

370

ASTÉRISQUE

2015

DE LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE
AUX FORMES AUTOMORPHES (II)

J.-B. BOST, P. BOYER, A. GENESTIER,
L. LAFFORGUE, S. LYSENKO, S. MOREL, B.C. NGÔ, eds.

MAUVAISE RÉDUCTION AU BORD

Benoît STROH

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 370, 2015

Comité de rédaction

Ahmed ABBES	Damien GABORIAU
Viviane BALADI	Michael HARRIS
Gérard BESSON	Fabrice PLANCHON
Laurent BERGER	Pierre SCHAPIRA
Philippe BIANE	Bertrand TOËN
Hélène ESNAULT	
Éric VASSEROT (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 98 € (\$ 147)

Abonnement Europe : 650 €, hors Europe : 689 € (\$ 1033)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-806-0

Directeur de la publication : Marc Peigné

MAUVAISE RÉDUCTION AU BORD

par

Benoît Stroh

À Gérard Laumon, avec admiration

Résumé. — Nous étudions la mauvaise réduction au bord de certaines variétés de Shimura, et notamment son aspect cohomologique ℓ -adique. Nous montrons qu'en niveau Iwahori, il y a commutation des foncteurs cycles proches et prolongement intermédiaire à la compactification de Satake. Nous en déduisons des généralisations de résultats de Morel sur la cohomologie d'intersection de ces compactifications. Nous montrons ensuite comment étendre nos résultats au cas des structures de niveau pro- p -Iwahori.

Abstract (Bad reduction at the boudary). — We study the bad reduction at the boundary of some Shimura varieties, and its influence on ℓ -adic cohomology. We show that in Iwahori level, there is commutation between the nearby cycles functor and the intermediate extension functor to Satake compactification. We deduce generalizations of results of Morel on the intersection cohomology of such varieties. We then show how to extend these results to the case of pro- p -Iwahori level structures.

Cet article constitue un panorama de quelques questions reliant les cycles proches de variétés de Siegel et leur cohomologie d'intersection.

Le premier thème concerne les cycles proches en niveau Iwahori et notamment leur trace semi-simple du Frobenius définie par Rapoport. La théorie est due à De Jong, Rapoport, Zink, Kottwitz, Gaitsgory, Haines et Ngô et cette partie de l'article ne consiste qu'en des rappels de leurs résultats. Soient $g \geq 1$, $n \geq 3$ des entiers, p un nombre premier ne divisant pas n et ℓ un nombre premier différent de p . Notons $\mathcal{A}_0$ la variété de Siegel de niveau iwahorique sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les variétés abéliennes principalement polarisées de genre g munies d'une base symplectique de leur n -torsion et d'un drapeau complet de sous-groupes finis et plats de leur p -torsion. Cette variété lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ a mauvaise réduction sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et ses

Classification mathématique par sujets (2010). — 11G18, 14G35, 14M27, 14F30.

Mots clefs. — Variétés de Shimura; variétés de Siegel; structure de niveau Iwahori; compactification minimale, de Satake et de Baily-Borel; cycles proches; prolongement intermédiaire.

cycles proches $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ codent de manière cohomologique l'allure de cette mauvaise réduction.

D'après Kottwitz et Rapoport, la fibre spéciale $\mathcal{A}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ est munie d'une stratification telle que $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ soit constant sur chaque strate. Les strates de Kottwitz-Rapoport sont indexées par un sous-ensemble fini W^{adm} du groupe de Weyl affine W du groupe des similitudes symplectiques sur le corps local $\mathbb{F}_p((t))$ et la trace semi-simple du Frobenius géométrique sur $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ définit une fonction sur W^{adm} à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell$. Les fonctions à support compact sur W formant l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$ du groupe des similitudes symplectiques sur $\mathbb{F}_p((t))$, on a donc défini une fonction $\tau_{R\Psi_{\mathcal{A}_0}}$ de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$. Le théorème principal, conjecturé par Kottwitz et prouvé par Gaitsgory puis Haines et Ngô prédit que cette fonction est dans le centre $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}}$ de l'algèbre de convolution $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$. De plus, son image par les isomorphismes de Bernstein et Satake est explicite.

L'objet central pour étudier la mauvaise réduction de $\mathcal{A}_0$, construire la stratification de Kottwitz-Rapoport et montrer la centralité de $\tau_{R\Psi_{\mathcal{A}_0}}$ est le modèle local de De Jong, Rapoport et Zink. Ce dernier est une variété projective $\mathcal{M}_0$ définie comme espace de modules de chaînes de réseaux. Elle modèle les singularités de $\mathcal{A}_0$ dans le sens où $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{M}_0$ admettent une fibration lisse commune. En particulier, l'étude de $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ se ramène à celle de $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. La fibre spéciale de $\mathcal{M}_0$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ se plongeant dans la variété de drapeaux affine du groupe des similitudes symplectiques sur $\mathbb{F}_p((t))$, on obtient le lien direct recherché entre $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ et l'algèbre de Hecke-Iwahori.

Le second thème porte sur la cohomologie d'intersection de la compactification minimale $\mathcal{A}_0^*$ de $\mathcal{A}_0$. Nous commençons par rappeler la structure de cette compactification construite dans [S2], ainsi que certaines résolutions partielles de ses singularités construites dans [S1]. Nous exposons ensuite les résultats principaux de [S3] et commençons par montrer que le prolongement intermédiaire de $\mathcal{A}_0$ à $\mathcal{A}_0^*$ commute au foncteur des cycles proches évalué en des systèmes locaux d'origine géométrique. Nous définissons les compactifications minimales des strates de Kottwitz-Rapoport de $\mathcal{A}_0$ et étudions leur cohomologie d'intersection. Cette cohomologie mélange deux types de prolongements intermédiaires : celui à l'intérieur de $\mathcal{A}_0$ qui est redevable de la théorie de Kazhdan-Lusztig et celui au bord de $\mathcal{A}_0^*$ qui s'étudie grâce à la théorie de Morel [M2]. L'utilisation des travaux de Morel permet de caractériser cette cohomologie d'intersection de manière récursive en terme des cohomologies d'intersection de strates de Kottwitz-Rapoport non compactifiées pour des variétés de Siegel de genre plus petit et de structure de niveau iwahorique.

Un résultat similaire est valable pour le prolongement intermédiaire à $\mathcal{A}_0^*$ du faisceau pervers décalé $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. Nous le montrons en combinant les travaux de [M2] aux places de bonne réduction, le théorème de Cebotarev pour les faisceaux pervers sur les schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ dû à Laumon [L] et les énoncés de commutation des cycles proches avec les prolongements au bord esquissés plus haut. Nous en déduisons que le prolongement intermédiaire à $\mathcal{A}_0^*$ du faisceau mixte $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ est sans support dans le complémentaire de $\mathcal{A}_0$. Se rappelant des résultats précédents,

nous en déduisons une formule pour la trace semi-simple du Frobenius sur le prolongement intermédiaire de $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ en termes de fonctions centrales dans des algèbres de Hecke-Iwahori pour des sous-groupes de Lévi.

Dans le troisième thème, nous expliquons des résultats obtenus en collaboration avec Haines [HS]. Ils ont trait non pas à $\mathcal{A}_0$ mais à son revêtement ramifié $\mathcal{A}_1$ qui est la variété de Siegel de niveau pro- p -Iwahori paramétrant des générateurs de Oort-Tate des gradués du drapeau universel de groupes finis et plats. Nous développons une théorie du modèle local pour $\mathcal{A}_1$ qui modèle les singularités de ce schéma, permet de comprendre ses cycles proches et d'interpréter leur trace semi-simple du Frobenius comme fonction dans l'algèbre de Hecke pro- p -Iwahori. Nous construisons plus précisément un toreur $\mathcal{M}_0^+$ sous un tore au dessus de $\mathcal{M}_0$. Si $\mathcal{M}_0^+$ n'a pas plus de singularité que $\mathcal{M}_0$, et donc que $\mathcal{A}_0$, sa fibre spéciale sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ se plonge naturellement dans l'analogue en niveau pro- p -iwahorique de la variété de drapeaux affine. Ce schéma $\mathcal{M}_0^+$ est donc relié à l'algèbre de Hecke pro- p -iwahorique $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$. Nous construisons ensuite un revêtement ramifié $\Pi : \mathcal{M}_1^+ \rightarrow \mathcal{M}_0^+$ qui modèle les singularités de $\pi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_0$ localement pour la topologie lisse. Nous ramenons alors l'étude de $\pi_* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ à celle de $\Pi_* \circ R\Psi_{\mathcal{M}_1^+}(\mathbb{Q}_\ell)$. Nous montrons enfin que la trace semi-simple du Frobenius sur ce dernier complexe définit une fonction centrale de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$. L'image de cette fonction sous divers isomorphismes de Roche est complètement déterminée.

Enfin, le dernier thème, original, généralise simultanément les résultats précédents. Nous construisons la compactification minimale $\mathcal{A}_1^*$ de $\mathcal{A}_1$ et ses résolutions partielles des singularités que sont les compactifications toroïdales. L'approche suivie consiste en fait à construire d'abord ces compactifications toroïdales $\bar{\mathcal{A}}_1$ comme espace de modules de générateurs de Oort-Tate des gradués universels sur les compactifications toroïdales $\bar{\mathcal{A}}_0$ de $\mathcal{A}_0$. Bien sûr, cette approche nécessite de montrer que ces gradués s'étendent de manière finie et plate de $\mathcal{A}_0$ à $\bar{\mathcal{A}}_0$. Une fois l'existence de $\bar{\mathcal{A}}_1$ acquise, la construction de $\mathcal{A}_1^*$ suit des lignes habituelles.

Nous pouvons alors définir les strates de Kottwitz-Rapoport pro- p -iwahoriques, leur compactification minimale puis étudier leur cohomologie d'intersection. Nous montrons comme précédemment des énoncés de commutation des foncteurs de prolongement au bord avec $R\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ et en déduisons une formule récursive pour le prolongement intermédiaire à $\mathcal{A}_1^*$ de ce faisceau pervers décalé.

L'auteur souhaite remercier les organisateurs de la conférence en l'honneur de Gérard Laumon. Il remercie également le rapporteur pour sa relecture attentive. Il a par ailleurs bénéficié du projet ANR-10-BLAN 0114 ArShiFo pendant la préparation de cet article.

1. Niveau iwahorique

1.1. Variétés de Siegel. — Soit $g \geq 1$ un entier, p et ℓ deux premiers distincts et $n \geq 3$ un entier non divisible par p . Notons $\mathcal{A}_0$ le champ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les familles $(G, \lambda, \phi, H_\bullet)$ où G est une variété abélienne de polarisation

principale λ , où $\phi : G[n] \rightarrow (\mathbb{Z}/n)^{2g}$ est une similitude symplectique et où $H_\bullet = (H_1 \subset \cdots \subset H_g)$ est un drapeau de sous-groupes finis et plats totalement isotropes de $G[p]$ tel que H_i soit de rang p^i pour tout $1 \leq i \leq g$. On obtient un schéma quasi-projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ mais pas sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Nous dirons que $\mathcal{A}_0$ est la variété de Siegel de niveau iwahorique $\Gamma_0(p)$.

Notre premier but sera de comprendre les cycles proches de systèmes locaux automorphes ℓ -adiques sur $\mathcal{A}_0$ et notre second le comportement de ces cycles proches au bord de compactifications de $\mathcal{A}_0$.

1.2. Modèle local. — Le modèle local, défini par de Jong [dJ] et Rapoport et Zink [RZ], est un schéma projectif défini en terme d'algèbre linéaire et dont les singularités modèlent celles de $\mathcal{A}_0$. Il permet donc d'étudier les cycles proches de $\mathcal{A}_0$.

1.2.1. Espace de modules de réseaux. — Soit $V = \mathbb{Z}^{2g}$ muni de l'accouplement alterné non dégénéré de matrice par bloc

$$\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$$

où J est la matrice anti-diagonale de taille $g \times g$ et de coefficients anti-diagonaux tous égaux à 1. Notons $\underline{\mathrm{GSp}}(V)$ le schéma en groupe réductif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ qui associe à toute $\mathbb{Z}$ -algèbre R les similitudes symplectiques de $V \otimes R$. De même pour les groupes $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$ et $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{F}_p)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ ou sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Nous désignerons dans la suite par $\mathrm{GSp}(V)$, $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$ ou $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_p)$ les groupes des $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$ -points des groupes réductifs précédents. Considérons la chaîne de réseaux

$$\mathbb{V}_\bullet = (\mathbb{V}_0 \leftarrow \mathbb{V}_1 \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{V}_{2g})$$

où $\mathbb{V}_i = \mathbb{Z}^{2g}$ pour tout i et où $\mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{V}_{i-1}$ est la multiplication par p sur le i -ème vecteur de base et l'identité sur les autres. La composée $\mathbb{V}_{2g} \rightarrow \mathbb{V}_0$ est donc la multiplication par p . Identifions V et $\mathbb{V}_0$. En prenant les images des composés des flèches de transition, on obtient une identification entre $\mathbb{V}_\bullet$ et une chaîne de réseaux emboîtés de V dont les gradués successifs sont isomorphes à $\mathbb{F}_p$.

Notation 1.2.2. — *Le schéma $\mathcal{M}_0$ associe à tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des diagrammes commutatifs*

$$(1.2.A) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{V}_0 \otimes \mathcal{O}_S & \longleftarrow & \mathbb{V}_1 \otimes \mathcal{O}_S & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathbb{V}_{2g} \otimes \mathcal{O}_S \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ W_0 & \longleftarrow & W_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & W_{2g} \end{array}$$

où W_i est localement libre de rang g sur S pour tout i , où les flèches verticales sont localement des inclusions de facteurs directs et où la chaîne $W_\bullet$ est globalement auto-duale.

Le schéma $\mathcal{M}_0$ est projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$, les flèches de transition $\mathbb{V}_{i+1} \rightarrow \mathbb{V}_i$ sont des isomorphismes donc la connaissance de W_0 permet de reconstruire toute la chaîne $W_\bullet$. Ainsi la restriction de $\mathcal{M}_0$ à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$ est isomorphe à la grassmannienne des sous-espaces lagrangiens de $\mathbb{V}_0$. En particulier, $\mathcal{M}_0$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$. Nous verrons que les singularités de $\mathcal{M}_0$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ sont intéressantes du point de vue de la théorie géométrique des représentations et qu'elles sont reliées à celles de $\mathcal{A}_0$. Cela justifie l'appellation de « modèle local » pour $\mathcal{M}_0$.

Notation 1.2.3. — Soit I_0 le schéma en groupes des similitudes symplectiques de $\mathbb{V}_\bullet$. C'est un schéma en groupes lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et réductif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/p])$. Il agit canoniquement sur $\mathcal{M}_0$.

Remarquons qu'on peut définir le schéma $\mathcal{M}_0$ d'une autre manière. Soit en effet t une indéterminée. Considérons la chaîne de $\mathbb{Z}[t]$ -réseaux

$$\mathbb{V}_\bullet[t] = (\mathbb{V}_0[t] \longleftarrow \mathbb{V}_1[t] \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathbb{V}_{2g}[t])$$

où $\mathbb{V}_i[t] = \mathbb{V}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t]$ et le morphisme de transition $\mathbb{V}_i[t] \rightarrow \mathbb{V}_{i-1}[t]$ est la multiplication par $p + t$ sur le i -ème vecteur de base et l'identité sur les autres. Il revient à la même chose de se donner un S -point de $\mathcal{M}_0$ et un diagramme commutatif de $\mathcal{O}_S[t]$ -modules

$$(1.2.B) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbb{V}_0[t] \otimes \mathcal{O}_S & \longleftarrow & \mathbb{V}_1[t] \otimes \mathcal{O}_S & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathbb{V}_{2g}[t] \otimes \mathcal{O}_S \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ \mathcal{W}_0 & \longleftarrow & \mathcal{W}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \mathcal{W}_{2g} \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ t\mathbb{V}_0[t] \otimes \mathcal{O}_S & \longleftarrow & t\mathbb{V}_1[t] \otimes \mathcal{O}_S & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & t\mathbb{V}_{2g}[t] \otimes \mathcal{O}_S \end{array}$$

où $\mathcal{W}_i$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_S[t]^{2g}$ pour la topologie de Zariski de S , où la chaîne $\mathcal{W}_\bullet$ est globalement autoduale, et où $\mathcal{W}_i/t \cdot \mathbb{V}_i[t] \otimes \mathcal{O}_S \subset \mathbb{V}_i[t] \otimes \mathcal{O}_S/t \cdot \mathbb{V}_i[t] \otimes \mathcal{O}_S$ est localement l'inclusion d'un facteur direct de rang g pour tout i . La correspondance est bien sûr de poser $W_i = \mathcal{W}_i/t \cdot \mathbb{V}_i[t] \otimes \mathcal{O}_S$.

