Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CRISTAUX ET IMMEUBLES

Christophe Cornut & Marc-Hubert Nicole

Tome 144
Fascicule 1

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 125-143

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 144, janvier 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)

Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
144 (1), 2016, p. 125–143

CRISTAUX ET IMMEUBLES

PAR CHRISTOPHE CORNUT & MARC-HUBERT NICOLE

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$. L'ensemble des cristaux contenus dans un G-isocristal donné est envisagé d'un point de vue immobilier comme un voisinage tubulaire d'un squelette caractérisé par une propriété de minimalité de nature métrique. Nous prouvons l'inégalité de Mazur en guise d'illustration.

ABSTRACT (*Crystals and buildings*). — Let G be a connected reductive group defined over Q_p. The set of crystals contained in a given G-isocrystal is viewed from a Bruhat-Tits building-theoretic vantage point as a kind of tubular neighborhood of a skeleton characterized by a minimality property arising from metric space theory. To illustrate this approach, we prove the Mazur inequality.

1. Introduction

La catégorie des isocristaux sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ est semisimple, et ses objets simples sont classifiés par leur pente $\lambda \in \mathbb{Q}$. Ce travail propose un point de vue immobilier systématique sur l'ensemble des cristaux contenus dans un isocristal fixé muni de structures supplémentaires. De tels ensembles interviennent notamment dans la description

Texte reçu le 31 octobre 2014, révisé et accepté le 13 mai 2015.

CHRISTOPHE CORNUT
MARC-HUBERT NICOLE

Classification mathématique par sujets (2000). — 20E42, 20G25, 14L05.

Mots clefs. — G-isocrystals, Bruhat-Tits building, reductive groups, Mazur's inequality.

C.C. a bénéficié du soutien du contrat ANR-10-BLAN-0114 ArShiFo.

conjecturale des fibres spéciales des variétés de Shimura, voir [10]. La pertinence et le caractère structurant du point de vue immobilier apparaissent aussi dans les travaux récents de Vollaard et Wedhorn sur les cristaux supersinguliers pour les variétés de groupe $\mathrm{GU}(n,1)$, voir [22] et ses références.

Dans la classification de Manin des F-cristaux à isomorphisme près, certains cristaux dits spéciaux jouent un rôle de pivot. Dans chaque classe d'isogénie, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de tels cristaux, mais ce nombre est généralement supérieur à un. Parmi ceux-ci, Oort a identifié dans [12] des cristaux qui sont uniquement déterminés par leur troncature à l'échelon 1 : les cristaux minimaux. Ils sont caractérisés par cette propriété de rigidité et forment une unique classe d'isomorphisme, ce qui les désigne comme un candidat plus naturel autour duquel amorcer la classification.

Dans le cadre du formalisme des G-isocristaux de Kottwitz et Rapoport-Richartz, nous proposons de placer au coeur de la description des ensembles de cristaux ci-dessus un lieu remarquable qui en constitue le squelette. Ce lieu est caractérisé par une propriété de minimalité que l'on emprunte à la théorie des espaces métriques à courbure négative, mais qui nous fut inspirée par la notion homonyme de Oort.

L'ensemble des cristaux contenus dans un G-isocristal fixé est donc vu ici comme une sorte de voisinage tubulaire du squelette. Notre résultat principal identifie ce dernier à l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe des automorphismes du G-isocristal. Nous en déduisons une nouvelle preuve très naturelle de l'inégalité de Mazur, cf. [16, §4.4] et [8, Thm 4.2].

2. Immeubles

2.1. — Soit K un corps complet pour une valuation $\omega : K^\times \to \mathbb{R}$ que l'on suppose discrète et non-triviale, à corps résiduel parfait. On note $\mathscr{I}(G,K)$ l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif connexe G sur K. C'est l'immeuble noté $\mathscr{B}(G,K)$ dans [21, §2.1], l'immeuble centré noté $\mathscr{I}_K(G)$ dans [19, 2.1.15], ou enfin l'immeuble étendu noté $\mathscr{BT}^e(G,K)$ dans [9, 1.3.2]. En particulier,

$$\mathscr{I}(G,K) = \mathscr{I}'(G,K) \times V(G,K) \quad \text{où} \quad V(G,K) = X_\star^K(Z(G)) \otimes \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

L'immeuble $\mathscr{I}'(G,K)$ est noté $\mathscr{I}'_K(G)$ dans [19] et $\mathscr{BT}(G,K)$ dans [9] ; il est canoniquement isomorphe à l'immeuble $\mathscr{I}(G',K)$ du groupe dérivé G' de G. Par ailleurs, on a noté $X_\star^K(Z(G)) = X_\star(Z^K(G))$ le groupe des cocaractères du plus gros sous-tore déployé $Z^K(G)$ du centre $Z(G)$ de G. On note x' et x^v les composantes d'un point $x = (x', x^v)$ de $\mathscr{I}(G,K) = \mathscr{I}'(G,K) \times V(G,K)$.

2.2. — L'immeuble $\mathscr{I}(G,K)$ est muni d'une action à gauche de $G(K)$, d'une structure poly-simpliciale invariante sous $G(K)$ (qui donne une partition en facettes), et il est recouvert par des espaces affines (les appartements) qui sont des réunions de facettes ; il y a une bijection $G(K)$-équivariante $S \mapsto \mathscr{A}(S)$ entre l'ensemble des tores déployés maximaux S de G et l'ensemble des appartements de $\mathscr{I}(G,K)$, l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{A}(S)$ est égal à $X_\star(S) \otimes \mathbb{R}$, l'action du normalisateur $\mathscr{N}(S)$ de S dans $G(K)$ sur $\mathscr{A}(S)$ est affine, et la partie vectorielle de cette action est l'action par conjugaison de $\mathscr{N}(S)$ sur $X_\star(S)$.

