369

ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (I)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

COHOMOLOGIE AUTOMORPHE ET SOUS-VARIÉTÉS DES VARIÉTÉS DE GRIFFITHS-SCHMID

Henri CARAYOL

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 369, 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 82 € ($ 123)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € ($ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-805-3

Directeur de la publication : Marc Peigné

Astérisque
369, 2015, p. 203–222

COHOMOLOGIE AUTOMORPHE ET SOUS-VARIÉTÉS DES VARIÉTÉS DE GRIFFITHS-SCHMID

par

Henri Carayol

À Gérard Laumon à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Résumé. — Nous considérons dans cet article des variétés de Griffiths-Schmid (variantes non algébriques des variétés de Shimura) attachées à des groupes unitaires en 3 variables, ainsi que différentes sous-variétés, isomorphes à des courbes de Shimura. Nous étudions la restriction à ces sous-variétés de certaines classes de « cohomologie automorphe » de degré 1, associées à des formes modulaires de Picard. Au moyen de transformations cohomologiques du type Penrose, nous comparons cette restriction à la situation plus classique de restriction à une sous-variété d'une variété de Shimura (ici, une variété modulaire de Picard). Le but de ce travail (et d'autres qui l'ont précédé) est de rechercher une possible structure arithmétique sur les groupes de cohomologie automorphe.

Abstract **(Automorphic cohomology and subvarieties of Griffiths-Schmid varieties)**
We consider in this article some Griffiths-Schmid varieties (non-algebraic analogues of Shimura varieties) attached to some unitary groups in 3 variables, and several subvarieties, which are isomorphic to Shimura curves. We study the restriction to these subvarieties of certain "automorphic cohomology" classes of degree one, associated to some Picard modular forms. Using certain Penrose-type cohomological transforms, we compare this restriction to the more classical restriction from a Shimura variety (in our case, a Picard modular variety) to a subvariety. Our aim in this paper (and in some previous ones) is to look for a possible arithmetic structure on automorphic cohomology groups.

0. Introduction

0.1. Nous appellerons « variété de Griffiths-Schmid » un quotient de la forme $M_\Gamma = \Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ où $\mathbf{\Omega}$ désigne, suivant la terminologie de [**13**], un « domaine de Mumford-Tate » et Γ un sous-groupe de congruence dans un $\mathbb{Q}$-groupe réductif G. Un tel domaine $\mathbf{\Omega}$

Classification mathématique par sujets **(2010).** — 11F23, 11G18, 14G35, 32N99.
Mots clefs. — Forme automorphe, groupe unitaire, variété de Picard, cohomologie automorphe, variété de Griffiths-Schmid.

est une $G(\mathbb{R})$-orbite ouverte dans une variété de drapeaux pour $G(\mathbb{C})$. Ces variétés, étudiées par Griffiths et Schmid dès la fin des années 60, sont des variétés analytiques complexes, qui généralisent les variétés de Shimura. Comme ces dernières elles admettent aussi des versions adéliques, sous la forme de quotients $G(\mathbb{Q})\backslash\mathbf{\Omega}\times G(\mathbb{A}_f)/K$, avec K un sous-groupe compact ouvert du groupe $G(\mathbb{A}_f)$ des points à valeurs dans les adèles finies. Ces domaines de Mumford-Tate peuvent d'ailleurs être définis par une donnée similaire à celle qui nous est familière dans le cadre des variétés de Shimura, c'est-à-dire par un morphisme :

$$h : \mathbb{C}^* \longrightarrow G(\mathbb{R})$$

non trivial et tel que la conjugaison par $h(i)$ induise une involution de Cartan de $G(\mathbb{R})$, mais on n'impose plus ici que la structure de Hodge induite sur l'algèbre de Lie soit de type $(-1,1)(0,0)(1,-1)$. Les variétés correspondantes apparaissent alors comme des espaces de paramètres pour certaines structures de Hodge polarisées munies de données additionnelles. En général, et contrairement à ce qui se passe pour les variétés de Shimura, la famille universelle correspondante de structures de Hodge n'est pas une variation : la condition de transversalité de Griffiths $\nabla\mathrm{F}^p \subset \mathrm{F}^{p-1}\otimes\mathbf{\Omega}^1_{M_\Gamma}$ n'est pas satisfaite. Elle l'est seulement sur certaines sous-variétés *horizontales* relativement à un sous-fibré du fibré tangent. De façon explicite, le domaine $\mathbf{\Omega}$ est un ouvert d'une variété de drapeaux $\mathbf{\Omega}^\vee = G_\mathbb{C}/P$, où P est le sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\mathfrak{p} = \mathrm{F}^0(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ (pour la structure de Hodge induite sur $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ par h). Le champ de sous-espaces horizontaux provient d'un champ équivariant de sous espaces du fibré tangent de $\mathbf{\Omega}^\vee$, donné à l'origine par l'inclusion $\mathrm{F}^{-1}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{p}$. Voir [**7**] pour plus de détails.

0.2. Par ailleurs, le domaine $\mathbf{\Omega}$ lui-même apparaît comme un espace homogène $G(\mathbb{R})/H$, avec $H = G(\mathbb{R})\cap P$ un sous-groupe, compact mais non nécessairement maximal, contenant un sous-groupe de Cartan compact. Aux représentations (de dimension finie) de H correspondent, de façon habituelle, des fibrés vectoriels équivariants sur $\mathbf{\Omega}$ et donc sur les quotients M_Γ. La cohomologie cohérente (« cohomologie automorphe ») de ces variétés à coefficients dans ces fibrés a été étudiée par différents auteurs. Le lien avec les formes automorphes est semblable à ce qu'on connaît dans le cas des variétés de Shimura. Une différence essentielle tient en ce que le H^0 peut être nul ou trivial, et l'essentiel de la cohomologie concentré en des degrés supérieurs. On n'obtient pas alors de plongement projectif, et d'ailleurs les variétés M_Γ ne sont pas en général algébriques : voir le récent travail de Griffiths, Robles et Toledo ([**15**]) sur cette question.

0.3. Ce travail fait suite à la série d'articles [**2**], [**3**], [**4**], dans lesquels nous avons étudié le cas des variétés de Griffiths-Schmid attachées aux groupes unitaires en trois variables ; il s'agit du plus petit exemple possible d'une telle variété qui ne soit pas de Shimura. À l'origine je m'étais aperçu que certaines formes automorphes (liées aux limites dégénérées de séries discrètes), qui n'admettent aucune réalisation dans la cohomologie des variétés de Shimura, apparaissaient cependant dans la cohomologie de cette variété de Griffiths-Schmid. Cela constitue la motivation fondamentale de l'ensemble de cette étude. Si l'on pouvait comprendre les propriétés arithmétiques de la cohomologie des variétés de Griffiths-Schmid on en déduirait des résultats sur des formes automorphes qui pour l'instant échappent complétement à la théorie (en particulier, sur les formes de Maass correspondant à la valeur propre $\frac{1}{4}$ du laplacien). Bien sûr, une difficulté essentielle à laquelle on se heurte aussitôt tient à la non-algébricité de la variété étudiée. On cherche néanmoins, même en l'absence de cette algébricité, à définir des structures rationnelles sur la cohomologie automorphe.

Dans l'article [**4**], on donnait une telle définition en termes de « développement de Fourier aux pointes » : cela reposait sur la « compactification » (en fait seulement partielle) que Kato et Usui ont construite des espaces de modules des structures de Hodge. Pour une 1-classe de cohomologie de type holomorphe ou anti-holomorphe, on définissait des « coefficients de Fourier » (en fait des éléments du H^1 d'une courbe elliptique à multiplication complexe) et l'on montrait qu'il existe une base dans la cohomologie de ce type constituée de classes dont tous les coefficients de Fourier sont algébriques sur $\mathbb{Q}$.

0.4. L'objet du présent travail est d'explorer, pour les mêmes classes automorphes sur un groupe unitaire en trois variables, l'autre façon naturelle d'aborder ces questions d'algébricité : il s'agit de la restriction à des sous variétés (horizontales), qui sont en fait ici des courbes de Shimura. On explique comment lire la rationalité des 1-formes (essentiellement par intégration sur ces courbes de Shimura). Comme dans l'article [**4**] cela concerne seulement les formes de type holomorphe ou anti-holomorphe. Comme dans [**4**] on utilise de façon essentielle une sorte de transformation de Penrose (introduite dans [**3**]) qui transforme formes modulaires de Picard en classes de cohomologie automorphe.

Des résultats analogues valent certainement pour des groupes plus généraux que $U(2,1)$. Certains autres exemples ont déjà été partiellement étudiés : $U(2,2)$ ([**5**]), $Sp(4)$ ([**14**]).