Travailler avec la chaîne $\mathcal{W}_\bullet$ de $\mathcal{O}_S[t]$ -modules au lieu de la chaîne $W_\bullet$ de $\mathcal{O}_S$ -modules présente deux avantages. Le premier est de suggérer des généralisations de $\mathcal{M}_0$ dans les cas où la chaîne $\mathcal{W}_\bullet$ est coincée entre $t^{n^-} \mathbb{V}_\bullet[t] \otimes \mathcal{O}_S$ et $t^{n^+} \mathbb{V}_\bullet[t] \otimes \mathcal{O}_S$ pour $n^- \leq 0 \leq n^+$ des entiers arbitraires. C'est ce qui est fait dans [HN] et cette suggestion est d'ailleurs due à Laumon. Le second avantage réside dans la transparence du lien entre la fibre spéciale $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et la variété de drapeaux affine pour $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_p((t)))$.

Notons en effet LG le foncteur qui à toute $\mathbb{F}_p$ -algèbre R associe le groupe $\mathrm{GSp}(V \otimes R((t)))$. Il est représentable par un ind-schéma localement de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Notons également I le foncteur sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ qui associe à tout schéma S le groupe des automorphismes $\mathcal{O}_S[[t]]$ -linéaires symplectiques à un scalaire près de la chaîne standard $\mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathcal{O}_S$. C'est un ind-schéma en groupes de type fini inclus dans LG

appelé sous-groupe d'Iwahori en la variable t . Pour toute $\mathbb{F}_p$ -algèbre R , les R -points de I consistent en le sous-groupe de $\mathrm{GSp}(V \otimes R[[t]])$ formé des matrices triangulaires supérieurs modulo t . Notons $\mathcal{F}l = \mathrm{LG}/I$ qui est un ind-schéma propre de type fini appelé variété de drapeau affine. Pour toute $\mathbb{F}_p$ -algèbre R , le quotient $\mathcal{F}l(R)$ s'identifie à l'ensemble des chaînes globalement autoduales de $R[[t]]$ -réseaux dans $R((t))^{2g}$.

Lemme 1.2.4. — *Il existe une immersion fermée canonique du schéma $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{F}l$. Son image est caractérisée par la condition que la chaîne universelle $\mathcal{W}_\bullet$ de $\mathbb{F}_p((t))^{2g} = \mathbb{V}_0 \otimes \mathbb{F}_p((t))$ soit coïncée entre la chaîne standard $\mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathbb{F}_p$ et son multiple $t \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathbb{F}_p$ et que $\mathcal{W}_\bullet/(t \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathbb{F}_p)$ soit localement un facteur direct de rang g de $(\mathbb{V}_\bullet[[t]]/t \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]]) \otimes \mathbb{F}_p$.*

Le schéma $\mathcal{M}_0$ est muni d'une action du schéma en groupes I_0 sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et l'ind-schéma $\mathcal{F}l$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ d'une action de l'ind-schéma I . Un élément g de I agit sur $\mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathcal{O}_S$ donc également sur le quotient

$$\mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathcal{O}_S / t \cdot \mathbb{V}_\bullet[[t]] \otimes \mathcal{O}_S$$

isomorphe à $\mathbb{V}_\bullet \otimes \mathcal{O}_S$. Cela définit une surjection de I dans la fibre spéciale $I_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Le lemme suivant est clair.

Lemme 1.2.5. — *L'image de $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{F}l$ est stable par I et ce groupe y agit via le morphisme de I dans $I_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ composé avec l'action naturelle de I_0 sur $\mathcal{M}_0$.*

1.2.6. Cycles proches et conjecture de Kottwitz. — Considérons le complexe ℓ -adique $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ de la catégorie dérivée des faisceaux étales sur $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Comme tout complexe ℓ -adique muni de l'action du groupe de Galois absolu d'un trait, on peut définir sa fonction trace semi-simple du Frobenius géométrique à la Rapoport. Fixons une extension finie $\mathbb{F}_q$ de $\mathbb{F}_p$. On obtient alors une fonction

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}} : \mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

qui caractérise d'une certaine manière la mauvaise réduction de $\mathcal{M}_0$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Rappelons que l'ensemble fini $\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)$ est muni d'une action du groupe $I_0(\mathbb{F}_q)$. Le lemme suivant provient de la lissité de I_0 sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et du théorème de changement de base lisse.

Lemme 1.2.7. — *La fonction $\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}}$ est invariante par l'action de $I_0(\mathbb{F}_q)$ et se factorise en*

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}} : \mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)/I_0(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Comme on a montré l'existence d'une injection de $\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)/I_0(\mathbb{F}_q)$ dans le double quotient $I(\mathbb{F}_q) \backslash \mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t)))/I(\mathbb{F}_q)$ on peut prolonger $\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}}$ par zéro et obtenir

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}} : I(\mathbb{F}_q) \backslash \mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t)))/I(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Mais les fonctions à support compact sur $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t)))/I(\mathbb{F}_q)$ bi-invariantes par $I(\mathbb{F}_q)$ forment une algèbre de convolution bien connue : l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$ à

coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. On a donc construit une fonction spéciale $\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}} \in \mathcal{H}_{\text{Iw}}$. Reste à caractériser cette fonction en termes d'algèbres de Hecke. C'est l'objet de la conjecture de Kottwitz. Introduisons quelques notations avant de la formuler.

Notons $\mathcal{Z}_{\text{Iw}}$ le centre de l'algèbre $\mathcal{H}_{\text{Iw}}$. C'est une algèbre commutative de type fini sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Notons K le foncteur sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ qui associe à un schéma S le groupes des similitudes symplectiques $\mathcal{O}_S[[t]]$ -linéaires de $V[[t]] \otimes \mathcal{O}_S$. C'est un ind-schéma en groupes de type fini qui contient naturellement I . Notons

$$\mathcal{H}_{\text{sph}} = \mathcal{C}_c^\infty(K(\mathbb{F}_q) \backslash \text{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t))) / K(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

l'algèbre de convolution sphérique. Sa structure est complètement élucidée par l'isomorphisme de Satake : elle est commutative, égale à une algèbre de polynômes en $g+1$ variables invariants par le groupe de Weyl.

Il existe par ailleurs un morphisme de $\mathcal{Z}_{\text{Iw}}$ dans $\mathcal{H}_{\text{sph}}$ qui associe à une fonction f la convolée $f * \mathbf{1}_{K(\mathbb{F}_q)}$. Cette fonction est bien bi-invariante par $K(\mathbb{F}_q)$ puisque f est supposée centrale. Le théorème suivant sur la structure du centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori est dû à Bernstein [HN, §4.2].

Théorème 1.2.8. — *Le morphisme $f \mapsto f * \mathbf{1}_{K(\mathbb{F}_q)}$ induit un isomorphisme d'algèbres commutatives $\text{Bern} : \mathcal{Z}_{\text{Iw}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{sph}}$.*

Le but est alors de montrer la centralité de $\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}} \in \mathcal{H}_{\text{Iw}}$ puis de caractériser la fonction

$$\text{Bern}(\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}}) \in \mathcal{H}_{\text{sph}}$$

ou bien sa transformée de Satake. La réponse a été conjecturée par Kottwitz et démontrée par Gaitsgory [Ga] en égale caractéristique. La démonstration de Gaitsgory a ensuite été transposée par Haines et Ngô [HN] au cas de caractéristique mixte qui nous intéresse.

Théorème 1.2.9. — *La fonction $\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}} \in \mathcal{H}_{\text{Iw}}$ est dans le centre $\mathcal{Z}_{\text{Iw}}$ de $\mathcal{H}_{\text{Iw}}$. Son image $\text{Bern}(\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}})$ est égale à une constante multipliée par le caractère de la représentation spinorielle du groupe dual de $\text{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$.*

Remarque 1.2.10. — *Montrer la centralité est partie la plus difficile de la démonstration. Il s'agit de géométriser le produit de convolution de $\mathcal{H}_{\text{Iw}}$, c'est-à-dire de le relever à une catégorie de faisceaux pervers équivariants sur la variété de drapeaux affine, et de tester géométriquement la commutation de $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ avec les autres faisceaux pervers. Le produit de convolution géométrique commutant avec les cycles proches, on se réduit à tester la commutation sur $\text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$. Il est alors aisé de conclure la démonstration.*

De plus, quitte à remplacer $\mathcal{M}_0$ par ses généralisations suggérées au paragraphe 1.2.1 on peut en fait construire toutes les fonctions de $\mathcal{Z}_{\text{Iw}}$ par un procédé de cycles proches [Ga].

1.2.11. Strates de Kottwitz-Rapoport. — Il est bien connu que le double quotient grossier $I \backslash LG/I$ est un schéma de dimension nulle, isomorphe au groupe de Weyl affine W du groupe $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_p((t)))$ sur le corps local $\mathbb{F}_p((t))$. Rappelons que nous avons plongé $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{F}l = LG/I$ de manière équivariante sous le morphisme $I \rightarrow I_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Ainsi l'image de $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans la variété de drapeaux affine est une union finie de I -orbites.

Définition 1.2.12. — Le sous-ensemble fini W^{adm} de W est l'ensemble des I -orbites de $\mathcal{F}l$ incluses dans l'image de $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p) \subset \mathcal{F}l$.

Cet ensemble fini W^{adm} est appelé sous-ensemble des éléments admissibles, ou permis, de W . Il est muni d'une riche combinatoire étudiée notamment par Kottwitz, Rapoport, Haines, Ngô et Smithling.

Le quotient grossier de $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ par $I_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ est donc l'ensemble fini W^{adm} . De même, le champ d'Artin quotient $[\mathcal{M}_0/I_0]$ est discret, donc n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes d'objets sur $\bar{\mathbb{F}}_p$. Le morphisme canonique $\mathcal{M}_0 \rightarrow [\mathcal{M}_0/I_0]$ est un I_0 -torseur donc en particulier lisse.

Définition 1.2.13. — La strate de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{M}_0^w$ de $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ paramétrée par $w \in W^{\mathrm{adm}}$ est l'antécédent de $w \in [\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)/I_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)]$ dans $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

Les strates de Kottwitz-Rapoport sont donc lisses quasi-projectives sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Leur dimension est égale à la longueur $\ell(w)$ de l'élément w du groupe de quasi-Coxeter W et elles sont en fait isomorphes à l'espace affine

$$\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^{\ell(w)}.$$

Notons $\mathcal{M}_0^{\preceq w}$ l'adhérence de $\mathcal{M}_0^w$ dans $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Cette notation se justifie par le fait que

$$\mathcal{M}_0^{\preceq w} = \coprod_{w' \preceq w} \mathcal{M}_0^{w'}$$

où $\preceq$ désigne l'ordre de Bruhat dans W . Remarquons d'ailleurs que si $w \in W^{\mathrm{adm}}$ et $w' \in W$ tel $w' \preceq w$ alors $w' \in W^{\mathrm{adm}}$. Le schéma $\mathcal{M}_0^{\preceq w}$ est projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ mais n'est en général pas lisse. Au contraire, le plongement de $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{F}l$ permet d'identifier $\mathcal{M}_0^{\preceq w}$ à une variété de Schubert affine. Ses singularités sont complexes et caractérisées par les polynômes de Kazhdan-Lusztig pour $\mathcal{H}_{1w}$.

1.2.14. Lien avec les variétés de Siegel. — Soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ et s un S -point de $\mathcal{A}_0$. Par définition, à s correspond un schéma abélien G sur S et une famille $H_1 \subset \cdots \subset H_g$ de sous-groupes finis et plats isotropes de $G[p]$. Posons $G_0 = G$, $G_i = G/H_i$ et $G_{i+g} = G_{i-g}^\vee$ pour $1 \leq i \leq g$ où $\vee$ désigne le schéma abélien dual. On obtient alors une chaîne $G_0 \rightarrow \cdots \rightarrow G_{2g}$ d'isogénies de degré p entre schémas abéliens. De plus, cette chaîne est globalement autoduale. Considérant la cohomologie de de Rham relative sur S , on obtient une chaîne de $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres

$$\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(G_0/S) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(G_{2g}/S)$$

qui est localement pour la topologie de Zariski isomorphe à $\mathbb{V}_\bullet \otimes \mathcal{O}_S$. De plus, la filtration de Hodge définit une chaîne de facteurs directs locaux

$$\Omega_{G_\bullet/S}^1 \subset \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G_\bullet/S)$$

de dimension g . On obtient ainsi un morphisme de S dans le champ quotient

$$[\mathcal{M}_0 \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n]) / I_0 \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])]$$

qui paramètre les diagrammes commutatifs sur S isomorphes localement pour la topologie de Zariski à **1.2.A**. On a finalement obtenu un morphisme de $\mathcal{A}_0$ dans $[\mathcal{M}_0/I_0] \times \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. Il résulte de la théorie de Grothendieck-Messing des déformations des schémas abéliens que ce morphisme est lisse. On obtient un diagramme

$$(1.2.C) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_0 & & \mathcal{M}_0 \\ & \searrow & \swarrow \\ & [\mathcal{M}_0/I_0] & \end{array}$$

où pour plus de légèreté on s'est affranchi d'indiquer les produits fibrés par $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. Les morphismes de ce diagramme sont lisses de même dimension relative et on peut vérifier qu'ils sont également surjectifs [Ge, prop. 1.3.2]. Ainsi, $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{M}_0$ ont mêmes singularités [dJ, lem. 4.7] et les cycles proches $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$, $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $R\Psi_{[\mathcal{M}_0/I_0]}(\mathbb{Q}_\ell)$ se correspondent par image inverse.

Définition 1.2.15. — Soit $w \in W^{\text{adm}}$. La strate de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{A}_0^w$ est l'image inverse de $w \in [\mathcal{M}_0/I_0] \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{A}_0 \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

Les strates $\mathcal{A}_0^w$ et $\mathcal{M}_0^w$ sont localement isomorphes pour la topologie étale. Notons $\mathcal{A}_0^{\preceq w}$ l'adhérence de $\mathcal{A}_0^w$ dans $\mathcal{A}_0 \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$. On a

$$\mathcal{A}_0^{\preceq w} = \coprod_{w' \preceq w} \mathcal{A}_0^{w'}$$

et les schémas $\mathcal{A}_0^{\preceq w}$ et $\mathcal{M}_0^{\preceq w}$ sont localement isomorphes pour la topologie étale.

1.3. Compactifications. — Décrivons à présent plusieurs compactifications de $\mathcal{A}_0$.

1.3.1. Compactification minimale. — Décrivons la première des compactifications, aussi appelée compactification de Satake ou de Baily-Borel. Le théorème suivant résulte de [S2]. Notons ω_i le déterminant du faisceau conormal à G_i le long de sa section unité pour tout $0 \leq i \leq g$. On obtient de la sorte $g+1$ fibrés en droites sur $\mathcal{A}_0$.

Théorème 1.3.2. — Il existe un schéma canonique $\mathcal{A}_0^*$ projectif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui contient $\mathcal{A}_0$ comme ouvert dense, sur lequel $\otimes_{i=0}^g \omega_i$ se prolonge en un fibré en droites ample et tel que si $g \geq 2$, on ait

$$\mathcal{A}_0^* = \text{Proj} \left(\bigoplus_{k \geq 0} H^0 \left(\mathcal{A}_0, \bigotimes_{i=0}^g \omega_i^k \right) \right).$$

Remarque 1.3.3. — Soit $\mathcal{A}$ la variété de Siegel sans niveau en p sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les schémas abéliens G munis d'une polarisation principale et d'une similitude symplectique $G[n] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. D'après [FC, ch. V], elle se plonge dans sa compactification minimale $\mathcal{A}^*$ sur laquelle ω_0 se prolonge en un fibré en droite ample. Comme le morphisme d'oubli du niveau $\mathcal{A}_0^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ n'est pas fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ puisque c'est déjà le cas du morphisme non compactifié $\mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}$ lorsque $g \geq 2$, le faisceau structural de $\mathcal{A}_0^*$ n'est pas relativement ample et ω_0 ne peut donc être ample sur $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

L'algèbre graduée apparaissant dans l'énoncé du théorème est en particulier de type fini sur $\mathbb{Z}[1/n]$. Le complémentaire de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_0^*$ est facile à décrire explicitement, mais il nous faut introduire auparavant quelques notations de théorie des groupes.

Notons $\mathfrak{C}_V$ l'ensemble des sous-modules totalement isotropes facteurs directs de V . Il contient le sous-module nul $\{0\}$ et le complémentaire $\mathfrak{C}_V \setminus \{0\}$ s'identifie à l'ensemble des sous-groupes paraboliques maximaux de $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$ définis sur $\mathbb{Q}$. C'est donc le 0-squelette de l'immeuble de Tits de $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$ sur $\mathbb{Q}$. Via cette identification, le sous-espace non nul V' de V correspond au sous-groupe parabolique maximal

$$P_{V'} = \mathrm{Stab}_{\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})}(V' \otimes \mathbb{Q})$$

qui est également le stabilisateur du drapeau $0 \subset V' \otimes \mathbb{Q} \subset V'^{\perp} \otimes \mathbb{Q} \subset V \otimes \mathbb{Q}$. Le groupe de Lévi $L_{V'}$ de $P_{V'}$ s'identifie canoniquement à

$$\underline{\mathrm{GL}}(V' \otimes \mathbb{Q}) \times \underline{\mathrm{GSp}}((V'^{\perp}/V') \otimes \mathbb{Q}).$$

L'ensemble $\mathfrak{C}_V$ admet une action naturelle du groupe $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$ et le quotient pour cette action s'identifie à l'ensemble des entiers compris entre 1 et g : associer à V' son rang. Il est facile de voir que c'est également le quotient de $\mathfrak{C}_V$ par le groupe discret $\mathrm{GSp}(V)$.

