Revue d'Histoire des Mathématiques

L'originalité de Poincaré en mécanique céleste : pratique des solutions périodiques dans un réseau de textes

Tatiana Roque

Tome 21 Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :
Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `rhmsmf@ihp.fr` / URL : `http//smf.emath.fr/`

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 87 €; prix public hors Europe : 96 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
21 (2015), p. 41–109

L'ORIGINALITÉ DE POINCARÉ EN MÉCANIQUE CÉLESTE : PRATIQUE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DANS UN RÉSEAU DE TEXTES

Tatiana Roque

Résumé. — Nous étudions l'originalité des propositions de Henri Poincaré en mécanique céleste et leur réception par ses contemporains. La méthode des *réseaux* de textes permet de cerner une *pratique des solutions périodiques* circulant dans des articles écrits par des auteurs de différentes nationalités, travaillant pour des institutions variées et publiant dans divers journaux. En adoptant une plus petite échelle d'analyse, nous repérons certains des effets que les suggestions de Poincaré ont eus et qui se font sentir bien avant qu'une théorie des systèmes dynamiques ne voie le jour. En particulier, des travaux comme ceux de George Hill et George Darwin semblent de première importance si l'on veut comprendre l'appropriation des propositions de Poincaré. Les conclusions que nous avons obtenues nous amènent à réviser la façon de s'interroger sur l'histoire des mathématiques, en particulier sur l'originalité et la réception des idées d'un mathématicien.

Abstract (Poincaré's originality in Celestial Mechanics: the practice of periodic solutions in a text network)

We study the originality of Henri Poincaré's approach to celestial mechanics and its reception by specialists at the time. The method of *networks* of texts enables us to map out a *practice of periodic solutions* that circulated among articles written by authors of different nationalities, working in distinct institutions and publishing in various journals. Reading the texts in detail, we focus our

Texte reçu le 31 décembre 2013, révisé le 7 mai 2014, accepté le 4 juillet 2014.

T. Roque, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Ilha do Fundão, Archives Poincaré - Nancy.

Courrier électronique : `tati@im.ufrj.br`

Mots clefs : Poincaré, solutions périodiques, pratique, réseau de textes.

Je remercie vivement tous ceux qui ont lu le manuscrit, l'ayant enrichi par des suggestions déterminantes : Philippe Nabonnand, Norbert Schappacher, les rapporteurs anonymes et tout particulièrement, Frédéric Brechenmacher et Catherine Goldstein, qui m'ont suggéré un cadre méthodologique nouveau pour présenter une recherche que je mène depuis longtemps.

analysis on a smaller scale and identify some effects of Poincaré's suggestions long before the birth of the theory of dynamical systems. In particular, men like George Hill and George Darwin become especially important to understand how Poincaré's propositions were appropriated. Our conclusions lead to a fresh discussion of the originality and the reception of an author's ideas in the history of mathematics.

1. INTRODUCTION

Notre question de départ était la *réception* des méthodes que Henri Poincaré (1854-1912) a proposées pour la mécanique céleste. Son traitement des problèmes classiques, comme celui des trois corps, est reconnu aujourd'hui comme étant nouveau à son époque. On en prend pour exemples son mémoire couronné par le prix du roi de Suède « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » [Poincaré 1890][1] et son livre *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [Poincaré 1892-1899].

De nos jours, le caractère novateur de la démarche de Poincaré est associé à une approche qualitative des équations différentielles et aux notions topologiques qu'il aurait employées dans cette approche. Le mémoire « Sur les courbes définies par une équation différentielle », publié en quatre parties entre 1881 et 1886 ([Poincaré 1881], [Poincaré 1882], [Poincaré 1885] et [Poincaré 1886]), antérieurement donc aux textes évoqués plus haut, est souvent mentionné comme étant à l'origine de cette approche. Plus précisément, l'originalité de Poincaré tiendrait surtout à trois aspects de ses travaux : la description des voisinages des singularités, classifiées en *nœuds*, *cols*, *foyers* et *centres* ; l'étude de la distribution de telles singularités sur une surface à l'aide de la caractéristique d'Euler ; la classification des solutions possibles d'un système différentiel en deux dimensions.

Après Poincaré, la plupart des historiens passent directement à George David Birkhoff (1884-1944), considéré comme le premier héritier de Poincaré en systèmes dynamiques. Il est vrai que Birkhoff a fourni dès 1913 la première démonstration du « dernier théorème géométrique » [Birkhoff 1913], proposé par Poincaré en 1912. Toutefois, le jeune mathématicien qu'était alors Birkhoff n'avait pas encore formulé les notions qui constitueraient le domaine appelé plus tard « systèmes dynamiques ». Ceci ne se

[1] L'histoire des deux versions du mémoire soumis à la compétition et les nouveaux résultats qu'elles contiennent a été racontée en détail par June Barrow-Green dans [Barrow-Green 1997].

produisit qu'au cours des années 1920 comme on l'observe notamment dans [Birkhoff 1927].

Amy Dahan-Dalmedico et David Aubin ont souligné que les histoires portant de *longue durée* de la théorie des systèmes dynamiques se focalisent d'habitude sur quelques moments-clés [Aubin & Dahan-Dalmedico 2002], dont l'un des plus mentionnés, relativement à la période antérieure aux années 1920, concerne l'usage que fait Birkhoff de techniques modernes de topologie dans l'étude des systèmes dynamiques. L'objectif de Dahan-Dalmedico et Aubin était, comme le nôtre, de remettre en question une telle vision par une approche historiographique plus élaborée, mais ils se sont intéressés à des périodes plus récentes que celle qui retiendra ici notre attention.

En examinant la production de la fin du XIX^e^ et du tout début du XX^e^ siècle, nous montrons que présenter la réception des idées de Poincaré comme une simple ligne droite joignant Poincaré à Birkhoff serait une simplification abusive. Et ce, d'autant plus, nous le verrons, que les deux mathématiciens sont séparés par un océan et que leurs activités de recherche principales sur ce sujet sont éloignées d'au moins deux décennies. De plus, nous critiquons les tentatives de caractériser la nouveauté de la démarche de Poincaré par l'emploi de la topologie. Entre 1881 et 1899, dans la période où il publie les textes en question ici, il serait difficile de dire ce qu'était la topologie même pour Poincaré. C'est à la fin du siècle seulement, en 1895, qu'il a publié son article sur l'*Analysis Situs* [Poincaré 1895], celui-ci étant inspiré, de l'aveu même de Poincaré, par des questions issues de ses recherches en mécanique céleste.

Comment caractériser alors l'originalité de Poincaré dans les termes propres à son époque (en évitant les éclairages rétrospectifs) ? Répondre à cette question est indispensable pour comprendre la réception de ses travaux. Jusqu'ici, les commentaires historiques ont surtout mis l'accent sur la « nouveauté » de la démarche de Poincaré pour souligner la singularité et le caractère visionnaire de son travail. Mais comment parler de nouveauté sans se pencher d'abord sur la façon dont les praticiens de la mécanique céleste de son époque ont interprété et employé les propositions de Poincaré ?

Une première lecture des rapports écrits immédiatement après la publication du mémoire « Sur les problème des trois corps », et dont le nombre augmenta après la parution du premier tome des *Méthodes nouvelles*, témoigne d'une réaction positive à ces ouvrages. Les réflexions de Poincaré sur la non-convergence des séries qui expriment les mouvements des astres sont célébrées en tant qu'elles apportent plus de rigueur mathématique à la mécanique céleste. Tel est par exemple le point de vue des mathématiciens impliqués dans la compétition proposée par le Roi de Suède, en particulier ceux qui ont évalué les travaux soumis, comme June Barrow-Green l'a montré dans [Barrow-Green 1997]. On trouve des témoignages semblables dans des écrits de popularisation, comme le rapport de Camille Flammarion en 1889 au journal *L'Astronomie. Revue d'astronomie populaire, de météorologie et de physique du globe, exposant des progrès de la science pendant l'année,* paru en janvier 1890 : l'auteur, éditeur en chef du journal, y explique que les séries obtenues par Hugo Gyldén (1841-1896)[2] et Anders Lindstedt (1854-1939), séries ne contenant que des termes périodiques, ne sont pas convergentes en général et qu'elles ne peuvent donc pas servir à démontrer rigoureusement la stabilité du système [Flammarion 1890]. Dans le *Bulletin Astronomique de l'Observatoire de Paris,* Octave Callandreau (1852-1904)[3] critique l'emploi qu'on avait fait jusque-là des séries trigonométriques « sans en avoir légitimé l'usage et bien élucidé le rôle » : Poincaré, dit-il, a montré que, à cause du défaut de convergence absolue, ces séries ne pouvaient pas servir à résoudre la question de la stabilité [Callandreau 1892].

Ces exemples montrent le rôle important joué dans la discussion sur les travaux de Poincaré par la non-convergence des séries alors utilisées en mécanique céleste. Cette non-convergence constitue ce que nous proposons d'appeler un résultat « négatif » et c'est d'ailleurs dans une section ainsi intitulée que Poincaré présentait ses remarques à ce sujet dans [Poincaré 1890]. Il s'agit d'une partie du mémoire qui a intéressé spécialement Karl Weierstrass (1815-1897), au moins dans un premier temps, [Barrow-Green 1997, p. 136]. En analysant plus profondément les réactions des membres du jury du prix, June Barrow-Green a néanmoins remarqué que la position de Weierstrass évolue très vite, et qu'il finit par reconnaître la valeur d'autres résultats de Poincaré, des résultats « positifs » cette fois, plus précisément les conclusions obtenues par Poincaré

---

[2] Johan August Hugo Gyldén est né à Helsinki le 29 mai 1841 et il a poursuivi des études de mathématiques et d'astronomie auprès de Peter Andreas Hansen, avec qui il s'initia à la théorie des perturbations. En 1871, il fut appelé à devenir le directeur de l'Observatoire de Stockholm où il resta jusqu'à sa mort en 1896. Bien que Gyldén ne soit pas né en Suède, on le désigne parfois comme « Suédois » puisqu'il a vécu et travaillé dans ce pays pendant les années les plus importants de sa carrière et jusqu'à la fin de sa vie.

[3] Il s'agit d'un rapport sur le premier tome des *Méthodes nouvelles.* En ce qui concerne le mémoire sur le problème des trois corps, c'est Poincaré lui-même qui a écrit le rapport pour le *Bulletin Astronomique* [Poincaré 1891b].

grâce à l'usage de solutions périodiques et asymptotiques. Quelques commentateurs de l'époque soulignent aussi cet aspect. Outre Weierstrass, on peut mentionner Max Noether (1844-1921) dans un compte rendu paru au début de 1890 sur le mémoire couronné [Noether 1890]. Noether fait une analyse minutieuse du mémoire, mettant d'abord en évidence l'intérêt des résultats de non-convergence qui contredisaient les attentes de Gyldén. Mais, poursuit-il, Poincaré n'a pas obtenu seulement des résultats négatifs mais aussi une foule de résultats positifs utiles, dans le cas particulier du problème restreint des trois corps[4]. Noether mentionne en guise d'exemple l'utilisation des solutions périodiques, citant dans ce contexte les noms de George Hill et Karl Bohlin.

Nous pouvons donner d'autres témoignages qui montrent que : (1) les résultats négatifs, concernant la possible non-convergence des séries, ont connu un succès considérable et (2) les auteurs qui les citaient annonçaient parfois un nouveau rôle pour les solutions périodiques dans la démonstration de la stabilité. Cependant, dans la plupart des cas, les références citées par ces rapports demeurent imprécises et il devient difficile d'identifier dans quels travaux les auteurs se servent effectivement de solutions périodiques.

Même si (2) découle de (1), les résultats concernés sont de natures différentes. La non-convergence a une portée théorique mais elle n'aide pas à comprendre les mouvements des corps célestes. Or, nous voulons étudier la réception des écrits de Poincaré du point de vue des résultats positifs, soit ceux qui paraissent en (2). Nous recherchons les utilisations effectives des propositions de Poincaré sur les solutions périodiques dans les travaux de mécanique céleste de son temps. *Grosso modo* rares sont les travaux influencés par les discussions sur la non-convergence. Par contre, nous montrerons le rôle qu'ont joué les solutions périodiques dans la recherche de nouvelles voies pour comprendre le problème des trois corps.

Une première piste paraît dans un rapport sur les progrès de la mécanique céleste à la fin du XIX[e], publié par Edmund Taylor Whittaker (1873-1956) en 1899 [Whittaker 1899], qui analyse un ensemble de travaux sur la résolution du problème des trois corps, parus entre 1868 et 1898. Parmi les innovations attribuées à Poincaré, il relève : les invariants intégraux, la discussion de la convergence de séries trigonométriques et la recherche sur les solutions périodiques. Selon Whittaker, les propositions de Poincaré ont stimulé la recherche sur les solutions périodiques et il donne une

4 Il s'agit du cas où, des trois corps, le 1er et le 2ème ont des masses finies et le 3ème a une masse nulle ; le 1er et le 2ème décrivent une circonférence autour de leur centre de gravité commun et le 3ème se meut dans le plan de cette circonférence.

liste d'auteurs, méconnus pour la plupart, les ayant appliquées à l'étude de cas particuliers du problème des trois corps. Ceci a constitué un premier critère pour déterminer notre *corpus*. Deux autres rapports ont élargi cet ensemble initial : l'article, daté de 1909, d'Edgar Odell Lovett (1871-1957) [Lovett 1909] et l'ouvrage de Roberto Marcolongo (1862-1943) *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) al nostri giorni*, paru en 1919 [Marcolongo 1919].

L'examen des textes rassemblés dans un premier temps révèle l'importance de la considération des cas particuliers du problème des trois corps, analysés à partir de solutions spéciales à caractère périodique. Ensuite, il s'agissait pour nous de comprendre les phénomènes de circulation qui se dégagent de ces écrits, ainsi que les *dynamiques collectives* dans lesquelles les textes s'inscrivent. Un point de vue micro-social, porté sur les *réseaux* de textes, nous a été particulièrement utile à cet égard. Citons, pour références, les discussions sur les méthodes quantitatives en histoire des mathématiques que Catherine Goldstein propose dans [Goldstein 1999], les réflexions méthodologiques élaborées par Goldstein et Norbert Schappacher en introduction à [Goldstein et al. 2007], et les suggestions provenant des articles de Frédéric Brechenmacher [Brechenmacher 2007a] et [Brechenmacher 2007b].

Dans les textes sélectionnés pour composer notre *corpus*, les auteurs emploient des méthodes mathématiques variées (numériques, analytiques, d'intégration par quadratures) pour obtenir des renseignements sur les solutions des cas particuliers du problème des trois corps. Ils ne travaillaient pas tous sur un même problème de mécanique céleste (problème de la Lune, problème de Jupiter et Saturne) et ils n'ont pas tous contribué au développement d'une théorie spécifique non plus. Par conséquent, notre démarche se distingue nettement de celle qu'a choisie Curtis Wilson [2010], par exemple, qui proposait plutôt l'histoire d'une théorie, notamment celle de Hill-Brown sur le problème de la Lune.

Des catégories comme celles de *discipline*, d'*école* ou de *communauté* ne permettent pas d'identifier les dynamiques collectives mobilisées dans notre *corpus*. Celles-ci ne se laissent pas saisir non plus à partir de la nationalité des auteurs ou de leurs institutions de rattachement. La circulation des savoirs que nous avons repérée entre les textes échappe aussi à l'analyse des journaux dans lesquels ils ont été publiés. En revanche, la notion de *pratique* s'est avérée utile pour saisir plus finement ce que les textes, mis en *réseau*, ont en commun. Nous expliquerons comment il a été possible de repérer une *pratique des solutions périodiques*, l'identité d'une telle pratique se définissant à partir du *réseau*. Dans [Brechenmacher 2013a], Brechenmacher analyse les pratiques algébriques de Poincaré en interrogeant les innovations individuelles qui manifestent une telle pratique à une échelle collective de circulation des textes. Nous empruntons à cette étude, ainsi qu'aux autres déjà citées, la suggestion de rechercher dans des pratiques collectives un cadre pour comprendre l'originalité des travaux d'un auteur. L'analyse du rôle des solutions périodiques, avant et après Poincaré, nous amène à remarquer comment ses travaux se relient à des textes d'autres auteurs, tout en produisant des changements de route visibles.

En deuxième partie, nous expliquerons davantage comment notre *corpus* de textes a été formé. À ce stade-là, le but n'est pas encore d'identifier une pratique spécifique, mais de faire des repérages dans les textes, y déceler la prédominance de certains *nœuds*, et d'autres éléments contribuant à une périodisation plus fine.

L'article se structure ensuite suivant les *raffinements* successifs du corpus. L'identification d'une *pratique* qui circule dans une partie des textes s'élabore en même temps qu'un *réseau* se construit. Tel est l'objet de la troisième partie. Après une présentation détaillée des propositions mathématiques de Hill, Poincaré et Darwin sur les solutions périodiques, nous décrirons une manière spécifique de se servir de ces solutions et d'analyser l'effet des perturbations des paramètres associés à la définition du système différentiel qui représente des cas particuliers du problème des trois corps. Vers la fin du XIX^e siècle, la démonstration de la stabilité s'avérant trop ardue, on assiste alors à une montée de l'intérêt pour les cas particuliers du problème des trois corps, traités par le moyen des solutions périodiques. Notre *réseau* de textes ressort de notre analyse des *contenus mathématiques* des articles se servant d'une telle pratique plutôt que du simple recensement de citations réciproques explicites. Au terme de la troisième partie, nous prenons le temps de montrer en quoi la notion de *pratique* aide à cerner les phénomènes de circulation que le *réseau* donne à voir.

Avant de conclure, nous reviendrons vers la question de l'originalité de Poincaré. Nous analyserons l'utilisation qu'il fait des travaux de Hill pour adapter son propos à la mécanique céleste. Cette stratégie d'insertion de Poincaré dans le milieu de la mécanique céleste donne un nouvel élan à la circulation de ses écrits. Ainsi, les textes de Poincaré font partie d'un réseau de mécanique céleste où ils occupent une position singulière. Nous montrerons que, plus complexe que prévue, la réception des écrits de Poincaré est un problème qui doit et a du être posé en des termes nouveaux.

2. LE *CORPUS* DE TEXTES

S'agissant de constituer un *corpus* de textes, il convient de formuler d'abord quelques observations suites à une première lecture des textes. Nous avons abordé en premier lieu les rapports sur le problème des trois corps qui sont cités en introduction. Dans la synthèse que E. Whittaker [1899] a produite pour la British Association for the Advancement of Science et plus précisément dans la section réservée à la période 1890-1898, soit celle qui suit immédiatement la publication du mémoire de Poincaré « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » [Poincaré 1890], il est question d'une certaine « méthode des solutions périodiques » repérée dans plusieurs textes dont Whittaker dresse la liste. L'article « The Problem of Several Bodies : Recent Progress in Its Solution », publié par Lovett dans *Science* [Lovett 1909], contient une section intitulée *Periodic solutions and their applications*, où il fait référence à des articles qui figurent également dans le rapport de Whittaker ainsi qu'à certains autres. Le livre de Marcolongo [1919] consacre un chapitre à *Il problema ristretto dei tre corpi. Soluzioni periodiche*, dont les références viennent compléter un premier groupe de textes. Dans un premier temps, notre *corpus* rassemble les textes que Whittaker, Lovett et Marcolongo ont cités de façon explicite. Après une première lecture de ces textes, nous avons repéré et sélectionné un premier ensemble de mots-clés. Ces mots-clés ont ensuite servi à interroger des bases de données disponibles sur Internet, à savoir celle du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* et celle de la bibliothèque numérique *Astrophysics Data System*[5].

Nous avons ensuite prélevé et examiné tous les titres des articles publiés entre 1880 et 1912 qui contiennent les mots et expressions « périodique », « solutions particulières » ou « trois corps » (en français, anglais, italien et allemand). Pour compléter cette liste, nous avons ajouté les mots-clés correspondants en suédois et en danois. Ce faisant, nous avons retrouvé la plupart des textes déjà réunis par les références explicites, auxquels sont venus s'ajouter un certain nombre d'autres textes.

Le graphique de la figure 1 fournit une représentation simplifiée de ce premier *corpus* avec ses références croisées. Les *nœuds* sont les auteurs des textes et les dates entre parenthèses celles des publications. Quand il y a

---

[5] Il s'agit de la bibliothèque numérique du site dédié à la recherche en astronomie et physique qui est exploité par le Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO) grâce au soutien de la NASA, dont une partie est consacrée à l'histoire http://adsabs.harvard.edu/historical.html

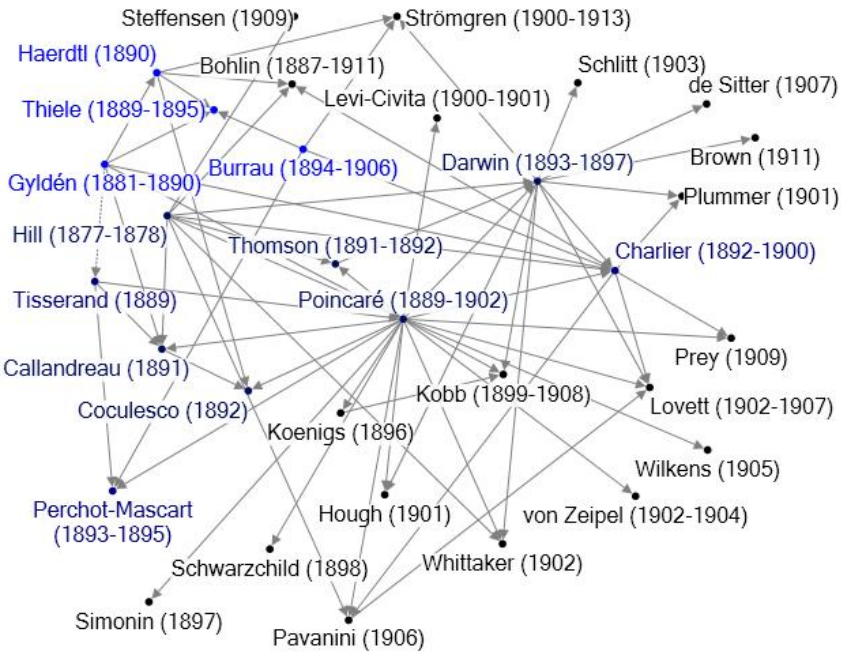


FIGURE 1. Les textes du *corpus* et leurs références croisées

plus d'un texte d'un même auteur, nous avons donné les dates de son premier et de son dernier article (en ne retenant que les textes compris dans le *corpus* initial)[6].