0.5. Voici le plan de cet article : au paragraphe 1 nous rappelons la définition de la variété de Griffiths-Schmid pour le groupe unitaire en trois variables, donnons son interprétation comme espace de paramètres pour certaines structures de Hodge polarisées, et nous expliquons pour quelles sous-variétés « horizontales » la condition de transversalité de Griffiths est satisfaite. Nous identifions trois types de courbes qui vérifient cette condition et qui sont des courbes de Shimura ; savoir si ce sont les seules courbes horizontales globales est un problème intéressant mais sans doute difficile. Au paragraphe 2 nous rappelons la définition des transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ introduites dans [**3**] et qui transforment formes modulaires de Picard en classes de cohomologie automorphe pour la variété de Griffiths-Schmid. Le paragraphe 3 constitue le coeur de cet article : Pour f une forme de Picard et $\mathcal{C}$ une courbe de Shimura de l'un des trois types précédents, nous relions par une transformation cohomologique $\mathcal{Q}$ la restriction de $\mathcal{P}(f)$ à $\mathcal{C}$ à la restriction de f à une courbe de Shimura correspondante $\mathcal{C}^X$. Cette transformation $\mathcal{Q}$ se trouve être la composée d'une dualité de Petersson et de la dualité de Serre (un résultat assez semblable à ce que nous avions prouvé dans [**4**]). Résultats analogues pour $\mathcal{P}'$. Enfin le dernier paragraphe est consacré à divers commentaires sur ces résultats .

1. Définition et géométrie de la variété de Griffiths-Schmid pour $GU(2,1)$

1.1. Notations. — On désigne par $F \subset \mathbb{C}$ un corps quadratique imaginaire et on considère une forme hermitienne H de signature $(2,1)$ sur un F-espace W de dimension 3. Pour fixer les idées on prendra comme dans [**4**] (dont nous reprenons ici les principales notations) une forme de discriminant -1, qui peut donc s'exprimer dans une certaine base sous la forme : $H(x,y,t) = -x\overline{t} + y\overline{y} - \overline{x}t$, où $x \to \bar{x}$ désigne la conjugaison complexe.

On note $G = SU(H)$ (resp. $\tilde{G} = GU(H)$) le groupe spécial unitaire (resp. des similitudes unitaires) associé. C'est un groupe semi-simple (resp. réductif) quasi-déployé défini sur $\mathbb{Q}$. Comme dans les articles précédents nous travaillerons plutôt avec G, même si $\tilde{G}$ est parfois utile (en particulier pour le formalisme des structures de Hodge asociées).

Le groupe $G(\mathbb{R})$, isomorphe à $SU(2,1)$ (ou si l'on préfére, $\tilde{G}(\mathbb{R})$, isomorphe à $GU(2,1)$) opère sur le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec deux orbites ouvertes : la « boule unité » ouverte Δ , constituée des points p associés aux vecteurs v qui vérifient $H(v) < 0$, et le complémentaire de la boule fermée Δ^c, constitué des points vérifiant $H(v) > 0$.

Le groupe $G(\mathbb{R})$ opère aussi sur l'ensemble $\boldsymbol{\Omega}^\vee$ des drapeaux (p,L) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, constitués d'un point p et d'une droite L passant par p. On s'intéresse dans la suite à l'orbite ouverte $\boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{\Omega}^\vee$ constituée des couples (p,L) tels que p n'appartienne pas à Δ^c et que L rencontre Δ : c'est le domaine de Mumford-Tate que nous allons considérer dans toute la suite. Les *variétés de Griffiths-Schmid* (connexes) associées à cette situation sont les quotients $\Gamma\backslash\boldsymbol{\Omega}$ pour Γ un sous-groupe de congruence assez petit de G. Ce sont des variétés analytiques complexes de dimension 3.

1.2. Relation avec les structures de Hodge [1]**.** — On considère comme ci-dessus l'espace W, muni de la forme hermitienne H, et on note V l'espace obtenu après restriction des scalaires à $\mathbb{Q}$. Désignons par Ψ la forme alternée sur V obtenue comme l'opposée de la partie imaginaire de H. Alors le groupe unitaire (resp. des similitudes unitaires) de (W,H) coïncide avec le sous-groupe des automorphismes de V qui commutent à l'action de F et qui appartiennent au groupe symplectique (resp. des similitudes symplectiques) de Ψ.

1. Voir [**7**], en particulier les paragraphes 2 et 5.

L'application $w \otimes \lambda \to (w\lambda, w\bar{\lambda})$ identifie $V \otimes F$ à la somme $W \oplus \overline{W}$ de W et de son conjugué $\overline{W}$ (le même espace mais muni de l'action conjuguée de F). Avec cette identification la forme Ψ_F déduite de Ψ par extension des scalaires s'exprime comme il suit :

$$\Psi_F(v_1 \oplus \bar{v}_2\ ,\ w_1 \oplus \bar{w}_2) = \frac{i}{2}\big(H(v_1\ ,\ \bar{w}_2) - H(w_1\ ,\ \bar{v}_2)\big).$$

De même, on a $V_{\mathbb{R}}$, obtenu par restriction des scalaires de $W_{\mathbb{C}} = W \otimes_F \mathbb{C}$, dont le complexifié s'identifie à $W_{\mathbb{C}} \oplus \overline{W}_{\mathbb{C}}$.

Choisissons une base (e_1, e_2, e_3) de W, orthogonale et telle que $H(e_1) > 0$; $H(e_2) > 0$; $H(e_3) < 0$. Notons $\bar{e}_i$ les mêmes éléments e_i, mais vus dans $\overline{W}$, de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned}
&\Psi_F(e_i, \bar{e}_j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \\
&\Psi_F(e_1, \bar{e}_1) = \Psi_F(e_2, \bar{e}_2) = 1\ ,\ \Psi_F(e_3, \bar{e}_3) = -1
\end{aligned}$$

D'autre part fixons sept entiers (p_i, q_i) $1 \leqslant i \leqslant 3$ et w qui vérifient :

$$\begin{aligned}
&p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3 = w, \\
-&p_1 + q_1 \equiv -p_2 + q_2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, 4) \quad \text{et} \quad -p_3 + q_3 \equiv -1 \ (\mathrm{mod.}\, 4), \\
&p_1 > p_3 > p_2\ ;
\end{aligned}$$

la seconde condition entraîne que le poids w est nécessairement impair. Les valeurs numériques de ces nombres n'auront pas d'importance pour la suite. Pour fixer les idées on prendra les plus petites valeurs positives possibles qui satisfont ces conditions, soit : $q_1 = 0$, $p_2 = q_3 = 1$, $p_3 = q_2 = 2$, $p_1 = w = 3$.

Considérons alors, pour $z \in \mathbb{C}^*$, la similitude unitaire $h(z)$ de $W_{\mathbb{C}}$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) s'écrit $\mathrm{diag}(z^{-p_1}\bar{z}^{-q_1}, z^{-p_2}\bar{z}^{-q_2}, z^{-p_3}\bar{z}^{-q_3})$. On voit que cela définit une structure de Hodge polarisée et compatible à l'action de F sur V. On a :

$$V^{3,0} = \langle e_1 \rangle\ , \quad V^{2,1} = \langle e_3, \bar{e}_2 \rangle\ , \quad V^{1,2} = \langle e_2, \bar{e}_3 \rangle\ , \quad V^{0,3} = \langle \bar{e}_1 \rangle\ .$$

La filtration de Hodge sur V associée est donnée par :

$$\mathrm{F}^4 = \{0\}\ ;\ \ \mathrm{F}^3 = \langle e_1 \rangle\ ;\ \ \mathrm{F}^2 = \langle e_1, e_3, \bar{e}_2 \rangle\ ;\ \ \mathrm{F}^1 = \langle e_1, e_2, e_3, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle\ ;\ \ \mathrm{F}^0 = V.$$

Remarquons que le drapeau donné par $p = \langle e_1 \rangle$ et $L = \langle e_1, e_3 \rangle$ est un élément de $\mathbf{\Omega}$. Les différents conjugués de h par les éléments $g \in G(\mathbb{R})$ définissent d'autres structures de Hodge sur V (polarisées et compatibles à l'action de F) et on associe à une telle structure l'élément de $\mathbf{\Omega}$ image par g du drapeau $(\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_3 \rangle)$.

1.3. On obtient de la sorte une bijection entre points de $\mathbf{\Omega}$ et structures de Hodge sur V associées aux nombres précédents, polarisées par Ψ et compatibles à l'action de F. Explicitement la correspondance entre un élément de $\mathbf{\Omega}$ et la filtration de Hodge associée peut s'obtenir comme suit.

Au drapeau (p, L) on associe la filtration suivante de $V_{\mathbb{C}} = W_{\mathbb{C}} \oplus \overline{W}_{\mathbb{C}}$. :

$$\mathrm{F}^3 = p \subset \ \mathrm{F}^2 = L \oplus L^{\perp} \subset \mathrm{F}^1 = W_{\mathbb{C}} \oplus p^{\perp}$$

où nous avons dénoté par les mêmes notations le point p (resp. la droite L) et les sous-espaces vectoriels de $W_{\mathbb{C}}$ correspondants et où l'orthogonalité est relative à la forme hermitienne H. On voit donc qu'il est possible de reconstituer la structure de Hodge entièrement à partir de la filtration de W donnée par le drapeau (p, L).