Rappelons que $I_0(\mathbb{Z})$ est le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GSp}(V)$, formé des matrices qui sont triangulaires supérieures modulo p . Notons Γ_V le stabilisateur de $\mathbb{V}_{\bullet}$ dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}(V) \rightarrow \mathrm{GSp}(V/nV))$, qui est égal à l'intersection de $I_0(\mathbb{Z})$ et de $\mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}(V) \rightarrow \mathrm{GSp}(V/nV))$.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire le complémentaire de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_0^*$. Le schéma $\mathcal{A}_0^*$ est muni d'une stratification paramétrée par l'ensemble fini $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$ et $\mathcal{A}_0$ en est l'unique strate ouverte; elle correspond à $\{0\} \in \mathfrak{C}_V$. La codimension de la strate paramétrée par $V' \in \mathfrak{C}_V$ est égale au rang de V' . Les relations d'incidence entre strates sont duales des relations d'inclusions pouvant exister entre différents éléments de $\mathfrak{C}_V$. De plus, la strate associée à V' est la variété de Siegel $\mathcal{A}_{0,V'}$ paramétrant les variétés abéliennes principalement polarisées de genre $g - \mathrm{rg}(V')$ munies d'un drapeau complet de groupes finis et plats isotropes de leur p -torsion et d'une base symplectique de leur n -torsion. Ainsi $\mathcal{A}_{0,V'}$ est à $\mathcal{A}_0$ ce que l'espace symplectique $V'^{\perp}/V'$ est à V . On voit en particulier que le complémentaire de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_0^*$ est de codimension g . Le schéma $\mathcal{A}_0^*$ est déjà très singulier au bord sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ dès que $g \geq 2$.

Remarque 1.3.4. — Cette compactification $\mathcal{A}_0^*$ n'existe que grâce à l'hypothèse $n \geq 3$ qui garantit que $\mathcal{A}_0$ est un schéma. Si on avait $n \leq 3$, auquel cas $\mathcal{A}_0$ serait un champ de Deligne-Mumford, la compactification minimale ne serait qu'une compactification de l'espace de modules grossier associé à $\mathcal{A}_0$.

1.3.5. Compactification toroïdale. — Ces compactifications toroïdales, non canoniques, fournissent des résolutions des singularités de $\mathcal{A}_0^*$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$. Elles restent singulières sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ mais nous permettrons de contrôler l'interaction des singularités de la mauvaise réduction de $\mathcal{A}_0$ et celles provenant du bord de $\mathcal{A}_0^*$.

Commençons par rappeler le choix combinatoire dont ces compactifications dépendent. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$ notons $C(V/V'^\perp)$ le cône des applications quadratiques semi-définies positives à radical rationnel sur $V/V'^\perp$. Pour tous éléments V' et V'' de $\mathfrak{C}_V$ tels que $V' \subset V''$ on dispose d'une inclusion de $C(V/V'^\perp)$ dans $C(V/V''^\perp)$. Notons $\mathcal{C}_V$ le recollement de tous les $C(V/V'^\perp)$ selon ces inclusions. Ce cône simplicial est muni d'une action du groupe discret $\mathrm{GSp}(V)$ compatible à son action sur $\mathfrak{C}_V$ et le quotient consiste en un nombre fini de cônes recollés le long de leur bord. De même, le quotient $\mathcal{C}_V/\Gamma_V$ est union finie de cônes.

Soit $\mathfrak{S}_V$ une décomposition polyédrale rationnelle Γ_V -équivariante de $\mathcal{C}_V$ qui est admissible et lisse dans le sens de [FC, IV.2.3]. L'ensemble $\mathfrak{S}_V/\Gamma_V$ est donc fini. Le théorème suivant résulte de [S1].

Théorème 1.3.6. — Il existe un schéma $\bar{\mathcal{A}}_0$ propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ canoniquement associé à $\mathfrak{S}_V$ qui contient $\mathcal{A}_0$ comme ouvert dense. Le schéma $\bar{\mathcal{A}}_0$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ et $\mathcal{A}_0$ y est un diviseur à croisements normaux. Il existe un morphisme propre surjectif canonique π de $\bar{\mathcal{A}}_0$ sur $\mathcal{A}_0^*$ qui est un isomorphisme sur $\mathcal{A}_0$.

Le choix de $\mathfrak{S}_V$ étant fixé dans la suite de l'article, nous appellerons $\bar{\mathcal{A}}_0$ « la » compactification toroïdale. Elle n'est bien sûr pas unique dans l'absolu puisqu'elle dépend du choix de $\mathfrak{S}_V$. Le schéma $\bar{\mathcal{A}}_0$ est muni d'une stratification paramétrée par $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$ et le morphisme π respecte cette stratification. Nous aurons juste besoin de savoir que pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$, l'hensélisé de $\bar{\mathcal{A}}_0$ le long de la strate paramétrée par V' est isomorphe au hensélisé d'un schéma $\tilde{\mathcal{N}}_{0,V'}$ le long de sa strate paramétrée par V' . Ce schéma $\tilde{\mathcal{N}}_{0,V'}$ se dévisse en

$$(1.3.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{0,V'} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{\mathcal{N}}_{0,V'} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{B}_{0,V'} & \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{A}_{0,V'} & \end{array}$$

où $\mathcal{A}_{0,V'}$ est la variété de Siegel strate de bord de $\mathcal{A}_0^*$, le morphisme $\mathcal{B}_{0,V'} \rightarrow \mathcal{A}_{0,V'}$ est une variété abélienne relative, le morphisme $\mathcal{N}_{0,V'} \rightarrow \mathcal{B}_{0,V'}$ est un tore sous

un tore et sa compactification partielle $\mathcal{N}_{0,V'} \hookrightarrow \bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ est le quotient par un groupe discret agissant sans point fixe d'un fibré en plongement toriques lisse et localement de type fini sur $\mathcal{B}_{0,V'}$ construit grâce à l'éventail $\mathfrak{S}_V \cap C(V/V'^\perp)$. En particulier, si on localise suffisamment pour la topologie étale de $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$, le plongement $\mathcal{N}_{0,V'} \hookrightarrow \bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ est produit de $\mathcal{B}_{0,V'}$ par le plongement d'un tore dans un plongement torique lisse de type fini, le complémentaire étant un diviseur à croisements normaux relatif. La strate de $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ paramétrée par V' à laquelle il est fait référence plus haut est par définition l'union des strates paramétrées par les cônes de $\mathfrak{S}_V$ inclus dans l'intérieur de $C(V/V'^\perp)$.

Remarque 1.3.7. — *Le lecteur trouvera dans [S1, §1.4] une description précise de la variété abélienne $\mathcal{B}_{0,V'}$ sur $\mathcal{A}_{0,V'}$ et du torseur sous un tore $\mathcal{N}_{0,V'}$ sur $\mathcal{B}_{0,V'}$. Cette description nous sera inutile.*

Remarque 1.3.8. — *Le schéma $\bar{\mathcal{A}}_0$ est en fait muni d'une stratification plus fine paramétrée par $\mathfrak{S}_V/\Gamma_V$, l'existence de cette stratification élucidant d'ailleurs la dépendance en $\mathfrak{S}_V$ des compactifications toroïdales. Nous n'aurons pas non plus besoin de cette stratification plus fine.*

1.3.9. Systèmes locaux automorphes. — À toute représentation W de $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$ on associe [FC, ch. VI] un faisceau étale localement constant $\mathcal{F}(W)$ en $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces vectoriels sur $\mathcal{A}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\ell])$. La théorie géométrique des invariants montre que pour toute représentation W de $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$, il existe un entier $s \geq 0$ tel que $\mathcal{F}(W)$ soit facteur direct du complexe scindé $\mathrm{R}f_*(\mathbb{Q}_\ell)$ où $f : G^s \rightarrow \mathcal{A}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/\ell])$ est la projection canonique.

1.3.10. Variétés de Kuga-Sato. — Pour traiter le cas des systèmes locaux automorphes non triviaux, nous aurons aussi besoin des variétés de Kuga-Sato, qui compactifient les produits de la variété abélienne universelle G sur $\mathcal{A}_0$. Le théorème suivant est dû à Faltings et Chai [FC, th. VI.1.1].

Théorème 1.3.11. — *Pour tout $s \geq 0$, il existe un schéma $\bar{G}_s$ propre sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ qui contient G^s comme ouvert dense. Le schéma $\bar{G}_s$ a des singularités toriques sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ et le complémentaire de G^s dans $\bar{G}_s$ est localement pour la topologie étale le bord d'un fibré en plongements toriques sur $\bar{\mathcal{A}}_0$.*

Le schéma $\bar{G}_s$ n'est pas canonique mais dépend d'un choix combinatoire compatible à celui de $\mathfrak{C}_V$.

Remarque 1.3.12. — *D'après [FC, th. IV.5.7], la variété abélienne G^s sur $\mathcal{A}_0$ s'étend canoniquement en un schéma semi-abélien canonique sur $\bar{\mathcal{A}}_0$. Ce schéma semi-abélien agit par construction sur $\bar{G}_s$ de manière compatible à son action par translation sur lui-même. Une condition de nature combinatoire [FC, th. VI.1.13 (2)] permet de s'assurer que $\bar{G}_s$ contient le prolongement semi-abélien de G^s mais il n'est pas clair qu'on puisse simultanément choisir $\bar{G}_s$ lisse et contenant ce schéma semi-abélien [FC, rem. VI.1.4].*

Remarque 1.3.13. — On peut choisir $\bar{G}_s$ lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ et le complémentaire de G^s dans $\bar{G}_s$ diviseur à croisements normaux à branches lisses sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$. Le lecteur prendra par contre garde que, contrairement à ce qui est parfois affirmé à tort dans la littérature, on ne peut a priori pas choisir $\bar{G}_s$ semi-stable sur $\bar{A}_0$.

1.3.14. Compactification des strates. — Soit $w \in W^{\mathrm{adm}}$. On dispose donc de la strate fermée de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{A}_0^{\leq w}$ de $\mathcal{A}_0^*$. Définissons sa compactification minimale.

Définition 1.3.15. — La compactification minimale $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ de $\mathcal{A}_0^{\leq w}$ est l'adhérence schématique de $\mathcal{A}_0^{\leq w}$ dans $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. La compactification minimale $\mathcal{A}_0^{w,*}$ de $\mathcal{A}_0^w$ est le complémentaire dans $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ du fermé

$$\bigcup_{w' \prec w} \mathcal{A}_0^{\leq w',*}$$

Les compactifications $\mathcal{A}_0^{w,*}$ et $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ héritent de la stratification du bord de $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$ notons

$$\mathcal{A}_{0,V'}^{w,*}$$

et $\mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w,*}$ les intersections de $\mathcal{A}_0^{w,*}$ et de $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ avec $\mathcal{A}_{0,V'} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Ces schémas ne dépendent que de la classe de V' dans $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$. On obtient l'existence de stratifications

$$\mathcal{A}_0^{w,*} = \coprod_{V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V} \mathcal{A}_{0,V'}^{w,*}$$

et

$$\mathcal{A}_0^{\leq w,*} = \coprod_{V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V} \mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w,*}$$

Rappelons qu'à V' est associé le sous-groupe parabolique $P_{V'}$ de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$ de sous-groupe de Lévi $\mathrm{GL}(V' \otimes \mathbb{Q}) \times \mathrm{GSp}((V'^{\perp}/V') \otimes \mathbb{Q})$. On associe donc à V' une injection de $\mathrm{GSp}((V'^{\perp}/V') \otimes \mathbb{Q}_p)$ dans $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q}_p)$. Rappelons que les groupes de Weyl affines des groupes déployés $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_p((t)))$ sont canoniquement isomorphes et désignons par $W_{V'}$ le groupe de Weyl affine de $\mathrm{GSp}((V'^{\perp}/V') \otimes \mathbb{F}_p((t)))$. On obtient finalement une injection $\varphi_{V'} : W_{V'} \hookrightarrow W$ compatible à l'ordre de Bruhat. Notons $W_{V'}^{\mathrm{adm}} \subset W_{V'}$ le sous-ensemble des éléments admissibles, qui est défini comme $W^{\mathrm{adm}} \subset W$ mais en remplaçant la grosse variété de Siegel $\mathcal{A}_0$ par la petite $\mathcal{A}_{0,V'}$. Le lemme suivant est clair d'après la définition des éléments admissibles.

Lemme 1.3.16. — Le morphisme $\varphi_{V'}$ envoie $W_{V'}^{\mathrm{adm}}$ dans W^{adm} .

Proposition 1.3.17. — *La strate de bord $\mathcal{A}_{0,V'}^{w,*}$ de $\mathcal{A}_0^{w,*}$ est vide si w n'est pas dans l'image de $\varphi_{V'}$ et égale à*

$$\mathcal{A}_{0,V'}^{w'}$$

si $w = \varphi_{V'}(w')$. De même, la strate de bord $\mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w,}$ de $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ est vide si w n'est pas dans l'image de $\varphi_{V'}$ et égale à*

$$\mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w'}$$

si $w = \varphi_{V'}(w')$.

Remarque 1.3.18. — *Ainsi le bord des compactifications minimales des strates de Kottwitz-Rapoport est formé de strates de Kottwitz-Rapoport pour d'autres variétés de Siegel plus petites. De même pour l'adhérence des strates de Kottwitz-Rapoport.*

Démonstration. — Utilisons la compactification toroïdale $\pi : \bar{\mathcal{A}}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0^*$ dont la structure locale près de la V' -strate est décrite par le diagramme 1.3.A. Il suffit de montrer que si $\mathcal{N}_{0,V'}^{w'}$ désigne l'image inverse de la strate de Kottwitz-Rapoport

$$\mathcal{A}_{0,V'}^{w'}$$

de la petite variété de Siegel $\mathcal{A}_{0,V'} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ par le morphisme $\mathcal{N}_{0,V'} \rightarrow \mathcal{A}_{0,V'}$, la trace de $\mathcal{A}_0^w \subset \mathcal{A}_0$ dans un ouvert étale de $\mathcal{N}_{0,V'}$ vu comme voisinage du bord de $\bar{\mathcal{A}}_0$ est soit vide si $w \notin \mathrm{Im}(\varphi_{V'})$ soit égale à $\mathcal{N}_{0,V'}^{w'}$ si $w = \varphi_{V'}(w')$. Cela est une conséquence aisée mais fastidieuse à expliquer dans le détail des propriétés modulaires de tous les objets en jeu : les strates de Kottwitz-Rapoport paramètrent des chaînes de schémas abéliens dont les chaînes de filtrations de Hodge sont de position prescrite par l'élément du groupe de Weyl affine et le schéma $\mathcal{N}_{0,V'}$ paramètre certains 1-motifs. L'application entre voisinages étales de $\mathcal{N}_{0,V'}$ et de $\mathcal{A}_0$ est fournie par la construction de Mumford qui associe des variétés abéliennes dégénérantes à certains 1-motifs. Mais la filtration de Hodge d'une construction de Mumford peut se lire sur le 1-motif correspondant, ce qui implique la compatibilité des stratifications de Kottwitz-Rapoport de $\mathcal{A}_0$ et de $\mathcal{N}_{V',0}$. $\square$

Remarque 1.3.19. — *Le schéma $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ paraît intéressant du point de vue de la théorie géométrique des représentations. Il présente deux type de singularités. Les premières sont reliées à la structure de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}$ et notamment aux polynômes de Kazhdan-Lusztig, puisque c'est déjà le cas de celles de $\mathcal{A}_0^{\leq w}$. Les secondes sont reliées à la structure des sous-groupes paraboliques du groupe symplectique, puisque c'est le cas de celles de $\mathcal{A}_0^*$.*

1.4. Cohomologie de la compactification minimale. — La compactification minimale étant canonique, il semble naturel d'étudier sa cohomologie étale. Par opposition, la cohomologie de la compactification toroïdale dépend par exemple du choix combinatoire. La compactification minimale étant singulière au bord, cela même au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, il est encore plus naturel d'en étudier la cohomologie d'intersection. Si on désire combiner cette étude avec celle de la mauvaise réduction de $\mathcal{A}_0$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, il faut de plus étudier les cycles proches $R\Psi_{\mathcal{A}_0^*}$ évalués en le complexe

d'intersection $\mathcal{IC}_{\mathcal{A}_0^*}$. Notre première tâche sera de montrer que les opérations de cycles proches et de prolongement intermédiaire commutent dans ce cadre.