Nous dégagerons et caractériserons une *pratique* qui circule dans un *réseau* particulier à l'intérieur de ce *corpus*. Mais avant de passer à la construction du *réseau*, il convient de livrer les remarques qui résultent de notre premier examen des textes.

Un sous-ensemble de textes ne semble pas relié à Poincaré. Il peut paraître étrange de commencer une étude sur la réception de Poincaré par des textes dans lesquels on ne trouve pas de référence explicite ou implicite à Poincaré. Néanmoins, l'analyse du contenu de ces travaux met en relief la spécificité du point de vue de Poincaré. Sur le graphique, la plupart de ces textes, écrits par des Danois, sont connectés à Hugo Gyldén.

6 Nous avons exclu ici les travaux de l'Américain Forest Ray Moulton (1872-1952) et son équipe dont les travaux suivent une dynamique particulière qui mérite d'être traitée séparément. À ce sujet, voir [Stephenson 2012].

Après une description de ces premiers textes, nous analysons brièvement les travaux de Gyldén sur les orbites intermédiaires. La faveur de cette méthode prépare un terrain propice aux propositions de Poincaré sur les solutions périodiques. Cet examen de départ nous a amené loin de la France, donc il était naturel de se demander si les textes danois et suédois étaient connus par les chercheurs français en mécanique céleste.

Nous avons fait le tour des textes qui aident à comprendre l'insertion du nom de Poincaré dans la mécanique céleste en France, ce qui met en évidence le rôle de personnalités comme Félix Tisserand (1845-1896), mais surtout Octave Callandreau, qui est au cœur des efforts pour faire connaître les travaux qui se faisaient ailleurs, en particulier ceux qui se rattachent au nom de Gyldén.

2.1. *Un sous-ensemble sans lien à Poincaré*

En 1889, l'Académie des Sciences de Copenhague offrit un prix pour la résolution d'un problème de mécanique céleste. L'énoncé parut en français comme suit [Thiele 1889] :

> Dans une étoile double formée de deux points A et B ayant des masses égales, les orbites décrites sont circulaires. Un troisième point C, dont la masse est infiniment petite, se meut dans le plan des orbites de A et de B, de manière qu'à l'origine il se trouve sur le prolongement de AB, à une distance de A égale à la moitié de celle qui sépare A de B, et qu'en quittant cette position il décrirait une orbite circulaire autour de A si B n'existait pas. À l'origine, tous les mouvements se font dans le même sens.
>
> Le calcul doit être poussé assez loin pour que C ait fait au moins une révolution autour de B, comme aussi B une autour de A. Les résultats seront présentés en partie sous forme d'une Table avec une exactitude de cinq chiffres environ, et, pour les moments correspondant au commencement et à la fin, on donnera des orbites intermédiaires avec des contacts du troisième ordre ou d'un ordre plus élevé.

Le prix a été décerné à un mémoire de Eduard Freiherr von Haerdtl (1881-1897), seul concurrent à avoir soumis une réponse [Haerdtl 1892]. Son traitement consiste à écrire les équations de deux mouvements circulaires et d'ajouter ensuite des paramètres qui décrivent la perturbation dans l'orbite de C lorsqu'on considère l'effet de B (supposé nul au départ). L'auteur écrit les équations des paramètres de l'orbite de C et, par une transformation de coordonnées faisant que l'un des axes soit le segment AB (c'est-à-dire en rapportant les coordonnées sur un axe mobile), il simplifie les équations et conclut que C décrit une courbe fermée autour de A.

Le corps C fait trois révolutions et Haerdtl dresse une table des valeurs des coordonnées à cinq décimales, tel que requis par le concours, mais pour les deux premières révolutions de C seulement. La troisième révolution présente des écarts plus importants, ce qui amène l'auteur à se demander s'ils sont dus à des erreurs de calcul ou à l'ordre même des choses. L'orbite de C commence à changer de nature à la fin de la troisième révolution alors que le mobile tend à s'éloigner du centre d'attraction de A.

La méthode employée par Haerdtl est une adaptation de l'intégration numérique directe et il n'utilise pas les orbites intermédiaires, tel que demandé dans la proposition du prix. Néanmoins, tout en regrettant que la démarche de Gyldén soit absente ici, l'Académie reconnaît le mérite de l'auteur à qui elle décerne le prix. Et ce, d'autant plus équitablement qu'il aborde de surcroît un cas différent, soit celui où la position initiale du point C n'est pas sur le prolongement de AB mais au centre du couple, à égale distance de A et de B. Il se trouve que, dans ce cas, le corps C ne tarde pas à quitter le centre d'attraction de A pour se rapprocher de B en décrivant autour de ce nouveau centre des ellipses très allongées[7].

Présidée par l'astronome danois Thorvald Nicolai Thiele (1838-1910)[8], la commission insiste, dans son rapport, sur la pertinence de déterminer certains cas simplifiés du problème des trois corps, soit où le troisième corps présente un mouvement périodique. Les astronomes ne sachant pas, jusqu'alors, comment trouver directement des exemples d'une pareille périodicité, le travail de Haerdtl présentait d'autant plus d'intérêt. Le lauréat montre que l'exemple en question est assez voisin d'une des formes de mouvement périodique, fait assez inattendu, comme Thiele en témoigne dans le rapport écrit pour justifier le prix [Thiele 1891b], dont un extrait a été publié dans le *Bulletin Astronomique* [Thiele 1891a].

L'Académie avait demandé un calcul des orbites intermédiaires ayant avec l'orbite réelle des contacts du troisième ordre, dans le but de soumettre la méthode de Gyldén à une épreuve concrète. Pourtant, Haerdtl laisse cette question de côté parce que, selon lui, la véritable forme du mouvement (déduite de ses calculs) s'écarte considérablement de la forme supposée par la théorie des orbites intermédiaires. Il ajoute que les orbites intermédiaires de Gyldén ne servent pas comme approximation même dans

---

7 Il s'agit d'un cas de « capture », auquel s'applique la théorie développée par Tisserand dans [Tisserand 1889].

8 Thiele est devenu directeur de l'Observatoire Astronomique de l'Université de Copenhague en 1875. Un des fondateurs de la Société danoise de mathématiques, il a dirigé une compagnie d'assurances et a travaillé longtemps sur des questions d'actuariat et de statistiques.

c_0	c_1	x	Diff.	y	Diff.	ϱ	Diff.	r	Diff.	c	Diff.
°	°									° '	° '
962.5	661.25	− 0.59400	− 3469	+ 0.79166	− 2638	+ 2.9869	− 10	+ 0.9901	+ 7	1206 54.5	+ 2 31.3
965.0	662.50	0.62929	− 3357	+ 0.76528	− 2765	+ 2.9859	− 10	+ 0.9908	+ 9	1209 25.8	+ 2 30.8
967.5	663.75	− 0.66286	− 3243	+ 0.73763	− 2887	+ 2.9849	− 11	+ 0.9917	+ 12	1211 56.6	+ 2 30.4
970.0	665.00	− 0.69529	− 3122	+ 0.70876	− 3004	+ 2.9838	− 12	+ 0.9929	+ 14	1214 27.0	+ 2 29.9
972.5	666.25	− 0.72651	− 2995	+ 0.67872	− 3112	+ 2.9826	− 12	+ 0.9943	+ 15	1216 56.9	+ 2 29.1
975.0	667.50	− 0.75646	− 2864	+ 0.64760	− 3216	+ 2.9814	− 14	+ 0.9958	+ 18	1219 26.0	+ 2 28.3
977.5	668.75	− 0.78510	− 2729	+ 0.61544	− 3311	+ 2.9800	− 14	+ 0.9976	+ 20	1221 54.3	+ 2 27.6
980.0	670.00	− 0.81239	− 2590	+ 0.58233	− 3400	+ 2.9786	− 15	+ 0.9996	+ 21	1224 21.9	+ 2 26.8
982.5	671.25	− 0.83829	− 2447	+ 0.54833	− 3485	+ 2.9771	− 15	+ 1.0017	+ 23	1226 48.7	+ 2 25.8
985.0	672.50	− 0.86276	− 2300	+ 0.51348	− 3562	+ 2.9756	− 17	+ 1.0040	+ 24	1229 14.5	+ 2 24.7
987.5	673.75	− 0.88576	− 2151	+ 0.47786	− 3629	+ 2.9739	− 18	+ 1.0064	+ 26	1231 39.2	+ 2 23.6
990.0	675.00	− 0.90727	− 1999	+ 0.44157	− 3692	+ 2.9721	− 19	+ 1.0090	+ 27	1234 2.8	+ 2 22.6
992.5	676.25	− 0.92726	− 1846	+ 0.40465	− 3745	+ 2.9702	− 20	+ 1.0117	+ 28	1236 25.4	+ 2 21.4
995.0	677.50	− 0.94572	− 1690	+ 0.36720	− 3798	+ 2.9682	− 21	+ 1.0145	+ 29	1238 46.8	+ 2 20.2
997.5	678.75	− 0.96262	− 1534	+ 0.32927	− 3834	+ 2.9661	− 21	+ 1.0174	+ 29	1241 7.0	+ 2 19.0
1000.0	680.00	− 0.97796	− 1377	+ 0.29093	− 3868	+ 2.9640	− 22	+ 1.0203	+ 29	1243 26.0	+ 2 17.7
1002.5	681.25	− 0.99173	− 1220	+ 0.25225	− 3893	+ 2.9618	− 23	+ 1.0232	+ 31	1245 43.7	+ 2 16.5
1005.0	682.50	− 1.00393	− 1061	+ 0.21332	− 3912	+ 2.9595	− 24	+ 1.0263	+ 31	1248 0.2	+ 2 15.2
1007.5	683.75	− 1.01454	− 904	+ 0.17420	− 3924	+ 2.9571	− 25	+ 1.0294	+ 30	1250 15.4	+ 2 13.9
1010.0	685.00	− 1.02358	− 746	+ 0.13496	− 3931	+ 2.9546	− 26	+ 1.0324	+ 31	1252 29.3	+ 2 12.7
1012.5	686.25	− 1.03104	− 589	+ 0.09565	− 3929	+ 2.9520	− 28	+ 1.0355	+ 30	1254 42.0	+ 2 11.3
1015.0	687.50	− 1.03693	433	+ 0.05636	− 3921	+ 2.9492	− 29	+ 1.0385	+ 29	1256 53.3	+ 2 10.1
1017.0	688.75	− 1.04126	− 277	+ 0.01715	− 3908	+ 2.9463	− 30	+ 1.0414	+ 29	1259 3.4	+ 2 8.8
1020.0	690.00	− 1.04403	− 123	− 0.02193	− 3887	+ 2.9433	− 31	+ 1.0443	+ 27	1261 12.2	+ 2 7.5
1022.5	691.25	− 1.04526	+ 29	− 0.06080	− 3861	+ 2.9402	− 32	+ 1.0470	+ 27	1263 19.7	+ 2 6.4
1025.0	692.50	− 1.04497	+ 180	− 0.09941	− 3829	+ 2.9370	− 34	+ 1.0497	+ 25	1265 26.1	+ 2 5.1
1027.5	693.75	− 1.04317	+ 329	− 0.13770	− 3792	+ 2.9336	− 36	+ 1.0522	+ 24	1267 31.2	+ 2 4.0
1030.0	695.00	− 1.03988	+ 476	− 0.17562	− 3748	+ 2.9300	− 37	+ 1.0546	+ 22	1269 35.2	+ 2 2.8
1032.5	696.25	− 1.03512	+ 622	− 0.21310	− 3698	+ 2.9263	− 38	+ 1.0568	+ 20	1271 38.0	+ 2 1.7
1035.0	697.50	− 1.02890	+ 765	− 0.25008	− 3643	+ 2.9225	− 41	+ 1.0588	+ 19	1273 39.7	+ 2 0.6
1037.5	698.75	− 1.02125	+ 906	− 0.28651	− 3584	+ 2.9184	− 43	+ 1.0607	+ 16	1275 40.3	+ 1 59.6
1040.0	700.00	− 1.01219	+ 1044	− 0.32235	− 3519	+ 2.9141	− 45	+ 1.0623	+ 14	1277 39.9	+ 1 58.6
1042.5	701.25	− 1.00175	+ 1180	− 0.35754	− 3450	+ 2.9096	− 47	+ 1.0637	+ 11	1279 38.5	+ 1 57.7
1045.0	702.50	− 0.98995	+ 1313	− 0.39204	− 3375	+ 2.9049	− 49	+ 1.0648	+ 8	1281 36.2	+ 1 56.9
1047.5	703.75	− 0.97682	+ 1444	− 0.42579	− 3296	+ 2.9000	− 52	+ 1.0656	+ 5	1283 33.1	+ 1 56.1
1050.0	705.00	− 0.96238	+ 1572	− 0.45875	− 3212	+ 2.8948	− 55	+ 1.0661	+ 2	1285 29.2	+ 1 55.3
1052.5	706.25	− 0.94666	+ 1697	− 0.49087	− 3123	+ 2.8893	− 57	+ 1.0663	− 0	1287 24.5	+ 1 54.6
1055.0	707.50	− 0.92969	+ 1819	− 0.52210	− 3029	+ 2.8836	− 60	+ 1.0663	− 5	1289 19.1	+ 1 53.9
1057.5	708.75	− 0.91150	+ 1938	− 0.55239	− 2932	+ 2.8776	− 63	+ 1.0658	− 8	1291 13.0	+ 1 53.4
1060.0	710.00	− 0.89212	+ 2055	− 0.58171	− 2830	+ 2.8713	− 66	+ 1.0650	− 11	1293 6.4	+ 1 52.9
1062.5	711.25	− 0.87157	+ 2169	− 0.61001	− 2723	+ 2.8647	− 70	+ 1.0639	− 16	1294 59.3	+ 1 52.5
1065.0	712.50	− 0.84988	+ 2280	− 0.63724	− 2613	+ 2.8577	− 74	+ 1.0623	− 21	1296 51.8	+ 1 52.1
1067.5	713.75	− 0.82708	+ 2388	− 0.66337	− 2498	+ 2.8503	− 78	+ 1.0602	− 24	1298 43.9	+ 1 51.9
1070.0	715.00	− 0.80320	+ 2493	− 0.68835	− 2379	+ 2.8425	− 82	+ 1.0578	− 29	1300 35.8	+ 1 51.7
1072.5	716.25	− 0.77827	+ 2595	− 0.71214	− 2255	+ 2.8343	− 87	+ 1.0549	− 34	1302 27.5	+ 1 51.7
1075.0	717.50	− 0.75232	+ 2695	− 0.73469	− 2127	+ 2.8256	− 91	+ 1.0515	− 38	1304 19.2	+ 1 51.8
1077.5	718.75	− 0.72537	+ 2790	− 0.75596	− 1995	+ 2.8165	− 96	+ 1.0477	− 44	1306 11.0	+ 1 51.9
1080.0	720.00	− 0.69747	+ 2882	− 0.77591	− 1858	+ 2.8069	− 102	+ 1.0433	− 49	1308 2.9	+ 1 52.1
1082.5	721.25	− 0.66865	+ 2972	− 0.79449	− 1715	+ 2.7967	− 107	+ 1.0384	− 55	1309 55.0	+ 1 52.4
1085.0	722.50	− 0.63893	+ 3059	− 0.81164	− 1570	+ 2.7860	− 113	+ 1.0329	− 60	1311 47.4	+ 1 53.0
1087.5	723.75	− 0.60834	+ 3142	− 0.82734	− 1419	+ 2.7747	− 119	+ 1.0269	− 66	1313 40.4	+ 1 53.6
1090.0	725.00	− 0.57692	+ 3222	− 0.84153	− 1263	+ 2.7628	− 125	+ 1.0203	− 73	1315 34.0	+ 1 54.5
1092.5	726.25	− 0.54470	+ 3297	− 0.85416	− 1102	+ 2.7503	− 132	+ 1.0130	− 78	1317 28.5	+ 1 55.3
1095.0	727.50	− 0.51173	+ 3369	− 0.86518	− 935	+ 2.7371	− 139	+ 1.0052	− 85	1319 23.8	+ 1 56.4
1097.5	728.75	− 0.47804	+ 3437	− 0.87453	− 764	+ 2.7232	− 147	+ 0.9967	− 92	1321 20.2	+ 1 57.8

FIGURE 2. Haerdtl fournit 11 pages des tables comme celle-ci, afin de décrire le mouvement de C

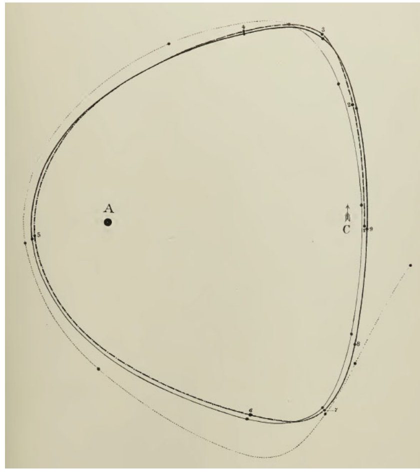


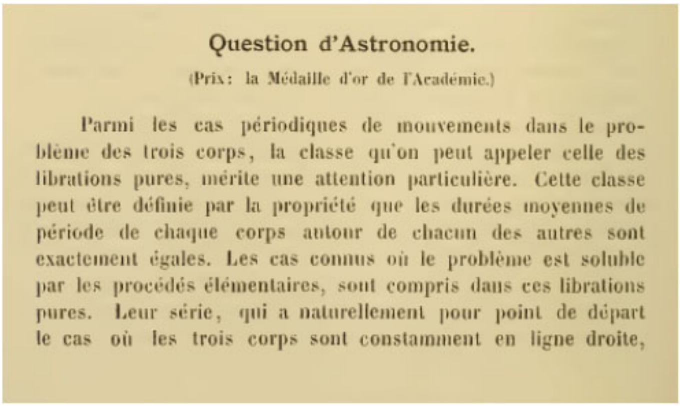
FIGURE 3. Mais il propose aussi des dessins pour montrer ce qui se passe dans les voisinages des orbites périodiques

le cas d'une unique révolution. Le rapporteur reconnaît les qualités de l'article, notamment à cause de la manière de « rendre, pour ainsi dire, visibles les mouvements dont il est question » [Thiele 1891a, p. 254] mais on regrette que la méthode de Gyldén ne soit pas du tout employée car elle apporterait plus d'exactitude aux calculs de Haerdtl que l'intégration numérique. Il est à remarquer que, afin de décrire le mouvement de C, Haerdtl fournit des tables mais aussi des figures, comme la figure 3, qui rendent les mouvements encore plus « visibles ». On se sert de figures semblables dans plusieurs traitements des cas particuliers du problème des trois corps comme on le verra plus loin.

Aucune mention n'est faite de Poincaré dans ce contexte, ni dans l'énoncé du problème posé par l'Académie danoise ni dans l'article primé. Il en ira de même, trois années plus tard, lorsqu'en 1892 la même Académie mettra au concours un autre problème dont on trouve le résumé dans la figure 4. Cette fois, le vainqueur est Carl Jensen Burrau (1867-1944), astronome danois disciple de Thiele[9]. L'article de Burrau, dont la première partie est parue dans les *Astronomische Nachrichten* (sous

9 Burrau a été assistant à l'Observatoire de l'Université de Copenhague entre 1893 et 1898.

l'égide la Deutsche Astronomische Gesellschaft) en 1894 [Burrau 1894], atteste de l'existence de travaux sur le problème des trois corps dans lesquels on cherche des orbites périodiques par le moyen des traitements numériques.



Question d'Astronomie.

(Prix: la Médaille d'or de l'Académie.)

Parmi les cas périodiques de mouvements dans le problème des trois corps, la classe qu'on peut appeler celle des librations pures, mérite une attention particulière. Cette classe peut être définie par la propriété que les durées moyennes de période de chaque corps autour de chacun des autres sont exactement égales. Les cas connus où le problème est soluble par les procédés élémentaires, sont compris dans ces librations pures. Leur série, qui a naturellement pour point de départ le cas où les trois corps sont constamment en ligne droite,

FIGURE 4. L'énoncé du deuxième prix publié en 1892 dans le *Oversigt over dei Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs*

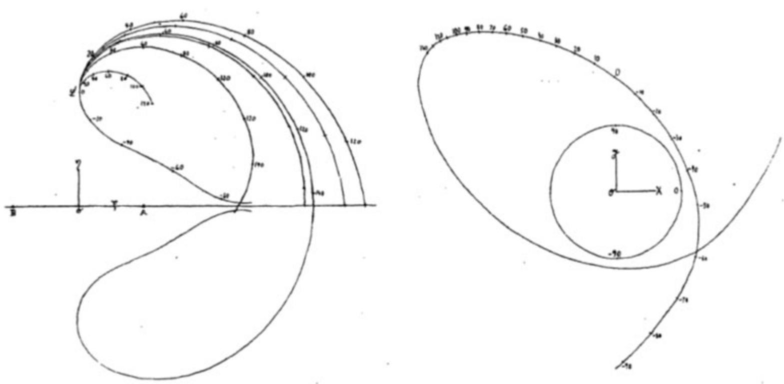


FIGURE 5. Dessins proposés par Burrau montrant les comportements possibles des orbites, [Burrau 1894, p. 237-238]

Comme Haerdtl, Burrau fournit des figures pour illustrer les comportements *possibles* des orbites (Figure 5) en plus de ses calculs numériques. En 1885, Thiele publie à son tour un article sur le sujet dans les *Astronomische*

Nachrichten [Thiele 1895][10]. Son but est de fournir des développements en séries permettant d'étendre les conclusions de Burrau, mais surtout de les rendre plus « légitimes » en allant au delà des méthodes numériques employées par ce dernier.

On notera encore que tous ces travaux demeurent totalement indépendants de Poincaré. Outre l'intérêt que des descriptions partielles des cas particuliers du problème des trois corps peuvent comporter, leur motivation initiale était de tester l'utilité de la méthode des orbites intermédiaires de Gyldén dans des cas concrets. En cela, ils ont échoué, car la méthode en question s'avère trop complexe pour les besoins immédiats des astronomes.

Néanmoins, jusqu'aux années 1890, lorsqu'il s'agissait de discuter de la légitimité des méthodes d'un point de vue mathématique, c'est le nom de Gyldén qu'on lisait dans les textes de mécanique céleste.