On a ainsi en chaque point de $\mathbf{\Omega}$ une structure de Hodge rationnelle polarisée munie d'une action de F donnée par l'espace (V, H) et par la filtration précédente. Si g est un élément de $G(\mathbb{Q})$, son action sur V préserve la structure rationnelle, la polarisation et transforme la structure de Hodge associée à un point $\alpha \in \mathbf{\Omega}$ en celle correspondant à son image $g.\alpha$. Le passage au quotient par un sous-groupe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ définit donc sur le quotient $\Gamma\backslash\mathbf{\Omega}$ un système local $\mathcal{V}$ en $\mathbb{Q}$-vectoriels munis de structures de Hodge polarisées.

1.4. Les sous-variétés *horizontales* de $\mathbf{\Omega}$ ou de $\Gamma\backslash\mathbf{\Omega}$ sont celles pour laquelle la condition de transversalité de Griffiths est satisfaite : la connexion ∇ associée au fibré localement constant $\mathcal{V}$ doit envoyer chaque cran F^p de la filtration de Hodge dans F^{p-1}. On voit aussitôt, en utilisant l'expression ci-dessus de la filtration en terme du drapeau (p, L) et la compatibilité de ∇ avec l'action de F et la polarisation, que cela équivaut à l'une ou l'autre des conditions duales suivantes :

$$\nabla p \subset L \otimes \mathbf{\Omega}^1_{\Gamma\backslash\Omega} \ \text{ ou } \ \nabla L^{\perp} \subset p^{\perp} \otimes \mathbf{\Omega}^1_{\Gamma\backslash\Omega} \ .$$

Cette condition définit un sous-fibré T' de dimension 2 (et donc de codimension 1) dans le fibré tangent T .

En termes matriciels (matrices exprimées dans la base (e_1, e_2, e_3)), l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ du groupe G s'identifie à $sl_3(\mathbb{C})$. Le choix du point base $(p, L) = (\langle e_1\rangle, L = \langle e_1, e_3\rangle)$ identifie $\mathbf{\Omega}$ au quotient de $G(\mathbb{R})$ par le tore diagonal et $\mathbf{\Omega}^{\vee}$ au quotient de $G(\mathbb{C})$ par le sous-groupe de Borel d'algèbre de Lie : $\mathfrak{b} = \mathrm{F}^0\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, constituée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}.$$

L'espace tangent holomorphe au point base choisi est alors isomorphe à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}$, ou si l'on préfère au radical $\bar{\mathfrak{n}}$ de l'algèbre opposée à $\bar{\mathfrak{b}}$, constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & \star \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace horizontal est donné par

$$\mathrm{F}^{-1}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} \right\}$$

et correspond à $\bar{\mathfrak{n}'} \subset \bar{\mathfrak{n}}$ constitué des

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que ce sous-espace n'est pas stable par le crochet de Lie et donc que le fibré horizontal n'est *pas intégrable.*

On peut aussi voir cette structure comme la donnée d'une *structure de contact complexe* (voir [**20**]) sur $\mathbf{\Omega}$ et ses quotients. Les sous-variétés horizontales sont des *courbes* (« *lagrangiennes* » dans la terminologie de contact.)

Par ailleurs T' est somme de deux sous-fibrés holomorphes T'_1 et T'_2 de dimension 1 et correspondant respectivement aux sous-espaces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que T'_1 (resp. T'_2) est le fibré tangent aux courbes constituées des drapeaux (p, L) pour lesquels p varie sur une droite L fixée (resp. L varie, p étant fixe). Localement au voisinage d'un point $(p_0, L_0) \in \mathbf{\Omega}$ les autres courbes horizontales s'obtiennent de la façon suivante : on se donne un germe en p_0 de courbe plane tangente à L_0 (ou bien un germe en L_0 de courbe duale tangente à p_0) et on considère dans un voisinage les drapeaux tangents à cette courbe. Il existe donc localement « beaucoup » de courbes horizontales mais il en existe peu globalement (qui soient compactes à l'adjonction près d'un nombre fini de points, autrement dit des courbes algébriques).

1.5. Courbes horizontales globales

1.5.1. Les plus simples à construire sont celles tangentes au sous-fibrés T'_1 et T'_2 : Une droite $L \subset \mathbb{P}^2$ définie sur F et rencontrant Δ étant fixée, on considère l'ensemble, noté $\mathbf{\Omega}_L$, des drapeaux (p, L) avec p variant dans $L - (L \cap \overline{\Delta})$. Cela détermine une sous-variété $\Gamma_L \backslash \mathbf{\Omega}_L$ de $\Gamma \backslash \mathbf{\Omega}$, où Γ_L désigne le stabilisateur de L dans Γ. On voit que $\mathbf{\Omega}_L$ est isomorphe à une boule de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et que Γ_L est un sous-groupe discret du groupe unitaire de type $(1, 1)$ correspondant. Parce que L est définie sur F, le sous-groupe Γ_L est de congruence par rapport à la structure rationnelle correspondante et le quotient est une *courbe de Shimura* associée à un groupe unitaire de type $(1, 1)$. Il se peut d'ailleurs que la restriction de la forme hermitienne au F-plan correspondant à L soit anisotrope, auquel cas le quotient $\Gamma_L \backslash \mathbf{\Omega}_L$ est compact. Pour choisir un tel L, il suffit de se donner un plan hermitien Φ sur F de signature archimédienne $(1, 1)$ et anisotrope : prendre la forme de matrice diagonale $\mathrm{diag}(a, -b)$ avec a et b deux rationnels positifs tels que $\frac{a}{b}$ ne soit pas une norme d'un élément de F. L'espace hermitien (W, H) est isomorphe à $\Phi \oplus D$ avec $D = F$ munie de la forme $\frac{b}{a} x\bar{x}$ car ces deux espaces ont même signature et même discriminant : d'où un plan anisotrope dans W.

1.5.2. On construit de même, partant d'un F-point p extérieur à Δ^c, une courbe de Shimura horizontale globale tangente au fibré T_2' : c'est le quotient par un groupe discret de l'ensemble $\mathbf{\Omega}_p$ des drapeaux (p,l), lorsque l varie parmi les droites passant par p et extérieures à Δ^c.

1.5.3. Les courbes horizontales des deux types précédents correspondent à des *sous-groupes de Levi* de G : le stabilisateur de L (resp. p) dans la construction précédente est un tel sous-groupe, de groupe des points réels isomorphe à $U(1,1)$. Il existe une autre façon de construire des courbes horizontales, correspondant à des applications, associées à la puissance symétrique Sym^2, de groupes unitaires à deux variables dans des groupes unitaires à trois variables :

Donnons nous un F-plan Π muni d'une forme hermitienne h de type $(1,1)$. Le produit tensoriel $\Pi\otimes\Pi$ est muni de la forme produit tensoriel (de type $(2,2)$). On peut identifier *via* l'opération de symétrisation :

$$s(v\otimes w)=\frac{v\otimes w+w\otimes v}{2}$$

le carré symétrique $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ au sous-espace $(\Pi\otimes\Pi)^{\mathrm{sym}}$ constitué des tenseurs symétriques. $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ est ainsi muni d'une structure hermitienne, dont on vérifie qu'elle est de type $(2,1)$.

Supposons que $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ soit isomorphe à W comme espace hermitien. Il suffit pour cela que les discriminants correspondants coïncident (modulo les normes d'éléments de F) et un voit aussitôt que cela a lieu quand $\mathrm{disc}(h)=2\ \mathrm{disc}(H)$. Fixons dans ce cas un tel isomorphisme.

On définit alors une application holomorphe de la boule $Y_\Pi\subset\mathbb{P}(\Pi_{\mathbb{C}})$, constituée des images des q tels que $h(q)>0$, dans $\mathbf{\Omega}$: pour un point $q\in Y_\Pi$ désignons par q' son orthogonal par rapport à h. On associe alors à q le drapeau (p,L) suivant : $p=q^2\in\mathrm{Sym}^2(\Pi_{\mathbb{C}})\simeq W_{\mathbb{C}}$ et L est la droite joignant q^2 à qq'. On voit que $H(q^2)>0$ et $H(qq')<0$ de sorte que le drapeau ainsi construit appartient bien à l'espace $\mathbf{\Omega}$. Par ailleurs on vérifie aussitôt que la droite L est l'orthogonal relativement à la forme H de ${q'}^2$. Il est clair que p varie holomorphiquement avec q, et q' anti-holomorphiquement (orthogonalité hermitienne) et la seconde orthogonalité fait finalement que L varie de façon holomorphe avec q.