1.4.1. Commutation. — Notons j l'immersion ouverte de $\mathcal{A}_0$ dans sa compactification minimale $\mathcal{A}_0^*$ et J celle dans la compactification toroïdale $\bar{\mathcal{A}}_0$. On dispose donc d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{\mathcal{A}}_0 \\ & \nearrow J & \downarrow \pi \\ \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{j} & \mathcal{A}_0^* \end{array}$$

dans lequel π est propre. Nous noterons comme d'habitude $j_{!*}$ le foncteur de prolongement intermédiaire étendu de la catégorie des faisceaux pervers à celle des faisceaux pervers décalés sur $\mathcal{A}_0$.

Lemme 1.4.2. — *Il existe un isomorphisme canonique entre $R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ j_{!*}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans la catégorie des faisceaux pervers décalés sur $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.*

Remarque 1.4.3. — *Cet isomorphisme est tout aussi valable pour les coefficients $\mathbb{Z}/\ell^r$ pour tout $r \geq 0$.*

Démonstration. — On commence par montrer que l'adjonction induit un isomorphisme entre $R\Psi_{\bar{\mathcal{A}}_0} \circ J_*(\mathbb{Q}_\ell)$ et $J_* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ où J_* désigne le foncteur dérivé du prolongement ordinaire. La preuve est locale sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ et on se ramène donc à l'assertion correspondante où $\mathcal{A}_0$ et $\bar{\mathcal{A}}_0$ sont respectivement remplacés par $\mathcal{N}_{0,V'}$ et $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ pour $V' \in \mathfrak{C}_V$. Quitte à localiser plus encore pour la topologie étale sur $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ on peut remplacer $\mathcal{N}_{0,V'}$ et $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ par un tore E et un fibré en plongement torique $\bar{E}$ constants sur $\mathcal{B}_{0,V'}$. Notons $k : E \hookrightarrow \bar{E}$ l'immersion ouverte canonique. Ainsi on a localement $J = k \times \mathrm{Id}_{\mathcal{B}_{0,V'}}$. D'après la formule du produit d'Illusie et Gabber [I2] on a $R\Psi_{E \times \mathcal{B}_{0,V'}}(\mathbb{Q}_\ell) = R\Psi_E(\mathbb{Q}_\ell) \boxtimes R\Psi_{\mathcal{B}_{0,V'}}(\mathbb{Q}_\ell)$ et

$$R\Psi_{\bar{E} \times \mathcal{B}_{0,V'}}(J_* \mathbb{Q}_\ell) = R\Psi_{\bar{E}}(k_* \mathbb{Q}_\ell) \boxtimes R\Psi_{\mathcal{B}_{0,V'}}(\mathbb{Q}_\ell)$$

Il suffit alors d'utiliser la formule bien connue $R\Psi_{\bar{E}} \circ k_*(\mathbb{Q}_\ell) = k_* \circ R\Psi_E(\mathbb{Q}_\ell)$ valable pour tout complémentaire d'un diviseur à croisements normaux relatif dans un schéma lisse.

On en déduit par dualité un isomorphisme entre $R\Psi_{\bar{\mathcal{A}}_0} \circ J_!(\mathbb{Q}_\ell)$ et $J_! \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. Appliquant π_* et le théorème de changement de base propre, on en déduit l'égalité de $R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ j_*(\mathbb{Q}_\ell)$ et de $j_* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ puis de $R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ j_!(\mathbb{Q}_\ell)$ et de $j_! \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. Il suffit alors d'appliquer le foncteur ${}^p\mathcal{H}^0$ de cohomologie perverse, qui commute avec $R\Psi$ de part un théorème d'Illusie [I2] puis d'utiliser la définition du prolongement intermédiaire comme image perverse de ${}^p\mathcal{H}^0(j_!)$ dans ${}^p\mathcal{H}^0(j_*)$. $\square$

Le même énoncé est en fait valable avec des coefficients automorphes quelconques.

Lemme 1.4.4. — Soit W une représentation de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$. Il existe un isomorphisme canonique entre $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}(W))$ et $j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\overline{\mathcal{F}(W)})$ dans la catégorie des faisceaux pervers décalés sur $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

Démonstration. — Comme il existe $s \geq 0$ tel que $\mathcal{F}(W)$ soit facteur direct du complexe $\mathrm{R}f_*(\mathbb{Q}_\ell)$ où $f : G^s \rightarrow \mathcal{A}_0$ est la projection, il suffit de montrer l'énoncé pour $\mathrm{R}f_*(\mathbb{Q}_\ell)$ qui est somme directe de faisceaux pervers décalés. On utilise alors le même schéma de preuve en remplaçant E et $\bar{E}$ par les tores et plongements toriques intervenant dans la description de la compactification $\bar{G}_s$ de G^s . $\square$

1.4.5. Cohomologie des strates. — Soit $w \in W^{\mathrm{adm}}$. On dispose de la strate fermée de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{A}_0^{\leq w}$ et de sa compactification minimale $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$. Notons

$$j^w : \mathcal{A}_0^w \hookrightarrow \mathcal{A}_0^{\leq w}$$

et

$$j : \mathcal{A}_0^{\leq w} \hookrightarrow \mathcal{A}_0^{\leq w,*}$$

les immersions ouvertes canoniques. Il est naturel d'étudier le faisceau pervers décalé $j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathbb{Q}_\ell)$ ou ses variantes à coefficients $j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))$ pour toute représentation W du groupe symplectique. Ces faisceaux codent d'ailleurs cohomologiquement les deux types de singularités abordés dans la remarque 1.3.19. Soit $V' \in \mathfrak{C}_V$ et $w' \in W_{V'}^{\mathrm{adm}}$ tel que $\varphi_{V'}(w') = w$. Notons

$$i_{V'}^{w'} : \mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w'} \hookrightarrow \mathcal{A}_0^{\leq w,*}$$

l'immersion localement fermée d'une strate de bord de la compactification minimale d'une strate de Kottwitz-Rapoport fermée et notons

$$j^{w'} : \mathcal{A}_{0,V'}^{w'} \hookrightarrow \mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w'}$$

l'immersion ouverte d'une petite strate de Kottwitz-Rapoport. Notre but est de décrire le complexe $(i_{V'}^{w'})^* \circ j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))$ dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur

$$\mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w'}.$$

Cela permettra ultimement de décrire $j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))$ dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur $\mathcal{A}_0^{\leq w,*}$ puisque

$$[j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))] = \sum_{V' \in (\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_w} [(i_{V'}^{w'})_! \circ (i_{V'}^{w'})^* \circ j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))]$$

où $(\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_w$ désigne le sous-ensemble des $V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V$ tels que $w = \varphi_{V'}(w')$ pour un (nécessairement unique) $w' \in W_{V'}^{\mathrm{adm}}$ et où $[\cdot]$ désigne l'image dans le groupe de Grothendieck.

Commençons par introduire quelques notations. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$ notons $\mathcal{E}_{V'}$ l'ensemble des drapeaux $V^\bullet = (0 \subsetneq V^r \subsetneq \cdots \subsetneq V^0)$ d'éléments de $\mathfrak{C}_V$ tels que V^0 soit conjugué à V' par le sous-groupe de niveau Γ_V . L'ensemble $\mathcal{E}_{V'}$ est muni d'une action de Γ_V et le quotient est fini. Tout élément $V^\bullet$ de $\mathcal{E}_{V'}$ détermine un sous-groupe parabolique $P_{V^\bullet} = \mathrm{Stab}(V^\bullet \otimes \mathbb{Q})$ de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$. Notons $N_{V^\bullet}$ le radical unipotent

de $P_{V^\bullet}$. On notera $\mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}), \dots)$ le complexe de cohomologie de son algèbre de Lie. Le sous-groupe de Lévi de $P_{V^\bullet}$ est canoniquement isomorphe au produit

$$\mathrm{GL}(V^r) \times \mathrm{GL}(V^{r-1}/V^r) \times \dots \times \mathrm{GL}(V^0/V^1) \times \mathrm{GSp}(V^{0\perp}/V^0).$$

Notons $\Gamma_{V^\bullet}^l$ l'intersection de Γ_V avec $\mathrm{GL}(V^r) \times \mathrm{GL}(V^{r-1}/V^r) \times \dots \times \mathrm{GL}(V^0/V^1)$. C'est un sous-groupe discret d'un produit de groupes linéaire. On notera $\mathrm{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \dots)$ son complexe de cohomologie des groupes. Notons aussi $\sharp V^\bullet$ l'entier r associé au drapeau $V^\bullet = (0 \subsetneq V^r \subsetneq \dots \subsetneq V^0)$.

Théorème 1.4.6. — Soit W une représentation irréductible de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$. Dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur $\mathcal{A}_{0,V'}^{\leq w'}$, on a égalité entre $(i_{V'}^{w'})^* \circ j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))$ et

$$\sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot j_{!*}^{w'} \left(\mathcal{F}^{V'}(\mathrm{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t) \right).$$

Dans cet énoncé apparaît le foncteur « système local automorphe » $\mathcal{F}^{V'}$ qui est l'analogue pour $\mathcal{A}_{0,V'}$ de ce qu'était $\mathcal{F}$ pour $\mathcal{A}_0$. De plus on a dérivé ce foncteur pour qu'il définisse un foncteur de la catégorie des complexes de représentations de $\mathrm{GSp}((V'^\perp/V') \otimes \mathbb{Q})$ dans celle des complexes ℓ -adiques sur $\mathcal{A}_{0,V'}$. L'indice t signifie certaines troncations des représentations pour l'action de tores centraux. Ces troncations dépendent du poids de W et sont explicitement décrites dans [S3]. Nous ne présenterons pas ici la démonstration de ce théorème, pour laquelle nous renvoyons à [S3]. Disons simplement qu'il s'agit de d'abord calculer à la Pink le complexe $(i_{V'}^{w'})^* \circ j_* \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))$ où j_* désigne le foncteur dérivé du prolongement ordinaire. Il faut ensuite appliquer la théorie des troncations par le poids de Morel [M2] qui permet relier des objets du type $(i_{V'}^{w'})^* \circ j_{!*}$ à des sommes d'objets du type $(i_{V'}^{w'})^* \circ j_*$, toute une combinatoire étant cachée derrière les formules.

1.4.7. Cycles proches au bord. — Soit $V' \in \mathcal{C}_V/\Gamma_V$. Notons $j : \mathcal{A}_0 \hookrightarrow \mathcal{A}_0^*$ l'immersion ouverte et

$$i_{V'} : \mathcal{A}_{0,V'} \hookrightarrow \mathcal{A}_0^*$$

l'immersion localement fermée de la strate de bord paramétrée par V' . De la même manière que dans le paragraphe précédent, nous voulons à présent trouver une formule pour le complexe $(i_{V'})^* \circ j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W))$. Le théorème est le suivant.

Théorème 1.4.8. — Soit W une représentation irréductible de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$. Dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur $\mathcal{A}_{0,V'} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ on a égalité entre $(i_{V'})^* \circ j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W))$ et

$$\sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_{0,V'}} \left(\mathcal{F}^{V'}(\mathrm{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t) \right).$$

Remarque 1.4.9. — Dans l'article [S3], cet énoncé était déduit du théorème 1.4.6 via une décomposition des cycles proches en facteurs de Jordan-Hölder. Comme l'a remarqué Sophie Morel, cette déduction est incorrecte car le foncteur $j_{!*}$ n'étant pas exact, connaître l'image par $j_{!*}$ des facteurs de Jordan-Hölder de $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ ne suffit pas à déterminer $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. Rien ne garantit par exemple que le faisceau pervers décalé $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ n'ait pas de support inclus dans le complémentaire de $\mathcal{A}_0$ dans $\mathcal{A}_0^*$ (voir cependant la proposition 1.4.14). Dans l'erratum à [S3], nous avons présenté une démonstration correcte du théorème 1.4.8 qui repose sur la théorie de Morel [M1] des complexes mixtes sur $\mathbb{Q}$ admettant une filtration par le poids. En voilà une autre démonstration, à peine différente mais qui n'utilise que les travaux de [M2].

Démonstration. — D'après [M2] pour tout nombre premier v ne divisant pas $p\ell n$, il existe pour tout $V'' \in \mathfrak{C}_V$ une égalité entre $i_{V''}^* \circ j_{!*}(\mathcal{F}(W))$ et

$$\sum_{V^\bullet \in \mathfrak{C}_{V''}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot \mathcal{F}^{V''}(\mathrm{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t))$$

dans le groupe de Grothendieck de la variété lisse $\mathcal{A}_{0,V''} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_v)$. Comme $j_{!*}(\mathcal{F}(W))$ est égal à

$$\sum_{V'' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V} (i_{V''})_! \circ (i_{V''})^* \circ j_{!*}(\mathcal{F}(W))$$

dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_v)$, on en déduit égalité entre $j_{!*}(\mathcal{F}(W))$ et

$$\sum_{V'' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V} \sum_{V^\bullet \in \mathfrak{C}_{V''}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot (i_{V''})_! \left(\mathcal{F}^{V''}(\mathrm{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t)) \right).$$

D'après l'analogue évident en caractéristique mixte de [L, th. 1.1.2], c'est-à-dire le théorème de Cebotarev pour les faisceaux pervers semi-simples, on obtient la même égalité dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n\ell p])$ donc en particulier dans celui de $\mathcal{A}_0^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$. En appliquant le foncteur triangulé $(i_{V'})^* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0^*}$ on obtient égalité entre $(i_{V'})^* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}(W))$ et

$$\sum_{V^\bullet \in \mathfrak{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot (i_{V'})^* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ (i_{V''})_! \left(\mathcal{F}^{V'}(\mathrm{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t)) \right)$$

dans le groupe de Grothendieck des faisceaux sur $\mathcal{A}_{0,V'} \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Mais $(i_{V'})^* \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}(W)) = (i_{V'})^* \circ j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W))$ d'après le lemme 1.4.4. D'autre part on a d'après la démonstration de ce même lemme égalité entre $R\Psi_{\mathcal{A}_0^*} \circ (i_{V''})_!$ et $(i_{V''})_! \circ R\Psi_{\mathcal{A}_{0,V''}}$ lorsqu'on les évalue sur des complexes de faisceaux automorphes. Cela suffit à finir la démonstration puisque $(i_{V'})^* \circ (i_{V''})_!$ est nul si $V' \neq V''$ dans $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$ et l'identité si $V' = V''$ dans $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$. $\square$

Remarque 1.4.10. — La démonstration de [L, th. 1.1.2] n'utilise que le théorème de Cebotarev pour les systèmes locaux sur les schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ dû à Serre [S, th. 7], le fait que la catégorie des faisceaux pervers est artiniennne et la

description des objets simples de cette catégorie. En particulier cette démonstration s'étend sans modification au cas des schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Rappelons que les faisceaux pervers décalés $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ se correspondent dans le diagramme 1.2.C, étant tous deux images inverses de $R\Psi_{[\mathcal{M}_0/I_0]}(\mathbb{Q}_\ell)$. Fixons un relèvement du Frobenius géométrique dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et servons-nous en pour voir les cycles proches comme des faisceaux pervers décalés de Weil.

Lemme 1.4.11. — *Il existe une décomposition*

$$R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell) = \sum_{w \in W^{\mathrm{adm}}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} m(w, i) \cdot j_{!*}^w(\mathbb{Q}_\ell)(i)$$

dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Weil sur $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$, où les $m(w, i)$ sont des entiers relatifs presque tous nuls et (i) désigne un twist de Tate.

Démonstration. — Le faisceau pervers décalé $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ est I_0 -équivariant sur $\mathcal{M}_0 \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$. D'après la conjecture de Kottwitz (voir [HN] ou le théorème 1.2.9), ses traces semi-simples de Frobenius sur $\mathcal{M}_0(\mathbb{F}_q)$ sont dans $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ pour toute puissance q de p . On peut donc utiliser [GH, lem. 4.3] qui affirme que les constituants simples de ce faisceau pervers décalé sont des twists de Tate entiers des $j_{!*}^w(\mathbb{Q}_\ell)$. $\square$

Corollaire 1.4.12. — *Pour toute représentation W de $\underline{\mathrm{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$, il existe une décomposition*

$$R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W)) = \sum_{w \in W^{\mathrm{adm}}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} m(w, i) \cdot j_{!*}^w \circ j^{w,*}(\mathcal{F}(W))(i)$$

dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Weil sur $\mathcal{A}_0 \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_p})$, où les $m(w, i)$ sont les entiers relatifs décrits dans le lemme 1.4.11 et (i) désigne un twist de Tate.

Démonstration. — Le lemme 1.4.11 et le diagramme 1.2.C montrent que c'est vrai si W est la représentation triviale. Puisque $\mathcal{F}(W)$ est un système local sur $\mathcal{A}_0$ on a $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W)) = \mathcal{F}(W) \otimes^{\mathbb{L}} R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $j_{!*}^w \circ j^{w,*}(\mathcal{F}(W)) = \mathcal{F}(W) \otimes^{\mathbb{L}} j_{!*}^w(\mathbb{Q}_\ell)$. On en déduit le résultat. $\square$

Soit $V' \in \mathfrak{C}_V$ et $\varphi_{V'} : W_{V'}^{\mathrm{adm}} \hookrightarrow W^{\mathrm{adm}}$ le plongement correspondant. Soit $w' \in W_{V'}^{\mathrm{adm}}$. Posons $w = \varphi_{V'}(w')$. Nous venons de définir pour tout $i \in \mathbb{Z}$ un entier $m(w, i)$ en décomposant $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ en faisceaux pervers simples. On obtient de même un entier $m(w', i)$ en décomposant $R\Psi_{\mathcal{M}_{0,V'}}(\mathbb{Q}_\ell)$ selon les complexes d'intersections twistés des strates de Kottwitz-Rapoport, où $\mathcal{M}_{0,V'}$ est le modèle local de la petite variété de Siegel $\mathcal{A}_{0,V'}$. Le lemme suivant exprime un principe de conservation des multiplicités au bord.