Le rôle de Hugo Gyldén mériterait sans doute qu'on s'y attarde pour discuter de différentes conceptions de la convergence en tant que corrélats de points de vue distincts sur la question de la stabilité, menant à une possible animosité entre Gyldén et Poincaré. Mais tel n'est pas notre but[11]. Nous analyserons la popularité de la méthode des orbites intermédiaires, qu'il a proposée dès 1881 [Gyldén 1881a], ainsi que les complications rencontrées dans son utilisation.

2.2. *Les orbites intermédiaires et leur circulation en France*

À la fin du XIXe siècle, la stabilité du système solaire, conçue en général ou dans des cas particuliers comme celui des trois corps, était une question centrale de la mécanique céleste. Cependant, l'identification de la stabilité à l'existence de séries convergentes décrivant les coordonnées du mouvement des planètes posait problème. Pendant les années 1880, plusieurs tentatives ont été faites pour intégrer les séries par des méthodes permettant d'assurer la convergence. La plupart de ces recherches s'associent à celles de Gyldén.

Afin d'assurer la stabilité, il fallait trouver des séries dans lesquelles le temps t n'apparaît pas en dehors de signes tels que *sin* et *cos*, par lesquels sont exprimées les fonctions périodiques. Les méthodes traditionnelles

---

10 On pourrait relier ces écrits à la question de la régularisation du problème des trois et des n corps, qui est traitée à cette époque par Paul Painlevé (1863-1933) et un peu plus tard par Tullio Levi-Civita (1873-1941) et Karl Sundman (1873-1949). Pour plus de renseignements à ce sujet, voir [Dell'Aglio 1993] et [Dell'Aglio 2001].

11 Cette question est traité par June Barrow-Green dans [Barrow-Green 1997, p. 139-143].

d'approximations successives prenaient comme premières approximations les ellipses képlériennes. Pour sa part, Gyldén proposait de ne plus négliger complètement les forces perturbatrices dans cette phase initiale et sa nouvelle proposition consiste à choisir, en première approximation et suivant le cas, une courbe représentant le mouvement réel de l'astre d'une façon plus approchée que l'ellipse de Kepler. Cette courbe, c'est l'*orbite intermédiaire*.

De l'avis de Gyldén, les orbites intermédiaires permettraient d'écrire des séries purement trigonométriques. La méthode n'est pas complètement aboutie à cause de complications analytiques trouvées dans les approximations. Néanmoins, les avancées suggérées par Gyldén étaient considérées comme une nouveauté dans le milieu de la mécanique céleste jusqu'aux années 1890.

Grâce aux synthèses rédigées par Octave Callandreau (1852-1904), Rodolphe Radau (1835-1911) et Félix Tisserand (1845-1896) pour le *Bulletin Astronomique*, les recherches internationales rejoignaient immédiatement la France[12]. Ces trois astronomes jouèrent un rôle clé dans la liaison entre des questions qu'on pourrait dire plus mathématiques, qui étaient reliées aussi bien aux démarches de Poincaré qu'à celles de Gyldén à cette époque, et des questions d'astronomie alors liées, par exemple, à l'observation ou aux calculs numériques des orbites. Cela ne veut pourtant pas dire qu'il y avait, d'un côté, une communauté de mathématiciens théoriciens et, d'un autre, des astronomes tournés vers les applications. Il n'y avait pas de clivage car les deux tendances sont présentes à l'intérieur de la mécanique céleste et expriment souvent les diverses préoccupations d'un auteur dans un même texte[13].

Il est naturel de se demander si Poincaré utilisait la méthode de Gyldén ou s'il était influencé par lui de quelque manière. Rappelons d'abord qu'en 1882, Poincaré entretenait une correspondance suivie avec Callandreau :

> Sur la stabilité du système solaire, je savais aussi, par une indication de M. Gyldén, que M. Weierstrass avait examiné la convergence des séries ; où et comment

---

12 Cette information n'est pas fournie par le corpus mais on observe ce phénomène facilement en feuilletant les volumes du *Bulletin Astronomique* publiés à l'époque. Bien entendu, une étude approfondie de la circulation de la notion d'orbite intermédiaire en France exigerait une discussion méthodologique plus approfondie que ce que nous ne faisons ici. Mais il s'agit là d'un sujet marginal à notre recherche.

13 Le rôle de Callandreau dans le rapprochement entre mathématiciens et astronomes est un élément important pour comprendre le paysage de la mécanique céleste en France à l'époque de Poincaré.

> je ne l'ai pas appris. Mais M. Gyldén, en septembre dernier, a lu au Congrès astronomique à Strasbourg, un travail simple et court sur le même sujet. Le bulletin de la Société astronomique aurait dû paraître déjà ; je pourrais te le communiquer. C'est du reste à cause de ce défaut de convergence des séries qu'il a été amené, comme il le dit dans la Note qui accompagne ma lettre « Ueber die Theorie », à imaginer quelque nouveau moyen de calculer les perturbations.[14].

Ce « nouveau moyen » est justement la méthode des *orbites intermédiaires.* Toutefois, dans sa réponse à Callandreau, Poincaré ne manifeste aucun intérêt apparent pour les travaux de Gyldén[15]. En 1884, Poincaré publiait un premier article traitant des solutions périodiques « Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps » [Poincaré 1884]. La convergence y est traitée par une voie très différente de celles qui étaient alors considérées comme « classiques » en mécanique céleste. De fait, ce travail de Poincaré n'était pas directement lié à la mécanique céleste : ainsi n'a-t-il pas circulé parmi des chercheurs en ce domaine. Cette situation changera par les retombées de l'article « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique », à partir de 1889, et notamment avec la publication du premier tome des *Méthodes nouvelles* en 1892. Les résultats de Poincaré venaient alors confirmer l'importance des solutions périodiques et suggérer de nouvelles voies de recherche.

Les travaux de Gyldén demeuraient reconnus comme indiquant des chemins valables, au moins jusqu'aux années 1890. La théorie des orbites intermédiaires avait été exposée par Marie Henri Andoyer en 1887 [Andoyer 1887], rendant les démarches de Gyldén plus accessibles que dans les écrits originaux. En 1890, Callandreau publiait un rapport sur les travaux inaugurés par la théorie des perturbations « fondée par Gyldén » entre 1881 et 1882 [Callandreau 1890]. Il analyse la répercussion des méthodes proposées par ce dernier dans un livre écrit en suédois [Gyldén 1881b] et mentionne plusieurs chercheurs ayant appliqué des suggestions de Gyldén au problème des « petites planètes » Hécube, Hestia et Cérès[16].

En dépit de la bonne réputation de Gyldén et du succès de sa méthode dans certains cas concrets, on se heurtait encore à des difficultés sérieuses

14 Lettre datée « Avant le 26.02.1882 » sur le site des Archives Henri Poincaré, `www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/text/callandreau1882.xml`

15 Poincaré trouvait les méthodes de Lindstedt supérieures à celles de Gyldén. On le voit dans [Poincaré 1883] ainsi que dans l'analyse que Philippe Nabonnand a faites des des échanges entre Poincaré et Lindstedt, notamment dans la conférence « The first contributions of Poincaré in celestial mechanics seen from his correspondence with Anders Lindstedt (1883-1884) », qu'il a prononcé au Colloque Poincaré, tenu à Rio de Janeiro en novembre 2012. Voir aussi [Walter et al. 2014].

16 Celles que l'on appelait « petites planètes », à cette époque, sont désormais les astéroïdes.

dans son utilisation. Au delà de leurs limitations théoriques pour résoudre le problème de la stabilité, en raison d'une convergence incertaine, les traitements classiques par approximations successives étaient trop laborieux. Cette conjoncture prépare le terrain à des innovations et la pratique des solutions périodiques fournit un chemin alternatif pour l'étude du mouvement des planètes, ainsi qu'un cadre mathématique nouveau pour discuter de la légitimité des démarches suivies dans cette étude.

2.3. *La présence de Poincaré dans des textes publiés en France*

L'article de Callandreau qui apparaît dans la figure 1 s'intitule « Sur quelques applications des théories concernant les solutions particulières périodiques du problème des trois corps et l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques ». Il parut dans le *Bulletin Astronomique* en 1891 et traite justement de la possibilité d'appliquer les méthodes mises en avant par Poincaré à des problèmes concrets.

> Il est naturel de chercher à faire profiter la Mécanique céleste des progrès réalisés récemment, grâce surtout au grand travail de M. Poincaré sur le problème des trois corps. À l'époque (1877) où M. G.-W. Hill et M. Adams ont publié leurs belles recherches sur la théorie de la Lune, lesquelles offrent précisément des applications des théories mentionnées, ces théories n'étaient pas encore fixées et les éminents auteurs durent se laisser guider par l'induction [Callandreau 1891, p. 49].

L'histoire rétrospective chez les scientifiques ne date pas d'hier. Callandreau suggère que les progrès théoriques de son époque trouvent des applications dans des recherches faites au moins dix ans auparavant. Nous dirions plutôt que les apports déjà théoriques que George William Hill (1838-1914) avait développés, pour des cas particuliers de la théorie de la Lune, ont été repris par Poincaré et intégrés à une théorie plus générale.

Callandreau réduit l'ordre du système différentiel utilisé dans certains cas du problème des trois corps en se servant des solutions périodiques. D'une manière générale, il traite le système d'équations linéaires auquel amène la considération d'une solution peu différente d'une solution périodique. Ces équations linéaires sont justement des « équations aux variations » proposées par Poincaré (desquelles nous parlerons plus tard dans la section 3). Callandreau appliquera ces outils à l'étude des comètes périodiques.

En 1893, Justin Perchot (1867-1946) — qui deviendra sénateur de la III^{e} République — applique les solutions périodiques à la théorie de la Lune [Perchot 1893]. Plus tard, en 1895, il écrivit avec Jean Mascart (1872-1935), astronome à l'Observatoire de Paris, une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (CRAS).* Nous voyons par là que, même de manière indirecte, Poincaré suscite une nouvelle façon d'aborder les textes cités dans la section 2.1 :

> L'Académie Royale Danoise avait mis au concours, pour 1892, une question concernant la recherche des solutions périodiques du Problème des trois corps dans le cas d'une masse petite attirée par deux masses égales.
>
> Par des calculs habilement conduits, M. Carl Burrau, de l'observatoire de Copenhague, a trouvé une classe de solutions périodiques commençant à la solution bien connue de Lagrange dans laquelle les trois corps restent en ligne droite. Ses résultats ont été publiés dans les *Astronomische Nachrichten.*
>
> Sur les conseils de M. Tisserand, nous avons essayé d'appliquer à cette question la théorie des solutions périodiques de M. Poincaré. Les résultats de notre première approximation ne paraissent pas différer sensiblement de ceux de M. Burrau. [Perchot 1895]

Les recherches de Poincaré se relient ainsi à des travaux déjà en cours sur des cas particuliers du problème des trois corps. En 1892, Radau écrivait un rapport sur le mémoire de Haerdtl pour le *Bulletin Astronomique* où il disait :

> On y voit clairement l'influence qu'un léger changement des conditions initiales peut avoir sur le caractère du mouvement. C'est un sujet qui, sans doute, tentera encore plus d'un géomètre.
>
> Mais il faudra consulter, pour les méthodes à employer, les Mémoires de M. Hill sur la théorie de la Lune, les récents travaux de M. Poincaré, les recherches de M. Tisserand, relatives à la théorie de la capture[17], celles de M. Callandreau sur les comètes périodiques.

Quant à la façon particulière de se servir des solutions périodiques, une partie des textes de notre *corpus* se base sur la reconnaissance du rôle de ces solutions pour la compréhension du comportement des autres solutions dans leurs voisinages. Dans [Callandreau 1891], par exemple, Callandreau explore ce qui se passe lorsqu'on perturbe les conditions initiales qui définissent une solution périodique. Il s'agit d'une des manières d'utiliser les solutions périodiques : observer les comportements possibles des orbites obtenues par un léger changement des conditions initiales.

Poincaré donnera un nouvel élan à ce type de traitement, par sa manière d'obtenir des équations aux variations. Après 1892, des chercheurs, tel l'astronome romain Nicolaie Coculesco[18], tenteront d'appliquer les

---

[17] Voir par exemple [Tisserand 1889].

[18] Coculesco a passé quelques années à l'Observatoire de Paris avant de devenir professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest.

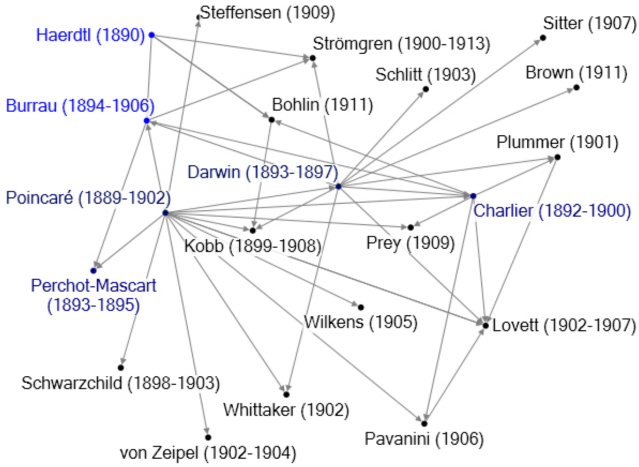


FIGURE 6. Réseau tracé à partir de la *pratique des solutions périodiques*

suggestions de Poincaré à l'étude de situations spécifiques. Coculesco publie une note aux *CRAS*, dans laquelle il étudie la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps [Coculesco 1892][19]. Il reprend la question traité par Haerdtl et fournit une nouvelle solution en se servant des outils développés par Poincaré : il y a stabilité dans le sens qu'il est possible d'assigner des limites supérieures aux coordonnées du mouvement du troisième corps.

Il est important de souligner que, ce que nous désignons ici comme « pratique des solutions périodiques » ne s'identifie pas à la démarche dont nous venons de parler. Dans la section suivante, nous caractérisons cette *pratique* et le *réseau* des textes qui l'emploient.

3. UNE PRATIQUE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET SON RÉSEAU

En lisant les textes de notre *corpus* nous avons identifié une *pratique* commune qui se définit comme suit : supposer d'abord l'existence d'une solution périodique et, ensuite, perturber les paramètres donnant lieu à une telle solution. La détermination de ces paramètres entraîne le choix d'un cas particulier du problème des trois corps, donc leur perturbation revient

19 C'est Poincaré qui présenta ce travail à l'Académie des Sciences de Paris. Il a aussi entretenu une correspondance avec Coculesco après le retour de ce dernier à Bucarest.

à vérifier s'il y a d'autres solutions du même type dans des cas voisins. Telle est la *pratique des solutions périodiques*.

Les chemins que Poincaré a ouverts à partir de 1889 (en se servant des travaux de Hill) sont au cœur de cette pratique. George Howard Darwin (1845-1912) y recourt dans son article « Periodic Orbits » de 1897 [Darwin 1897][20]. Ces travaux de Darwin ont connu une répercussion considérable dans le milieu des astronomes : il insiste sur l'importance (et la nouveauté) de pouvoir obtenir, de façon directe, des orbites périodiques dans le problème des trois corps.

Dans un « Report of the Council » publié en 1898 dans les *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Philip H. Cowell (1870-1949) révisait les contributions de Darwin sur les solutions périodiques [Cowell 1898a][21]. Un récit historique alors prend forme dans lequel on affirme que le sujet a été inauguré par Hill, suivi de Poincaré, mais d'un point de vue purement mathématique, puis repris par Darwin dans des cas concrets[22] :

> M. Poincaré has published some results of a general character obtained by advanced methods of pure mathematics, but the first extensive results in a concrete form are contained in Professor Darwin's recent paper [Cowell 1898b, p. 122].

À ce stade, la démonstration de la stabilité par la voie analytique s'avérait trop compliquée (rappelons-le) et, face aux obstacles empêchant d'assurer la convergence, on pouvait comprendre, grâce aux solutions périodiques, ce qui se passait dans des cas particuliers. Prendre une situation des trois corps qui donne lieu à une solution périodique pour vérifier l'existence d'autres solutions périodiques dans des situations proches, tel est le changement de perspective sur le problème que nous désignerons ici comme *pratique des solutions périodiques*. Tous les textes de notre réseau sont d'abord connectés parce qu'ils emploient cette pratique. Ce n'est que par la suite que nous avons ajouté des liaisons résultant de citations explicites (dans la figure 6).

La construction de notre réseau est une application du principe de *variation d'échelle* au *corpus de base* (voir figure 1). Ce principe a été théorisé par des auteurs du domaine de la micro-histoire, notamment Jacques Revel dans [Revel 1996]. Il s'agit d'observer l'objet d'analyse en le regardant de plus en plus près, c'est-à-dire, en variant la focale afin d'appréhender les

20 Un résumé de cet article était paru en 1896 [Darwin 1896], suivi d'une version abrégée en 1899 [Darwin 1899].

21 Cowell publiera un rapport semblable dans *The Observatory*.

22 Hill lui-même reproduit le même discours dans une brève note publiée dans le *Astronomical Journal* [Hill 1898].

phénomènes à une plus petite échelle. Par cette méthode, utilisée dans les thèses de Sébastien Gauthier [2007] et Juliette Leloup [2009], on voit apparaître des phénomènes nouveaux. Ainsi, à une échelle plus petite, nous avons identifié une pratique commune, qui sert d'élément de liaison dans le *réseau*.

La notion de *pratique* semble utile parce qu'elle permet de saisir, au delà des actions (soit des procédés mathématiques intentionnellement mis en œuvre par les scientifiques), un ensemble de valeurs mobilisées dans ces actions, valeurs qui sont partagées par plusieurs acteurs. Nous reviendrons sur les sens que prend le mot *pratique* dans le travail de l'historien. Auparavant, il convient que nous donnions plus de précisions sur les traitements mathématiques de Hill, Poincaré et Darwin, qui sont au cœur de la pratique des solutions périodiques.

3.1. *Les traitements mathématiques de Hill, Poincaré et Darwin*

3.1.1. *Hill et l'étude de la variation dans le problème de la Lune*

Poincaré affirme à plusieurs reprises que sa manière d'utiliser les solutions périodiques est inspirée des travaux de Hill. Voyons d'abord quelles sont les techniques proposées par Hill dans les années 1877-1878, qui seront reprises par Poincaré dix ans plus tard.

Deux articles de Hill fournissent une méthode nouvelle pour traiter le problème de la Lune. Le premier « On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon » est publié à frais d'auteur en 1877 et communiqué à quelques collègues proches [Hill 1877]. C'est la suite de ses « Researches on Lunar Theory », rédigées plus tôt mais publiées seulement en 1878 dans le premier numéro de l'*American Journal of Mathematics* [Hill 1878].

Presque toutes les théories de la Lune élaborées jusqu'alors partaient d'une solution du problème des deux corps, soit une orbite circulaire ou elliptique de la Lune autour de la Terre. Ensuite, il fallait prendre en compte les variations périodiques produites par l'attraction qu'exerce le Soleil et se demander comment les variations perturberaient l'orbite elliptique.

Pour sa part, Hill prend une orbite « ovale » de la Lune autour de la Terre, soit un cercle aplati dans la direction du Soleil. Le plus important n'est pourtant pas la forme de cette courbe mais le fait qu'il s'agit d'une vraie solution d'une version simplifiée du problème des trois corps. Cette

« courbe de variation » est supposée approcher le mouvement de la Lune plus exactement que l'ellipse képlerienne[23].

Hill emploie des coordonnées rectangulaires tournantes. Les variables x et y sont des coordonnées par rapport au centre de la Terre (le point E dans la figure 7) et tournent autour de l'axe z. Il écrit les équations différentielles du mouvement en termes de la fonction potentielle et suppose que ces équations sont résolues pour l'orbite de variation. Ensuite, il analyse l'effet des petites perturbations sur cette solution.

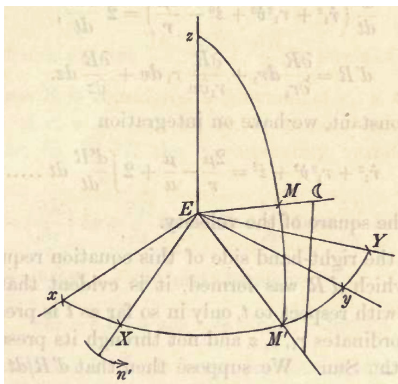


FIGURE 7. Coordonnées tournantes de Hill représentées par Ernst Brown dans [Brown 1896, p. 13]. Le plan xy est celui du mouvement du Soleil. Les axes EX et EY tournent dans ce plan (supposé fixe) autour de l'axe z. Le mouvement coupe les axes aux points x, y et z.

Si m est le rapport de la période de la Lune (vue depuis le système des coordonnées tournantes) à la période de la Terre, et si r est la distance de la Lune à la Terre, on peut écrire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2m\frac{dy}{dt} + \frac{x}{r^3} - 3m^2x = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2m\frac{dx}{dt} + \frac{y}{r^3} = 0.$$

23 Dans [Wilson 2010] on apprend qu'une courbe semblable avait déjà été considérée par Newton et Euler.

Dans ce cas, il est possible de trouver une intégrale de Jacobi pour le système :

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]+\frac{1}{r}+\frac{3}{2}m^2x^2=C$$

où C est une constante.

Cette constatation suggère une solution au problème de la stabilité du mouvement de la Lune, puisque l'intégrale ci-dessus amène à conclure que l'équation $\frac{1}{r}+\frac{3}{2}m^2x^2-C=0$ définit des courbes de vitesse nulle. Hill dessine ces courbes limites pour différentes valeurs de C, à partir des valeurs de x qui donnent différents nombres de solutions pour l'équation $x^3-\frac{2C}{3m^2}x+\frac{2}{3m^2}=0$.