La fonctorialité Sym^2 et l'isomorphisme fixé entre $\mathrm{Sym}^2(\Pi)$ et W définissent un morphisme de $U(\Pi,h)$ dans $U(W,H)$. L'image inverse de Γ est un sous-groupe de congruence $\Gamma_W\subset U(\Pi,h)$ et on obtient ainsi un morphisme de la courbe de Shimura $\Gamma_W\backslash X_W$ dans $\Gamma\backslash\mathbf{\Omega}$.

1.6. J'ignore s'il existe des courbes horizontales globales dans $\Gamma\backslash\mathbf{\Omega}$ qui ne soient pas de l'un des trois types précédents. En tous cas, elles sont de ce type sous l'hypothèse supplémentaire que l'image réciproque dans $\mathbf{\Omega}$ est « semi-algébrique » : voir [**10**].

2. Faisceaux cohérents, cohomologie automorphe

2.1. On définit des faisceaux cohérents localement libres de rang 1 sur les variétés $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ à partir de faisceaux équivariants sur $\mathbf{\Omega}$, eux-mêmes obtenus par restriction de faisceaux depuis la variété de drapeaux $\mathbf{\Omega}^\vee$. Ces derniers sont paramétrés soit en termes de représentations de degré 1 du tore diagonal et donc de poids de son algèbre de Lie, soit plus concrètement en termes d'un couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: on désigne alors par $\mathcal{F}_{a,b}$ la restriction du faisceau $\mathcal{O}(a) \otimes \mathcal{O}(b)$ à $\mathbf{\Omega} \subset \mathbf{\Omega}^\vee \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^\vee$, et nous noterons de même le faisceau obtenu après passage au quotient. Les groupes de cohomologie $H^i(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}\ ,\ \mathcal{F}_{a,b})$, essentiellement concentrés en degrés 1 et 2 (cf. [**2**], [**3**]), sont liés aux représentations automorphes du groupe G. Il y a donc de la « cohomologie automorphe » mais pas de formes modulaires au sens classique.

2.2. Toutefois, dans l'article [**3**] (voir aussi [**4**]) nous avons introduit des applications naturelles qui associent à des formes modulaires (donc ici des formes de Picard) des classes de 1-cohomologie. Reprenant les notations des articles précités, on a défini deux applications linéaires $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$:

$$\mathcal{P} :\ H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}\ ,\ \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}\ ,\ \mathcal{F}_{-a-2\ ,\ a+b+1})\ ,$$
$$\mathcal{P}' :\ H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y}\ ,\ \mathcal{F}_{a,b}) \longrightarrow H^1(\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}\ ,\ \mathcal{F}_{a+b+1\ ,\ -b-2})\ ,$$

Ici $\mathbf{X}$ (resp. $\mathbf{Y}$) est par définition l'ensemble des drapeaux (p, L) tels que p appartienne à Δ (resp. tels que $L \cap \Delta^c = \varnothing$). On a une application évidente $\pi : (p, L) \to p$ de $\mathbf{X}$ sur Δ qui définit une fibration en $\mathbb{P}^1$ de $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ sur la surface de Picard $\Gamma \setminus \Delta$: les sections de $\mathcal{F}_{a,b}$ au dessus de $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ correspondent à des formes modulaires de Picard au sens classique (sections du faisceau $\pi_* \mathcal{F}_{a,b}$ au dessus de $\Gamma \setminus \Delta$). Quant à la variété $\mathbf{Y}$, elle s'identifie, *via* la dualité relative à notre forme hermitienne H, à la variété complexe conjuguée de $\mathbf{X}$, d'où une conjugaison entre les quotients $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ et $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$. Ainsi les deux espaces de sections qui apparaissent dans les formules ci-dessus sont naturellement anti-isomorphes. L'un correspond à des formes automorphes dont la composante archimédienne est une série discrète holomorphe (ou une limite), et pour l'autre, anti-holomorphe.

Pour la transformation $\mathcal{P}$ (resp $\mathcal{P}'$) nous supposerons que $b > 0$ et $a + b < -2$ (resp. $a > 0$ et $a + b < -2$) , valeurs correspondant aux séries discrètes holomorphes (resp. anti-holomorphes). Ces transformations sont alors *injectives.* Leur image décrit la 1-cohomologie (du moins celle de type parabolique) des faisceaux $\mathcal{F}_{a',b'}$ avec $a' + b' > -1$ et $b' < -1$ (resp. $a' + b' > -1$ et $a' < -1$). Il reste un troisième cône correspondant à des faisceaux admettant de la cohomologie en degré 1, cette fois-ci correspondant à des séries discrètes non-holomorphes : ce sont les $\mathcal{F}_{a',b'}$ avec $a' < -1$ et $b' < -1$.

2.3. Dans les articles [**3**] et [**4**] nous avions défini ces transformations $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ dans le formalisme introduit par Gindikin (voir [**1**], [**8**] , [**9**], [**11**]) : il s'agit d'une version continue de la cohomologie de Čech, particulièrement commode dans ce contexte. Il permet de décrire la cohomologie d'une variété complexe Z à valeurs dans un faisceau $\mathcal{F}$ comme la cohomologie du complexe $\Gamma\big(\tilde{Z}\ ,\ \mathbf{\Omega}^{\bullet}_{\pi}(\mathcal{F})\big)$ des sections globales sur $\tilde{Z}$ du faisceau des différentielles relatives à valeurs dans $\mathcal{F}$. Ici $\tilde{Z}$ désigne une variété de Stein et $\pi : \tilde{Z} \to Z$ une submersion holomorphe à fibres contractiles.

Pour notre construction (voir *loc. cit.*) on utilise l'espace $\mathbf{U}$ constitué des couples de drapeaux $(z, l; \xi, \alpha)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) les points z et ξ sont distincts et la droite J qui les joint ne rencontre pas Δ^c.

(ii) les droites l et α sont distinctes et leur intersection I appartient à Δ.

Cet espace $\mathbf{U}$ est de Stein, ainsi que les quotients $\Gamma \setminus \mathbf{U}$, et les projections sur le premier facteur $\pi : \mathbf{U} \to \mathbf{\Omega}$ (resp. $\pi : \Gamma \setminus \mathbf{U} \to \Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$) sont à fibres contractiles. Nous avons alors défini nos transformations dans ce cadre par des formules :

$$\mathcal{P}(f)(z, l; \xi, \alpha) = f(l \wedge \alpha, l)\ \alpha(z)^{-a}\ \omega_I$$
$$\mathcal{P}'(f')(z, l; \xi, \alpha) = f'(z, z \wedge \xi)\ l(\xi)^{-b}\ \omega_J$$

avec $\omega_I \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^1_\pi(\mathcal{F}_{-2,1}))$ et $\omega_J \in \Gamma(\mathbf{U}, \Omega^1_\pi(\mathcal{F}_{1,-2}))$ des éléments canoniques dont nous rappelons maintenant la définition.

On désigne par ω_I (resp. ω_J) la différentielle relative d'une coordonnée $x(I)$ (resp. $y(J)$) bien définie à une constante relative près par : $x(I) = \det_l(I, I_0) \det_l^{-1}(I, z)$ (resp. $y(J) = \det_z(J, J_0) \det_z^{-1}(J, l)$, où les déterminants sont pris dans le plan constitué des vecteurs annulés par l (resp. des formes nulles sur z) et où I_0 (resp. J_0) représente le choix d'un point-base (ne dépendant que de (z, l)), normalisé de telle sorte que $\det(I_0, z, *) = l(*)$ (resp. $\det(J_0, l, *) = *(z)$.)

2.4. Dans la suite nous allons nous intéresser à la restriction d'une classe de cohomologie appartenant à image de $\mathcal{P}$ ou de $\mathcal{P}'$ à une courbe horizontale globale telle que décrite au paragraphe précédent. Rappelons que ces courbes sont de trois types :

(i) Ensemble des drapeaux (p, L) avec L fixe. La restriction de $\mathcal{F}_{a',b'}$ à une telle sous-variété est isomorphe au faisceau $\mathcal{F}_{a'}$ (provenant de $\mathcal{O}(a')$) sur la courbe de Shimura correspondante, et le H^1 de ce faisceau est non nul seulement pour $a' \geqslant -2$ (plus précisément, il est trivial de dimension 1 pour $a' = -2$ et dual, pour $a' \geqslant -1$, à l'espace des formes modulaires de poids $2 + a'$). On peut donc restreindre à une variété de ce type une classe provenant de $\mathcal{P}$ et obtenir ainsi une 1-classe de cohomologie relative au faisceau $\mathcal{F}_{a'} = \mathcal{F}_{-a-2}$ (les inégalités $b > 0$ et $a + b < -2$ entraînent que $a < -3$ et donc $-a - 2 > 1$). Les restrictions provenant de $\mathcal{P}'$ tombent dans l'espace nul car la 1 cohomologie du faisceau $\mathcal{F}_{a+b+1}$ est nulle $(a + b + 1 < -1)$.