Lemme 1.4.13. — *On a $m(w, i) = m(w', i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Raisonnons géométriquement en utilisant le bord de $\mathcal{A}_0$. On peut tout d'abord remplacer $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ par $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ qui se décompose aussi selon les complexes d'intersections des strates de Kottwitz-Rapoport de $\mathcal{A}_0 \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$. D'après la proposition 1.3.17, la question à résoudre peut être traitée par localisation étale de $\mathcal{A}_0$ au voisinage de la strate de bord de $\bar{\mathcal{A}}_0$ paramétrée par V' . Ce voisinage est isomorphe à un voisinage de $\mathcal{N}_{0,V'}$ qui se dévisse comme dans le diagramme 1.3.A. On en déduit que localement pour la topologie étale près du bord, $\mathcal{A}_0^w$ se fibre de manière lisse sur $\mathcal{A}_{0,V'}^w$. On en déduit le lemme. $\square$

Proposition 1.4.14. — *Le faisceau pervers décalé $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W))$ est sans support inclus dans le bord $\mathcal{A}_0^* - \mathcal{A}_0$ pour toute représentation W de $\underline{\text{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$.*

Démonstration. — On se réduit au cas où W est irréductible. En combinant les théorèmes 1.4.6 et 1.4.8, le corollaire 1.4.12 et le lemme 1.4.13, on trouve égalité dans le groupe de Grothendieck entre $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W))$ et

$$\sum_{w \in W^{\text{adm}}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} m(w, i) \cdot j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))(i).$$

Cela élucide la structure des facteurs de Jordan-Hölder de $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathcal{F}(W))$ et suffit à conclure. $\square$

1.4.15. Comptage de points. — Il est bien sûr possible de combiner les théorèmes 1.2.9 et 1.4.8. Le premier de ces deux théorèmes élucide la trace semi-simple de $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$, donc aussi de $R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$, via des isomorphismes d'algèbres de Hecke, le résultat étant une fonction de Bernstein pour le groupe $\underline{\text{GSp}}(V)$. Le second décompose $(i_{V'})^* \circ j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ en termes de $R\Psi_{\mathcal{A}_{0,V'}}$ appliqué à un complexe de faisceaux automorphes sur $\mathcal{A}_{0,V'}$. On obtient donc la trace semi-simple du Frobenius géométrique sur $(i_{V'})^* \circ j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$. On trouve le produit d'une fonction de Bernstein pour le groupe $\underline{\text{GSp}}(V'^\perp/V')$ et de la trace du Frobenius sur la somme de complexes de faisceaux automorphes

$$\sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot \mathcal{F}^{V'}(\text{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \text{RInv}(\text{Lie}(N_{V^\bullet}), \mathbb{Q}_\ell)_t)).$$

Soit $\mathbb{F}_q$ une extension finie de $\mathbb{F}_p$. On trouve par la formule de Grothendieck-Lefschetz que la trace semi-simple du Frobenius géométrique de $\mathbb{F}_q$ sur la cohomologie d'intersection totale $\text{IH}^*(\mathcal{A}_0^* \times \text{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p), \mathcal{F}(W))$ est égale à

$$\sum_{V' \in \mathcal{C}_V/\Gamma_V} \sum_{x \in \mathcal{A}_{0,V'}(\mathbb{F}_q)} \sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot \tau_{R\Psi_{\mathcal{A}_{0,V'}}}(x) \times \\ \text{tr} \left(\text{Frob}_x, \mathcal{F}^{V'}(\text{RInv}(\Gamma_{V^\bullet}^l, \text{RInv}(\text{Lie}(N_{V^\bullet}), \mathbb{Q}_\ell)_t)) \right).$$

Dans cette formule,

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0, V'}}(x)$$

ne dépend que de la strate de Kottwitz-Rapoport $w_x \in W_{V'}^{\mathrm{adm}}$ sur laquelle est $x \in \mathcal{A}_{0, V'}(\mathbb{F}_p)$ et on a

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_0, V'}}(x) = \tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0, V'}}(w_x)$$

où $\mathcal{M}_{0, V'}$ est le modèle local de la variété de Siegel $\mathcal{A}_{0, V'}$ et

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0, V'}}$$

est vue comme une fonction de $W_{V'}^{\mathrm{adm}}$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ dont la description est donnée dans le théorème 1.2.9.

2. Niveau pro- p -iwahorique

Nous présentons ici des résultats obtenus avec Tom Haines [HS], qui concernent les variétés ouvertes de niveau $\Gamma_1(p)$, et la manière dont ils peuvent être étendus à certaines compactifications. À partir de maintenant, nous changerons de base à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ toutes les constructions précédentes sans forcément l'indiquer explicitement à chaque fois.

2.1. Variétés de Siegel. — Nous introduisons la variété de Siegel $\mathcal{A}_1$ qui paramètre des générateurs des gradués du drapeau de sous-groupes universel sur $\mathcal{A}_0$. Pour cela, il nous faut au préalable rappeler la théorie de Oort-Tate.

2.1.1. Théorie de Oort-Tate. — Notons $\omega_p \in p \cdot \mathbb{Z}_p^*$ la quantité algébrique défini par Oort-Tate [OT] et X le fermé de $\mathbb{A}^2 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ défini par l'équation $a \cdot b = \omega_p$ où a et b sont les deux coordonnées de $\mathbb{A}^2$. Faisons agir $\mathbb{G}_m$ sur X par la formule $\lambda \cdot (a, b) = (\lambda^{p-1} \cdot a, \lambda^{1-p} \cdot b)$ et considérons le champ quotient $[X/\mathbb{G}_m]$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. La théorie de Oort-Tate identifie canoniquement ce champ à celui des groupes finis et plats de rang p sur les schémas sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. De tels groupes sont d'ailleurs communément appelés d'Oort-Tate. Le groupe d'Oort-Tate universel sur $[X/\mathbb{G}_m]$ s'uniformise comme $[X'/\mathbb{G}_m]$ où X' est le fermé de $X \times \mathbb{A}^1$ d'équation $z^p = z \cdot a$ où z est la coordonnée sur $\mathbb{A}^1$ et où $\mathbb{G}_m$ agit sur (a, b, z) par la formule $\lambda \cdot (a, b, z) = (\lambda^{p-1}a, \lambda^{1-p}b, \lambda z)$. Sa section neutre est donnée par le lieu d'annulation de z .

Soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et K un groupe d'Oort-Tate sur S . La donnée de K équivaut donc à celle de $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur S , de $a \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{p-1})$ et de $b \in \Gamma(S, \mathcal{L}^{1-p})$ tels que $a \cdot b = \omega_p \in \mathbb{Z}_p \subset \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

Définition 2.1.2. — Un générateur d'Oort-Tate de K est une section $z \in \Gamma(S, \mathcal{L})$ telle que $z^{p-1} = a$.

Ainsi le champ des générateurs d'Oort-Tate est égal à $[Y/\mathbb{G}_m]$ où $Y \subset \mathbb{A}^3 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[a, b, z])$ est défini par les équations $a \cdot b = \omega_p$ et $z^{p-1} = a$ et où $\mathbb{G}_m$ agit sur Y par la formule $\lambda \cdot (a, b, z) = (\lambda^{p-1}a, \lambda^{1-p}b, \lambda z)$. Le morphisme canonique de $[Y/\mathbb{G}_m]$ dans $[X/\mathbb{G}_m]$ est fini et plat de degré $p-1$. Il est étale galoisien

de groupe $\mathbb{F}_p^* = \mu_{p-1}$ exactement sur l'ouvert de $[X/\mathbb{G}_m]$ où a est non nul, qui est l'ouvert où le groupe d'Oort-Tate universel est étale. Dans ce cas, la donnée d'un générateur d'Oort-Tate est équivalente à la donnée usuelle d'un générateur d'un groupe étale monogène.

Rappelons enfin que la dualité de Cartier des groupes finis et plats de rang p revient à changer le fibré $\mathcal{L}$ en son inverse et à inverser les rôles de a et de b . Ainsi l'automorphisme de $[X/\mathbb{G}_m]$ fourni par le dual du groupe de Cartier universel est induit par l'échange des coordonnées sur $X \subset \mathbb{A}^2$.

2.1.3. Espace de modules. — Rappelons que sur $\mathcal{A}_0$ existe une famille universelle de groupes finis et plats $H_1, \dots, H_g$. On l'étend par isotropie en posant

$$H_{g+1} = H_{g-1}^\perp, \dots, H_{2g-1} = H_1^\perp, H_{2g} = 0^\perp = G[p].$$

On a pour tout i une inclusion de H_i dans H_{i+1} . On pose désormais $K_i = H_i/H_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ avec la convention $H_0 = 0$. On obtient $2g$ groupes finis et plats de rang p sur $\mathcal{A}_0$ qui vérifient de plus $K_{2g+1-i} = K_i^\vee$ où $\vee$ désigne la dualité de Cartier des groupes finis et plats. D'après la théorie de Oort-Tate, la donnée de K_i définit pour tout $1 \leq i \leq 2g$ un morphisme

$$\mathcal{A}_0 \longrightarrow [X/\mathbb{G}_m].$$

On notera désormais $\mathcal{L}_i, a_i$ et b_i les paramètres d'Oort-Tate de K_i sur $\mathcal{A}_0$. Par dualité on a $\mathcal{L}_{2g+1-i} = \mathcal{L}_i^{-1}$, $a_{2g+1-i} = b_i$ et $b_{2g+1-i} = a_i$ pour tout i .

Définition 2.1.4. — Le schéma $\mathcal{A}_1$ au-dessus de $\mathcal{A}_0$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ paramètre les sections $z_i \in \Gamma(\mathcal{A}_0, \mathcal{L}_i)$ telles que $z_i^{p-1} = a_i$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ et telles que la fonction $z_i \cdot z_{2g+1-i}$ soit indépendante de i .

C'est donc le sous-schéma donné par des conditions de symplecticité dans le schéma des générateurs de Oort-Tate des gradués du drapeau de groupes finis et plats universel sur $\mathcal{A}_0$. Le morphisme de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_0$ est fini et plat. Soit $T \simeq \mathbb{G}_m^{g+1}$ le tore maximal diagonal de $\underline{\mathrm{GSp}}(V)$ et $T^{\mathrm{der}} \simeq \mathbb{G}_m^g$ celui de $\underline{\mathrm{Sp}}(V)$. Le groupe fini $T(\mathbb{F}_p)$ agit sur $\mathcal{A}_1$ en respectant les fibres de la projection vers $\mathcal{A}_0$; son action est transitive dans les fibres. Le morphisme étale $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_0$ est un torseur sous $T(\mathbb{F}_p)$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ et ce revêtement ramifie en fibre spéciale.

Remarque 2.1.5. — Bien qu'on ne l'ait défini que sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, le schéma $\mathcal{A}_1$ existe bien sûr sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. En effet, sa définition sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/np])$ est claire car il suffit de paramétrer les générateurs des K_i au sens de la théorie des groupes usuelle. Oort et Tate [OT] définissent de plus un anneau Λ_p de type fini sur $\mathbb{Z}$ et contenu dans $\mathbb{Z}_p$ sur lequel leur classification est toujours valable. La définition 2.1.4 a donc un sens sur $\mathrm{Spec}(\Lambda_p[1/n])$. On dispose d'une donnée de recollement entre ces deux définitions sur $\mathrm{Spec}(\Lambda_p[1/np])$ et on obtient un schéma $\mathcal{A}_1$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ par descente étale.

2.2. Modèle local. — Tout comme $\mathcal{A}_0$, le schéma $\mathcal{A}_1$ possède un modèle local. Pour comprendre cet objet, la première question à résoudre est relative à $\mathcal{A}_0$ et à $\mathcal{M}_0$: parmi les paramètres d'Oort-Tate $(\mathcal{L}_i, a_i, b_i)$ de K_i sur $\mathcal{A}_0$, quelle quantité d'information provient-elle de $\mathcal{M}_0$ via le diagramme 1.2.C ? On ne pas s'attendre à ce que le triplet $(\mathcal{L}_i, a_i, b_i)$ existe sur $\mathcal{M}_0$ car cela voudrait dire qu'il en est de même de K_i , ce qui est faux. Néanmoins nous allons voir que suffisamment d'information subsiste pour accéder aux singularités du schéma $\mathcal{A}_1$ et même du morphisme de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_0$.

Remarque 2.2.1. — *Il est absurde d'imaginer que $(\mathcal{L}_i, a_i, b_i)$ donc K_i descend de $\mathcal{A}_0$ à $[\mathcal{M}_0/I_0]$ donc aussi à $\mathcal{M}_0$. Supposons par l'absurde que ce soit le cas. Pour tout élément de translation $w \in W^{\text{adm}}$, la strate de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{M}_0^w$ est ordinaire. La restriction du groupe K_i à $\mathcal{M}_0^w$ est donc isomorphe localement pour la topologie étale soit à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ soit à μ_p . Dans tous les cas, parler de sa monodromie sur $\mathcal{M}_0^w$ a un sens et cette monodromie fournit un $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ -torseur sur*

$$\mathcal{M}_0^w = \mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^{g(g+1)/2}.$$

Cette monodromie est donc nécessairement triviale et il en est de même de celle de K_i sur $[\mathcal{M}_0^w/I_0]$ puis sur $\mathcal{A}_0^w$, ce qui contredit un célèbre théorème d'Igusa et Faltings et Chai [FC, §V.7] qui garantit que la monodromie de K_i sur $\mathcal{A}_0^w$ est maximale d'image $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^$.*

2.2.2. Complexe cotangent et diviseur. — Soit S un schéma noethérien et $\ell^\bullet$ un complexe parfait de la catégorie dérivée bornée des $\mathcal{O}_S$ -modules cohérents. Mumford et Knudsen ont défini dans [KM] son déterminant $\det(\ell^\bullet)$ qui est un fibré inversible sur S . Supposons de plus que ℓ soit quasi-isomorphe à zéro sur un ouvert dense de S . Mumford et Knudsen ont alors défini un diviseur de Cartier $\text{Div}(\ell^\bullet)$ sur S associé à $\ell^\bullet$. Il existe de plus un isomorphisme canonique entre $\mathcal{O}_S(\text{Div}(\ell^\bullet))$ et $\det(\ell^\bullet)$, ce qui permet de voir $\text{Div}(\ell^\bullet)$ comme une section $a(\ell^\bullet)$ de $\det(\ell^\bullet)$ qui est génériquement inversible (voir [HS]). Dans le cas où $\ell^\bullet$ est isomorphe au complexe

$$[\dots \ell^{i-1} \xrightarrow{d_i} \ell^i \xrightarrow{d_{i+1}} \ell^{i+1} \dots]$$

de $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres sur S , on a simplement $\det(\ell^\bullet) = \otimes_i \det(\ell^i)^{(-1)^i}$. Si de plus les d_i sont génériquement des isomorphismes, la section $a(\ell^\bullet) : \mathcal{O}_S \rightarrow \det(\ell^\bullet)$ est induite par le produit sur i des $\det(d_i)$.

Tout schéma en groupes fini et plat sur S admet un complexe cotangent défini par Illusie. Ce complexe est parfait concentré en degré -1 et 0 . Dans le cas d'un schéma en groupes d'Oort-Tate K sur un schéma S noethérien sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, ce complexe ℓ_K est canoniquement quasi-isomorphe au complexe

$$[\mathcal{L}^{-p} \xrightarrow{a} \mathcal{L}^{-1}]$$

concentré en degrés -1 et 0 , où $(\mathcal{L}, a, b)$ sont les paramètres d'Oort-Tate de K . Le déterminant de ℓ_K est donc canoniquement isomorphe à $\mathcal{L}^{p-1}$. Supposons K étale sur un ouvert dense de S , ce qui est par exemple le cas si S est plat sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. La section $a(\ell_K)$ de $\det(\ell_K)$ est alors égale à la section a de $\mathcal{L}^{p-1}$.