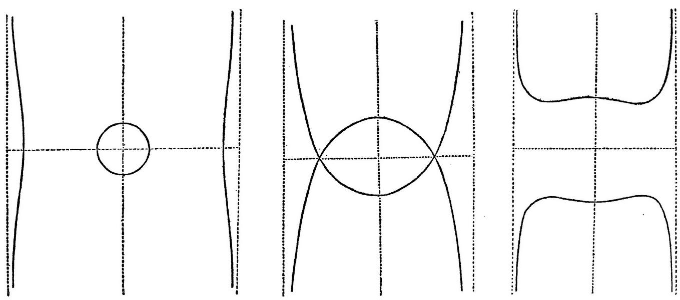


FIGURE 8. La première figure représente la forme de la courbe dans le cas de notre Lune. La deuxième s'obtient lorsqu'on augmente l'ovale de la première figure de façon qu'elle touche les deux branches infinies. Dans la troisième celle-ci disparaît et les portions de la courbe paraissent de chaque côté de l'axe x. [Hill 1878, p. 303]

Le mouvement du corps doit rester confiné à la région où $\frac{1}{r}+\frac{3}{2}m^2x^2-C\geq 0$. Dans le premier cas illustré dans la figure 8, une fois que le satellite est à l'intérieur de l'ovale, il ne peut pas s'échapper, demeurant pour toujours à l'intérieur de cette courbe de vitesse nulle. L'autre possibilité est qu'il soit dans les régions extérieures aux branches, s'étendant à l'infini dans la direction de l'axe x. Mais, comme on sait que la Lune est à présent à l'intérieur de l'ovale, elle y restera pour toujours, ce qui assure la stabilité de son mouvement.

Cela revient à une manière d'obtenir des conclusions directes, à partir d'une inspection des positions possibles des orbites à l'intérieur des courbes fermées. Karl Bohlin (1860-1939) reconnaît, avant Poincaré, la nouveauté d'une telle méthode :

> Dans le cas où on arrive à donner de telles bornes on a répondu à la question de la stabilité du mouvement, indépendamment d'une résolution complète des équations différentielles.[24]

Dans cet article, publié aux *Acta Mathematica* [Bohlin 1887a], Bohlin utilise aussi le comportement de la courbe de vitesse nulle comme critère de stabilité. Pour cela, il introduit une nouveauté par rapport au traitement de Gyldén, en montrant que, si les coordonnées restent entre des limites déterminées, il est possible d'obtenir des conclusions sur la stabilité indépendamment de la résolution de l'équation différentielle par des séries. Comme chez Hill, ces limites sont données par l'intégrale de Jacobi.

Une deuxième innovation, que Poincaré remarque dans la voie empruntée par Hill, est l'usage qu'il fait des *courbes de variation.* L'importance de ces courbes pour la détermination des orbites dans leurs voisinages devenait déjà plus claire dans [Hill 1877], article republié en 1886. Hill avait déjà conclu que, pour chaque valeur du paramètre m, il y a exactement une solution périodique (de période 2π). Telle est l'orbite de variation, calculée en supposant que la fonction perturbatrice s'annule. Les différentes possibilités sont représentées par le diagramme de la figure 9.

La vraie trajectoire de la Lune est alors conçue comme un petit déplacement à partir de l'orbite de variation. Les variables de cette courbe étant nommées x_0 et y_0, Hill explore ce qui se passe lorsqu'on additionne, respectivement, des incréments δx et δy. Ces additions entraînent de l'excentricité (supposée nulle au départ) dont les effets seront déterminés par la perturbation des paramètres qui définissent la courbe de variation.

Hill écrit donc les équations différentielles des incréments δx et δy en substituant premièrement x_0 et y_0 et ensuite $x_0 + \delta x$ et $y_0 + \delta y$ dans les équations différentielles du mouvement. En calculant la différence entre les deux résultats, il élimine x_0 et y_0 et arrive aux équations de δx et δy. Après des changements de variables et des réductions algébriques, il obtient une équation ayant une forme qui semble avoir été connue (nous reviendrons là-dessus dans la section 4.1) :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \Theta\omega = 0.$$

[24] In den Fällen, wo es gelingt solche Grenzen anzugeben, hat man auf die Frage von der Stabilität der Bewegung, unabhängig von der vollständigen Lösung der Differentialgleichungen, eine Antwort gefunden. [Bohlin 1887a, pp. 109-110].

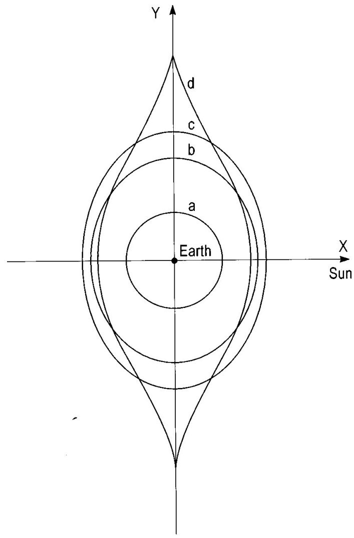


FIGURE 9. Le diagramme de Hill représente les orbites de variation pour différentes longueurs du mois synodique : $a = 12,369$ lunations par an, comme notre Lune, $b = 4$, $c = 3$, $d = 1,78265$ lunations donnant lieux à la forme en cuspide [Hill 1878, p. 335]

La valeur de Θ dépend de la position relative de la Lune par rapport au Soleil et peut être développée dans une série de la forme :

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1 \cos 2\tau + \Theta_2 \cos 4\tau + \cdots$$

où τ est la distance angulaire moyenne entre les deux corps et les Θ_i sont des constantes.

La nouvelle variable ω représente la distance (mesurée sur la normale) du corps à l'orbite périodique dans un instant t, pendant que des oscillations petites ont lieu. Bref, Hill part d'une équation qui décrit les petites oscillations du corps lorsque les conditions initiales de son mouvement ne sont pas exactement celles de l'orbite périodique. Les simplifications algébriques devaient servir à trouver un système d'équations linéaires à coefficients périodiques.

Avant de résoudre l'équation, Hill observe qu'écrire Θ en termes de la série donnée auparavant entraîne des problèmes d'approximation et il réécrit l'équation à nouveau en adoptant des variables imaginaires :

$$u = x + y\sqrt{-1}, s = x - y\sqrt{-1}.$$

Le recours à ces variables permet d'écrire $e^{\tau\sqrt{-1}} = \zeta$ et d'introduire l'opérateur D tel que $D(a\zeta^v) = va\zeta^v$. Hill utilise ensuite successivement la solution particulière afin de réduire l'ordre de l'équation finale. En faisant encore d'autres substitutions, il arrive à :

$$D^2\omega = \Theta\omega.$$

Mais cette fois-ci la valeur de Θ est donnée par une série de termes exponentiels du type $\sum_{-\infty}^{+\infty} \Theta_i \zeta^{2i}$. Une solution possible de l'équation serait ainsi :

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_i \zeta^{c+2i}.$$

Hill cherche longtemps à déterminer c, raison du mois synodique au mois anomalistique (estimée par des observations), et donne les valeurs de ce paramètre avec beaucoup de précision[25]. Dit autrement, il obtient par là une valeur qui diffère très peu des données d'observations, ce qui n'était pas le cas des déductions précédentes. Or, en mécanique céleste, une théorie était d'autant plus valable que ses résultats étaient conformes aux données des observations. Par conséquent, la précision que Hill obtient dans la détermination de la valeur de c confère une grande légitimité à sa procédure en général.

En partant d'une orbite périodique, qui donne une vraie résolution du problème des trois corps, Hill pouvait décrire le comportement d'autres solutions dans son voisinage. Un tel procédé correspondait à une connaissance d'un nouveau genre de l'aspect des orbites. L'examen des orbites *possibles* comme étant des courbes ne faisait alors pas partie du sens commun de la mécanique céleste. C'est cet aspect des travaux de Hill qui captera particulièrement l'attention de Poincaré.

3.1.2. *Les travaux de Poincaré en mécanique céleste*

Poincaré explorera les méthodes de Hill dans deux directions principales :

– l'étude des voisinages d'une solution périodique ;
– la perturbation analytique des solutions périodiques.

Dans chacun de ces domaines, allant plus loin que Hill avant lui, Poincaré démontrait une extension du théorème de Cauchy sur l'existence de solutions d'équations différentielles. Au tout début de [Poincaré 1890], il démontre la continuité des solutions par rapport à des changements dans

---

25 C'est dans ce but que Hill propose une manière de traiter les déterminants infinis qui a frappé Poincaré. Voir [Brechenmacher 2013a].

les conditions initiales du système et par rapport à la variation d'un paramètre. Ces résultats sont repris dans le deuxième chapitre des *Méthodes nouvelles* [Poincaré 1892-1899].

On suppose le théorème de Cauchy valable pour les équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = \Theta(x, y, z, \mu)$$
$$\frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, z, \mu)$$
$$\frac{dz}{dt} = \Psi(x, y, z, \mu).$$

Les fonctions φ et Ψ se développent en termes des puissances croissantes de la variable indépendante x, des deux fonctions inconnues y et z et du paramètre arbitraire μ. Poincaré démontre qu'il existe trois séries convergentes, développables en termes de puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0 qui satisfont les équations ci-dessus, et qui se réduisent respectivement à x_0, y_0, z_0 quand $t = 0$. Autrement dit, au lieu de développer les séries uniquement par rapport à la variable indépendante x, Poincaré les développe aussi par rapport aux conditions initiales x_0, y_0, z_0 et par rapport au paramètre μ.

Considérer des solutions qui varient de façon continue quand varient les conditions initiales revient à envisager les solutions dans leur ensemble, comme un tout, au lieu de considérer les solutions individuelles de l'équation différentielle. Voilà un trait qui marque la démarche de Poincaré.

La variation par rapport au paramètre μ sera très utile, à son tour, pour l'étude du problème des trois corps comme perturbation d'une situation particulière, obtenue quand $\mu = 0$.

Dans le chapitre 4 des *Méthodes nouvelles*, l'étude des voisinages d'une solution périodique donne lieu à la définition de la stabilité pour ce type de solution. Poincaré part d'une solution $x_i = \varphi_i(t)$, supposée périodique, et réduit l'étude de son voisinage à l'analyse des solutions du système linéaire :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1,n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \xi_j$$

où $\varphi_i(t) + \xi_i(t)$ sont des perturbations de la solution périodique.

Ces sont des « équations aux variations ». Les α_i dans

$$\xi_1 = e^{\alpha_1 t} S_{1,k}, \ldots, \xi_n = e^{\alpha_n t} S_{n,k}$$

sont ce qu'il appelle des « exposants caractéristiques » au moyen desquels la stabilité est définie : la solution périodique $\varphi_i(t)$ est stable si tous les exposants caractéristiques $\alpha_i = a_i + b_i\sqrt{-1}$ sont purement imaginaires[26].

Frédéric Brechenmacher [Brechenmacher 2013b] a noté que, par sa volonté d'obtenir une équation linéaire, Poincaré se rattache à un réseau de pratiques algébriques concernant des linéarisations. La façon dont Poincaré se sert des solutions périodiques permet l'introduction de systèmes linéaires et, par là, celle de pratiques algébriques spécifiques qui portent la marque des grands traités, notamment celui de Lagrange, tout comme celle de la façon dont les systèmes linéaires ont été utilisés en mécanique depuis la fin du XVIII^{e} siècle. Toutefois, c'est à partir d'une autre problématique que nous abordons cette question.

Afin de décrire et comprendre la circulation des textes de Poincaré, nous avons examiné comment ses propos ont été intégrés à des écrits de mécanique céleste. Cette manière de poser la question a donné à voir une pratique qui n'est pas rattachée à l'étude de la stabilité de solutions périodiques. Comme nous venons de le montrer, l'étude de la stabilité d'une solution de ce type doit prendre en compte, pour un système donné, le comportement des autres solutions dans son voisinage. Ce que nous désignons ici comme *pratique des solutions périodiques* se relierait plutôt aux propositions que Poincaré a faites au sujet de la perturbation des solutions périodiques, problème qu'il aborde au chapitre 3 de ses *Méthodes nouvelles.*

Dans la plupart des textes de notre réseau où il en est question, l'étude de la stabilité vient après les problèmes d'existence de solutions périodiques et l'examen de ce qui se passe avec ces solutions lorsqu'on perturbe des cas spécifiques du problème des trois corps. Puisque la stabilité des solutions périodiques n'est pas une question traitée en elle-même, on n'y voit pas beaucoup d'équations aux variations ou de linéarisations.

Passons donc au problème de la perturbation des solutions périodiques, où l'on peut constater une deuxième appropriation des travaux de Hill par Poincaré.

Soit un système :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

possédant, par hypothèse, une solution périodique $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t)$.

26 Dans [Roque 2011], nous présentons les critiques de Birkhoff contre l'utilisation de ce critère pour définir la stabilité. Dans les travaux de Birkhoff mais aussi ceux de Liapunov et de Levi-Civita, la stabilité est définie par d'autres propriétés.

Poincaré suppose ensuite que les fonctions X_i dépendent aussi d'un paramètre μ, tel qu'il a été possible d'intégrer l'équation pour $\mu = 0$ afin d'obtenir une solution périodique. Dans quelles conditions peut-on dire que l'équation aura encore des solutions périodiques pour des valeurs petites de μ ?[27]

Afin d'étudier les effets de la perturbation de ce paramètre, Poincaré prend l'équation :

$$\dot{x}_i = X_i(x, \mu)$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$ où les X_i sont aussi des fonctions de μ. Si $\mu = 0$, il y a des solutions périodiques $x_i(t, 0) = \phi_i(t)$ et Poincaré énonce des conditions pour assurer l'existence d'autres solutions périodiques proches, pour des valeurs petites de μ.

Il suppose alors que :

$$x_i(0, \mu) = \phi_i(0) + \beta_i$$

sont les déplacements initiaux par rapport à la solution périodique pour $\mu \neq 0$, où les β_i sont petits. En un instant $T + \tau$, où T est la période de l'orbite et τ est un petit intervalle de temps, Poincaré obtient :

$$x_i(T + \tau, \mu) = \phi_i(0) + \beta_i + \psi_i,$$

les ψ_i étant de petits déplacements additionnels qui dépendent des conditions initiales β_i, de τ et de μ.

Maintenant, la condition affirmant que, pour $\mu \neq 0$, la fonction $x_i(t, \mu)$ est périodique de période $T + \tau$ sera réécrite comme $\psi_i(\beta, \tau, \mu) = 0$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Poincaré a réduit ainsi une question concernant l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps, dont deux de petites masses, à la recherche de l'existence des zéros de certaines fonctions. En se servant de l'extension du théorème de Cauchy (qu'il avait déjà démontrée) ainsi que d'un résultat sur les fonctions implicites[28] qu'il admet connu, Poincaré conclut que les β_i et τ peuvent être développés en séries entières selon les puissances de μ.

Pour appliquer la méthode à des problèmes concrets, il faut partir des situations dans lesquelles on peut garantir, au départ, que des solutions périodiques existent. Cela est vrai de certains cas particuliers du problème des trois corps, soit lorsqu'une des masses est supposée infiniment petite. Poincaré analyse en détail les solutions proposées par Hill dans la théorie

---

27 Problème concernant la « continuation analytique » des solutions périodiques.

28 Il s'agit d'un résultat analogue à celui que nous désignons aujourd'hui comme le « théorème des fonctions implicites ».

de la Lune [Poincaré 1892-1899] et utilise ses conclusions pour décrire les solutions périodiques obtenues en faisant varier la constante de Jacobi[29]. Pour chaque valeur de la constante, il y a une Lune différente, dont une seule correspond à la nôtre. Poincaré applique également la méthode aux solutions qui avaient été désignées comme étant du premier, du deuxième et du troisième type dans [Poincaré 1884].

Dans les textes de notre réseau, les auteurs cherchent des solutions périodiques dans des situations qui correspondent à des valeurs différentes des paramètres. Il s'agit, dans la plupart des cas, de faire varier les constantes de Jacobi, mais aussi d'autres constantes correspondant à des cas spécifiques du problème des trois corps. Ainsi, ce qu'on appelle une *pratique des solutions périodiques* est liée à un investissement de ce genre.

3.1.3. *Darwin et l'étude d'un cas concret*

Dans « Periodic Orbits » [Darwin 1897] Darwin traite un cas particulier du problème des trois corps. Jupiter (J), de masse 1, se meut autour d'un corps plus grand, le Soleil (S), de masse 10, en traçant un cercle de rayon SJ. On considère l'orbite d'un corps infinitésimal P dans le plan de l'orbite de J et on définit l'origine des axes rectangulaires au point S, où SJ est l'axe des x. La distance de P à S est dénotée par r et ρ est la distance JP. Darwin reprend de Hill les équations du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2m\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2m\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}.$$

L'intégrale de Jacobi est $V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) = 2\Omega - C$, où C est une constante et V la vitesse de la planète P relativement aux axes tournants. Il s'agira ensuite de déterminer des orbites périodiques de ce système pour différentes valeurs de la constante C.

Pour un mouvement réel de la planète, V^2 doit être positive et donc $2\Omega > C$. Darwin cite Hill pour affirmer qu'il suffit d'analyser la courbe représentée par $2\Omega = C$, étant donné que la planète ne peut pas la couper. Si la courbe a une branche fermée contenant P à l'intérieur, elle reste confinée dans cette région ; il en est de même si P est à l'extérieur.

---

29 Une de ces solutions de Hill contient une erreur, signalée par Poincaré et reconnue par Hill, comme on peut voir par la note incluse à l'occasion de la réimpression de [Hill 1878] dans ses *Collected Works* [Hill 1905-07, p. 326].

Darwin considère alors une famille des courbes $2\Omega = C$ et trouve, pour différentes valeurs de C, le locus des points qui sont sur de telles courbes à vitesse constante (relativement aux axes tournants). Ces points sont calculés par des procédés algébriques, donnant des valeurs de r et ρ qui satisfont $2\Omega = C$.

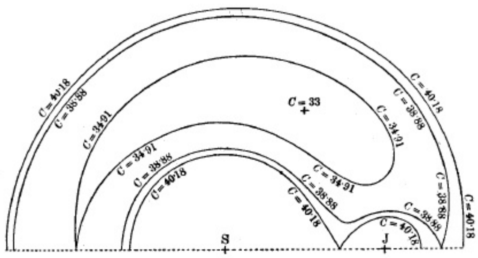


Fig.1

Curves of zero velocity, $10\left(r^2 + \frac{2}{r}\right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho}\right) = C.$

FIGURE 10. Représentation de l'espace des paramètres proposée par Darwin dans [Darwin 1897, p. 113]

Dans la figure 10, on voit les valeurs critiques de la famille $2\Omega = C$, ce qui suggère une classification des orbites. Quand C est plus grand que 40.1821, le troisième corps est une planète qui se meut à l'extérieure de l'ovale ou un satellite à l'intérieur du plus petit ovale interne. Cette valeur de C donne des limites supérieures pour les rayons vecteurs des planètes et des satellites. Quand $38.8760 < C < 40.1821$, le corps se meut dans la région limité par les deux courbes ; et si $34.9054 < C < 38.8760$, le troisième corps se meut à l'intérieur de la région qui prend la forme d'un fer-à-cheval (« horseshoe », dit Darwin explicitement).

Dans la deuxième partie de l'article, Darwin utilise cette partition de l'espace, c'est-à-dire, cette classification des orbites par le moyen des constantes de Jacobi, pour s'attacher aux orbites périodiques. Il utilise des méthodes numériques afin d'obtenir une « synopse » [Darwin 1897, p. 167] des orbites périodiques simples (qui ne font pas plus d'un tour) et de leur stabilité entre les limites $33 < C < 40.5$.

Darwin témoigne des difficultés rencontrées dans ce processus, qui ne l'empêchent pourtant pas d'en reconnaître les bons fruits :

> The slowness with which results are attained by arithmetical processes has been very tantalizing, but the interest of the work has been sustained by the fact

that the results have presented a succession of surprises. [Darwin 1897, p. 167-168]

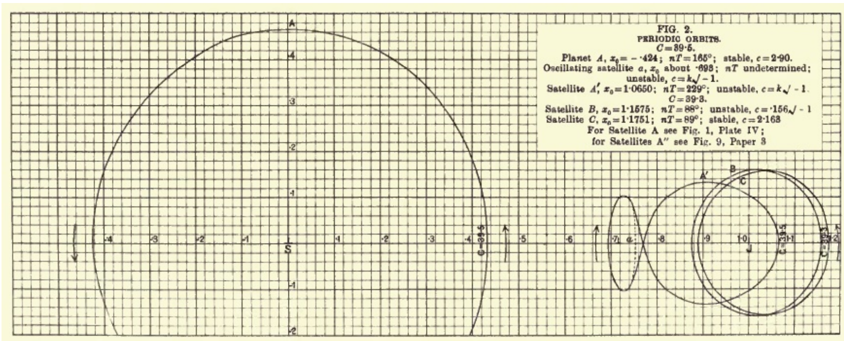


FIGURE 11. Trajectoires des orbites proposées par Darwin dans [Darwin 1897]

Il s'agit, par exemple, du cas analysé lorsque $C = 39.5$, représenté dans la figure 11. L'orbite planétaire, nommée A, est alors une orbite périodique autour de S. Elle commence à une valeur $x_0 = -0.424$ à un angle π qui croît. Si $x_0 = 0.698$, il y a une satellite oscillatoire d'orbite a ; et si $x_0 = 1.0650$, un satellite d'orbite A'. Ayant constaté l'existence de pareilles orbites, Darwin étudie aussi leur relation aux orbites voisines, en faisant varier les valeurs des conditions initiales x_0. Dans la figure 11, au delà de A et a, on voit aussi les orbites des satellites B et C, obtenues en posant $C = 39.3$.

Pour résumer, disons que les orbites périodiques sont trouvées à partir de la variation du paramètre C, entre les valeurs montrées dans la figure 10. Darwin explique en ces termes l'utilité d'une telle étude :

> Notwithstanding the great interest attaching to periodic orbits, no suggestion has, up to the present time, been made by any writer for a general method of determining them. As far as I can see, the search resolves itself into the discussion of particular cases by numerical processes, and such a search necessarily involves a prodigious amount of work. It is not for me to say whether the enormous labour I have undertaken was justifiable in the first instance ; but I may remark that I have been led on, by the interest of my results, step by step, to investigate more and again more cases. Now that so much has been attained I cannot but think that the conclusions will prove of interest both to astronomers and to mathematicians [Darwin 1897, p. 101].

3.2. *Construction du réseau*

La méthode de Darwin est de nature numérique (ou algébrique) et s'appuie, comme nous l'avons vu, sur la variation des constantes obtenues par l'intégration de Jacobi. Hill et Poincaré se servent aussi de ces constantes mais pour des traitements plus analytiques que numériques. Il n'y a pas une seule méthode générale, comme Darwin l'avait souhaité, pour trouver des solutions périodiques.