(ii) Ensemble des drapeaux (p, L) avec p fixe. La restriction de $\mathcal{F}_{a',b'}$ à une telle sous-variété est isomorphe au faisceau $\mathcal{F}_{b'}$ et cela permet de considérer les classes provenant de $\mathcal{P}'$ et les restreindre en des classes de cohomologie pour le faisceau $\mathcal{F}_{b'} = \mathcal{F}_{-b-2}$. Maintenant ce sont les classes provenant de $\mathcal{P}$ qui s'annulent.

(iii) Le troisième type de courbes consiste en celles que l'on construit au moyen de la puissance symétrique Sym^2 et on voit alors que la restriction du faisceau $\mathcal{F}_{a',b'}$ sur $\Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{F}_{2(a'+b')}$ sur la courbe. Pour une classe provenant de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) on a : $2(a'+b') = 2(b-1) \geqslant 0$ (resp. $2(b-1) \geqslant 0$), et le faisceau $\mathcal{F}_{2(a'+b')}$ possède de la 1-cohomologie non triviale.

2.5. Notre objectif dans ce qui va suivre sera de calculer la restriction de $\mathcal{P}(f)$ à une courbe de type (i) en fonction de la restriction de f à une courbe de Shimura correspondante dans $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ (resp. la restriction de $\mathcal{P}'(f')$ à une courbe de type (ii) en fonction de la restriction de f' à une courbe de Shimura correspondante dans $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$). La restriction de ces images à une courbe de type (iii), à laquelle n'est associée aucune courbe dans $\Gamma \setminus \mathbf{X}$ ou $\Gamma \setminus \mathbf{Y}$, restera mystérieuse.

3. Restriction à une courbe horizontale d'un élément image de $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$)

3.1. Soit L une droite fixée dans le plan projectif, définie sur F et rencontrant la boule Δ. Notons, comme au paragraphe 1, $\mathbf{\Omega}_L$ le sous-ensemble fermé de $\mathbf{\Omega}$ constitué des drapeaux (z,l) tels que $l = L$. Notons $\mathcal{C}_L \subset \Gamma\backslash\mathbf{\Omega}$ la courbe de Shimura obtenue comme le quotient $\Gamma_L\backslash\mathbf{\Omega}_L$, avec Γ_L le stabilisateur de L dans Γ. L'objet de ce paragraphe est d'étudier la restriction à $\mathcal{C}_L$ d'une classe de cohomologie image par $\mathcal{P}$ de $f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}\ ,\ \mathcal{F}_{a,b})$. Nous ferons l'hypothèse simplificatrice que *la restriction de notre forme hermitienne H au plan correspondant est anisotrope* (cf. (1.5.1)). Nos résultats restent valides sans cette hypothèse à condition de compactifier $\mathcal{C}_L$: plus précisément il s'agit d'étendre la classe de cohomologie considérée à la compactification de Kato-Usui ([**19**], voir aussi [**4**]) et de restreindre ce prolongement à la compactification de la courbe $\mathcal{C}_L$. Afin de ne pas alourdir inutilement cet exposé, nous avons préféré nous limiter à ne donner les démonstrations que dans le cas où $\mathcal{C}_L$ est déjà compacte.

3.2. Rappelons que $\mathbf{X}$ est l'ensemble des drapeaux (z,l) tels que z appartienne à la boule unité Δ. Nous noterons $\mathbf{X}_L$ le sous-ensemble fermé de $\mathbf{X}$ constitué des $(z,l) \in \mathbf{X}$ tels que z appartienne à L et que l coïncide avec la droite L. Nous noterons $\mathcal{C}_L^X \subset \Gamma\backslash\mathbf{X}$ le quotient de $\mathbf{X}_L$ par Γ_L.

La donnée d'un point (z,l) de $\mathbf{\Omega}_L$ (resp. $\mathbf{X}_L$) revient à la donnée de sa première composante z, qui doit être un point de L extérieur au disque fermé $L \cap \Delta^c$ (resp. un point de $L \cap \Delta$) . La conjugaison par rapport à notre forme hermitienne établit un isomorphisme équivariant anti-holomorphe entre $\mathbf{\Omega}_L$ et $\mathbf{X}_L$ et donc entre les deux courbes $\mathcal{C}_L$ et $\mathcal{C}_L^X$.

3.3. Au §5 de [**4**] nous avions expliqué quelques propriétés de fonctorialité de la construction de Gindikin : une classe de cohomologie sur un espace Z étant décrite par une différentielle relative à une submersion holomorphe à fibres contractiles $\pi : \tilde{Z} \to Z$ (avec $\tilde{Z}$ une variété de Stein), sa restriction à une sous-variété fermée Z_1 est définie par le pull-back sur $\pi : \tilde{Z}_1 \to Z_1$. Par ailleurs, si on a un morphisme $\tilde{Z}' \to \tilde{Z}$ tel que $\tilde{Z}'$ soit encore de Stein, et tel que la composée $\pi' : \tilde{Z}' \to Z$ soit encore une submersion à fibres contractiles, alors une même classe est définie par une forme différentielle relative à π ainsi que par son pull-back sur $\tilde{Z}'$.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on a (cf. (2.3)) : $Z = \Gamma \setminus \mathbf{\Omega}$, $\tilde{Z} = \Gamma \setminus \mathbf{U}$ et $Z_1 = \mathcal{C}_L = \Gamma_L \backslash \mathbf{\Omega}_L$. Notons $\mathbf{U}_L$ le sous ensemble de $\mathbf{U}$ constitué des couples de drapeaux $(z, l; \xi, \alpha) \in \mathbf{U}$ tels que $l = L$ et que la droite $z\xi$ passe par $L^\perp$. On voit que le quotient $\Gamma_L \setminus \mathbf{U}_L$ est un sous espace fermé de $\tilde{Z} = \Gamma \setminus \mathbf{U}$, et donc de Stein, et que sa projection sur $\mathcal{C}_L$ est à fibres contractiles (isomorphes au produit du disque par $\mathbb{A}^1$). Notre classe restreinte à $\mathcal{C}_L$ est donc définie par la restriction à $\Gamma_L \setminus \mathbf{U}_L$ de la forme différentielle relative :

$$\mathcal{P}(f)(z, l; \xi, \alpha) = f(l \wedge \alpha, l)\ \alpha(z)^{-a}\ \omega_I$$

expression qui ne dépend que de z et du point I d'intersection de $l = L$ et de α (ainsi que du choix d'une forme linéaire $l = L$, supposée définie sur F, et pas seulement de la droite projective que cette forme détermine). On voit que $f(l \wedge \alpha, l)$ correspond à la restriction de $f \in H^0(\Gamma \setminus \mathbf{X}, \mathcal{F}_{a,b})$ en une section $\mathrm{Rest}(f) \in H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a)$.

3.4. Cette formule fait apparaître une transformation cohomologique entre les courbes $\mathcal{C}_L^X$ et $\mathcal{C}_L$ que l'on peut définir, toujours dans le formalisme de Gindikin, comme il suit.

Notons $\tilde{\mathcal{C}}_L$ le quotient par Γ de l'ensemble Φ des couples (z, z') de points de la droite L avec $z' \in \Delta$ et $z \notin \Delta^c$. C'est un espace de Stein (cf. [**3**] §9 pour un résultat plus général) , et la projection sur le premier facteur induit une submersion à fibres contractiles sur $\mathcal{C}_L$.

On définit une 1-forme différentielle relative invariante $\omega_{z'}$ sur Φ, de la façon suivante, calquée sur la définition de ω_I : C'est la différentielle d'une coordonnée affine sur la droite L :

$$[z'] = \frac{\det_L(z', z'_0)}{\det_L(z', z)\det_L(z'_0, z)}$$

bien définie à une constante relative près (suivant l'origine choisie z'_0). Cette formule dépend encore du choix de L car $\det_L$ est le déterminant sur le plan correspondant à L tel que $\det_L(\ ,\ ) = L^{-1}(*)\det_V(\ ,\ ,*)$. On voit que $[z']$ est homogène de degré -2 en z et que par conséquent $\omega_{z'}$ est à valeurs dans l'image réciproque du faisceau $\mathcal{F}_{-2}$.