On peut en particulier appliquer cela à K_i sur $\mathcal{A}_0$ pour $1 \leq i \leq 2g$. Notons que ce schéma est bien plat sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ d'après [Go]. Il existe par ailleurs une résolution $0 \rightarrow K_i \rightarrow G_{i-1} \rightarrow G_i \rightarrow 0$ de K_i par des schémas abéliens sur $\mathcal{A}_0$. Rappelons qu'on a posé $G_i = G/H_i$ pour $i \leq g$ et qu'on a complété la définition par isotropie. Cette résolution fournit un quasi-isomorphisme canonique entre ℓ_{K_i} et

$$[\Omega_{G_i/\mathcal{A}_0}^1 \longrightarrow \Omega_{G_{i-1}/\mathcal{A}_0}^1].$$

Mais ce dernier complexe existe par définition sur $\mathcal{M}_0$ et même sur $[\mathcal{M}_0/I_0]$. Ainsi, le complexe ℓ_{K_i} descend à $[\mathcal{M}_0/I_0]$ et à $\mathcal{M}_0$ et il en est donc de même de son déterminant $\mathcal{L}_i^{p-1}$ et de sa section a_i . La seule quantité parmi $(\mathcal{L}_i, a_i, b_i)$ ne descendant pas à $\mathcal{M}_0$ est donc la racine $(p-1)$ -ème $\mathcal{L}_i$ de $\mathcal{L}_i^{p-1}$. Cela est à mettre en perspective avec la remarque 2.2.1.

Remarque 2.2.3. — *Considérons les fibres génériques rigides $\mathcal{A}_0^{\mathrm{rig}}$ et $\mathcal{M}_0^{\mathrm{rig}}$ des complétions formelles de $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{M}_0$ le long de leur fibre spéciale sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Fargues a défini dans [Fa] des fonctions*

$$\mathrm{deg}_i : \mathcal{A}_0^{\mathrm{rig}} \longrightarrow [0, 1]$$

qui mesurent la valuation p -adique des paramètres de Oort-Tate de K_i pour tout $1 \leq i \leq 2g$. Notre discussion précédente implique que ces fonctions existent en fait sur $\mathcal{M}_0^{\mathrm{rig}}$.

2.2.4. Définition du modèle. — Rappelons que $\mathcal{M}_0$ est l'espace de modules des diagrammes 1.2.A. Notons alors $L'_i = \det(W_{i-1}) \otimes \det(W_i)^{-1}$ qui est un fibré inversible sur $\mathcal{M}_0$ pour $1 \leq i \leq 2g$. Il est muni d'une section canonique A_i obtenue comme déterminant du morphisme de W_i dans W_{i-1} . On a $L'_{2g+1-i} = L_i'^{-1}$ pour tout i et le produit $A_i \cdot A_{2g+1-i}$ est indépendant de i .

Définition 2.2.5. — Le champ algébrique $\mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_0$ est l'espace de modules des racines $(p-1)$ -èmes (L_i, Z_i) de (L'_i, A_i) pour tout $1 \leq i \leq 2g$ telles que $L_{2g+1-i} = L_i^{-1}$ pour tout i et que la fonction $Z_i \cdot Z_{2g+1-i}$ soit indépendante de i .

Une racine $(p-1)$ -ème (L_i, Z_i) de (L'_i, A_i) est bien sûr un fibré en droites L_i tel que $L_i^{p-1} = L'_i$ et une section Z_i de L_i telle que $Z_i^{p-1} = A_i$. Introduisons le schéma

$$\mathcal{M}'_0 = \mathcal{A}_0 \times_{[\mathcal{M}_0/I_0]} \mathcal{M}_0.$$

Sur $\mathcal{M}'_0$ existent les fibrés $\mathcal{L}_i$ et L'_i pour tout $1 \leq i \leq 2g$. Notre discussion précédente implique l'existence d'un isomorphisme canonique

$$\mathcal{L}_i^{p-1} \xrightarrow{\sim} L'_i$$

pour tout i . De même, les sections a_i et A_i se correspondent pour tout i via l'isomorphisme précédent sur $\mathcal{M}'_0$.

Remarque 2.2.6. — *Le champ $\mathcal{M}_1$ est de Deligne-Mumford. Il se dévise en composé de morphismes représentables et d'une gerbe liée par $T^{\mathrm{der}}(\mathbb{F}_p) \simeq \mu_{p-1}^g$.*

Introduisons alors le schéma $\mathcal{M}'_1 = \mathcal{A}_1 \times_{\mathcal{A}_0} \mathcal{M}'_0$. Il existe bien sûr un morphisme de $\mathcal{M}'_1$ dans $\mathcal{A}_1$. Il existe également un morphisme de $\mathcal{M}'_1$ dans $\mathcal{M}_1$ obtenu en envoyant $(\mathcal{L}_i, z_i)$ sur (L_i, Z_i) où la racine $(p-1)$ -ème L_i de $L'_i = \mathcal{L}_i^{p-1}$ est égale à $\mathcal{L}_i$ et sa section Z_i est égale à z_i . Nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 2.2.7. — *Dans le diagramme*

(2.2.A)

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}'_1 & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{A}_1 & & \mathcal{M}_1 \end{array}$$

les morphismes sont lisses représentables de même dimension relative.

Ainsi, $\mathcal{M}_1$ mérite bien le nom de modèle local de $\mathcal{A}_1$. Les cycles proches $R\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $R\Psi_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ se correspondent par image inverse sur $\mathcal{M}'_1$.

2.2.8. Rigidifications. — Nous introduisons des variantes rigidifiées du modèle local dans lesquelles les racines des fibrés inversibles ne jouent plus aucun rôle. Le premier avantage sera d'obtenir des schémas et non pas des champs de Deligne-Mumford. Le second sera le lien entre leur fibre spéciale et la variété de drapeaux affine de niveau pro- p -iwahorique.

Notons $\mathcal{M}_0^+ \rightarrow \mathcal{M}_0$ le T -torseur paramétrant les trivialisations $\phi_i : L'_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ telles que la fonction $\phi_i \cdot \phi_{2g+1-i}$ soit indépendante de i , où le fibré inversible déterminant L'_i a été défini plus haut. On peut transporter sur $\mathcal{M}_0^+$ la section A_i de L'_i en une fonction α_i via ϕ_i pour tout $1 \leq i \leq 2g$. La fonction $\alpha_i \cdot \alpha_{2g+1-i}$ est indépendante de i . Nous noterons alors

$$\Pi : \mathcal{M}_1^+ \longrightarrow \mathcal{M}_0^+$$

le $T(\mathbb{F}_p)$ -revêtement ramifié qui paramètre les fonctions ζ_i telles que $\zeta_i^{p-1} = \alpha_i$ et $\zeta_i \cdot \zeta_{2g+1-i}$ soit indépendant de i pour tout $1 \leq i \leq 2g$. On dispose donc d'un diagramme commutatif

(2.2.B)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 & \longleftarrow & \mathcal{M}_1^+ \\ \downarrow & & \downarrow \Pi \\ \mathcal{M}_0 & \longleftarrow & \mathcal{M}_0^+ \end{array}$$

tel que les cycles proches $R\Psi_{\mathcal{M}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $R\Psi_{\mathcal{M}_1^+}(\mathbb{Q}_\ell)$ se correspondent par image inverse, et de même pour $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $R\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\mathbb{Q}_\ell)$. Remarquons que ce diagramme n'est pas cartésien et que le morphisme naturel

$$\mathcal{M}_1^+ \longrightarrow \mathcal{M}_0^+ \times_{\mathcal{M}_0} \mathcal{M}_1$$

est la présentation étale canonique d'une gerbe neutre liée par $T^{\text{der}}(\mathbb{F}_p)$. En effet, sur $\mathcal{M}_0^+ \times_{\mathcal{M}_0} \mathcal{M}_1$ on doit choisir une racine $(p-1)$ -ème du fibré inversible trivial,

alors que sur $\mathcal{M}_1^+$ on choisit par définition la racine triviale du fibré trivial. En fait $T^{\text{der}}(\mathbb{F}_p)$ agit sur $\mathcal{M}_1^+$ par multiplication sur les ζ_i et on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{M}_0^+ \times_{\mathcal{M}_0} \mathcal{M}_1 = [\mathcal{M}_1^+ / T^{\text{der}}(\mathbb{F}_p)] .$$

Bref, il revient finalement au même d'étudier la trace semi-simple du Frobenius de $R\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$ ou celle de $\Pi_* \circ R\Psi_{\mathcal{M}_1^+}(\mathbb{Q}_\ell) = R\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_* \mathbb{Q}_\ell)$.

2.2.9. Action de groupes. — Rappelons que le schéma en groupes I_0 lisse sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ agit sur $\mathcal{M}_0$. Soit $g \in I_0$ et $W_\bullet$ un point de $\mathcal{M}_0$ comme dans le diagramme 1.2.A. La chaîne $g \cdot W_\bullet$ définit l'action de g sur $\mathcal{M}_0$ et si $L'_i = \det(W_{i-1}) \otimes \det(W_i)^{-1}$ est muni d'une trivialisatation ϕ_i , il est clair que $g \cdot L'_i = \det(g \cdot W_{i-1}) \otimes \det(g \cdot W_i)^{-1}$ est muni de la trivialisatation $g \cdot \phi_i$. Ainsi I_0 agit sur $\mathcal{M}_0^+$ de manière compatible à son action sur $\mathcal{M}_0$.

Si $\alpha_\bullet$ est la famille de $2g$ fonctions définie précédemment pour un objet $(W_\bullet, \phi_\bullet)$ de $\mathcal{M}_0^+$, si $g \in I_0$ et si $\alpha'_\bullet$ est la famille de fonctions pour $(g \cdot W_\bullet, g \cdot \phi_\bullet)$, on a $\alpha_i = \alpha'_i$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ puisque le déterminant est préservé par changement de base. Cela permet d'étendre l'action de I_0 à $\mathcal{M}_1^+$ en posant $g \cdot (W_\bullet, \phi_\bullet, \zeta_\bullet) = (g \cdot W_\bullet, g \cdot \phi_\bullet, \zeta_\bullet)$.

Lemme 2.2.10. — *Le faisceau pervers décalé $R\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_* \mathbb{Q}_\ell)$ est I_0 -équivariant sur la fibre spéciale de $\mathcal{M}_0^+$.*

Démonstration. — Cela résulte de la lissité de I_0 sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et du fait qu'il agit sur $\mathcal{M}_1^+$ et sur $\mathcal{M}_0^+$ de manière compatible à Π . $\square$

2.3. Cycles proches et fonctions centrales. — Nous avons vu dans le paragraphe 1.2.6 que la trace semi-simple du Frobenius sur $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ définissait une fonction centrale $\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}}$ dans le centre $\mathcal{Z}_{\text{Iw}}$ de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\text{Iw}}$. Nous allons voir qu'il en est de même pour $R\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_* \mathbb{Q}_\ell)$ et les algèbres de Hecke pro- p -Iwahori.

2.3.1. Fibre spéciale. — Commençons par analyser la fibre spéciale de $\mathcal{M}_0^+$ et son lien avec les variétés de drapeaux. On dispose sur $\mathcal{M}_0$ d'un isomorphisme canonique

$$L'_i = \det(W_{i-1}) \otimes \det(W_i)^{-1} = (\mathcal{W}_{i-1}/\mathcal{W}_i) \otimes (\mathbb{V}_{i-1}[t]/\mathbb{V}_i[t])^{-1}$$

où $W_i = \mathcal{W}_i/t \cdot \mathbb{V}_i[t] \otimes \mathcal{O}_S$ et $\mathcal{W}_\bullet$ est comme dans le diagramme 1.2.B. Le fibré inversible L'_i est par définition muni d'une trivialisatation ϕ_i sur $\mathcal{M}_0^+$ et la formule $\phi_i = \psi_i \otimes \text{can}_i^{-1}$ où can_i est la trivialisatation canonique de $\mathbb{V}_{i-1}[t]/\mathbb{V}_i[t]$ permet de définir une trivialisatation ψ_i du fibré inversible $\mathcal{W}_{i-1}/\mathcal{W}_i$ telle que la fonction $\psi_i \cdot \psi_{2g+1+i}$ est indépendante de $1 \leq i \leq 2g$.

Utilisons les notations du paragraphe 1.2.1. Notons $I^+ \subset I$ le sous-ind-schéma en groupes de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices $g \in I$ qui sont strictement triangulaires supérieures modulo t . Au niveau des points, le sous-groupe I^+ est le radical pro- p de I . Nous l'appellerons sous-groupe pro- p -Iwahori. Le quotient I/I^+ est canoniquement isomorphe à T . Notons $\mathcal{F}I^+ = LG/I^+$ qui est un T -torseur sur $\mathcal{F}I$ que nous appellerons variété de drapeaux pro- p -iwahorique. Pour toute $\mathbb{F}_p$ -algèbre R , le quotient $\mathcal{F}I^+(R)$ s'identifie à l'ensemble des chaînes $(\mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{W}_{2g})$

globalement autoduales de $R[[t]]$ -réseaux dans $R((t))^{2g}$ munies de trivialisations ψ_i du fibré en droites $\mathcal{W}_{i-1}/\mathcal{W}_i$ telles que la fonction $\psi_i \cdot \psi_{2g+1-i}$ soit indépendante de i pour tout $1 \leq i \leq 2g$. L'ind-schéma $\mathcal{Fl}^+$ est muni d'une action à gauche de LG donc en particulier de I .

Il existe donc une immersion fermée ι^+ de $\mathcal{M}_0^+ \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ dans $\mathcal{Fl}^+$ au-dessus de l'immersion de $\mathcal{M}_0$ dans $\mathcal{Fl}$ décrite dans 1.2.4. De plus le groupe I se surjecte vers la fibre spéciale $I_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, ce qui permet de faire agir I sur $\mathcal{M}_0^+ \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Le lemme suivant éclaire les propriétés d'équivariance de ι^+ vis-à-vis de l'action de I . On définit pour cela une action tordue $*$ de I sur $\mathcal{Fl}^+$ donnée par la formule $g * x = \nu(g)^{-1} g \cdot x$ pour tout $g \in I$ et $x \in \mathcal{Fl}^+$ où $\nu : I \rightarrow T$ est la surjection de noyau I^+ .

Lemme 2.3.2. — *L'immersion ι^+ est équivariante sous l'action de I lorsqu'on le fait agir de manière tordue sur $\mathcal{Fl}^+$. En particulier ι^+ est équivariante sous l'action naturelle de I^+ .*

Démonstration. — On dispose sur $\mathcal{M}_0^+$ de l'isomorphisme canonique

$$L'_i = (\mathcal{W}_{i-1}/\mathcal{W}_i) \otimes (\mathbb{V}_{i-1}[t]/\mathbb{V}_i[t])^{-1}$$

par lequel la trivialisation ϕ_i de L'_i correspond à une trivialisation $\psi_i \otimes (\mathrm{can}_i)^{-1}$ de $(\mathcal{W}_{i-1}/\mathcal{W}_i) \otimes (\mathbb{V}_{i-1}[t]/\mathbb{V}_i[t])^{-1}$. Notons ν_i la i -ème composante de ν pour tout $1 \leq i \leq 2g$. L'action de $g \in I$ sur $\mathbb{V}_{i-1}[t]/\mathbb{V}_i[t]$ se fait donc par le scalaire $\nu_i(g)$. Il suffit alors de remarquer que $g \cdot \phi_i = (g \cdot \psi_i) \cdot \nu_i(g)^{-1}$. $\square$

2.3.3. Algèbre de Hecke pro- p -Iwahori. — Fixons une extension finie $\mathbb{F}_q$ de $\mathbb{F}_p$ et notons $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$ l'algèbre de convolution en niveau pro- p -iwahorique

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+} = \mathcal{C}_c^\infty(I^+(\mathbb{F}_q) \backslash \mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t))) / I^+(\mathbb{F}_q), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

et $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$ son centre. D'après les lemmes 2.2.10 et 2.3.2, la trace semi-simple du Frobenius géométrique de $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_* \mathbb{Q}_\ell)$ définit quand on la pousse par ι^+ une fonction sur

$$I^+(\mathbb{F}_q) \backslash \mathcal{Fl}^+(\mathbb{F}_q) = I^+(\mathbb{F}_q) \backslash \mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t))) / I^+(\mathbb{F}_q)$$

à support compact et à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, donc un élément

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_* \mathbb{Q}_\ell)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}^+.$$

Nous montrons dans [HS] le théorème suivant. La démonstration utilise comme dans le cas de $\mathcal{M}_0$ la géométrisation du produit de convolution de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}^+$ et d'une base de cette algèbre, puis la preuve d'une commutation géométrique en fibre générique.

Théorème 2.3.4. — *La fonction $\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_* \mathbb{Q}_\ell)}$ est dans le centre $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+}^+$ de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}^+$.*

Nous montrons de plus que cette fonction est uniquement caractérisée par sa centralité et ses valeurs sur les strates de Kottwitz-Rapoport $\mathcal{M}_0^{+,w} = \mathcal{M}_0^+ \times_{\mathcal{M}_0} \mathcal{M}_0^w$ pour $w \in W^{\mathrm{adm}}$ un élément de translation. Ces strates maximales sont reliées par les

diagrammes **1.2.C**, **2.2.A** et **2.2.B** au lieu ordinaire de $\mathcal{A}_0$ et de $\mathcal{A}_1$ et il est facile d'y calculer explicitement la fonction

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_*\mathbb{Q}_\ell)}$$

par exemple grâce à la théorie de Serre-Tate. Cela permet d'expliciter l'image de cette fonction par divers isomorphismes d'algèbre de Hecke.