Dans les textes du réseau, nous identifions des méthodes mathématiques différentes au service d'une même *pratique* : chercher des solutions périodiques en faisant varier les paramètres dans la définition du système qui représente un cas particulier du problème des trois corps. Ces textes ont en commun le fait de reconnaître la pertinence des informations qu'on obtient concernant l'existence des solutions périodiques après la perturbation de certains paramètres. Ainsi, toutes les méthodes sont valides et les paramètres ne sont pas forcément des constantes de Jacobi.

Avant de construire ce *réseau*, nous pouvions soupçonner la portée des travaux de certains, comme Darwin, même si nous ne savions pas encore évaluer leur rapport à Poincaré. Par contre, le cas de l'astronome suédois Carl Vilhelm Ludwig Charlier (1862-1934) a créé une certaine surprise : moins connu que Darwin et Poincaré, on remarque autant de liens vers son nom, sur la figure 1, que vers chacun des deux autres noms. Plus loin, on observe le même phénomène sur la figure 6. Nous proposons donc d'abord une analyse détaillée du *nœud* Charlier et passerons ensuite aux autres acteurs du *réseau*.

Nous n'aurions pas remarqué que Charlier occupait une place aussi particulière si notre objectif avait été de faire une étude de l'influence de Poincaré ou de Darwin relative au problème de la Lune, ou si nous avions cherché des noms susceptibles d'exprimer le rayonnement de leurs recherches dans des institutions en France ou en Angleterre (ni même dans les journaux où Poincaré et Darwin ont écrit). Ce constat renforce la conclusion que notre *réseau* ne s'explique pas par des références nationales telles que « astronomes suédois », « astronomes français », ni par l'identification des différents domaines de recherche en mécanique céleste, « théorie de la Lune », « théorie de Jupiter et Saturne », « théorie des perturbations ».

3.2.1. *Le nœud Charlier du réseau*

Charlier a travaillé à l'Observatoire astronomique d'Uppsala jusqu'en 1887. L'année suivante, il se rend à Stockholm pour revenir à Uppsala plus tard. C'est seulement en 1897 qu'il devient professeur d'astronomie à l'Université de Lund, où ses travaux les plus connus sur la statistique voient le jour[30]. On peut s'attendre à ce que, au cours de ses années d'apprentissage, les intérêts scientifiques de Charlier aient pu subir l'influence de Gyldén.

Pendant les années 1880, plusieurs étudiants suédois et étrangers de Gyldén se consacraient à poursuivre les suggestions du maître. Il serait exagéré de dire que Charlier était un disciple de Gyldén, mais il n'a évidemment pas échappé à l'influence de son point de vue. On en trouve la preuve, en 1886, quand Charlier écrit une thèse ayant pour titre *Une méthode pour propager la convergence d'une série trigonométrique*, ce qui indique son rattachement à la principale préoccupation de Gyldén. Dans son article « Untersuchung über die allgemeinen Jupiter-Störungen des Planeten Thetis » [Charlier 1887], publié l'année suivante, Charlier se consacre à trouver une nouvelle application de la théorie de Gyldén sur les perturbations[31]. Ainsi, il ne serait pas exagéré de dire que la visée de Charlier s'adaptait parfaitement au programme mis en place par Gyldén : fournir des séries purement trigonométriques pour des cas particuliers du mouvement des planètes.

Charlier commence par appliquer les méthodes de Peter Andreas Hansen, mais il se heurte à un problème d'intégration analogue à celui qui apparaît dans les écrits de Gyldén. Il s'agit de chercher de nouveaux moyens pour intégrer l'équation $\frac{d^2x}{dt^2}+(a_0+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\cdots)x=0$. La même question occupait plusieurs chercheurs pendant les années 1880, comme nous le verrons dans la section 4.1.

Au cours de la décennie 1890, le changement d'orientation dans les travaux de Charlier témoigne d'une diminution de l'influence de Gyldén. La popularité du point de vue de Gyldén a connu un déclin certain dans les dernières années de sa vie, ce qui pourrait s'expliquer, en partie, par sa personnalité misanthropique. Suivant notre propos, ce déclin s'explique plutôt par une croyance exagérée, de la part des chercheurs liés à Gyldén, en la possibilité de trouver une solution du problème de la stabilité par le moyen des séries purement trigonométriques[32].

---

30 Pour un grand nombre de scientifiques de ce réseau, la mécanique céleste n'est pas le domaine principal de recherches. Le nom de Charlier deviendra très connu en statistique et certains Danois dans notre réseau occupent des postes importants dans des institutions actuarielles.

31 Encore en 1887, Callandreau souligne, dans le *Bulletin Astronomique*, non seulement la clarté du travail de Charlier, mais aussi le fait qu'il se montre au courant des recherches récentes sur la question [Callandreau 1887].

32 Le témoignage de Edvard H. von Zeipel sur ses années passées à Stockholm est éloquent à ce sujet [Collinder 1967, p. 325].

Dès 1892, année de la publication du premier tome des *Méthodes nouvelles* de Poincaré, se répand le traitement des cas particuliers du problème des trois corps par des voies alternatives, comme celle des solutions périodiques.

Le phénomène se dégage clairement de notre réseau et il se confirme dans le changement de direction que les recherches de Charlier montrent à ce moment-là. Un article en deux parties, sorties respectivement en 1892 et en 1893, contient ses travaux sur les solutions périodiques. Charlier [1892] proposait un nouveau traitement, d'un point de vue plus théorique, des résultats obtenus en 1890 par Haerdtl. Charlier exprimait alors les solutions par des développements en séries de puissances du temps, afin d'éviter l'emploi des quadratures mécaniques. Il ne s'agit pas encore d'une influence de Poincaré, mais bien d'une connexion aux recherches sur les solutions périodiques qu'on faisait avant lui (décrites dans la section 2.1).

Plus tard, en 1900, Charlier publiait un article en anglais « On periodic orbits », dans l'*Öfversigt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar* [Charlier 1900]. L'essentiel de sa démarche se résume alors par l'utilisation des propositions de Darwin, d'ailleurs citées en relation avec les noms de Hill et Poincaré. Pour un cas particulier, Charlier trouve une famille d'orbites limitée par un ensemble de courbes limites. Ces familles sont étudiées à partir des conditions imposées sur la fonction potentielle et la constante de Jacobi, comme Darwin l'avait fait. Quand le troisième corps a une masse infinitésimale comparée aux deux autres, Charlier décrit les orbites périodiques petites dans le voisinage de points appelés « centres de libration » comme chez Gyldén. Darwin appelait le corps décrivant une telle orbite un « oscillating satellite » et il s'agit, pour Charlier, de trouver les orbites périodiques de ces satellites, mais pour un cas différent de celui dont traitait Darwin. D'ailleurs, la première phrase de l'article qualifie de façon nette le lien de Charlier au *réseau* de la figure 6 :

> We owe to Mr. Hill the introduction of the fertile idea of periodic orbits into celestial mechanics.
> (...)
> Through the celebrated researches of M. Poincaré this theory has now obtained a rigorous and elegant mathematical foundation. [Charlier 1900]

Il s'agit alors d'obtenir, par la voie de méthodes « purement analytiques », les résultats concernant les solutions périodiques que Darwin avait fournis en se servant d'intégrations numériques. Ce changement dans l'orientation des travaux de Charlier coïncide avec son déplacement en Suède : il quitte Stockholm pour prendre un poste à Uppsala.

Nous ne souhaitons pas raconter le parcours scientifique de Charlier, mais son cas illustre bien le type de changement que la circulation des travaux de Poincaré, mais aussi ceux de Hill et de Darwin, a pu provoquer. L'incorporation de la pratique des solutions périodiques produit peu à peu une perspective nouvelle. En 1892, Charlier manifeste son intérêt pour les solutions périodiques et, en 1900, il est ainsi pleinement connecté à un réseau dans lequel on emploie des démarches liées aux noms de Hill, Poincaré et Darwin. Dans la période qui s'étend de 1892 à 1900, on assiste à des transformations semblables chez d'autres auteurs, conséquence de leur assimilation de la *pratique des solutions périodiques* pour traiter des cas particuliers du problème des trois corps.

3.2.2. *Les autres acteurs de ce réseau*

Dans le troisième tome des *Méthodes nouvelles*, Poincaré soulève une question passée inaperçue dans l'étude de Darwin sur les solutions périodiques [Poincaré 1892-1899, t. 3, p. 353]. Darwin répond, dans sa lettre du 28 février 1899 adressée à Poincaré, que le problème a déjà été résolu par Sydney Samuel Hough (1870-1923)[33] :

> I have looked at your criticism of my paper on Periodic orbits, although I have not yet thoroughly mastered it. I entirely admit the justice of your remark that the figure of 8 orbits and the A orbits are not continuous. Indeed I had (thanks to Mr Hough) arrived at the same conclusion from another point of view before I saw your book.
>
> I am trying now to make good the hiatus, but find myself so much interrupted by other work that I am not able to get on as quickly as I should like to do[34].

L'article de Hough sur le sujet est paru en 1901, « On certain discontinuities connected with periodic orbits » [Hough 1901][35]. Ce travail avait pour but de perfectionner les résultats de Darwin mentionnées ci-dessus. En 1901, Henry Crozier Keating Plummer (1875-1946) [36] publiait dans les *Monthly Notices* « On Periodic Orbits in the Neighborhood of Centres of Libration » [Plummer 1901]. L'auteur voulait donner une démonstration algébrique du même résultat trouvé par Charlier moyennant des calculs numériques. Plummer traitait aussi de la stabilité, mais à la manière de

---

33 Astronome anglais qui a été soutenu par Darwin pour devenir Chef Assistant au Cape Observatory, en Afrique du Sud.

34 Darwin à Poincaré, 28 février 1899, disponible dans `www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/text/darwin18990228.xml`

35 Il publie aussi un deuxième article dans les *Monthly Notices* [Hough 1909].

36 Dans la « List of Fellows of the Royal Society » son nom est écrit avec le « Keating », mais dans les articles on trouve seulement « H.C. Plummer ». En 1900, Plummer devenait assistant au Radcliffe Observatory d'Oxford.

Darwin, sans utiliser les procédés que Poincaré suggère dans le chapitre 4 des *Méthodes nouvelles*. Lorsque nous détachons ici les occasions, où un auteur mentionne explicitement Poincaré ou pas, notre but est seulement de comprendre d'où il tirait l'idée d'utiliser la *pratique des solutions périodiques*. Le but n'est pas de critiquer une éventuelle absence de citation mais d'observer plutôt que, ayant été adoptée par des scientifiques comme Darwin ou Charlier, la manière dont Poincaré se servait des solutions périodiques intervenait dans des travaux qui ne le citaient pas explicitement. En outre, la référence au nom de Poincaré ne sera relevée que lorsqu'elle a un rapport direct à l'usage des solutions périodiques.

Edgar Odell Lovett (mentionné plus haut) reprenait les travaux de Plummer en 1902. Il citait Poincaré, Charlier et Darwin et complétait la solution de Charlier en trouvant des orbites périodiques réelles correspondant à d'autres centres de libration [Lovett 1902]. La même année, Whittaker fournissait deux résultats nouveaux : un critère pour découvrir des orbites périodiques, soit une condition ajoutée à la fonction de l'énergie potentielle pour qu'il existe une orbite périodique dans une région, entre deux circonférences, en forme d'anneau (« *ring-shaped space* »), de même qu'une intégrale donnant le nombre de centres des forces entourés par l'orbite périodique. Il est intéressant de noter que Whittaker parle d'une « théorie des orbites périodiques » : « a theory which the researches of Hill, Poincaré, and Darwin have shown to be of great importance in dynamical astronomy » [Whittaker 1902a, p. 186][37].

La *pratique des solutions périodiques* circule aussi dans des textes qui ne sont pas connectés à Darwin. Karl Schwarzschild l'avait employée dans des articles parus en 1896 [Schwarzschild 1896a] et [Schwarzschild 1898]. En 1903, à l'Observatoire de Göttingen[38], il applique ces recherches à l'analyse des orbites périodiques d'Hécube [Schwarzschild 1903]. Poincaré lui-même se sert de la *pratique* dans l'étude du cas concret des petites planètes, notamment dans « Les solutions périodiques et les planètes de type Hécube », paru dans le *Bulletin Astronomique* en 1902 [Poincaré 1902a] (et dans [Poincaré 1902b]). Il montre que les solutions périodiques dites de « première espèce » présentent un intérêt particulier quand les mouvements des planètes sont quasi-commensurables (cas du satellite de Jupiter). Plus précisément, il énonçait une forme nouvelle des résultats

37 Whittaker explore le sujet davantage dans un article paru la même année [Whittaker 1902b].

38 Schwarzschild était professeur à l'Institut de Göttingen de 1901 à 1909 et fut directeur de l'Observatoire.

déjà obtenus par Martial Simonin, dans sa thèse [Simonin 1897b] publiée dans [Simonin 1897a].

Pour sa part, le Suédois Edvard Hugo von Zeipel (1873-1959)[39] intensifiait ses recherches sur les solutions périodiques lors de son séjour à l'Observatoire de Paris. Dans [von Zeipel 1902], il avait déjà étudié les solutions périodiques de troisième espèce (ainsi définies par Poincaré) et il montre [von Zeipel 1904] que, dans certains cas non considérés par Poincaré, il existe des solutions périodiques. Ces solutions étaient classifiées et leur stabilité était étudiée au moyen des exposants caractéristiques.

Alexander Friedrich Karl Wilkens (1881-1968) soutenait une thèse en 1905[40] sur les solutions périodiques de Poincaré dans le problème des trois corps *Untersuchungen über Poincarésche periodische Lösungen des Problems der drei Körper* [Wilkens 1905b]. Ensuite, deux articles traitant des solutions périodiques étaient publiés dans les *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien* : l'un de Wilkens lui-même, contenant les résultats de sa thèse [Wilkens 1905a] et l'autre, de Adalbert Prey (1873-1949), qui mentionnait Charlier et représentait par des figures les paramètres qui sont utilisés dans l'analyse des solutions périodiques [Prey 1909][41].

En Italie, Giulio Pavanini[42] montrait l'existence d'une classe des solutions périodiques qui n'avait pas été abordée jusqu'alors. Il citait Hill, Charlier et Poincaré [Pavanini 1906]. Lovett reprendra ce travail plus tard afin de l'adapter à l'étude des solutions périodiques du problème de quatre corps [Lovett 1907]. En 1906, Carl Burrau [1906] reprenait ses propres travaux des années 1890, que nous avons analysés dans la

---

39 Astronome qui a travaillé à l'Observatoire de Stockholm de 1897 à 1900, à l'Observatoire de Pulkovo de 1901 à 1902 et à l'Observatoire de Paris de 1904 à 1906.

40 À Christian-Albrechts-Universität de Kiel, sous la direction de Paul Hermann Harzer.

41 Notre *réseau* indique l'utilisation de figures, technique peu courante en mécanique céleste à l'époque. On peut faire l'hypothèse que la présence de figures dans des articles de mécanique céleste ait un rapport étroit avec la *pratique des solutions périodiques*, comme on le voit dans les figures 3, 5 et 11. Il serait intéressant d'analyser comment l'usage des figures à l'époque était conditionné par la disponibilité de professionnels capables de les réaliser.

42 Pavanini était professeur de mathématiques au Liceo Classico Marco Foscarini à Venise.

section 2.1[43]. Plus tard, il les développera dans une recherche plus approfondie sur ce thème, en collaboration avec Elis Strömgren (1870-1947)[44] (voir [Burrau & Strömgren 1909] et [Burrau & Strömgren 1916]).

Le Suédois Gustaf Kobb (1863-1934)[45] avait déjà essayé d'étendre les résultats de Poincaré dans [Kobb 1899]. En 1896, le français Gabriel Koenigs (1858-1931)[46] communiquait à l'Académie des Sciences de Paris une note présentée par Poincaré, dans laquelle Koenigs montrait qu'il a trouvé une infinité de solutions périodiques au problème du mouvement d'un corps pesant suspendu par un de ses points [Koenigs 1896]. Kobb reprenait la démonstration de ce résultat, qu'il qualifie de « rigoureuse » parce qu'elle utilise la proposition de Poincaré de perturber un paramètre μ à partir d'une solution périodique connue (obtenue quand $\mu = 0$). Il appliquait la recherche des solutions périodiques à des cas concrets après 1900. En changeant les paramètres et les ajustant à des configurations spécifiques du système formé par le Soleil, Jupiter et un satellite, Kobb utilisait les résultats de Darwin afin d'analyser la stabilité des petites planètes Hilda et Thule (voir [Kobb 1901] et [Kobb 1908]).

Un autre cas intéressant est celui de Johan Frederik Steffensen (1873-1961), qui publiait un article en français « Sur les orbites périodiques dans le problème de Hill » [Steffensen 1909] ayant pour but de travailler sur le rôle des constantes de Jacobi dans la recherche des solutions périodiques du problème des trois corps (appelé « problème de Hill »)[47]. La liste des

---

43 Burrau avait déjà contribué à faire connaître la méthode de Darwin en 1898, quand il écrivait un rapport sur les « Periodic Orbits » pour la *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft* [Burrau 1898] où il fait un tour des développements sur la question et cite Hill, Poincaré et Haerdtl.

44 Strömgren a obtenu le doctorat à l'Université de Lund en 1898, a travaillé pour les *Astronomische Nachrichten* de 1901 à 1904 alors qu'il travaillait à l'Université de Kiel. En 1907, il sera nommé Professeur d'astronomie à l'Université de Copenhague, ainsi que directeur de l'Observatoire de cette université.

45 Kobb a soutenu sa thèse à Uppsala en 1889 et a été professeur à l'Université de Stockholm de 1889 à 1898. Il y enseignait la mécanique rationnelle, mais travaillait aussi sur des sujets de mathématiques, comme les courbes algébriques et les surfaces minimales. Anders Lindstedt était professeur à Stockholm entre 1886 et 1909.

46 Koenigs devenait assistant-professeur de physique et mécanique expérimentale à la Sorbonne en 1895. En mécanique analytique, il a recours aux invariants intégraux de Poincaré.

47 Avocat de formation, Steffensen a travaillé dans le domaine des assurances entre 1898 et 1919. Il devenait professeur de mathématiques actuarielles à l'Université de Copenhague en 1919.

auteurs de notre *réseau* inclut aussi Rudolf Schlitt [1903] et Willem de Sitter [1907][48].

Le derniers textes de notre *réseau* datent de 1911. Ernest Brown (1866-1938) se servait de *la pratique des solutions périodiques* dans [Brown 1911]. Nous y rencontrons des références à Darwin et Hough, puisqu'il revient sur les orbites en fer à cheval (« *horseshoe orbits* »), en essayant de trouver des solutions périodiques pour des valeurs données de la constante de Jacobi. Le cas de Bohlin est quelque peu excentrique. Dans un article paru la même année [Bohlin 1911], il intégrait le problème de Haerdtl par le moyen des séries trigonométriques, soit d'une façon différente de celle de Charlier mais sans appliquer les méthodes de Poincaré.

À partir de ce moment, la *pratique des solutions périodiques* se répandait aux États-Unis, mais les travaux dans lesquels elle intervenait semblent suivre une dynamique propre, différente de celle que nous avons décrite jusqu'ici. Un groupe se formait autour de Forest Ray Moulton qui, avec ses étudiants, revendiquait l'héritage de Poincaré, ce que Craig Stephenson a récemment montré dans sa thèse [Stephenson 2012]. Une analyse de ces travaux devrait requérir un examen de contextes qui ne sont pas de même nature que ceux que nous avons analysés jusqu'ici. Pour cette raison, nous ne les incluons pas dans notre *réseau* à ce stade.

3.3. *Pourquoi parler de « pratique » ?*

Nous avons montré que, autour de 1892, une certaine *pratique* se dégage de textes publiés dans différents pays, par des chercheurs travaillant sur divers sujets en mécanique céleste. Cette *pratique* n'est pas une théorie ou une méthode mathématique, comme telles, mais plutôt une certaine façon d'employer les solutions périodiques dans l'étude de problèmes divers (en l'occurrence, différents cas particuliers du problème de n corps), à partir de méthodes variées (analytiques ou numériques). En outre, les auteurs mentionnés ne constituent ni une école ni une communauté. Même si un petit nombre d'Anglais ont des liens (parfois lointains) avec Darwin, la *pratique* se retrouve dans des textes dont les auteurs n'avaient pas de relation institutionnelle entre eux.

48 Willem de Sitter a travaillé à l'Observatoire du Cap en Afrique du Sud de 1897 à 1899. En 1908, il accédait à la chaire d'astronomie de l'Université de Leyde et devenait directeur de l'observatoire de cette université à partir de 1919. Schlitt, pour sa part, a soutenu une thèse à Christian-Albrechts-Universität de Kiel en 1903 sous la direction de Paul Hermann Harzer, tout comme son collègue Wilkens

Ainsi, nous avons délimité un *milieu* qui ne se laisse pas définir à partir de l'unicité des objets traités, ni appréhender comme un groupe indifférencié, qui serait composé d'acteurs de même nationalité, travaillant dans les mêmes institutions ou publiant dans les mêmes journaux. Le *lieu de savoir*, dont nous avons traité ici, ne se définit pas comme une unité épistémologique ni ne se constitue comme un tout sociologique. Deux aspects méritent d'être expliqués davantage. Le premier concerne justement notre espace d'investigation. Si notre but était d'analyser un laboratoire expérimental, par exemple, tel serait l'espace à interroger pour comprendre la dynamique des connaissances, les procédés couramment employés et les nouveaux qui s'y inséreraient. Or, nous travaillons ici sur des dynamiques moins localisées : il n'y a aucune institution particulière où rechercher d'emblée des pistes sur la circulation des idées ou des procédés mis en place par Poincaré en mécanique céleste. Les matières que nous analysons sont imprimées dans des textes, mais il n'y a pas non plus de journal à privilégier au départ.

L'intérêt des *réseaux de textes*, tel que Catherine Goldstein l'explique dans [Goldstein 1999], est justement de reconnaître que les liens entre des textes ne délimitent pas les mêmes relations entre leurs auteurs que ceux qui peuvent être établis à partir de l'examen de leurs relations personnelles ou institutionnelles. Ayant pour but de repérer ce qui circule *entre* les textes, il fallait commencer par la construction d'un réseau. Mais qu'est-ce qu'on voit dans de tels textes ? Quels aspects requièrent une attention spéciale ? Par le moyen de quelles traces peut-on identifier une parenté avec les propositions de Poincaré ? Parmi toutes les méthodes, techniques et outils mis en œuvre, quels sont ceux qui appartiennent spécifiquement à ce réseau ? Quels choix ou quelles nouvelles valeurs sont mobilisés lors de leur utilisation ? Comment peut-on nommer tout cet ensemble hétérogène de caractéristiques ?