Nous définissons alors une transformation, notée $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} : H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_{-a-2})$$

par la formule suivante :

$$\mathcal{Q}(\phi')(z, z') = \phi'(z')\det_L(z, z')^{-a}\omega_{z'}$$

Il résulte alors de la discussion qui précède la proposition suivante :

3.5. Proposition. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Gamma\setminus\mathbf{X}\ ,\ \mathcal{F}_{a,b}) & \xrightarrow{\ \mathcal{P}\ } & H^1(\Gamma\setminus\mathbf{\Omega}\ ,\ \mathcal{F}_{-a-2,a+b+1}) \\ {\scriptstyle\mathrm{Rest}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{Rest}}\big\downarrow \\ H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a) & \xrightarrow{\ \mathcal{Q}\ } & H^1(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_{-a-2}) \end{array}$$

3.6. Il nous reste à interpréter en termes plus familiers la transformation $\mathcal{Q}$. Définissons pour cela la **dualité de Petersson** entre $H^0(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_a)$ et $H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a)$ de la façon suivante : soient $\phi\in H^0(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_a)$ et $\phi'\in H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a)$ deux sections. Si $\tilde z$ est un vecteur correspondant à un point $z\in L$ extérieur à Δ^c , notons $z^\perp\in L\cap\Delta$ son orthogonal dans L, représenté par le vecteur $\tilde z^\perp$ normalisé par la condition : $\det_L(\tilde z,\tilde z^\perp)=1$. On voit alors que le produit $\phi(\tilde z)\phi'(\tilde z^\perp)$ ne dépend pas du choix du représentant $\tilde z$; ce produit définit ainsi une fonction sur le quotient $\mathcal{C}_L=\Gamma_L\backslash\mathbf{\Omega}_L$. Nous définissons alors un accouplement bilinéaire (« accouplement de Petersson ») entre $H^0(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_a)$ et $H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a)$ par la formule :

$$\langle\ \phi\ ,\ \phi'\ \rangle_L\ =\ \int_{\mathcal{C}_L}\phi(\tilde z)\phi'(\tilde z^\perp)\,d\mu_z$$

où $d\mu_z$ est la mesure invariante : $d\mu_z=\dfrac{i}{2}\,\eta_z\wedge\overline{\eta_z}$ avec η_z définie par :

$$\eta_z=\frac{\det_L(\tilde z,d\tilde z)}{H(\tilde z,\tilde z)}\ .$$

3.7. Expliquons la relation entre ce que nous venons de définir et le classique produit scalaire de Petersson : pour cela il est commode de « transformer » $\mathbf{\Omega}_L$ en le demi-plan de Poincaré. Soit $\mathcal{L}\subset W$ le F-espace vectoriel correspondant à L. La restriction à $\mathcal{L}$ de la forme hermitienne H est anisotrope sur F mais il existe une extension finie $F'\subset\mathbb{C}$ et une base (ϵ_1,ϵ_2) de $\mathcal{L}\otimes F'$ constituée de vecteurs isotropes et telle que $H(\epsilon_1,\epsilon_2)=-ic$ soit imaginaire pur de partie imaginaire $-c<0$. Dans cette base les éléments de $L\setminus L\cap\Delta^c$ (resp. $L\cap\Delta$) sont les z de coordonnées $\binom{Z}{1}$ avec $\mathrm{Im}(Z)>0$ (resp. les z' de coordonnées $\binom{Z'}{1}$ avec $\mathrm{Im}(Z')<0$). L'orthogonal de $\tilde z=\binom{Z}{1}$ est $\tilde z^\perp=\lambda\binom{\overline{Z}}{1}$ et la condition de normalisation ci-dessus nous donne :

$$\det_L(\tilde z,\tilde z^\perp)=\lambda\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)\ 2i\,\mathrm{Im}(Z)=1$$

Se donner une section $\phi\in H^0(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_a)$ (resp. $\phi'\in H^0(\mathcal{C}_L^X\ ,\ \mathcal{F}_a)$) revient à se donner une forme modulaire, que nous noterons encore ϕ (resp. ϕ') de poids $(-a)$ sur le demi-plan supérieur (resp. inférieur) pour le groupe Γ_L :

$$\phi(Z)=\phi\left(\begin{pmatrix}Z\\1\end{pmatrix}\right)\ \text{ resp. }\ \phi'(Z')=\phi'\left(\begin{pmatrix}Z'\\1\end{pmatrix}\right)\ .$$

On calcule (avec les notations qui précèdent) $\phi'(\tilde{z}^{\perp})$:

$$\phi'(\tilde{z}^{\perp}) = \lambda^a \phi'(\overline{Z}) = \big(2i \det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)\big)^{-a} \big(\operatorname{Im}(Z)\big)^{-a} \phi'(\overline{Z})$$

D'autre part, on a :

$$\eta_z = \det_L(\epsilon_1, \epsilon_2) \; \frac{\det\left(\begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dZ \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{H\left(\begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix}\right)} = \det_L(\epsilon_1, \epsilon_2) \; \frac{-dZ}{2c \operatorname{Im}(Z)}$$

et la mesure invariante notée ci-dessus $d\mu_z$ s'exprime, en posant $Z = x + iy$, sous la forme :

$$d\mu_z = \frac{|\det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)|^2}{4c^2} \; \frac{i}{2} \; \frac{dZ \wedge d\overline{Z}}{y^2} = \frac{|\det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)|^2}{4c^2} \; \frac{dx \wedge dy}{y^2}$$

Nous obtenons ainsi la formule suivante :

$$\langle \; \phi \; , \; \phi' \; \rangle_L \; = \; \frac{|\det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)|^2}{4c^2} \; \big(2i \det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)\big)^{-a} \int_{\mathcal{C}_L} \phi(Z)\phi'(\overline{Z}) \; y^{-a-2} \; dx \wedge dy$$

et on reconnaît dans cette dernière intégrale le produit scalaire de Petersson $(\phi \mid \overline{\phi}')$ entre ϕ et la forme modulaire holomorphe $\overline{\phi}'$ définie par $\overline{\phi}'(Z) = \overline{\phi'(\overline{Z})}$. D'où finalement la formule suivante, qui relie notre accouplement $\langle \quad , \quad \rangle_L$ au produit de Petersson $(\; \mid \;)$:

$$\langle \; \phi \; , \; \phi' \; \rangle_L \; = \; \frac{|\det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)|^2}{4c^2} \; \big(2i \det_L(\epsilon_1, \epsilon_2)\big)^{-a} \; \big(\phi \mid \overline{\phi}'\big)$$

Il en résulte en particulier la :

3.8. Proposition. — *l'accouplement $\langle \quad , \quad \rangle_L$ est non dégénéré.*

3.9. Le théorème qui suit dépend d'une identification entre le faisceau $\mathcal{F}_{-2}$ sur $\mathcal{C}_L$ et le faisceau des différentielles holomorphes. Nous fixons une telle identification : une fonction holomorphe localement définie ψ correspond à une fonction $\tilde{\psi}(\tilde{z})$ homogène de degré 0 et nous identifions la différentielle $d\psi$ à la section s de $\mathcal{F}_{-2}$ définie par

$$s(\tilde{z}) = \frac{d\psi(W)}{\det_L(\tilde{z}, W)}$$

(pour un quelconque W non colinéaire à $\tilde{z}$).

Par ailleurs notons K le déterminant de la matrice de la forme H restreinte à L, dans une quelconque base (e_1, e_2) telle que $\det_L(e_1, e_2) = 1$.

3.10. Théorème. — *La transformation $\mathcal{Q}$ coïncide avec le produit par le scalaire $\pi^{-1}K$ de l'application composée*

$$H^0(\mathcal{C}_L^X \; , \; \mathcal{F}_a) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{C}_L \; , \; \mathcal{F}_a)^\vee \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{C}_L \; , \; \mathcal{F}_{-a-2})$$

où le premier isomorphisme est celui donné par l'accouplement de Petersson $\langle \quad , \quad \rangle_L$, tandis que le second provient de la dualité de Serre.

Remarque. — pour un faisceau localement libre $\mathcal{L}$ sur une courbe (propre, lisse, géométriquement connexe) $\mathcal{C}$ définie sur un corps k, la dualité de Serre (essentiellement connue, dans le cas des courbes, depuis Roch) entre $H^0(\mathcal{C},\mathcal{L})$ et $H^1(\mathcal{C},\mathbf{\Omega}^1_{\mathcal{C}}\otimes\mathcal{L}^\vee)$ s'obtient comme le composé du (cup-) produit et d'un morphisme trace $\mathrm{T}\,r : H^1(\mathcal{C},\mathbf{\Omega}^1_{\mathcal{C}}) \to k$. Lorsque $k=\mathbb{C}$, ce dernier peut s'obtenir par intégration : plus précisément, un élément $\alpha \in H^1(\mathcal{C},\mathbf{\Omega}^1_{\mathcal{C}})$ est représenté en cohomologie de Dolbeault par une forme différentielle $\tilde{\alpha}$ de type $(1,1)$ et l'on a ([**23**]) :

$$\mathrm{T}\,r(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \tilde{\alpha}.$$

Généralisation immédiate à une variété lisse de dimension n. Mais on a d'après Grothendieck une théorie purement algébrique de la dualité : la trace et donc la dualité sont rationnelles sur le corps de définition de la variété. Voir [**17**] ([**24**] dans le cas particulier des courbes) ou, pour un exposé récent dans un cadre général, [**6**]. Le fait que la trace définie algébriquement coïncide avec celle définie analytiquement est établi dans [**22**].

