e. quand on écrit $\pi \times St_2(\pi)$ il faut lire $\Pi_t \times \pi_v \times St_2(\pi_v)$.

contredit le fait que $[H_{\mathfrak{H}}^0]\{\Pi^\infty\}$ est non nul si et seulement si Π est une représentation automorphe.

Enfin le calcul des fibres des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathcal{J},\pi_v}$ de [2] procède comme suit. On considère la suite spectrale $E_1^{p,q} = \mathcal{H}^{p+q} gr_{\pi_v}^{-p} \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q} \Psi_{\mathcal{J},\pi_v}$, laquelle d'après le calcul du paragraphe précédent, des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, et donc des $E_1^{p,q}$, dégénère en E_1 . Le gros du travail de [2] consiste à montrer qu'en un point supersingulier z , pour tout $0 \leq \delta < s - 1$ et $-\delta \leq p \leq s - 1 - 2\delta$, la flèche $d_1^{p,1-s+2\delta}$ induit un morphisme non nul

$$St_{p+2\delta+1}(\pi_v) \times St_{s-p-2\delta}(\pi_v) \rightarrow St_{p+2\delta+2}(\pi_v) \times St_{s-p-2\delta-1}(\pi_v).$$

Désormais la non nullité de cette flèche découle, comme dans le paragraphe précédent, de la surjectivité du morphisme d'adjonction $j_!^{=tg} j^{=tg} \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v}) \longrightarrow \mathrm{gr}_!^{tg}(\Psi_{\mathcal{J}, \pi_v})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN & P. DELIGNE – « Faisceaux pervers », *Astérisque* **100** (1982), p. 5–171.
- [2] P. BOYER – « Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples », *Invent. Math.* **177** (2009), p. 239–280.
- [3] ———, « Cohomologie des systèmes locaux de Harris-Taylor et applications », *Compositio* **146** (2010), p. 367–403.
- [4] P. DELIGNE – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Lecture Notes in Math., vol. 305, Springer, 1973.
- [5] ———, « Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ adique », in *SGA 4 $\frac{1}{2}$* , Lecture Notes in Mathematics, vol. 569, Springer, 1977.
- [6] L. FARGUES, A. GENESTIER & V. LAFFORGUE – *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Math., vol. 262, Birkhäuser, 2008.
- [7] M. R. T. HARRIS – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, vol. 151, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001.
- [8] L. ILLUSIE – « Autour du théorème de monodromie locale », *Astérisque* **223** (1994), p. 9–57.
- [9] T. ITO – « Hasse invariants for somme unitary Shimura varieties », *Math. Forsch. Oberwolfach report 28/2005* (2005), p. 1565–1568.
- [10] D. JUTEAU – « Decomposition numbers for perverse sheaves », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), p. 1177–1229.
- [11] J.-P. SCHNEIDERS – *Quasi-abelian categories and sheaves*, Mém. Soc. Math. Fr., vol. 76, 1999.
- [12] A. V. ZELEVINSKY – « Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$ », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **13** (1980), p. 165–210.