Ces questions renvoient à un second aspect, qu'il faut expliciter dans notre choix méthodologique, au delà du choix de travailler sur un réseau de textes. Nous avons dit qu'une certaine manière d'utiliser les solutions périodiques est le trait commun qu'on distingue dans les textes du réseau. Mais ces textes, ou tout au moins une partie d'entre eux, partagent aussi d'autres procédés, comme la déduction d'un certain type d'équations différentielles pour décrire les mouvements des corps ou l'emploi de méthodes numériques. Mais de telles équations ou méthodes se retrouvent dans beaucoup d'autres textes, qui ne font pas partie de notre réseau. Et en fait, les solutions périodiques elles-mêmes sont utilisées dans bien d'autres textes, comme ceux de notre corpus de départ, mais qui ne font plus partie du réseau (par exemple [Callandreau 1891]). Si l'on regarde de plus près ce qui distingue les textes du réseau, on remarque, par delà l'usage des solutions périodiques, une manière spécifique liée à cet usage. L'objectif, que les solutions servent, implique aussi une circulation de croyances, de priorités et de types d'informations qui seront reconnues comme passibles d'augmenter la compréhension du problème des trois corps , bien que nos acteurs n'aient pas su comment le résoudre.

La *pratique des solutions périodiques* se mettait en place à partir du choix d'aborder des cas particuliers du problème des trois corps par des voies alternatives aux tentatives de démonstration de la stabilité (ayant trait à la convergence des séries). Cette pratique exprimait ainsi des valeurs qui sont partagées à travers les textes du réseau et qui sont transversales aux unités épistémologiques ou institutionnelles. Jed Z. Buchwald parle de « pratique microphysique » dans un sens proche du nôtre [Buchwald 2000]. Il désigne ainsi une manière de s'engager dans l'étude des propriétés singulières du microcosme, sans soumettre cette étude au seul but d'expliquer des relations connues indépendamment comme étant valables à l'extérieur de ce microcosme. Ce monde « micro » serait devenu réel pour les physiciens autour des années 1890 et son rôle deviendrait caractéristique de la physique du xx^e^. Dans cette histoire, le mot « pratique » est employé pour faire ressortir quelque chose de plus spécifique que la boîte à outils alors courante ou normale (« *normal toolbox* ») des physiciens : des procédés instrumentaux, expérimentaux, mathématiques, théoriques, etc. Selon Buchwald, tous ces éléments servent une *pratique*, c'est-à-dire, une manière précise de faire de la physique dans laquelle les micro-processus sont considérés dans leurs caractéristiques propres.

À l'heure actuelle, le mot « pratique » prend plusieurs sens différents. Lorsqu'on parle d'une « philosophie des pratiques mathématiques », par exemple, il s'agit d'un autre sens du terme « pratique » que celui que nous adoptons. Les études philosophiques de ce genre tentent plutôt de comprendre la spécificité de la connaissance mathématique et ses stratégies de la démonstration, en se penchant notamment sur des questions formelles[49]. Même la signification de ce terme, dans les travaux déjà cités

49 Dans la présentation du projet PratiScienS des Archives Poincaré, le « tournant pratique en philosophie' » est exemplifié par des travaux comme [Kitcher 1983], [Maddy 1997], [Mancosu 2008] et [Rosental 2003], traitant des aspects formels des mathématiques. Voir à ce sujet http://poincare.univ-lorraine.fr/fr/operations/pratisciens/contexte-philosophique

de F. Brechenmacher (dont la méthodologie a beaucoup inspiré ce travail), n'est pas identique à celle que nous lui donnons ici. Il reste donc à préciser le sens dans lequel nous parlons de *pratique*.

À vrai dire, le recours à cette notion est d'abord expérimental pour nous. Il exprime le désir de dialoguer avec les réflexions de certains historiens des sciences qui n'envisagent pas les actions des scientifiques comme les conséquences de décisions individuelles. Les pratiques ne sont pas individuelles parce qu'elles sont contraintes par un milieu. Cela peut sembler évident si l'on veut faire une étude sociale des sciences, qui voit d'habitude les procédés mis en place par des individus comme corrélats des caractéristiques d'un espace ambiant, une institution, une communauté ou un groupe social particulier. Il ne s'agit pourtant pas non plus de cette situation. Un thème central de ce qui est devenu connu comme « le tournant pratique » est la nécessité de dépasser le choix dualiste entre, d'un côté, la reconnaissance d'une priorité de l'agence individuelle et, de l'autre, le surplomb des structures sociales et culturelles. L'analyse des unités sociales (institutions, cultures, structures sociales, traditions, etc.) ne peut pas expliquer l'action des agents individuels. Les pratiques se jouent à la fois avant l'individu et avant la constitution des unités sociales. Elles ne sont évidemment pas indépendantes des ces catégories, mais la notion de *pratique* est le corrélat d'une inversion méthodologique qui consiste à comprendre l'individu et le social comme des produits de pratiques[50].

Une conséquence importante de ce tournant pratique réside dans l'argument « anticontextualiste », qui ne fait pas appel à un contexte particulier en tant qu'instance explicative de l'action humaine, qu'il s'agisse d'un contexte régional, une culture ou une institution dans lesquelles les individus agissent. Donnons pour exemple comment, dans *The Mangle of Practice*, Andrew Pickering partait de l'étude de la production du colorant synthétique pour montrer que le social n'explique pas les transformations matérielles ou conceptuelles à l'échelle du laboratoire [Pickering 1995]. Le contexte n'est pas une clé d'analyse mais plutôt quelque chose à expliquer[51].

Dans les recherches que nous citons, les *pratiques* sont des performances analysées sur fond d'autres performances plus stables. Afin de caractériser

---

50 Voir, par exemple, dans le collectif [Knorr Cetina et al. 2001], les articles de Schatzki, Rouse, Pickering et Knorr-Cetina, de même que [Pickering 1992]. Une référence utile sur les travaux qui ont été faits sur la notion de pratique est l'article de Joseph Rouse, « Practice Theory », dans le *Handbook of the Philosophy of Science* [Rouse 2007].

51 À ce sujet voir encore [Callon & Law 1989].

une performance choisie, on étudie son appartenance ou sa participation à l'interaction entre des agents multiples. L'arrière-plan social ou culturel est envisagé alors de façon dynamique, à partir de la reproduction et de la transmission de ces pratiques. La référence aux travaux de ces auteurs ne signifie pas que nous nous inscrivons d'emblée dans un courant méthodologique particulier, comme celui des « *science studies* ». Mais nous partageons avec eux le refus des catégories employées a priori (soit sans examen préalable) dans l'analyse de la dynamique des savoirs. Une filiation de notre recherche au genre « *science studies* » demanderait notamment de surmonter les difficultés d'adapter cette méthodologie à l'histoire des mathématiques, ou au moins des mathématiques que nous avons choisies, vu que les recherches citées se dédient de façon prioritaire à l'investigation de sciences expérimentales. Notre démarche se rapproche plus des « *science studies* » par ce que celles-ci récusent que par ce qu'elles proposent.

Parmi les savoirs qui entrent en jeu dans un réseau de textes, il y a ceux qui renvoient à des choses déjà faites : un arsenal de compétences, de savoir-faire, de techniques, de méthodes, d'outils, aussi bien que de faits et de théories scientifiques. La *pratique* peut se définir comme un travail d'extension de cet arsenal. À partir des dimensions matérielle et sociale que le réseau donne à voir, il s'agirait d'analyser comment de nouvelles connaissances se produisent. Notre intérêt pour la notion de *pratique* réside dans notre volonté de déplacer le regard de l'historien des mathématiques sur un savoir achevé vers un savoir en train de se faire. De la dynamique des connaissances, nous souhaitons détacher des aspects qui ne sont pas encore soumis à un savoir tel qu'il est reconnu de nos jours. Nous arriverons par là à une connaissance certes partielle et lacunaire des dynamiques des savoirs, mais nous ne voyons pas comment faire autrement sans mobiliser des visions rétrospectives, qui se réfèrent à leur point d'arrivée pour expliquer la dynamique observée. Le savoir scientifique, en lui-même, ne peut pas servir de cadre interprétatif pour reconstruire l'histoire de sa propre production. Voici une position que nous partageons avec le « tournant pratique » en histoire des sciences.

Le mot « *pratique* » renvoie donc au choix de regarder quelque chose que les participants développent ou à ce sur quoi ils misent dans des situations concrètes. Comment saisir autrement les points de vue des acteurs ? Nous ne sommes pas dans un laboratoire, nous avons des textes, des textes scientifiques et des témoignages sur ces textes (commentaires, lettres, etc.). Les *pratiques* expriment les valeurs que les mathématiciens attachent à certains procédés, valeurs identifiées notamment par ce qu'ils font avec de tels procédés. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, notre choix a été de regarder l'utilisation effective des propositions qu'on trouve dans des travaux de Poincaré. Nous ne nous sommes pas laissé guider par ce que les auteurs déclarent provenir de Poincaré, nous sommes allé voir ce qu'ils font. La distinction que nous avons faite au départ entre *résultats négatifs* et *résultats positifs* sert cet objectif : problématiser ce que les contemporains de Poincaré disent qu'il a proposé d'important pour la mécanique céleste, pour chercher ce qu'ils croient être digne d'attention dans ce qu'ils font de semblable aux procédés qu'on trouve chez Poincaré.

4. L'ORIGINALITÉ COMME PHÉNOMÈNE COLLECTIF

Il est temps de revenir à la question de départ : caractériser l'originalité des propos de Poincaré à partir d'une analyse de leur circulation dans des textes de mécanique céleste publiés de son temps, notamment entre 1892 et 1912.

L'identification d'une *pratique des solutions périodiques* a fait voir que la manière dont Poincaré assimile[52] les travaux de Hill constitue un point central du problème. Avant que l'influence de Hill ne paraisse, Poincaré exprimait déjà son intention d'explorer les solutions périodiques afin d'énoncer différemment des problèmes de mécanique céleste. La question est abordée pour la première fois dans l'article « Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps » [Poincaré 1884], qui n'a pas connu beaucoup d'échos à ce moment-là. Les textes de notre *réseau* montrent que la situation change à partir de 1892. L'utilisation que Poincaré en faisait alors donnait un nouvel élan aux techniques de Hill. En même temps, l'incorporation de formulations propres à la mécanique céleste rendait le point de vue de Poincaré plus opérationnel. Ainsi, devenait-il effectivement employé en mécanique céleste. On remarquera davantage l'entrée en scène de Darwin, qui adaptait le traitement des solutions périodiques afin qu'elles puissent s'appliquer, comme il le dit, à une sorte d'astronomie pratique.

4.1. *Hill avant et après Poincaré*

George Hill publiait son article « On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon »

---

52 Un meilleur terme serait « s'approprie », dans le sens que Michel Foucault donne à ce mot au sein des discussions sur la fonction de l'auteur, qui n'est vraiment ni propriétaire ni responsable de ses propres textes : ni producteur ni inventeur [Foucault 2001].

en 1877 [Hill 1877], d'abord à titre privé pour en faire parvenir quelques exemplaires à un cercle de scientifiques, parmi lesquels se trouvait John Couch Adams de l'Université de Cambridge. Ce théoricien de la Lune en a immédiatement publié un rapport aux *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* [Adams 1877]. Les commentaires étaient élogieux mais Adams ne faisait aucune mention du rôle des solutions périodiques chez Hill. En Angleterre, il faudra attendre George Darwin pour que cet aspect des travaux de l'Américain Hill soit remarqué. Nous trouvons des indications montrant que, pendant les années 1880, le nom de Hill était connu dans les études sur un type spécial d'équations intervenant dans la théorie des perturbations. Autour de 1883, on discutait beaucoup de la solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots)x = 0.$$

Or, cette équation apparaît dans les travaux de Gyldén sur la théorie des perturbations[53] et se ramène, par le moyen d'approximations convenables, à l'équation de Lamé. Ernst Heinrich Bruns fournit des résultats importants sur la forme de l'intégrale trouvée auparavant par Anders Lindstedt [Bruns 1884]. Pour sa part, Callandreau participait activement à la discussion, mais semble avoir été le seul à remarquer que cette équation était déjà analysée par Hill en 1877 [Callandreau 1883, p. 33]. Le but de Callandreau, en 1883, était justement d'obtenir des résultats analogues à ceux de Bruns, mais en employant la démarche de Hill. À ce moment-là, dans les années 1883-1884, on ne disposait encore que des seules copies distribuées personnellement par Hill à quelques collègues de son article de 1877, mais Callandreau semble l'avoir lu. Les références qu'il fait à Hill se relient à des recherches, alors très répandues, sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, associées à un mémoire de Achille Gaston Floquet (1847-1920) [Floquet 1883].

Nous rappelons que, au cours des mêmes années, Poincaré se rapprochait de plus en plus de la mécanique céleste, en publiant sur la convergence des séries de Lindstedt [Poincaré 1883] et en écrivant pour le *Bulletin Astronomique*[54].

---

53 C'est encore une question ouverte à savoir ce que l'on entendait précisément, à cette époque, lorsqu'on parlait de « théorie des perturbations ». Catherine Goldstein et moi-même avons envisagé des rapports possibles de cette « théorie » à des travaux de Gyldén et de Charles Hermite (1822-1901).

54 Datent de 1883 les échanges entre Poincaré et Lindstedt, de même que l'invitation faite par Tisserand à Poincaré de publier dans le premier numéro du *Bulletin Astronomique* `http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/text/tisserand18831229.xml`

En 1886, l'article que Hill avait publié en 1877 était republié dans *Acta Mathematica*. L'année précédente, une suggestion de l'astronome Simon Newcomb (1835-1909) amenait Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), alors rédacteur en chef des *Acta*, à écrire personnellement à Hill[55] :

> Mr. Newcomb has told me about a very interesting work that you have published separately about the lunar theory and you would oblige me very much by sending me a copy of this work.

Hill répond en proposant lui-même la republication :

> As this memoir has only been privately printed and consequently is not readily accessible, perhaps you would be pleased to print it in the *Acta Mathematica* either in its present form in English or after translation into French.
>
> (...)
>
> This memoir was published in May 1877, since then I have noticed in the writings of Profs. Gyldén, Lindstedt, Poincaré ideas similar to those I have given.

Dans les lettres suivantes, Hill tentait de dissiper les doutes au sujet du caractère inédit de son travail et son mémoire paraissait officiellement en 1886, dans le volume 8 d'*Acta Mathematica*. Notre objectif n'est pas d'analyser la circulation des travaux de Hill en elle-même. Il s'agit plutôt, pour nous, d'analyser comment l'usage qu'en fait Poincaré aide à faire connaître un aspect particulier de ces travaux qui n'était pas remarqué auparavant. Il est clair que le nouvel intérêt que Poincaré portait à la mécanique céleste, suscité par le concours du Roi de Suède et une circulation plus large de l'article de Hill, aide à comprendre les conditions dans lesquelles Poincaré allait chercher chez Hill des suggestions pour traiter autrement le problème des trois corps, sans repasser par la voie des approximations successives des séries.

Deux points précis étaient mis en évidence par Poincaré, comme nous l'avons vu dans la section 3.1 : l'analyse des voisinages des solutions périodiques, par le moyen des équations aux variations, et la démonstration de la stabilité, par une détermination directe des limites pour les éléments du troisième corps dans le problème restreint. Avant Poincaré, on connaissait les travaux de Hill, mais ces propos n'étaient pas spécialement remarqués. On en tient pour preuve la manière dont l'article de Hill [1877] est recensé dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Encore en 1877, le rapporteur Heinrich Bruns y décrit le contenu de l'article et souligne l'utilisation des déterminants infinis, mais il ne mentionne pas l'étude des

55 Nous remercions vivement June Barrow-Green d'avoir trouvé cette correspondance à l'Institut Mittag-Leffler et de nous avoir si aimablement donné copie des lettres mentionnées ici.

solutions périodiques qui s'y trouve pourtant. C'est l'absence de discussion explicite de la convergence qui semble inquiéter le commentateur :

> L'auteur avec beaucoup de légèreté passe outre aux réserves qu'on peut avoir par rapport à cette procédure, comme on le voit aussi dans d'autres cas semblables. Mais on ne peut le lui reprocher dans la mesure où des considérations de convergence ne sont pas d'habitude considérées comme indispensables dans les travaux en théorie des perturbations[56].

Après la publication de l'article dans *Acta Mathematica* en 1886, Bruns révisait son rapport et ajoutait une référence à la question de la théorie des perturbations (que nous avons citée), qui était étudiée par Callandreau et par Bruns lui-même en 1883. Mais les solutions périodiques demeuraient dans l'ombre.

Quelques années plus tard, grâce à l'usage qu'en fait Darwin, on note enfin l'importance des solutions périodiques dans les travaux de Hill. Le rapport sur l'article de Darwin [1897] paraissait dans le *Jahrbuch* en 1899, et l'on souligne :

> Les travaux de G.W. Hill sur la théorie de la Lune marquent un tournant dans l'histoire du sujet[57].

Cette fois, le rapporteur Karl Otto Emil Lampe (1840- 1918) lui-même, directeur du *Jahrbuch*[58], citait les deux articles de Hill (de 1877 et 1878), en ajoutant :

> En remplaçant l'ellipse par la « courbe variationnelle » comme orbite intermédiaire, l'auteur a montré le chemin vers des nouveaux champs de découvertes. La courbe variationnelle peut être décrite comme l'orbite circulaire de la lune, déformée par l'attraction du soleil. Elle représente une solution de la classe des solutions périodiques du problème des trois corps — classe qui fait l'objet de la publication présentée ici. Les orbites périodiques qui y sont étudiées sont du type le plus simple ; car elles surgissent quand le corps perturbé a une masse infiniment petite, tandis que les deux autres corps se meuvent chacun autour de l'autre en orbites circulaires, et que les orbites appartiennent au même plan. Dans ce cas le faisceau de dimension quatre des solutions périodiques donné par Poincaré se réduit à un faisceau de dimension

---

56 Ueber die Bedenken, welche bei diesem Verfahren sowie noch bei einigen anderen Fällen ähnlicher Art auftreten können, geht der Verfasser ziemlich leicht hinweg, woraus man ihm allerdings kaum einen besonderen Vorwurf machen kann, da Convergenzuntersuchungen in den Abhandlungen über Störungen fast nie für erforderlich angesehen werden. Voir `http://www.emis.de/cgi-bin/jfmen/MATH/JFM/full.html?first=1&maxdocs=20&type=html&an=JFM%2009.0795.01&format=complete`.

57 Die Arbeiten von G. W. Hill über die Mondtheorie bezeichnen einen Wendepunkt in der Geschichte des Gegenstandes.

58 Il est un ancien élève de Karl Weierstrass et Ernst Kummer et se charge d'une grande partie des commentaires sur des travaux de mécanique céleste à cette époque.

un parce que de toutes les constantes seule celle de l'énergie du mouvement relatif du corps infinitésimal reste indéterminée. L'intérêt de cette recherche, menée avec un énorme investissement de travail, est le même que pour d'autres publications apparentées (voir par exemple Burrau, F. d. M. 25, 1872, 1893/94, JFM 25.1872.03) : c'est la représentation concrète d'un faisceau complet d'orbites pour un cas particulier du problème des trois corps. Voir l'annonce par Burrau de la publication de Acta Math. dans Vierteljahrsschrift Astr. Ges. 33, 21-33 de Burrau[59].

Il soulignait clairement le rôle que Poincaré a joué en indiquant, à la suite de Hill, une nouvelle voie à la recherche des solutions périodiques, sujet qui était déjà en développement dans des travaux employant des méthodes numériques, comme ceux de Burrau. La manière dont ils sont recensés dans le *Jahrbuch* confirme que les travaux de Hill étaient bien connus avant Poincaré, mais qu'on ne saisissait pas encore l'importance spécifique que prenaient les solutions périodiques dans ces travaux.

Quand Poincaré commençait son investigation des solutions périodiques en suivant la manière de Hill, vers 1890, ce dernier ne travaillait plus sur la question et se consacrait plutôt à faire des calculs astronomiques. Toutefois, par l'intermédiaire de Poincaré et Darwin, le nom de Hill acquérait une nouvelle visibilité. Le *réseau* montre que de nombreux scientifiques en mécanique céleste commençaient alors à employer les solutions périodiques à la manière de Hill.

59 Indem dieser Autor die « variationale Curve » für die Ellipse als intermediäre Bahn einsetzte, hat er den Weg zu neuen Entdeckungsfeldern gewiesen. Die variationale Curve kann als die durch die Sonnenanziehung umgeformte Kreisbahn des Mondes beschrieben werden. Sie bildet eine Lösung aus der Klasse der periodischen Lösungen des Dreikörperproblems, von welcher die gegenwärtige Schrift handelt. Die in ihr betrachteten periodischen Bahnen sind solche von dem einfachsten Charakter ; sie entstehen nämlich, wenn der gestörte Körper eine unendlich kleine Masse hat, während die beiden anderen Körper sich in Kreisen um einander bewegen und die Bahnen in einer und derselben Ebene liegen. Hierbei reducirt sich die von Poincaré angegebene vierfach unendliche Schar periodischer Lösungen auf eine einfach unendliche Schar, weil von den in Betracht kommenden Constanten nur diejenige der relativen Bewegungsenergie des infinitesimalen Körpers als einzige willkürliche Grösse übrig bleibt. Das Interesse an der mit ungemein grossem Aufwand von Arbeit durchgeführten Untersuchung liegt, wie bei andern ähnlichen Abhandlungen (z. B. Burrau, F. d. M. 25, 1872, 1893/94, JFM 25.1872.03), in der Veranschaulichung einer vollständigen Schar von Bahnen an einem Beispiele des Dreikörperproblems. Man vergleiche die Anzeige der Abhandlung aus Acta Math. in Vierteljahrsschr. Astr. Ges. 33, 21-33 von Burrau. `http://www.emis.de/cgi-bin/jfmen/MATH/JFM/full.html?first=1&maxdocs=10&type=html&an=JFM%2029.0803.03&format=complete`.

En revanche, nous verrons comment l'appropriation de la démarche de Hill aide Poincaré à inscrire son propre point de vue sur les solutions périodiques dans un réseau de textes en mécanique céleste, où il ne paraissait pas plus tôt.