3.11. Preuve. — Exprimons la transformation $\mathcal{Q}$ en cohomologie de Dolbeault. La traduction entre le formalisme de Gindikin et celui de Dolbeault est expliquée dans [**8**], [**9**] et [**11**] (nous avions aussi utilisé cela dans nos articles précités) : pour obtenir un représentant de la classe de cohomologie de Dolbeault associée à $\mathcal{Q}(\phi')$, on doit commencer par étendre cette dernière en une forme différentielle absolue sur $\tilde{\mathcal{C}}_L$; puis considérer l'image réciproque de cette extension par s, une section C^∞ de la projection de $\tilde{\mathcal{C}}_L$ sur $\mathcal{C}_L$. Enfin, on prend la partie de type $(0,1)$ de cette image réciproque.

Ici on peut utiliser la section donnée par : $s(z) = (z, z^\perp)$. Il nous faut calculer la partie de type anti-holomorphe de la différentielle de la coordonnée affine déjà considérée ci-dessus :

$$[z^\perp] = \frac{\det_L(z^\perp, z'_0)}{\det_L(z^\perp, z)\det_L(z'_0, z)},$$

où z'_0 est une origine arbitraire. Effectuons le calcul dans la base (ϵ_1,ϵ_2) qui nous a déjà servi précédemment ; les coordonnées projectives des différents points sont :

$$z = \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad z^\perp = \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ 1 \end{pmatrix} \quad z'_0 = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \ .$$

On a alors

$$[z^\perp] = \frac{1}{\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)}\ \frac{\nu\overline{Z}-\mu}{(\overline{Z}-Z)(\mu-\nu Z)}$$

et la partie de type $(0,1)$ de la différentielle de $[z^\perp]$ est donnée par

$$\overline{\partial}[z^\perp] = \frac{1}{\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)}\ \frac{d\overline{Z}}{(\overline{Z}-Z)^2} \ .$$

On exprime alors

$$\mathcal{Q}(\phi')(z,z') = \phi'(z')\det_L(z,z')^{-a}\omega_{z'}$$

dans cette base. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\phi')(z,z') &= \phi'\left(\begin{pmatrix}\overline{Z}\\1\end{pmatrix}\right)\ \det_L\left(\begin{pmatrix}Z\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{Z}\\1\end{pmatrix}\right)^{-a}\ \frac{1}{\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)}\ \frac{d\overline{Z}}{(\overline{Z}-Z)^2}\\ &= \det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^{-a-1}\ \phi'(\overline{Z})\ (Z-\overline{Z})^{-a-2}\ d\overline{Z}\\ &= \det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^{-a-1}\ (2i)^{-a-2}\ \phi'(\overline{Z})\ y^{-a-2}\ d\overline{Z}\end{aligned}$$

Explicitons enfin la correspondance (définie ci-dessus) entre sections du fibré $\mathcal{F}_{-2}$ et formes différentielles, en partant de la fonction $\psi\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\end{smallmatrix}\right) = \frac{z_1}{z_2}$. La différentielle $d\psi = \frac{z_2dz_1 - z_1dz_2}{z_2^2}$ correspond à la section :

$$s\left(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right) = \frac{z_2\alpha - z_1\beta}{z_2^2\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)(z_1\beta - z_2\alpha)} = \frac{-1}{\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)z_2^2}$$

Partant de $\left(\begin{smallmatrix}z_1\\z_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}Z\\1\end{smallmatrix}\right)$ on voit alors que $\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)\ dZ$ correspond à la section qui vaut -1 sur $\left(\begin{smallmatrix}Z\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Nous pouvons maintenant calculer l'accouplement de Serre $\{\phi, Q(\phi')\}$ entre l'image $Q(\phi')$ et une section $\phi \in H^0(\mathcal{C}_L\ ,\ \mathcal{F}_a)$:

$$\begin{aligned}\{\phi, Q(\phi')\} &= -\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^{-a}\ (2i)^{-a-2}\ (2\pi i)^{-1}\int_{\mathcal{C}_L}\phi(Z)\ \phi'(\overline{Z})\ y^{-a-2}\ dZ\wedge d\overline{Z}\\ &= \det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^{-a}\ (2i)^{-a-2}\pi^{-1}\ \int_{\mathcal{C}_L}\phi(Z)\ \phi'(\overline{Z})\ y^{-a-2}\ dx\wedge dy\\ &= \det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^{-a}\ (2i)^{-a-2}\pi^{-1}\big(\phi\mid\overline{\phi}'\big).\end{aligned}$$

Soit, compte tenu de la formule établie plus haut reliant $\langle\ \phi\ ,\ \phi'\ \rangle_L$ et $\big(\phi\mid\overline{\phi}'\big)$:

$$\{\phi, Q(\phi')\} = (2i)^{-2}\pi^{-1}\frac{4c^2}{|\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)|^2}\langle\ \phi\ ,\ \phi'\ \rangle_L$$

Par ailleurs si (e_1,e_2) est une base de déterminant 1, la matrice de passage P de (ϵ_1,ϵ_2) à (e_1,e_2) est de déterminant $\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^{-1}$ et la matrice de H dans cette base est égale à

$$P^t\begin{pmatrix}0 & -ic\\ ic & 0\end{pmatrix}\overline{P},\quad\text{de déterminant}\quad\frac{-c^2}{\det_L(\epsilon_1,\epsilon_2)^2} = K\ ;$$

le théorème en résulte. □

3.12. Énonçons les résultats analogues pour les courbes du second type. On part d'un F-point p extérieur à Δ^c et on note $\mathbf{\Omega}_p$ le sous-ensemble fermé de $\mathbf{\Omega}$ constitué des drapeaux (z,l) tels que $z = p$. Notons $\mathcal{C}_p \subset \Gamma\backslash\mathbf{\Omega}$ la courbe de Shimura obtenue comme le quotient $\Gamma_L\backslash\mathbf{\Omega}_p$, avec Γ_p le stabilisateur de p dans Γ. Pour $f' \in H^0(\Gamma\setminus\mathbf{Y}\ ,\ \mathcal{F}_{a,b})$ on veut relier la restriction de $\mathcal{P}'(f')$ à $\mathcal{C}_p$ à la restriction de f' à la courbe $\mathcal{C}_p^Y \subset \Gamma\backslash\mathbf{Y}$

définie comme le quotient du sous-ensemble $\mathbf{Y}_p \subset \mathbf{Y}$ constitué des $(z,l) \in \mathbf{Y}$ tels que $z = p$.

On définit comme plus haut une transformation cohomologique :

$$\mathcal{Q}' : H^0(\mathcal{C}_p^Y \ , \ \mathcal{F}_b) \longrightarrow H^1(\mathcal{C}_p \ , \ \mathcal{F}_{-b-2})$$

faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Gamma \setminus \mathbf{Y} \ , \ \mathcal{F}_{a,b}) & \xrightarrow{\mathcal{P}'} & H^1(\Gamma \setminus \boldsymbol{\Omega} \ , \ \mathcal{F}_{a+b+1,-b-2}) \\ {\scriptstyle \mathrm{Rest}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Rest}}\big\downarrow \\ H^0(\mathcal{C}_p^Y \ , \ \mathcal{F}_b) & \xrightarrow{\mathcal{Q}'} & H^1(\mathcal{C}_p \ , \ \mathcal{F}_{-b-2}) \end{array}$$

Définition de $\mathcal{Q}'$ dans le formalisme de Gindikin, en considérant le quotient par Γ de l'ensemble des couples (l,l') de droites passant par p, avec l intersectant Δ et l' extérieure à Δ^c :

$$\mathcal{Q}'(\phi')(l,l') = \phi'(l') \det{}_p(l,l')^{-b} \omega_{l'}$$

avec $\det_p(\ , \ ) = \star(p)^{-1} \det(\ , \ ,\star)$ et $\omega_{l'}$ la différentielle relative de

$$[l'] = \frac{\det_p(l', l'_0)}{\det_p(l',l) \det_p(l'_0, l)}.$$

Ensuite, la forme hermitienne H définit par dualité une forme, que nous noterons H^*, sur V^*. On note $d\mu_l$ la mesure sur $\mathcal{C}_p$ définie par $d\mu_l = \frac{i}{2}\eta_l \wedge \overline{\eta_l}$ avec

$$\eta_l = \frac{\det_p(\tilde{l}, d\tilde{l})}{H^*(\tilde{l}, \tilde{l})} \ .$$

On définit alors l'accouplement de Petersson entre $\phi \in H^0(\mathcal{C}_p \ , \ \mathcal{F}_b)$ et $\phi' \in H^0(\mathcal{C}_p^Y \ , \ \mathcal{F}_b)$ par :

$$\langle \ \phi \ , \ \phi' \ \rangle_p \ = \ \int_{\mathcal{C}_p} \phi(\tilde{l}) \phi'(\tilde{l}^{\perp}) \, d\mu_l$$

avec $\tilde{l}^{\perp}$ passant par p, orthogonale à l et normalisée de telle sorte que $\det_p(\tilde{l}, \tilde{l}^{\perp}) = 1$.