La convolution par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q)}$ définit un morphisme d'algèbres de $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+}$ dans $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}}$. On a alors la proposition suivante qui est montrée dans [HS].

Proposition 2.3.5. — *La fonction $\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_*\mathbb{Q}_\ell)} * \mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q)}$ est égale à $\mathrm{Card}(T(\mathbb{F}_q)) \cdot \tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0}}$.*

Soit χ un caractère de $T(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell^*$. On dispose alors de la fonction $\mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q),\chi}$ de $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}}^+$ qui est supportée sur la double classe

$$I^+(\mathbb{F}_q) \setminus I(\mathbb{F}_q)/I^+(\mathbb{F}_q) = T(\mathbb{F}_q)$$

et y est égale à χ . Notons $\mathcal{H}_\chi$ l'algèbre de convolution des fonctions f à support compact sur $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t)))$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f(g_1 \cdot x \cdot g_2) = \chi(g_1 \cdot g_2) \cdot f(x)$ pour tous $x \in \mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t)))$ et $g_1, g_2 \in I(\mathbb{F}_q)$. La convolution par $\mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q),\chi}$ définit un morphisme de $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+}$ dans le centre $\mathcal{Z}_\chi$ de $\mathcal{H}_\chi$. On obtient alors la proposition suivante.

Proposition 2.3.6. — *La fonction convolée*

$$\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_*\mathbb{Q}_\ell)} * \mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q),\chi} \in \mathcal{Z}_\chi$$

est non nulle si et seulement si χ se factorise par la norme $N_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} : T(\mathbb{F}_q) \rightarrow T(\mathbb{F}_p)$.

Remarque 2.3.7. — *Les isomorphismes de Roche [HR, §9.3] montrent que $\mathcal{Z}_\chi$ est isomorphe au centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori d'un groupe endoscopique H_χ de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{F}_q((t)))$ déterminé par χ . Le centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori de H_χ est lui-même isomorphe à une algèbre de Hecke sphérique par l'isomorphisme de Bernstein Bern_χ relatif à H_χ et il est en fait possible de caractériser la fonction*

$$\mathrm{Bern}_\chi \left(\tau_{\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\Pi_*\mathbb{Q}_\ell)} * \mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q),\chi} \right)$$

d'une manière tout à fait similaire à celle donnée dans le théorème 1.2.9.

D'après [HR, lem. 12.1.2], le produit des convolutions par toutes les fonctions $\mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q),\chi}$ où χ parcourt les caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ fournit une injection de $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+}$ dans le produit sur χ des $\mathcal{Z}_\chi$. Nous avons donc caractérisé la fonction obtenue dans $\mathcal{H}_{\mathrm{Iw}^+}$ comme trace semi-simple des cycles proches *via* ces images dans tous les $\mathcal{Z}_\chi$.

Remarque 2.3.8. — *Les cycles proches $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\mathbb{Q}_\ell)$ sont aussi I_0 -invariants sur $\mathcal{M}_0^+$ et leur trace semi-simple du Frobenius définit également une fonction centrale de $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+}$. Toutefois la convolée de cette fonction avec $\mathbf{1}_{I(\mathbb{F}_q),\chi}$ est nulle dès que χ est non trivial. Cette fonction n'est en fait rien de plus qu'une incarnation dans $\mathcal{Z}_{\mathrm{Iw}^+}$ de la*

fonction $\tau_{R\Psi_{\mathcal{M}_0}} \in \mathcal{Z}_{Iw}$ étudiée précédemment. Ceci est à mettre en parallèle avec le changement de base lisse pour le T -torseur $\mathcal{M}_0^+ \rightarrow \mathcal{M}_0$ qui garantit que l'image inverse de $R\Psi_{\mathcal{M}_0}(\mathbb{Q}_\ell)$ coïncide avec $R\Psi_{\mathcal{M}_0^+}(\mathbb{Q}_\ell)$.

2.4. Compactifications. — Avant de construire les compactifications minimales et toroïdales de $\mathcal{A}_1$, commençons par analyser les propriétés de prolongement des groupes de Oort-Tate universels au bord des compactifications de $\mathcal{A}_0$.

2.4.1. Prolongement sur la compactification toroïdale. — Rappelons que nous avons noté $\bar{\mathcal{A}}_0$ la compactification toroïdale de $\mathcal{A}_0$ associée à un choix combinatoire $\mathfrak{S}_V$ fixé. On dispose sur $\mathcal{A}_0$ des groupes d'Oort-Tate K_i pour tout $1 \leq i \leq 2g$. Nous allons voir qu'ils s'étendent naturellement en des groupes finis et plats sur $\bar{\mathcal{A}}_0$.

Comme le schéma abélien universel sur $\mathcal{A}_0$ s'étend canoniquement en un schéma semi-abélien sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ (voir la remarque **1.3.12**), le groupe $G[p]$ fini et plat sur $\mathcal{A}_0$ s'étend en un groupe quasi-fini et plat sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ que l'on notera encore $G[p]$. On étend ainsi par adhérence schématique le drapeau universel $H_\bullet$ de groupes finis et plats sur $\mathcal{A}_0$ en un drapeau de groupes quasi-finis et plats sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ encore noté $H_\bullet$. Notons $K'_i = H_i/H_{i-1}$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ qui est donc quasi-fini et plat sur $\bar{\mathcal{A}}_0$. Ses fibres en les points géométriques de $\bar{\mathcal{A}}_0$ sont de rang 1 ou p . Nous allons caractériser pour tout i l'ouvert maximal de $\bar{\mathcal{A}}_0$ sur lequel K_i est fini et plat de rang p . Notons $(\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i$ le sous-ensemble de $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$ formé des V' tels que $\mathbb{V}_{i-1} \cap V'^\perp \neq \mathbb{V}_i \cap V'^\perp$. En particulier $\{0\}$ est dans $(\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i$.

Lemme 2.4.2. — *Le groupe K'_i est fini et plat de rang p sur l'ouvert de $\bar{\mathcal{A}}_0$ formé de l'union des strates paramétrées par $V' \in (\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i$. Ses fibres géométriques sont triviales en tout point des strates paramétrées par $V' \notin (\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i$. De plus, pour tout $V' \notin (\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i$ il existe un voisinage étale $\mathcal{U}_i$ de la V' -strate de $\bar{\mathcal{A}}_0$ tel que le groupe fini et plat K_i soit étale sur $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{A}_0$.*

Démonstration. — Soit $V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V$. L'enséslisé de $\bar{\mathcal{A}}_0$ le long de sa V' -strate coïncide avec l'enséslisé de $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ introduit dans le diagramme **1.3.A** le long de sa V' -strate. Il existe donc un voisinage étale $\mathcal{U}_i$ de la V' -strate de $\bar{\mathcal{A}}_0$, un voisinage étale $\mathcal{V}_i$ de la V' -strate de $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ et un isomorphisme $\mathcal{U}_i \simeq \mathcal{V}_i$ par lequel on peut transporter $G[p]$ et K'_i .

Par construction de $\bar{\mathcal{A}}_0$, le groupe $G[p]$ sur $\mathcal{V}_i \cap \bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ est égal à la p -torsion d'un 1-motif donc se dévisse en un sous-objet torique $G[p]^{\text{tor}}$, un gradué intermédiaire abélien $G[p]^{\text{ab}}$ et un quotient étale $G[p]^{\text{et}}$. L'extension canonique $G[p]^{\text{sab}}$ de $G[p]^{\text{ab}}$ par $G[p]^{\text{tor}}$ est appelée partie « semi-abélienne » de $G[p]$. Cette partie semi-abélienne s'étend canoniquement en un groupe fini et plat sur $\mathcal{V}_i$. Le groupe $G[p]^{\text{et}}$ est étale sur $\mathcal{V}_i \cap \bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ et son adhérence schématique dans $G[p]$ n'est pas finie sur $\mathcal{V}_i$. On conclut car K'_i est par définition l'adhérence schématique de $K_i \rightarrow \mathcal{V}_i \cap \bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ dans $G[p] \rightarrow \mathcal{V}_i$, que K_i est inclus dans $G[p]^{\text{tor}}$ sur $\mathcal{V}_i \cap \bar{\mathcal{N}}_{0,V'}$ si et seulement si $\mathbb{V}_{i-1} \cap V' \neq \mathbb{V}_i \cap V'$ et que K_i est inclus dans $G[p]^{\text{sab}}$ si et seulement si $\mathbb{V}_{i-1} \cap V'^\perp \neq \mathbb{V}_i \cap V'^\perp$. $\square$

Lemme 2.4.3. — *Pour tout $1 \leq i \leq 2g$ il existe un groupe de Oort-Tate sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ étendant canoniquement le groupe de Oort-Tate K_i sur $\mathcal{A}_0$.*

Nous noterons toujours K_i ce groupe de Oort-Tate sur $\bar{\mathcal{A}}_0$.

Démonstration. — Soit $1 \leq i \leq 2g$. Les groupes K_i et K_{2g+1-i} sont duaux de Cartier sur $\mathcal{A}_0$. Si $V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma_V$, on a nécessairement $\mathbb{V}_{i-1} \cap V'^\perp \neq \mathbb{V}_i \cap V'^\perp$ ou $\mathbb{V}_{2g-i} \cap V'^\perp \neq \mathbb{V}_{2g+1-i} \cap V'^\perp$ donc $(\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i \cup (\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_{2g+1-i} = \mathfrak{C}_V/\Gamma_V$. Notons $\mathcal{U}$ l'union des strates de $\bar{\mathcal{A}}_0$ paramétrées par $(\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_i$ et $\mathcal{V}$ l'union des strates de $\bar{\mathcal{A}}_0$ paramétrées par $(\mathfrak{C}_V/\Gamma_V)_{2g+1-i}$. On a $\bar{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. D'après le lemme 2.4.2, le groupe K'_i est de Oort-Tate sur $\mathcal{U}$ et K'_{2g+1-i} est de Oort-Tate sur $\mathcal{V}$. De plus K'_i et K'_{2g+1-i} sont duaux de Cartier sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Il suffit donc de définir K_i comme le recollement de K'_i sur $\mathcal{U}$ et du dual de K'_{2g+1-i} sur $\mathcal{V}$. $\square$

Remarque 2.4.4. — *Il n'est pas possible d'étendre de manière finie sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ des gradués de $H_\bullet$ qui soient de rang $> p$, et cela déjà sur $\text{Spec}(\mathbb{C})$. Le groupe H_2 qui est de rang p^2 a par exemple une monodromie non triviale sur $(\bar{\mathcal{A}}_0 - \mathcal{A}_0) \times \text{Spec}(\mathbb{C})$ donnée par des matrices unipotentes non nulles et ne s'étend donc pas à $\bar{\mathcal{A}}_0 \times \text{Spec}(\mathbb{C})$. Le cas des groupes de Oort-Tate est spécialement simple car, étant de dimension un comme $\mathbb{F}_p$ -vectoriel, ils ne peuvent avoir de monodromie unipotente non triviale.*

2.4.5. Construction des compactifications. — Nous avons obtenu dans le lemme 2.4.3 des groupes de Oort-Tate K_i sur $\bar{\mathcal{A}}_0$ pour tout $1 \leq i \leq 2g$ tels que les groupes K_i et K_{2g+1-i} soient duaux de Cartier. Définissons $\bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_0$ comme l'espace de modules des générateurs de Oort-Tate z_i de K_i pour tout $1 \leq i \leq 2g$ tels que la fonction $z_i \cdot z_{2g+1-i}$ soit indépendante de i . On obtient un revêtement fini et plat de $\bar{\mathcal{A}}_0$ muni d'une action de $T(\mathbb{F}_p)$ transitive dans les fibres. Ce revêtement est étale galoisien en fibre générique de groupe $T(\mathbb{F}_p)$.

Notons Γ'_V le sous-groupe de Γ_V formé des matrices agissant trivialement sur le gradué $\text{gr}_\bullet(\mathbb{V}_\bullet)$. Il est distingué et le quotient Γ_V/Γ'_V est naturellement isomorphe à $T(\mathbb{F}_p)$. On obtient aisément le lemme suivant.

Lemme 2.4.6. — *Le schéma $\bar{\mathcal{A}}_1$ est muni d'une stratification paramétrée par l'ensemble fini $\mathfrak{C}_V/\Gamma'_V$ et le morphisme $\bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_0$ est compatible à la stratification de $\bar{\mathcal{A}}_0$ paramétrée par $\mathfrak{C}_V/\Gamma_V$. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma'_V$ l'hensélisé de $(\mathcal{A}_1 \hookrightarrow \bar{\mathcal{A}}_1)$ le long de la V' -strate de $\bar{\mathcal{A}}_1$ est isomorphe à l'hensélisé d'une immersion ouverte $(\mathcal{N}_{1,V'} \hookrightarrow \bar{\mathcal{N}}_{1,V'})$ le long de la V' -strate d'un schéma $\bar{\mathcal{N}}_{1,V'}$ qui se dévisse en*

$$(2.4.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{1,V'} & \xrightarrow{\quad} & \bar{\mathcal{N}}_{1,V'} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{B}_{1,V'} & \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{A}_{1,V'} & \end{array}$$

Dans ce diagramme $\mathcal{A}_{1,V'} \rightarrow \mathcal{A}_{0,V'}$ est l'espace de modules des générateurs de Oort-Tate symplectiques des gradués du drapeau universel sur $\mathcal{A}_{0,V'}$, le schéma $\mathcal{B}_{1,V'}$ est le produit fibré $\mathcal{B}_{0,V'} \times_{\mathcal{A}_{0,V'}} \mathcal{A}_{1,V'}$ où $\mathcal{B}_{0,V'}$ est défini dans le diagramme 1.3.A, le schéma $\mathcal{N}_{1,V'}$ est le produit fibré $\mathcal{N}_{0,V'} \times_{\mathcal{A}_{0,V'}} \mathcal{A}_{1,V'}$ et le schéma $\bar{\mathcal{N}}_{1,V'}$ est le produit fibré $\bar{\mathcal{N}}_{0,V'} \times_{\mathcal{A}_{0,V'}} \mathcal{A}_{1,V'}$. Le morphisme de $\bar{\mathcal{A}}_1$ dans $\bar{\mathcal{A}}_0$ induit un morphisme du diagramme 2.4.A dans le diagramme 1.3.A qui s'obtient par changement de base du morphisme d'oubli de $\mathcal{A}_{1,V'}$ dans $\mathcal{A}_{0,V'}$.

Remarque 2.4.7. — Soit $\Gamma' \subset \Gamma$ des sous-groupes de congruence de $\mathrm{GSp}(V)$ et $\mathcal{A}_{\Gamma'} \rightarrow \mathcal{A}_{\Gamma}$ le morphisme fini étale entre les variétés de Siegel de niveau Γ' et Γ associées sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$. Il se prolonge en un morphisme fini et plat $\bar{\mathcal{A}}_{\Gamma'} \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_{\Gamma}$ entre les compactifications toroïdales construites à partir d'un même choix combinatoire. On peut montrer que le morphisme de $\bar{\mathcal{A}}_{\Gamma'}$ dans $\bar{\mathcal{A}}_{\Gamma}$ est étale si et seulement si Γ' est distingué dans Γ de quotient abélien.

Avant de construire la compactification minimale de $\mathcal{A}_1$, montrons rapidement la normalité de ce schéma.

Lemme 2.4.8. — Le schéma $\mathcal{A}_1$ est normal et Cohen-Macaulay.

Démonstration. — D'après [Go] et [He], le schéma $\mathcal{A}_0$ est normal et Cohen-Macaulay. Il est clair par définition que $\mathcal{A}_1$ est d'intersection complète sur $\mathcal{A}_0$, donc également Cohen-Macaulay. Pour montrer que $\mathcal{A}_1$ est normal, il suffit d'après le critère de Serre de montrer qu'il est régulier en codimension un. Puisque le lieu ordinaire de $\mathcal{A}_0$ vu comme ouvert plat sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ a un complémentaire de codimension ≥ 2 d'après [GN] et que $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_0$ est fini et plat, il suffit de prouver que le lieu ordinaire de $\mathcal{A}_1$ est régulier.

Soit $x \in \mathcal{A}_0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ un point ordinaire. Il existe un voisinage étale U de x dans $\mathcal{A}_0$ qui est lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ et tel que K_i soit isomorphe à $\mathbb{Z}/p$ ou à μ_p sur U pour tout $1 \leq i \leq 2g$. En particulier le paramètre de Oort-Tate de K_i est constant soit égal à 1 soit égal à ω_p . On en déduit que $\mathcal{A}_1 \times_{\mathcal{A}_0} U$ est isomorphe au produit de U par des copies de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[z]/(z^{p-1} - 1))$ et de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[z]/(z^{p-1} - \omega_p))$. Il est en particulier régulier donc le lieu ordinaire de $\mathcal{A}_1$ est régulier et $\mathcal{A}_1$ est normal. $\square$

Remarque 2.4.9. — Le lieu ordinaire de $\mathcal{A}_1$ n'est pas lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ car sa fibre spéciale n'est pas réduite déjà pour $g = 1$.