4.2. *Poincaré avant et après Hill*

Dans les deux premières parties de son mémoire « Sur les courbes définies par une équation différentielle » ([Poincaré 1881] et [Poincaré 1882]), Poincaré utilisait déjà certaines solutions périodiques dans l'étude des systèmes différentiels à deux dimensions, desquelles il détachait l'importance des *cycles limites*, solutions vers lesquelles tendent les autres solutions du système différentiel. Ces solutions fermées ont un rôle organisateur dans la description de l'ensemble des solutions possibles et, par leur moyen, Poincaré fournit, dans le cas analytique de deux dimensions, une description complète des solutions : elles tendent vers un cycle limite ou vers un point singulier, soit pour le temps futur ou pour le temps passé[60]. Ce résultat est obtenu à partir d'une analyse que Poincaré qualifie de « topographique ».

En dimensions supérieures, il devient extrêmement difficile d'obtenir une description analogue des solutions parce que leurs comportements se complexifient. Le rôle des solutions périodiques change de façon significative dans ce contexte : elles ne servent plus en tant qu'ensembles limites, vers lesquels tendent les autres solutions du système, mais constituent un point de départ pour la description des autres solutions dans leurs voisinages. Dans ce sens, les solutions périodiques ouvraient une brèche par laquelle on pouvait investir une place réputée inabordable [Poincaré 1892-1899, t. I, p. 82][61].

Le point de vue nouveau qu'introduisait Poincaré en 1884 [Poincaré 1884], sans se servir encore des travaux de Hill, consiste précisément à noter qu'il vaut la peine de se demander si des solutions particulières, à caractère périodique, existent, vu qu'elles sont utiles pour comprendre le comportement d'autres solutions dans leurs voisinages. Poincaré considère alors trois masses M, m et m'. Supposons, à titre d'exemple, les solutions que Poincaré appelle de « première sorte » (avec inclinaisons

60 Ivar O. Bendixson (1861-1935) étendra le résultat de Poincaré en 1901 [Bendixson 1901], donnant ainsi ce que l'on connaît de nos jours sous le nom de « Théorème de Poincaré-Bendixson ».

61 L'inabordable ici renvoie au comportement des solutions d'un système différentiel à plus de deux dimensions.

nulles et excentricités très petites). On aura trois fonctions X, Y et Z considérées respectivement comme étant la différence de longitude de m et m' à un temps donné et les dérivées, par rapport au temps, des rayons vecteurs de m et m' à cet instant. Comme les masses sont assez petites, ces fonctions se développent en séries suivant les puissances croissantes des masses et Poincaré considère les premiers termes (X_0, Y_0 et Z_0) de chacune des séries ainsi obtenues. Si les excentricités sont nulles et si la différence entre les moyens mouvements de deux petites masses est constante et égale à 1, on a $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$. Poincaré applique alors un résultat attribué à Léopold Kronecker (1823-1891) : si les X_i, où $i = 1 \ldots n$, sont des fonctions continues des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors les équations $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$ ont toujours une solution. L'avantage de ce théorème est qu'il réduit le problème à l'étude du signe des fonctions X_i afin de démontrer rigoureusement que les équations $X_i = 0$ sont satisfaites. Cela permet de conclure qu'il existe des solutions périodiques (ici de première sorte) pour des valeurs très petites des excentricités. Ce résultat est vrai parce qu'on peut affirmer aussi que $X = Y = Z = 0$, puisqu'une des masses étant très petite, les fonctions en question en question gardent les mêmes signes qu'elles ont quand les masses sont nulles.

Poincaré discute brièvement de l'efficacité de la méthode : quand bien même ces solutions périodiques semblent n'être d'aucune utilité pratique (puisqu'elles correspondent à des valeurs d'éléments initiaux dont la probabilité est nulle) quand les éléments initiaux sont très voisins de ceux qui donnent lieu à une solution périodique, il précise « on pourra se servir de ces solutions comme des *orbites intermédiaires* » [Poincaré 1884, p. 72][les italiques sont de Poincaré]. Ici, Poincaré ne cite pas Gyldén et n'utilise rien de semblable aux contributions de celui-ci. La mention de l'utilité des « orbites intermédiaires » montre seulement que la nomenclature proposée par Gyldén était connue à l'époque. La référence à la mécanique céleste renforce la valeur des solutions périodiques pour la description de solutions dans leur voisinage, en montrant qu'il s'agit d'un champ d'application possible du théorème de Kronecker. Il faudra attendre un peu encore avant que l'inscription de Poincaré dans la mécanique céleste devienne plus organique. C'est l'annonce du prix offert par le roi de Suède, en 1885, qui changera définitivement le rapport de Poincaré à ce domaine.

En 1892, lorsqu'il publiait le premier volume des *Méthodes nouvelles*, Poincaré était pleinement relié à ce que se faisait en mécanique céleste[62].

62 En 1896, année de la mort de Tisserand, Poincaré occupa la chaire de cette discipline à la Faculté des Sciences de Paris.

C'est alors qu'il se penchait à nouveau sur la parenté entre la recherche de solutions périodiques et la méthode des orbites intermédiaires de Gyldén. Il cherchait s'il existe une infinité d'orbites périodiques lorsque le système est proche d'une situation képlérienne.

> Il semble d'abord que ce fait ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme orbite intermédiaire, pour employer le langage de M. Gyldén. [Poincaré 1892-1899, p. 82]

On peut s'étonner de lire cette expression (« pour employer le langage de M. Gyldén ») sous la plume de Poincaré, parce que ce que faisait Poincaré a très peu à voir avec la méthode des orbites intermédiaires de Gyldén. En regardant de près la manière dont Poincaré utilisait les solutions périodiques, on remarquera surtout l'influence de Hill. Le fait d'emprunter un « langage » peut se justifier par la réputation acquise de la méthode des orbites intermédiaires, mais l'influence de Gyldén dans ce que Poincaré fait des solutions périodiques ne va guère plus loin que cela. C'est plutôt à partir des techniques suggérées par Hill que les travaux de Poincaré ont pu entrer dans la mécanique céleste. Or, chez Poincaré, le nom de Hill apparaît pour la première fois dans une lettre de Poincaré à Mittag-Leffler, le 16 juillet 1887. Il voulait rendre compte de sa préparation au concours : « Je n'ai pas oublié le prix du roi Oscar et je vous dirai même que ce prix me préoccupe exclusivement depuis un ou deux mois »[63]. Ensuite, Poincaré déclarait avoir obtenu des résultats qui ne sont pas sans intérêt pour la compréhension d'un cas particulier du problème des trois corps, celui qu'il nommera plus tard « problème restreint ». Il estimait avoir donné une démonstration rigoureuse de la stabilité quand des limites précises sont déterminées pour les éléments du troisième corps :

> Vous savez que dans ce cas particulier M. Hill avait déjà donné une limite supérieure du rayon vecteur ; j'ai reçu dernièrement un mémoire de M. Bohlin inséré dans le tome X des *Acta* où cette solution de M. Hill est reprise et complétée.

63 Voir http://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/text/mittag-leffler59.xml

Voilà la toute première référence de Poincaré à Hill[64]. Désormais, le nom de Hill réapparaîtra fréquemment dans les textes de Poincaré sur la mécanique céleste.

Ce qu'il y a de nouveau dans les propositions de Poincaré réside dans sa façon de développer une technique systématique pour analyser les voisinages ou les perturbations des solutions périodiques, sans devoir s'attacher à un problème spécifique (comme le problème de la Lune, de Jupiter et Saturne, etc.). En outre, ses propos sont légitimés par ses extensions du théorème de Cauchy, que nous avons décrites dans la section 3.1.

4.3. *Pourquoi Darwin s'intéresse aux points de vue de Hill et Poincaré ?*

En 1912, Darwin écrivait[65] :

> My attention was first drawn to periodic orbits by the desire to discover how a Laplacian ring could coalesce into planet. With that object in view I tried to discover how a large planet would affect the motion of a small one moving in a circular orbit at the same mean distance. After various failures the investigation drifted towards the work of Hill and Poincaré, so that the original point of view was quite lost and it is not even mentioned in my paper on « Periodic Orbits ». [Darwin 1912, p. 655]

L'aveu se trouve à la fin d'un article où Darwin prolongeait les recherches de Brown, soit celles du texte [Brown 1911], inclus dans notre réseau. Darwin reliait son point de vue sur les orbites périodiques au problème d'obtenir l'orbite d'une planète oscillant autour du sommet de la solution de Lagrange. À ce moment, Brown mais aussi Moulton étudiaient les effets des perturbations des solutions périodiques. Avant d'avoir remarqué ses résultats concernant les solutions périodiques, Darwin connaissait les travaux de Poincaré, en particulier ceux sur les figures d'équilibre d'un fluide. Mais dire qu'un scientifique connaissait les travaux d'un autre n'est pas suffisant pour comprendre pourquoi, à un moment précis, il remarque un aspect particulier de ces travaux.

Que peut-on tirer de l'explication rétroactive de Darwin quand il écrivait pourquoi il s'était intéressé aux travaux de Hill et de Poincaré quinze ans plus tôt ? Certes, dire qu'il ment n'aurait aucun intérêt, mais la déclaration de Darwin doit être problématisée par l'historien.

Voici une contribution singulière de la méthode des réseaux de textes et du regard micro-social qu'elle implique. Si l'on veut étudier la circulation

---

64 Dans l'article de Karl Bohlin [1887a], que cite Poincaré, l'auteur se sert effectivement d'une méthode semblable à celle de Hill, mais sans le citer. La même méthode avait été publiée par Bohlin dans un article en suédois [Bohlin 1887b].

65 Je remercie un des rapporteurs de m'avoir signalé cette citation.

du travail d'un mathématicien, il faut préciser l'aspect que l'on envisage. En outre, on doit mettre à distance ce que les acteurs reconnaissaient eux-mêmes comme ayant été leur motivation. Leurs déclarations sont parties prenantes du cadre micro-social à retracer.

Darwin disait qu'il a porté attention aux orbites périodiques à cause de son désir de résoudre une question sur l'anneau de Laplace. Cependant, Darwin aurait pu aborder ce problème, par exemple, à partir de méthodes comme celles de Gyldén, ce qui n'aurait pas suscité l'utilisation de la *pratique des solutions périodiques*. La déclaration de Darwin n'explique pourtant pas pourquoi son investigation « a dérivé » vers les travaux de Hill et de Poincaré et ce d'une manière si intense qu'il a finit par en oublier son objectif de départ. L'imprécision du mot choisi, « drift », qui signifie « dérive » (en français), témoigne de l'hésitation de Darwin à ce sujet. Selon Dominique Tournès, un facteur aidant à expliquer l'intérêt de Darwin envers Hill et Poincaré est l'enthousiasme de William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907) pour des solutions périodiques qu'il avait employées dans ses méthodes graphiques[66] :

> Cette courte incursion de William Thomson dans la théorie de la Lune[67] est sans doute essentielle pour comprendre le cheminement assez curieux qui relie les recherches de Hill à celles de Darwin du procédé graphique de Thomson [Tournès 1996, p. 405].

Dans les années 1890, George Darwin s'était mis à étudier les travaux de Hill en profondeur et à donner des cours sur sa théorie de la Lune à Cambridge. Craig Stephenson le montre dans [Stephenson 2009] et note l'influence qu'a pu avoir la médaille que la Royal Society offrait à Hill en 1887. Ce point de vue est également soutenu par Brown en 1916, dans une note écrite pour l'édition des œuvres de Darwin contenant ses cours sur Hill [Brown 1916]. Au cours de cette même année 1887, nous l'avons vu, Poincaré citait Hill pour la première fois dans l'élaboration de son mémoire sur le problème des trois corps. Qu'est-ce que cette redécouverte des travaux de Hill pourrait dire des choix mathématiques de l'époque, ou tout au moins sur ceux qui étaient faits dans le métier de la mécanique céleste ? Darwin avait beau dire (et croire) qu'il s'était tourné vers les démarches de Hill et Poincaré en cherchant à résoudre un problème particulier, mais pourquoi croyait-il trouver la réponse à ses questions dans la façon dont les solutions périodiques étaient utilisées dans les travaux de Hill et Poincaré ?

66 Pour plus de détails sur ces méthodes de Thomson, voir [Tournès 1998].

67 Thomson essayait d'appliquer la méthode graphique à des problèmes dynamiques, un des buts étant de trouver des solutions périodiques de façon heuristique, voir par exemple [Thomson 1892].

Il faut dire que la *pratique*, que nous avons décrite, ne fournit pas une solution dans le sens alors usuel du terme, mais plutôt une nouvelle manière de poser le problème.

Brown précisait [Brown 1916] que les publications sur les solutions périodiques faisaient voir une particularité chez Darwin : en l'absence de méthodes générales pour découvrir et localiser de telles courbes, il exhibe de façon arithmétique des classes d'orbites qu'on ne trouverait pas par des moyens analytiques. Mais Darwin n'aboutit à cela que parce qu'il ne laissait pas les calculs numériques ou algébriques trop longs ralentir son travail. Au contraire d'Adams ou de Hill, qui exprimaient leurs résultats avec un grand nombre de décimales, Darwin n'établissait que le degré de précision auquel il voulait s'arrêter. Brown soulignait aussi l'inspiration provenant de Poincaré en observant que ses propres propositions sur les solutions périodiques étaient trop abstraites au goût de Darwin, qui ressentait le besoin de donner des résultats plus concrets.

4.4. *Différentes mathématiques en jeu dans la mécanique céleste*

D'un point de vue actuel, on pourrait dire que la démonstration erronée de la stabilité dans la première version du mémoire de Poincaré sur le problème des trois corps utilise un argument « topologique » : c'est l'existence d'une barrière, formée par les variétés stable et instable des solutions périodiques hyperboliques, qui entraîne la stabilité. Cette démarche diverge des efforts des contemporains de Poincaré qui démontraient la stabilité par le moyen des approximations de séries. L'originalité de Poincaré se caractériserait ainsi par l'utilisation d'un argument « topologique » centré sur la description de l'ensemble des courbes définies par l'équation du mouvement. Nous savons aujourd'hui combien un tel changement de point de vue s'est avéré fructueux, car il est à l'origine de nouveaux domaines de recherches comme celui des systèmes dynamiques.

Nous prenons cette interprétation à contre-courant pour éliminer ce constat rétrospectif de notre analyse des textes contemporains de Poincaré. Il s'agit d'un exercice historiographique ayant pour but de construire un cadre interprétatif dans lequel la question de l'originalité puisse se poser en des termes non rétrospectifs. Car ce qui paraît important aux yeux des mathématiciens d'aujourd'hui n'est pas forcément ce qui contribuait à la dynamique de l'innovation mathématique à la fin du XIX^e^. Peut-être conviendrait-il de faire une distinction entre le problème de l'innovation, tel que nous l'envisageons ici, et la notion de *progrès* si souvent supposée.

Nous ne parlons pas d'évolution, ni de changement de paradigme dans le sens kuhnien du terme. Comprendre les processus d'innovation exige des outils d'analyse capables de traiter des phénomènes collectifs, suggère Catherine Goldstein [Goldstein 1999, p. 193]. Comment saisir l'originalité d'un texte sans une appréciation des démarches voisines ? À la fin du XIX[e] siècle, on se demandait quelles mathématiques étaient les plus appropriées pour traiter les problèmes de la mécanique céleste. L'engouement pour les orbites intermédiaires de Gyldén, étant donné son souci de fournir des séries purement trigonométriques, en est une preuve. Néanmoins, les approximations successives utilisées par Gyldén et ses contemporains faisaient intervenir des raisonnements analytiques très complexes qui se sont avérés peu utiles dans l'étude de cas concrets.

Les résultats de Poincaré, concernant la non-convergence des séries employées en mécanique céleste ont été souvent mis en évidence comme une des innovations les plus importantes qu'on lui doit. Barrow-Green montre, à partir de discussions autour des réactions de Gyldén face à l'attribution du prix à Poincaré, qu'il y a là une distinction entre différentes significations des notions de démonstration et de convergence selon qu'on était mathématicien ou astronome [Barrow-Green 1997, p. 141]. Tel est le discours auquel Poincaré lui-même avait recours dans sa réponse à Gyldén. Nous ne sommes pourtant pas surs si une telle séparation entre convergence mathématique et convergence astronomique avait du sens à l'époque. Gyldén était alors considéré comme grandement préoccupé par la rigueur mathématique dans ses recherches sur la stabilité. Tout en respectant les termes de l'époque, il serait peut-être plus juste d'observer qu'il y avait différentes manières de faire des mathématiques. Ce serait simpliste d'expliquer les différences à partir des contextes institutionnels. Peut-on dire qu'à l'observatoire on produisait des mathématiques à partir du problème concret de connaître la position des astres tandis qu'à l'université on s'intéressait plutôt à des problèmes théoriques de convergence ? Nous ne le croyons pas. La *pratique des solutions périodiques* indique que les mathématiques des astronomes ne sont pas seulement concrètes, ainsi que celles des mathématiciens ne sont pas seulement théoriques. Les travaux de David Aubin soulignent la valeur attachée aux nombres dans les sciences de l'observatoire [Aubin 2009] et [Aubin et al. 2010]. Nous soulignons, en outre, qu'il serait intéressant de faire une analyse historique des valeurs qui étaient rattachées aux procédures analytiques exprimées par des développements en séries.

À défaut de démonstrations de convergence contribuant à la résolution du problème de la stabilité, un certain nombre des praticiens de mécanique céleste ont remarqué qu'il était possible de trouver des orbites de plusieurs problèmes particuliers de manière directe. Ces scientifiques ont tourné le dos aux approximations par séries et se sont occupés d'analyser plutôt ce qui se passe dans des cas particuliers du problème des trois corps lorsqu'on perturbe le paramètre qui donne lieu à une solution périodique.

Alors que des personnalités comme Levi-Civita, Bisconcini, Painlevé et Sundman cherchaient tous à éliminer les singularités afin de résoudre des problèmes de régularisation des séries qui empêchaient de démontrer la stabilité de manière formelle (voir [Roque 2011], [Barrow-Green 2010]), les *acteurs de notre réseau* exploraient des voies qui fourniraient des informations de façon directe, sans passer par les séries alors couramment employées en mécanique céleste. L'apport de Poincaré a légitimé cette *pratique*, en la soutenant par des arguments mathématiques d'un nouveau type. Voici une façon de concevoir l'originalité de ses contributions[68].

Il y aurait intérêt à poursuivre cette recherche en se demandant si un tel point de vue se lie, de façon plus générale, à une manière de faire des mathématiques où les démonstrations par séries devenaient moins valorisées. C'est seulement en s'éloignant de leurs expressions par séries que les solutions d'un système différentiel pourront s'appeler des « trajectoires », nomenclature que Poincaré a suggéré dès [Poincaré 1885] et qui correspond à une abstraction de la nature analytique des solutions. Désigner les solutions des équations différentielles comme *orbites* ou *trajectoires* est un élément clé de la singularité des travaux qui ont recours au point de vue de Poincaré[69].

5. CONCLUSIONS

Le rôle et la portée des solutions périodiques à l'époque de Poincaré auraient pu nous échapper si nous avions choisi d'écrire l'histoire d'un problème spécifique (problème de Jupiter et Saturne, problème de la

---

68 En nous inspirant des réflexions que Catherine Goldstein propose au sujet de Fermat dans [Goldstein 2009], nous pouvons sans doute dire que l'exception de Poincaré ne peut être saisie que si elle permet de comprendre également le caractère exceptionnel de son milieu.

69 On peut donner un sens à la qualification « topologique » d'une démarche à partir d'une question de ce type. Cette caractérisation n'est donc pas notre point de départ pour comprendre l'originalité de Poincaré, mais pourrait être le point d'arrivé d'une recherche prolongeant celle-ci.

Lune, ou problème des trois corps). Le livre de Curtis Wilson [2010], par exemple, présente l'histoire de la théorie de Hill-Brown sur le problème de la Lune en 323 pages, où aucune mention n'est faite de l'importance des solutions périodiques. Darwin est mentionné plusieurs fois mais à cause de son rôle dans les choix de Brown, ses travaux sur les solutions périodiques n'étant même pas cités.

Par ce commentaire, nous ne souhaitons pas souligner un défaut de cet ouvrage mais bien cerner les conséquences de choix historiographiques. Lorsqu'on fait l'histoire d'un problème spécifique (le problème de la Lune) ainsi que d'une manière particulière de l'aborder (nommée rétrospectivement « théorie de Hill-Brown ») le but de l'historien est de suivre le développement des résultats qui composent ladite théorie. Cette manière de poser la question n'entraîne pas forcément une recherche des moyens par lesquels ces résultats étaient obtenus, ni de leur possible présence dans des domaines voisins. La *pratique des solutions périodiques* ne nous serait pas apparue non plus si nous avions fondé notre recherche sur des unités sociologiques prédéfinies : aucune institution ne rassemble les chercheurs dont il est question ici. En outre, il n'y a pas de connexion a priori entre la *pratique des solutions périodiques* et une publication particulière. Nous avons déjà remarqué que nos acteurs se rangent difficilement sous des étiquettes nationales, bien que des Suédois, des Danois, des Anglais, des Américains, des Italiens et des Français, entre autres, animent notre histoire. Nos acteurs ne constituent pas non plus une même école (rassemblée sous la bannière d'un chef) ni une même communauté de recherche. Il serait sûrement intéressant de poursuivre cette étude en essayant de comprendre les liens institutionnels entre les acteurs trouvés dans le *réseau*, mais cette question ne précède pas l'investigation, d'autant que les choix faits par des acteurs n'expriment pas des tendances hégémoniques dans leur pays ou leurs institutions d'origine[70].

Si l'on prend au hasard un nom dans le *réseau*, il y a de fortes chances que sa voie d'accès à un certain problème de mécanique céleste se retrouve plus proche de celle qui est adoptée par un acteur travaillant dans un pays différent du sien, voire de quelqu'un qui œuvre sur un autre problème. Les liens professionnels entre les acteurs, leur proximité géographique voire les sujets spécifiques sur lesquels ils travaillaient en mécanique céleste ne correspondent pas aux relations qui paraissent dans notre *réseau*.

---

70 L'exemple de Hill est éloquent à cet égard, puisqu'une nouvelle utilisation de ses travaux, même dans son pays, provient d'une lecture de textes de Poincaré et Darwin.