Finalement nous identifions le faisceau $\mathcal{F}_{-2}$ sur $\mathcal{C}_p$ avec le faisceau des différentielles holomorphes comme ci-dessus, en identifiant $d\psi$ à la section s de $\mathcal{F}_{-2}$ définie par

$$s(\tilde{l}) = \frac{d\psi(W)}{\det_p(\tilde{l}, W)}$$

(pour un quelconque W non colinéaire à $\tilde{l}$).

Notons K' le déterminant de H^* restreinte à l'orthogonal de p dans une base (λ_1, λ_2) telle que $\det_p(\lambda_1, \lambda_2) = 1$. On vérifie alors comme ci-dessus le :

3.13. Théorème. — *La transformation $\mathcal{Q}'$ coïncide avec le produit par le scalaire $\pi^{-1}K'$ de l'application composée*

$$H^0(\mathcal{C}_p^Y\ ,\ \mathcal{F}_b) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{C}_p\ ,\ \mathcal{F}_b)^\vee \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{C}_p\ ,\ \mathcal{F}_{-b-2})$$

où le premier isomorphisme est celui donné par l'accouplement de Petersson $\langle\ \ ,\ \ \rangle_p$ tandis que le second provient de la dualité de Serre.

4. Conclusion et remarques

4.1. L'énoncé du théorème précédent est formellement assez semblable à celui du résultat principal de [**4**], dans lequel nous relions les « coefficients de Fourier » de $\mathcal{P}(f)$ à ceux de f, par une transformation composée de la dualité de Serre et de la dualité par rapport à une métrique hermitienne. À une différence importante près toutefois : alors que dans l'article précédent notre transformation était rationnelle sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ce n'est plus le cas ici. En effet le produit scalaire de Petersson n'est pas rationnel (voir par exemple [**21**] pour les périodes correspondantes.)

Il en résulte la conséquence suivante : si on prend comme définition de rationalité sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de nos classes de cohomologie celle obtenue à partir de la variété de Shimura *via* la transformation $\mathcal{P}$, alors cette rationalité se lit directement sur le développement de Fourier mais pas sur la restriction aux courbes. Pour une telle restriction la rationalité se lit *via* l'inverse de Q, ce qui introduit des périodes. Autrement dit, la notion de rationalité correspondante n'est pas celle que l'on a naturellement sur le H^1 des courbes de Shimura, mais celle duale (*via* Petersson) de H^0.

4.2. Il serait très intéressant de savoir calculer la restriction d'une telle classe de 1-cohomologie aux courbes de Shimura du type (iii) décrites en (1.5.3) mais ces dernières ne correspondent pas à des courbes dans la variété de Shimura et on ne peut donc pas espérer des résultats analogues à ceux obtenus au paragraphe précédent.

4.3. Les classes de 1-cohomologie correspondant aux séries discrètes non-holomorphes sont obtenues pour les faisceaux $\mathcal{F}_{a,b}$ avec a et $b < -1$. Pour des raisons de degré (cf. (2.4)) les restrictions aux trois types de courbes de Shimura considérées sont nulles. De telles classes peuvent par contre être restreintes à des droites rationnelles (non horizontales) définies comme il suit : On se donne un point $p \in \Delta$ et une droite $J \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ne rencontrant pas l'adhérence de Δ. Alors l'ensemble des drapeaux (z, l) tels que z appartienne à J et que l passe par p constitue une droite projective incluse dans $\mathbf{\Omega}$. On peut alors considérer la restriction des classes de cohomologie non-holomorphes à ces droites. Faisant varier une telle droite projective on obtient une section d'un système local sur l'espace de ces droites. Cette restriction aux droites (et dans des cas plus généraux, aux sous variétés compactes maximales) a été étudiée depuis longtemps (cf. par exemple [**25**], [**26**]) mais du point de vue de la « cohomologie automorphe » et non pas d'un point de vue arithmétique. On sait par exemple qu'une classe est caractérisée (sous des hypothèses de régularité pour le faisceau $\mathcal{F}_{a,b}$) par l'ensemble de ses restrictions. On peut se demander quelles sont les propriétés arithmétiques de cette construction (par exemple pour des couples (J,p) rationnels).

4.4. Toutes les questions invoquées ci-dessus (restrictions de classes de cohomologie à des courbes de Shimura ou des $\mathbb{P}^1$) sont liées à des restrictions de formes automorphes à des sous groupes ; les périodes obtenues ou conjecturées sont probablement liées aux périodes de Gross-Prassad. Il y a des travaux récents de Harris sur ces questions, voir par exemple [**18**].

Références

[1] T. Bailey, M. Eastwood & S. Gindikin – « Smoothly parameterized Čech cohomology of complex manifolds », *J. Geom. Anal.* **15** (2005), no. 1, p. 9–23.

[2] H. Carayol – « Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths-Schmid : le cas du groupe $\mathrm{U}(2,1)$ », *Compos. Math.* **111** (1998), no. 1, p. 51–88.

[3] ______, « Quelques relations entre les cohomologies des variétés de Shimura et celles de Griffiths-Schmid (cas du groupe $\mathrm{SU}(2,1)$) », *Compos. Math.* **121** (2000), no. 3, p. 305–335.

[4] ______, « Cohomologie automorphe et compactifications partielles de certaines variétés de Griffiths-Schmid », *Compos. Math.* **141** (2005), no. 5, p. 1081–1102.

[5] B. Charbord – « Sur les cohomologies des variétés de Griffiths-Schmid du groupe $\mathrm{SU}(2,2)$ », Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2010.

[6] B. Conrad – *Grothendieck duality and base change*, Lecture Notes in Math., vol. 1750, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[7] P. Deligne – « Travaux de Griffiths », in *Séminaire Bourbaki, vol. 1969/70*, Lecture Notes in Math., vol. 180, 1971, exp. no. 376, p. 213–237.

[8] M. G. Eastwood, S. G. Gindikin & H.-W. Wong – « Holomorphic realization of $\overline{\partial}$-cohomology and constructions of representations », *J. Geom. Phys.* **17** (1995), no. 3, p. 231–244.

[9] ______, « A holomorphic realization of analytic cohomology », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322** (1996), no. 6, p. 529–534.

[10] R. Friedman & R. Laza – « Semi-algebraic horizontal subvarieties of Calabi-Yau type », *Duke Math. J.* **162** (2013), no. 12, p. 2077–2148.

[11] S. Gindikin – « Holomorphic language for $\overline{\partial}$-cohomology and representations of real semisimple Lie groups », in *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory (South Hadley, MA, 1992)*, Contemp. Math., vol. 154, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 103–115.

[12] M. Green, P. Griffiths & M. Kerr – « Mumford-Tate domains », *Boll. Unione Mat. Ital. (9)* **3** (2010), no. 2, p. 281–307.

[13] ______, *Mumford-Tate groups and domains. Their geometry and arithmetic*, Ann. of Math. Stud., vol. 183, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.

[14] ______, « Special values of automorphic cohomology classes », *Mem. Amer. Math. Soc.* **231** (2014), no. 1088, p. vi+145.

[15] P. Griffiths, C. Robles & D. Toledo – « Quotients of non-classical flag domains are not algebraic », *Algebr. Geom.* **1** (2014), no. 1, p. 1–13.

[16] P. Griffiths & W. Schmid – « Locally homogeneous complex manifolds », *Acta Math.* **123** (1969), p. 253–302.

[17] A. Grothendieck – « Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents », in *Séminaire Bourbaki 1956/57*, Soc. Math. France, Paris, 1995, exp. no. 149, p. 169–193.

[18] M. Harris – « Beilinson-Bernstein localization over $\mathbb{Q}$ and periods of automorphic forms », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2013), no. 9, p. 2000–2053.

[19] K. Kato & S. Usui – *Classifying spaces of degenerating polarized Hodge structures*, Ann. of Math. Stud., vol. 169, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2009.

[20] S. Kebekus – « Lines on contact manifolds », *J. Reine Angew. Math.* **539** (2001), p. 167–177.

[21] F. Martin & E. Royer – « Formes modulaires et périodes », in *Formes modulaires et transcendance*, Sémin. Congr., vol. 12, Soc. Math. France, Paris, 2005, p. 1–117.

[22] P. Sastry & Y. L. L. Tong – « The Grothendieck trace and the de Rham integral », *Canad. Math. Bull.* **46** (2003), no. 3, p. 429–440.

[23] J.-P. Serre – « Un théorème de dualité », *Comment. Math. Helv.* **29** (1955), p. 9–26.

[24] J. Tate – « Residues of differentials on curves », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **1** (1968), p. 149–159.

[25] R. O. Wells, Jr. & J. A. Wolf – « Poincaré series and automorphic cohomology on flag domains », *Ann. of Math. (2)* **105** (1977), no. 3, p. 397–448.

[26] J. A. Wolf & R. Zierau – « Linear cycle spaces in flag domains », *Math. Ann.* **316** (2000), no. 3, p. 529–545.

H. Carayol, IRMA, Université de Strasbourg et CNRS, 7 Rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France • *E-mail :* carayol@math.unistra.fr