Théorème 2.4.10. — Il existe un schéma canonique $\mathcal{A}_1^*$ projectif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ qui contient $\mathcal{A}_1$ comme ouvert dense, sur lequel $\bigotimes_{i=0}^g \omega_i$ se prolonge en un fibré en droites ample et tel que

$$\mathcal{A}_1^* = \mathrm{Proj} \left(\bigoplus_{k \geq 0} H^0 \left(\bar{\mathcal{A}}_1, \bigotimes_{i=0}^g \omega_i^k \right) \right).$$

Il existe un morphisme fini et plat de $\mathcal{A}_1^*$ dans $\mathcal{A}_0^*$ étendant le morphisme de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_0$ d'oubli des générateurs de Oort-Tate. Le groupe $T(\mathbb{F}_p)$ agit transitivement dans les fibres de ce morphisme et s'identifie au groupe de Galois de ce morphisme

qui est étale sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$. Il existe un morphisme propre surjectif $\pi : \bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1^*$ qui est un isomorphisme sur $\mathcal{A}_1$. Le schéma $\mathcal{A}_1^*$ est muni d'une stratification paramétrée par $\mathfrak{C}_V/\Gamma'_V$ telle que la V' -strate soit $\mathcal{A}_{1,V'}$. Le morphisme π est compatible à cette stratification et induit sur le diagramme 2.4.A la projection évidente vers $\mathcal{A}_{1,V'}$.

Démonstration. — On raisonne exactement comme dans [S2]. Donnons les grandes étapes. On utilise d'abord un théorème de Moret-Bailly [FC, prop. V.2.1] qui garantit qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que ω_i^m soit engendré par ses sections globales sur $\bar{\mathcal{A}}_1$ pour tout $0 \leq i \leq g$. On en déduit l'existence d'un morphisme de $\bar{\mathcal{A}}_1$ vers $\prod_{i=0}^g \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\bar{\mathcal{A}}_1, \omega_i^m))$ auquel on applique la factorisation de Stein. On note $\mathcal{A}_1^*$ le résultat ; c'est donc un schéma projectif muni d'un morphisme $\pi : \bar{\mathcal{A}}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1^*$ tel que $\pi_*\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Ses fibres sont en particulier géométriquement connexes. On a par construction

$$\mathcal{A}_1^* = \mathrm{Proj} \left(\bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{H}^0 \left(\bar{\mathcal{A}}_1, \bigotimes_{i=0}^g \omega_i^{km} \right) \right)$$

ce qui montre d'ailleurs que $\mathcal{A}_1^*$ est indépendant du choix combinatoire ayant servi à construire $\bar{\mathcal{A}}_1$ puisque c'est le cas des groupes de cohomologie cohérente apparaissant dans la formule. Enfin le faisceau $\otimes_i \omega_i^m$ descend en un faisceau ample sur $\prod_{i=0}^g \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\bar{\mathcal{A}}_1, \omega_i^m))$ donc aussi sur $\mathcal{A}_1^*$.

On montre comme dans [S2] que les fibres géométriques de π restreint à $\mathcal{A}_1$ sont des singletons grâce à un autre théorème de Moret-Bailly [FC, prop. V.2.2] appliqué à des courbes lisses dans les fibres connexes de π . Notons qu'on doit utiliser pour cela le lemme 3.1 de [S2] et la discrétude des fibres de $\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_0$. Remarquons qu'on a utilisé tous les faisceaux ω_i pour garantir que la classe d'isomorphisme de G_i était constante dans les fibres de π pour tout $0 \leq i \leq g$, et pas seulement celle de G_0 . La normalité de $\mathcal{A}_1$ fournie par le lemme 2.4.8 montre donc que π induit un isomorphisme de $\mathcal{A}_1$ vers son image, donc que $\mathcal{A}_1^*$ contient $\mathcal{A}_1$.

On montre ensuite que π envoie des strates différentes de $\bar{\mathcal{A}}_0$ sur des sous-schémas disjoints de $\mathcal{A}_1^*$ et que l'image de la V' -strate est $\mathcal{A}_{1,V'}$ en utilisant encore la normalité de $\mathcal{A}_1$ et en raisonnant comme dans [S2].

On montre enfin que $\otimes_i \omega_i$ s'étend en un fibré inversible sur $\mathcal{A}_1^*$ comme dans la démonstration du théorème V.2.5 de [FC]. $\square$

Remarque 2.4.11. — D'après [S2, §3], tous les fibrés ω_i s'étendent en des fibrés inversibles sur $\mathcal{A}_0^*$. Les morphismes $\omega_i \rightarrow \omega_{i-1}$ obtenus à partir de l'isogénie $G_{i-1} \rightarrow G_i$ s'étendent alors par normalité de $\mathcal{A}_0^*$ [S2, th. 3.9]. Le complexe cotangent $\ell_{K_i} = [\omega_i \rightarrow \omega_{i-1}]$ de K_i s'étend donc de $\mathcal{A}_0$ à $\mathcal{A}_0^*$ et il en est de même de son déterminant et de sa section. Ainsi, si $(\mathcal{L}_i, a_i, b_i)$ désignent les paramètres de Oort-Tate de K_i on voit que $\mathcal{L}_i^{p-1}$, a_i et b_i se prolongent à $\mathcal{A}_0^*$. On peut penser que $\mathcal{L}_i$ s'étend également en un fibré en droites sur $\mathcal{A}_0^*$. Cela permettrait d'étendre K_i en un groupe de Oort-Tate sur $\mathcal{A}_0^*$ et de définir $\mathcal{A}_1^* \rightarrow \mathcal{A}_0^*$ comme l'espace de modules des générateurs de Oort-Tate de K_i .

2.5. Cohomologie de la compactification minimale. — On peut donc généraliser les résultats du paragraphe 1.4 du cas de $\mathcal{A}_0^*$ à celui de $\mathcal{A}_1^*$. Cela présente un intérêt non nul grâce aux résultats du paragraphe 2.3, qui élucident une part de la structure de $R\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathbb{Q}_\ell)$. Voilà le premier résultat que l'on obtient. On note désormais $j : \mathcal{A}_1 \hookrightarrow \mathcal{A}_1^*$ l'immersion ouverte en espérant que cela n'interfère pas avec les notations de la partie 1.

Lemme 2.5.1. — *Soit W une représentation de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$. Il existe un isomorphisme canonique entre $R\Psi_{\mathcal{A}_1^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}(W))$ et $j_{!*} \circ R\Psi_{\mathcal{A}_1}(\overline{\mathcal{F}}(W))$ dans la catégorie des faisceaux pervers décalés sur $\mathcal{A}_1^* \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ munis d'une action compatible de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.*

Soit $w \in W^{\mathrm{adm}}$. On notera $\mathcal{A}_1^{\prec w}$ l'image inverse de $\mathcal{A}_0^{\prec w}$ dans $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_1^w$ l'image inverse de $\mathcal{A}_0^w$ dans $\mathcal{A}_1$. On les appellera strates de Kottwitz-Rapoport de niveau pro- p -iwahorique. On peut encore définir des compactifications minimales de ces strates de Kottwitz-Rapoport de niveau pro- p -iwahorique.

Définition 2.5.2. — La compactification minimale $\mathcal{A}_1^{\prec w,*}$ de $\mathcal{A}_1^{\prec w}$ est l'adhérence schématique de $\mathcal{A}_1^{\prec w}$ dans $\mathcal{A}_1^* \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. La compactification minimale $\mathcal{A}_1^{w,*}$ de $\mathcal{A}_1^w$ est le complémentaire dans $\mathcal{A}_1^{\prec w,*}$ du fermé

$$\bigcup_{w' \prec w} \mathcal{A}_1^{\prec w',*}$$

Les compactifications $\mathcal{A}_1^{w,*}$ et $\mathcal{A}_1^{\prec w,*}$ héritent elles aussi de la stratification du bord de $\mathcal{A}_1^* \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$ notons

$$\mathcal{A}_{1,V'}^{w,*} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w,*}$$

les intersections de $\mathcal{A}_1^{w,*}$ et de $\mathcal{A}_1^{\prec w,*}$ avec $\mathcal{A}_{1,V'} \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ dans $\mathcal{A}_1^* \times \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. On obtient des stratifications

$$\mathcal{A}_1^{w,*} = \coprod_{V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma'_V} \mathcal{A}_{1,V'}^{w,*}$$

et

$$\mathcal{A}_1^{\prec w,*} = \coprod_{V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma'_V} \mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w,*}.$$

Le morphisme $\varphi_{V'}$ intervenant dans le lemme suivant a été défini dans le lemme 1.3.16.

Lemme 2.5.3. — *La strate de bord $\mathcal{A}_{1,V'}^{w,*}$ de $\mathcal{A}_1^{w,*}$ est vide si w n'est pas dans l'image de $\varphi_{V'}$ et égale à*

$$\mathcal{A}_{1,V'}^{w'}$$

si $w = \varphi_{V'}(w')$. De même, la strate de bord $\mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w,}$ de $\mathcal{A}_1^{\prec w,*}$ est vide si w n'est pas dans l'image de $\varphi_{V'}$ et égale à*

$$\mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w'}$$

si $w = \varphi_{V'}(w')$.

Soit $w \in W^{\text{adm}}$. Notons $j^w : \mathcal{A}_1^w \hookrightarrow \mathcal{A}_1^{\prec w}$ et $j : \mathcal{A}_1^{\prec w} \hookrightarrow \mathcal{A}_1^{\prec w,*}$ les immersions ouvertes canoniques. Soit $V' \in \mathfrak{C}_V$ et $w' \in W_{V'}^{\text{adm}}$ tel que $\varphi_{V'}(w') = w$. Notons

$$i_{V'}^{w'} : \mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w'} \hookrightarrow \mathcal{A}_1^{\prec w,*}$$

l'immersion d'une strate de bord de la compactification minimale d'une strate de Kottwitz-Rapoport pro- p -iwahorique et notons

$$j^{w'} : \mathcal{A}_{1,V'}^{w'} \hookrightarrow \mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w'}$$

l'immersion ouverte d'une petite strate de Kottwitz-Rapoport pro- p -iwahorique.

Introduisons des variantes en niveau pro- p -iwahorique des notations introduites avant le théorème 1.4.6. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$ notons $\mathcal{C}'_{V'}$, l'ensemble des drapeaux $V^\bullet = (0 \subsetneq V^r \subsetneq \dots \subsetneq V^0)$ d'éléments de $\mathfrak{C}_V$ tels que V^0 soit conjugué à V' par Γ'_V . Notons $\Gamma_{V^\bullet}^l$, l'intersection de $\Gamma'_{V'}$ avec $\text{GL}(V^r) \times \text{GL}(V^{r-1}/V^r) \times \dots \times \text{GL}(V^0/V^1)$. Les autres notations restent inchangées.

Proposition 2.5.4. — *Soit W une représentation irréductible de $\underline{\text{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$. Dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur $\mathcal{A}_{1,V'}^{\prec w'}$, on a égalité entre $(i_{V'}^{w'})^* \circ j_{!*} \circ j_{!*}^w(\mathcal{F}(W))$ et*

$$\sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}'_{V'}/\Gamma'_V} (-1)^{\#V^\bullet} \cdot j_{!*}^{w'} \left(\mathcal{F}^{V'} \left(\text{RInv} \left(\Gamma_{V^\bullet}^l, \text{RInv}(\text{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t \right) \right) \right).$$

Proposition 2.5.5. — *Soit W une représentation irréductible de $\underline{\text{GSp}}(V \otimes \mathbb{Q})$. Dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur $\mathcal{A}_{1,V'} \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ munis d'une action compatible de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ on a égalité entre $(i_{V'})^* \circ j_{!*} \circ \text{R}\Psi_{\mathcal{A}_1}(\mathcal{F}(W))$ et*

$$\sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}'_{V'}/\Gamma'_V} (-1)^{\#V^\bullet} \cdot \text{R}\Psi_{\mathcal{A}_{1,V'}} \left(\mathcal{F}^{V'} \left(\text{RInv} \left(\Gamma_{V^\bullet}^l, \text{RInv}(\text{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t \right) \right) \right).$$

Soit $\mathbb{F}_q$ une extension finie de $\mathbb{F}_p$. On en déduit finalement que la trace semi-simple du Frobenius de $\mathbb{F}_q$ sur la cohomologie d'intersection $\text{IH}^\bullet(\mathcal{A}_1^* \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_p), \mathcal{F}(W))$ est égale à

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V/\Gamma'_V} \sum_{x \in \mathcal{A}_{1,V'}(\mathbb{F}_q)} \sum_{V^\bullet \in \mathcal{C}'_{V'}/\Gamma'_V} (-1)^{\#V^\bullet} \cdot \tau_{\text{R}\Psi_{\mathcal{A}_{1,V'}}}(x) \times \\ \text{tr} \left(\text{Frob}_x, \mathcal{F}^{V'} \left(\text{RInv} \left(\Gamma_{V^\bullet}^l, \text{RInv}(\text{Lie}(N_{V^\bullet}), W)_t \right) \right) \right),$$

formule dans laquelle $\tau_{\text{R}\Psi_{\mathcal{A}_{1,V'}}}(x)$ est donné à des constantes près par la fonction de $\mathcal{Z}_{\text{Iw}^+}$ introduite dans le théorème 2.3.4.

Références

- [dJ] A. J. DE JONG – « The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with $\Gamma_0(p)$ -level structure », *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), no. 4, p. 667–688.
- [FC] G. FALTINGS & C.-L. CHAI – *Degeneration of abelian varieties*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Fa] L. FARGUES – « La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats », *J. Reine Angew. Math.* **645** (2010), p. 1–39.
- [Ga] D. GAITSGORY – « Construction of central elements in the affine Hecke algebra *via* nearby cycles », *Invent. Math.* **144** (2001), no. 2, p. 253–280.
- [Ge] A. GENESTIER – « Un modèle semi-stable de la variété de Siegel de genre 3 avec structures de niveau de type $\Gamma_0(p)$ », *Compositio Math.* **123** (2000), no. 3, p. 303–328.
- [GN] A. GENESTIER & B. C. NGÔ – « Alcôves et p -rang des variétés abéliennes », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), no. 6, p. 1665–1680.
- [Go] U. GÖRTZ – « On the flatness of local models for the symplectic group », *Adv. Math.* **176** (2003), no. 1, p. 89–115.
- [GH] U. GÖRTZ & T. J. HAINES – « The Jordan-Hölder series for nearby cycles on some Shimura varieties and affine flag varieties », *J. Reine Angew. Math.* **609** (2007), p. 161–213.
- [Ha] T. J. HAINES – « Base change for Bernstein centers of depth zero principal series blocks », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **45** (2012), no. 5, p. 681–718 (2013).
- [HN] T. J. HAINES & B. C. NGÔ – « Nearby cycles for local models of some Shimura varieties », *Compositio Math.* **133** (2002), no. 2, p. 117–150.
- [HR] T. J. HAINES & M. RAPOPORT – « Shimura varieties with $\Gamma_1(p)$ -level via Hecke algebra isomorphisms : the Drinfeld case », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **45** (2012), no. 5, p. 719–785 (2013).
- [HS] T. J. HAINES & B. STROH – « Local models and nearby cycles for $\Gamma_1(p)$ -level structure », prépublication, 2013.
- [He] X. HE – « Normality and Cohen-Macaulayness of local models of Shimura varieties », *Duke Math. J.* **162** (2013), no. 13, p. 2509–2523.
- [I1] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations I*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [I2] ———, « Autour du théorème de monodromie locale », in *Périodes p -adiques* (J.-M. Fontaine, éd.), *Astérisque*, vol. 223, Soc. Math. France, Paris, 1994.
- [KM] F. F. KNUDSEN & D. MUMFORD – « The projectivity of the moduli space of stable curves. I. Preliminaries on “det” and “Div” », *Math. Scand.* **39** (1976), no. 1, p. 19–55.
- [L] G. LAUMON – « Transformation de Fourier, constantes d’équations fonctionnelles et conjecture de Weil », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1987), no. 65, p. 131–210.
- [M1] S. MOREL – « Complexes mixtes sur un schéma de type fini sur $\mathbb{Q}$ », prépublication, 2012.
- [M2] ———, « Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel : le cas des variétés de Siegel », *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), no. 1, p. 23–61.
- [OT] F. OORT & J. TATE – « Group schemes of prime order », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **3** (1970), p. 1–21.

- [RZ] M. RAPOPORT & T. ZINK – *Period spaces for p -divisible groups*, Ann. of Math. Stud., vol. 141, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.
- [S] J.-P. SERRE – « Zeta and L functions », in *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper & Row, New York, 1965, p. 82–92.
- [S1] B. STROH – « Compactification de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction », *Bull. Soc. Math. France* **138** (2010), no. 2, p. 259–315.
- [S2] ———, « Compactification minimale et mauvaise réduction », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **60** (2010), no. 3, p. 1035–1055.
- [S3] ———, « Sur une conjecture de Kottwitz au bord », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **45** (2012), no. 1, p. 143–165.

B. STROH, C.N.R.S, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
E-mail : `stroh@math.univ-paris13.fr`