Dans notre perspective, l'identité des *textes* n'est pas donnée par une théorie de la mécanique céleste ni par un tout sociologique. Il ne s'agit donc pas, pourrions-nous dire, d'une unité épistémologique centrée sur une théorie et les résultats qui la composent, ni d'une identité fournie par un cadre sociologique repérable à grande échelle.

En changeant l'échelle d'analyse, notre objectif était justement de regarder ce qui circule entre les *textes*. En fait, la notion de *réseau* montre à quel point une investigation sur les changements conceptuels peut se mêler à des enjeux institutionnels, sans qu'on puisse dire lequel des deux explique l'autre. Voici une des raisons qui nous a amenés à parler de *pratique*, soit de quelque chose qui se place en deçà des pôles conceptuel et institutionnel.

La question de la réception de Poincaré a ainsi été transformée en une investigation des *pratiques* utilisées dans un *réseau* des textes. Pour qu'il y ait « réception » il faut un objet, quelque chose, qui est reçu, qui est approprié ou qui circule : tels un ensemble de résultats prêts à l'emploi, des méthodes ou des théorèmes de Poincaré qui auraient été utilisés par d'autres scientifiques. Ainsi la conclusion de notre étude s'énonce-t-elle différemment : il n'y aurait pas de résultats prêts à l'emploi.

En regardant la scène à petite échelle (comme sous une loupe grossissante), nous voyons que les travaux de Poincaré participent aussi à une certaine forme de réception, notamment celle des écrits de Hill que Poincaré adapte à ses besoins. On observe alors Hill avant et après Poincaré mais aussi Poincaré avant et après Hill. Le problème de la réception, tel qu'énoncé en amont de notre recherche, s'avère tellement plus complexe qu'il nous paraît inapproprié de le poser encore dans ces termes.

La catégorie de *réception* est inadéquate pour comprendre la circulation des propos d'un auteur. À son tour, l'*originalité*, peut prendre un nouveau sens si l'on choisit d'éviter toute vision rétrospective. De la façon dont nous l'avons comprise, l'originalité de Poincaré tient au fait qu'il établit des liens entre différents acteurs partageant une culture commune : l'utilisation critique des développements en séries (le langage de Gyldén) et la recherche d'autres voies, plus directes, de résolution (les techniques de Hill).

Il serait tout aussi inapproprié de voir Poincaré comme représentant typique de son temps que de faire le contraire, en le considérant à partir de qualités individuelles qui seraient exceptionnelles. On trouve en lui la convergence d'une série d'éléments qui paraissent d'abord dispersés dans des travaux de ses contemporains.

Poincaré était certes pleinement un homme de son temps, tout en étant singulier en ce qu'il a articulé d'une façon singulière les éléments mis à sa disposition.

RÉFÉRENCES

ADAMS (John Couch)

[1877] On the Motion of the Moon's Node in the Case When the Orbits of the Sun and Moon are Supposed to Have No Eccentricities, and When Their Mutual Inclination is Supposed Indefinitely Small, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 38 (1877), p. 43–49.

ANDOYER (Marie Henri)

[1887] Contribution à la théorie des orbites intermédiaires, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1ère série*, 1(4) (1887), p. 1–72.

AUBIN (David)

[2009] Observatory mathematics in the nineteenth century, dans Robson (E.) & Stedal (J.), éds., *Oxford Handbook for the History of Mathematics*, Oxford : Oxford Univ. Press, 2009, p. 273–298.

AUBIN (David), BIGG (Charlotte) & SIBUM (Heinz Otto), éds.

[2010] *The Heavens on Earth : Observatories and Astronomy in Nineteenth-Century Science and Culture*, Durham : Duke University Press, 2010.

AUBIN (David) & DAHAN-DALMEDICO (Amy Dahan)

[2002] Writing the History of Dynamical Systems and Chaos : *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures, *Historia Mathematica*, 29 (2002), p. 273–339.

BARROW-GREEN (June)

[1997] *Poincaré and the Three Body Problem*, Providence : Amer. Math. Soc., London Mathematical Society, 1997.

[2010] The dramatic episode of Sundman, *Historia Mathematica*, 37 (2010), p. 164–203.

BENDIXSON (Ivar)

[1901] Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Mathematica*, 24 (1901), p. 1–88.

BIRKHOFF (George David)

[1913] Proof of Poincaré's Geometric Theorem, *Transactions of the American Mathematical Society*, 14 (1913), p. 14–22 ; In ?, t. 1, p. 673-681.

[1927] *Dynamical Systems*, Providence : Amer. Math. Soc., 1927.

BOHLIN (Karl)
[1887a] Über die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme, *Acta Mathematica*, 10 (1887), p. 109–130.

[1887b] Über die Bedeutung des Princips der Lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität Dynamischer Systeme, *Bihang till Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, 13 (1887), p. 1–16.

[1911] Integralentwickelungen des von Haerdtl'schen Dreikörper-Problemes, *Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda pa Stockholms observatorium*, 9(4) (1911), p. 1–36.

BRECHENMACHER (Frédéric)
[2007a] La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13(2) (2007), p. 187–257.

[2007b] L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874), *Sciences et Techniques en Perspective, IIe série*, 1 (2007), p. 5–85.

[2013a] Autour de pratiques algébriques de Poincaré : héritages de la réduction de Jordan, 2013 ; à paraître, voir `http://hal.archives-ouvertes.fr/aut/Frederic+Brechenmacher`.

[2013b] The algebraic cast of Poincaré's *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 2013 ; à paraître, voir `http://hal.archives-ouvertes.fr/aut/Frederic+Brechenmacher`.

BROWN (Ernst)
[1896] *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge Univ. Press, 1896.

[1911] On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 71 (1911), p. 438–454.

[1916] The Scientific Work of Sir George Darwin, dans *Scientific Papers by Sir George Howard Darwin, Volume V*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1916, p. xl–lxv.

BRUNS (Ernst Heinrich)
[1884] Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie, *Astronomische Nachrichten*, 106(13) (1884), p. 193–203 ; Continuation dans le volume 107, no. 9, p. 129–131.

BUCHWALD (Jed Z.)
[2000] How the Ether Spawned the Microworld, dans Daston (Lorraine), éd., *Biographies of Scientific Objetcs*, Chicago & London : The University of Chicago Press, 2000, p. 203–225.

BURRAU (Carl)

[1894] Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps, *Astronomische Nachrichten*, 135 (14) (1894), p. 233–240 ; Continuation dans le Volume 136, no. 11, 1894, p. 161-174.

[1898] Periodic Orbits, *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 33 (1898), p. 21–33.

[1906] Über einige in Aussicht genommene Berechnungen, betreffend einen Spezialfall des Dreikörper-Problems, *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 41 (1906), p. 261–266.

BURRAU (Carl) & STRÖMGREN (Elis)

[1909] Ein numerisch gerechneter Spezialfall des Dreikörperproblems mit Massen und Distanzen von derselben Grössenordnung, *Astronomische Nachrichten*, 182 (1909), p. 181–192.

[1916] Numerische Untersuchungen über eine Klasse einfach periodischer retrograder Bahnen im problème restreint, nebst der diese Klasse abschliessenden, periodischen Ejektionsbahn. (Massenverhältnis $m_1 = m_2$.), *Astronomische Nachrichten*, 202 (1916), p. 185–200.

CALLANDREAU (Octave)

[1883] Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations et remarques relatives aux Nos 2389 et 2435 des A.N., *Astronomische Nachrichten*, 107(2547) (1883), p. 33–38.

[1887] Revue des publications Astronomiques. Charlier C.V.L. Untersuchung über die allgemeinen Jupiter-Störungen des Planeten Thetis, *Bulletin Astronomique*, 4 (1887), p. 207–209.

[1890] Revue des publications Astronomiques. Gyldén (H.), Sur les termes élémentaires dans les coordonnées d'une planète. Et autres articles., *Bulletin Astronomique*, 7 (1890), p. 471–497.

[1891] Sur quelques applications des théories concernant les solutions particulières périodiques du problème des trois corps et l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Bulletin Astronomique*, 8 (1891), p. 49–67.

[1892] Poincaré (H.). Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste. T. 1. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques, *Bulletin Astronomique*, 9 (1892), p. 164–172.

CALLON (Michel) & LAW (John)

[1989] On the Construction of Sociotechnical Networks : Content and Context Revisited, dans Hargens (L.), Jones (R.) & Pickering (A.), éds., *Knowledge and Society : Studies in the Sociology of Science, Past and Present. Vol. 8*, Greenwich CT : JM Press, 1989, p. 57–83.

CHARLIER (Carl)
[1887] Untersuchung über die allgemeinen Jupiter-Störungen des Planeten Thetis, *Kongliga Svenska vetenskaps-akademiens handlingar*, 22(2) (1887), p. 1–98.
[1892] Studier öfver tre-kroppar-problemet, *Bihang till Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, 18(6) (1892), p. 1–22 ; Continuation dans le vol. 19, no. 2, 1893, p. 1-29.
[1900] On periodic orbits, *Öfversigt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 9 (1900), p. 1059–1082 ; Meddelanden frän Lunds Astronomiska Observatorium, N.18.

COCULESCO (Nicolaie)
[1892] Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 114 (1892), p. 1339–1341.

COLLINDER (Per Arne)
[1967] Astronomical works and papers printed in Sweden between 1881 and 1898 : Bibliography and historical notes, *Arkiv för Astonomi*, 4(19) (1967), p. 323–339.

COWELL (Philip H.)
[1898a] Report of the Council, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 58 (1898), p. 208–210.
[1898b] Periodic Orbits, *The Observatory*, 21 (1898), p. 121–123.

DARWIN (George Howard)
[1896] On Periodic Orbits, *Report of the Sixty-Sixth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 1896, p. 708–709.
[1897] Periodic Orbits, *Acta Mathematica*, 21 (1897), p. 99–242.
[1899] Periodic Orbits, *Mathematische Annalen*, 51(4) (1899), p. 523–583.
[1912] On librating planets and on a new family of periodic orbits, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 72 (1912), p. 642–658.

DE SITTER (Willem)
[1907] Over periodische banen van den Hestia-typus, *Verslagen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam*, 16 (1907), p. 35–44 ; Traduction vers l'anglais "On periodic orbits of the type Hestia" publiée la même année dans *Proceedings of the Royal Academy of Amsterdam*, 10, p. 47-56.

DELL'AGLIO (Luca)
[1993] Tradizioni di ricerca nella meccanica celeste classica : il problema dei tre corpi in Levi-Civita e Sundman, *Physis. Rivista Internazionale di Storia della Scienza*, 30(1) (1993), p. 105–144.
[2001] Levi-Civita e il problema classico dei tre corpi, *Atti del XXI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e Dell'Astronomia*, 2001, p. 92–101.

FLAMMARION (Camille)
[1890] Le problème des trois corps et le triomphe de M. Poincaré, *L'Astronomie. Revue d'astronomie populaire, de météorologie et de physique du globe, exposant des progrès de la science pendant l'année*, 1890, p. 265–268.

FLOQUET (Gaston)
[1883] Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Annales de l'École Normale Supérieure (2ème série)*, 12 (1883), p. 47–88.

FOUCAULT (Michel)
[2001] Qu'est-ce qu'un auteur ?, dans Foucault (M.), Défert (D.) & Ewald (F.), éds., *Dits et écrits I (1954-1975)*, Paris : Gallimard, 2001, p. 817–837.

GAUTHIER (Sébastien)
[2007] *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2007.

GOLDSTEIN (Catherine)
[1999] Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870–1914), *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum, New series 3*, 28 (1999), p. 187–214.
[2009] L'arithmétique de Pierre Fermat dans le contexte de la correspondance de Mersenne : une approche microsociale, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 18 (2009), p. 25–57.

GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert) & SCHWERMER (Joachim)
[2007] *The Shaping of Arithmetics after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007.

GYLDÉN (Hugo)
[1881a] Undersökningar af theorien för himlakropparnes rörelser. 1., *Bihang till Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar*, 6(8) (1881), p. 1–64.
[1881b] *Undersökningar af theorien för himlakroppernas rörelser*, vol. 1-3, P.A. Norstedt, 1881.

HAERDTL (Eduard Freiherr)
[1892] Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper, *Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, 17(3) (1892), p. 589–643.

HILL (George William)
[1877] On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon, *Private publication. Cambridge, Mass., John Wilson and Son*, 1877 ; Republié dans *Acta Mathematica*, v. 8, 1886, p. 1-36.
[1878] Researches in the lunar theory, *American Journal of Mathematics*, 1(5) (1878), p. 129–145.
[1898] Periodic Orbits by G.H. Darwin of Cambridge, *Astronomical Journal*, 423 (1898), p. 120.
[1905-07] *The collected mathematical works of George William Hill*, Washington : Carnegie institution of Washington, 1905-07.

Hough (Sydney Samuel)
[1901] On certain discontinuities connected with periodic orbits, *Acta mathematica*, 24 (1901), p. 257–288.
[1909] On certain families of periodic orbits, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 70 (1909), p. 108–143.

Kitcher (Philip)
[1983] *The nature of mathematical knowledge*, Oxford : Oxford Univ. Press, 1983.

Knorr Cetina (Karin), Schatzki (Theodore R.) & von Savigny (Eike), éds.
[2001] *The practice turn in contemporary theory*, London : Routledge, 2001.

Kobb (Gustaf)
[1899] Sur les solutions périodiques du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2e série*, 1(1) (1899), p. 5–30.
[1901] Sur un cas d'instabilité possible, *Bulletin Astronomique*, 18 (1901), p. 219–221.
[1908] Sur la stabilité des orbites des nouveaux satellites de Jupiter, *Bulletin Astronomique*, 25 (1908), p. 411–415.

Koenigs (Gabriel)
[1896] Sur les solutions périodiques du problème du mouvement d'un corps pesant quelconque, suspendu par un de ses points, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 122 (1896), p. 1048–1049.

Leloup (Juliette)
[2009] *L'entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2009.

Lovett (Edgar Odell)
[1909] The Problem of Several Bodies— Recent Progress in its Solution, *Science*, 29(733) (1909), p. 81–91.
[1902] On the periodic solutions of the problem of three bodies, *Astronomische Nachrichten*, 159(18) (1902), p. 281–286.
[1907] On a class of periodic solutions in the problem of four bodies, *Annali di Matematica*, 14 (1907), p. 327–333.

Maddy (Penelope)
[1997] *Naturalism in Mathematics*, Oxford : Clarendon Press, 1997.

Mancosu (Paolo), éd.
[2008] *The philosophy of mathematical practice*, Oxford : Oxford Univ. Press, 2008.

Marcolongo (Roberto)
[1919] *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) al nostri giorni*, U. Hoepli, 1919.

Noether (Max)
[1890] H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Mémoire couronné du prix de S. W le Roi Oscar II, *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*, 1890, p. 258–292.

PAVANINI (Giulio)
[1906] Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi, *Annali di Matematica*, 13 (1906), p. 179–202.

PERCHOT (Jean Justin et Mascart)
[1895] Sur une classe de solutions périodiques dans un cas spécial du problème des trois corps, *Bulletin Astronomique*, 12 (1895), p. 329–352 ; Suit d'un article paru aux *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, v. 120, p. 906–909.

PERCHOT (Justin)
[1893] Sur les mouvements des nœuds et du perigée de la Lune, et sur les variations séculaires des excentricités et ese inclinations, *Annales scientifiques de l'ecole normale supérieure*, 10 (1893), p. 3–94.

PICKERING (Andrew), éd.
[1992] *Science as Practice and Culture*, Chicago & London : The University of Chicago Press, 1992.

PICKERING (Andrew)
[1995] *The Mangle of Practice : Time, Agency, and Science*, Chicago & London : The University of Chicago Press, 1995.

PLUMMER (Henry Crozier)
[1901] On Periodic Orbits in the Neighbourhood of Centres of Libration, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 62 (1901), p. 6–17.

POINCARÉ (Henri)
[1881] Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1^re^ partie), *Journal de Mathématiques (3^e^ série)*, 7 (1881), p. 375–422 ; In ?, t. I, p. 3-44.
[1882] Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (2^e^ partie), *Journal de Mathématiques (3^e^ série)*, 8 (1882), p. 251–296 ; In ?, t. I, p. 44-84.
[1883] Sur les séries trigonométriques, *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 97 (1883), p. 1471–1473.
[1884] Sur certaines solutions particulières du problème de trois corps, *Bulletin Astronomique*, 1 (1884), p. 65–74 ; In ?, t. 7, p. 253-261.
[1885] Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (3^e^ partie), *Journal de Mathématiques (4^e^ série)*, 1 (1885), p. 167–244 ; In ?, t. I, p. 90-158.
[1886] Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (4^e^ partie), *Journal de Mathématiques (4^e^ série)*, 2 (1886), p. 151–217 ; In ?, t. I, p. 167-222.
[1890] Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, 13 (1890), p. 1–270 ; In ?, t. 7, p. 262-479.
[1891] Sur le problème des trois corps, *Bulletin Astronomique*, 8 (1891), p. 12–24.
[1892-1899] *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris : Gauthier-Villars, 1892-1899.
[1895] Analysis situs, *Journal de l'École Polytechnique*, 1 (1895), p. 1–121 ; In ?, t. 6, p. 193-288.

[1902a] Les solutions périodiques et les planètes de type Hécube, *Bulletin Astronomique*, 19 (1902), p. 177–198.

[1902b] Sur les planètes de type Hécube, *Bulletin Astronomique*, 19 (1902), p. 289–310.

PREY (Adalbert)

[1909] Über den Fall der Kommensurabilitat vom Typus 1/3 im System der kleinen Planeten, *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*, 118 (1909), p. 447–484.

REVEL (Jacques), éd.

[1996] *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience*, Paris : Gallimard Le Seuil, 1996.

ROQUE (Tatiana)

[2011] Stability of Trajectories from Poincaré to Birkhoff : approaching a qualitative definition, *Archive for History of Exact Sciences*, 65 (2011), p. 295–342.

ROSENTAL (Claude)

[2003] *La Trame de l'Evidence : Sociologie de la Démonstration en Logique*, Paris : Presses Universitaires de France, 2003.

ROUSE (Joseph)

[2007] Practice Theory, dans Turner (S.) & Risjord (M.), éds., *Handbook of the Philosophy of Science, Volume 15 : Philosophy of Anthropology and Sociology*, Dordrecht : Elsevier, 2007, p. 630–681.

SCHLITT (Rudolf)

[1903] *Untersuchungen über einen Specialfall des Problems der drei Körper mit nahezu periodischer Lösung*, Kiel : Druck von P. Peters, 1903.

SCHWARZSCHILD (Karl)

[1896] Über eine Classe periodischer Lösungen des Dreikörperproblems, *Astronomische Nachrichten*, 147 (1896), p. 17–24.

[1898] Über weitere Classen periodischer Lösungen des Dreikörperproblems, *Astronomische Nachrichten*, 147 (1898), p. 289–298.

[1903] Über die periodischen Bahnen vom Hecubatypus, *Astronomische Nachrichten*, 160 (1903), p. 385–400.

SIMONIN (Martial)

[1897a] Sur l'orbite de (108) Hécube, *Annales de l'Observatoire de Nice*, 6 (1897), p. 1–73.

[1897b] *Sur l'orbite de (108) Hécube*, Thèse, Université de Paris, 1897.

STEFFENSEN (Johan Frederik)

[1909] Sur les orbites périodiques dans le problème de Hill, *Oversigt over Kongliga anske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*, 3 (1909), p. 319–335.

Stephenson (Craig)
[2009] George Darwin's lectures on Hill's lunar theory, *Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 24(3) (2009), p. 159–171.
[2012] *Periodic Orbits of the Three-Body Problem : F.R. Moulton's quest for a new lunar theory*, PhD Thesis, The Open University, 2012.

Thiele (Thorvald Nicolai (Rapporteur))
[1889] Question mise au concours pour l'année 1889, *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs- Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1889*, 1889, p. III.

Thiele (Thorvald Nicolai)
[1891a] Extrait d'un Rapport sur un Mémoire envoyé en réponse à une question mise au concours pour l'année 1889 par l'Académie des Sciences de Copenhague, *Bulletin Astronomique*, 8 (1891), p. 252–254.
[1891b] Rapport sur un Mémoire envoyé en réponse à une question mise au concours pour l'année 1889, *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs-Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1891*, 1891, p. VII–XI.
[1895] Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps, *Astronomische Nachrichten*, 138 (1) (1895), p. 1–10.

Thomson (William)
[1892] On Graphic Solution of Dynamical Problems, *Philosophical Magazine*, 34 (5) (1892), p. 443–448.

Tisserand (Félix)
[1889] Mémoires et observations. Sur la théorie de la capture des comètes périodiques, *Bulletin Astronomique*, 6 (1889), p. 289–292.

Tournès (Dominique)
[1996] *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914)*, thèse de doctorat, Université Paris 7 - Denis Diderot, 1996.
[1998] L'origine des méthodes multipas pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 4 (1998), p. 5–72.

von Zeipel (Edvard H.)
[1902] Remarque sur les solutions périodiques de la troisième sorte, *Bulletin Astronomique*, 19 (1902), p. 71–76.
[1904] Recherches sur les solutions périodiques de la troisième sorte dans le problème des trois corps, *Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Ser. 3*, 20 (1904), p. 1–66.

Walter (Scott), Krömer (Ralf), Nabonnand (Philippe) & Schiavon (Martina), éds.
[2014] *La correspondance entre Henri Poincaré et les astronomes et géodésiens*, Basel : Birkhäuser, 2014.

WHITTAKER (Edmund Taylor)
[1899] Report on the progress of the solution of the problem of three bodies, *British Association for the Advancement of Science Report*, 1899, p. 121–159.
[1902a] On Periodic Orbits, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 62 (1902), p. 186–193.
[1902b] On Periodic Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 62 (1902), p. 346–352.

WILKENS (Alexander)
[1905a] Untersuchungen über eine neue Klasse periodischer Lösungen des Problems der drei Körper, *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*, 114 (1905), p. 1071–1113.
[1905b] *Untersuchungen über Poincarésche periodische Lösungen des Problems der drei Körper*, Thèse, Christian-Albrechts-Universität, Kiel, 1905 ; Publiée dans *Astronomische Abhandlungen als Ergänzungshefte zu den Astronomische Nachrichten*, v. 8, p. 1-29.

WILSON (Curtis)
[2010] *The Hill-Brown Theory of the Moon's Motion. Its Coming-to-be and Short lived Ascendancy (1877-1984)*, Berlin : Springer, 2010.