2.3. — Ces structures sont compatibles avec la décomposition (2.1). En particulier, les applications $F' \mapsto F' \times V(G,K)$ et $\mathscr{A}' \mapsto \mathscr{A}' \times V(G,K)$ sont des bijections $G(K)$-equivariantes de l'ensemble des facettes (resp. appartements) de $\mathscr{I}'(G,K)$ sur ceux de $\mathscr{I}(G,K)$. L'action de $g \in G(K)$ sur $x = (x', x^v) \in \mathscr{I}(G,K)$ est

$$g \cdot x = (g \cdot x', x^v + v_G(g)) = (g \cdot x', x^v) + v_G(g)$$

pour un vecteur $v_G(g) \in V(G,K)$, et le morphisme

$$v_G : G(K) \to V(G,K)$$

est caractérisé par la formule suivante : pour tout caractère $\chi : G \to \mathbb{G}_{m,K}$,

$$\left\langle \nu_G(g), \chi | Z^K(G) \right\rangle_{\mathbb{R}} = -\omega(\chi(g))$$

où $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}}$ est l'extension $\mathbb{R}$-linéaire de l'accouplement usuel

$$\langle -, - \rangle : X_\star(Z^K(G)) \times X^\star(Z^K(G)) \to \mathbb{Z}.$$

2.4. — On peut de plus munir $\mathscr{I}(G,K)$ d'une métrique $G(K)$-invariante, dont la restriction à chaque appartement est euclidienne, et qui fait de $\mathscr{I}(G,K)$ un espace métrique complet, géodésique, et CAT(0). Contrairement aux autres structures, la distance euclidienne d sur $\mathscr{I}(G,K)$ n'est pas tout à fait canoniquement associée à (G,K). Elle se décompose en

$$d(x,y) = \sqrt{d'(x',y')^2 + (x^v, y^v)^2}$$

où d' est une métrique $G(K)$-invariante sur $\mathscr{I}'(G,K)$ qui est essentiellement unique, mais où $(-,-)$ est un produit scalaire arbitraire sur $V(G,K)$. Cependant, la topologie qui en résulte sur $\mathscr{I}(G,K)$ ne dépend pas du choix de cette distance.

2.5. — La fonctorialité en G et/ou K de l'immeuble $\mathscr{I}(G,K)$ est une question délicate (cf. [19, 15, 9, 4]), mais la démonstration des cas dont nous aurons besoin ci-dessous remonte aux travaux de Bruhat et Tits.

2.5.1. — Tout d'abord, le groupe $(\mathrm{Aut}G)(K)$ agit sur $\mathscr{I}(G,K)$ par « transport de structure » — dixit [21, §2.5]. On en déduit une seconde action de $G(K)$ sur $\mathscr{I}(G,K)$ — par automorphismes intérieurs. Cette seconde action coïncide avec l'action de $G(K)$ sur le facteur $\mathscr{I}'(G,K)$, sur l'ensemble des facettes, et sur l'ensemble des appartements, mais elle est triviale sur le facteur euclidien $V(G,K)$. On a donc

$$\mathrm{Int}(g)(x) = (g\cdot x', x^v) = g\cdot (x', x^v) - v_G(g) = g\cdot x - v_G(g)$$

pour tout $x = (x', x^v) \in \mathscr{I}(G,K)$ et tout $g \in G(K)$.

2.5.2. — Soit M un sous-groupe de Levi de G. Les tores déployés maximaux de M sont les tores déployés maximaux de G qui sont contenus dans M. On note

$$\mathscr{I}'_M(G,K) \subset \mathscr{I}'(G,K) \quad \text{et} \quad \mathscr{I}_M(G,K) \subset \mathscr{I}(G,K)$$

la réunion des appartements qui correspondent à ces tores, de sorte que

$$\mathscr{I}_M(G,K) = \mathscr{I}'_M(G,K) \times V(G,K).$$

D'autre part, l'isogénie $Z^K(G) \times G' \cap Z^K(M) \to Z^K(M)$ induit une décomposition

$$V(M,K) = V'(M,K) \times V(G,K)$$

où l'on note

$$V'(M,K) = X_\star\left(G' \cap Z^K(M)\right) \otimes \mathbb{R}.$$

Pour tout tore déployé maximal S de M, ce sous-espace vectoriel de

$$X_\star(G' \cap S) \otimes \mathbb{R}$$

agit sur l'appartement $\mathscr{A}'(S)$ de $\mathscr{I}'(G,K)$ par translation, et ces actions se recollent en une action $(v,x) \mapsto x+v$ de $V'(M,K)$ sur $\mathscr{I}'_M(G,K)$. Il existe une injection

$$\mathscr{I}'(M,K) \hookrightarrow \mathscr{I}'_M(G,K)$$

qui est $M(K)$-équivariante, compatible avec l'indexation $S \mapsto \mathscr{A}'(S)$ des appartements, bien déterminée à translation près par un élément de $V'(M,K)$, et qui induit une bijection $M(K)$-équivariante de $\mathscr{I}(M,K)$ sur $\mathscr{I}_M(G,K)$, à savoir

$$\begin{aligned} \mathscr{I}'(M,K) \times V'(M,K) \times V(G,K) &\to \mathscr{I}'_M(G,K) \times V(G,K) \\ (x,v,w) &\mapsto (x+v, w) \end{aligned}$$

Référence : [9, 2.1.4 et 2.1.5].

2.5.3. — Si (L, ω) est une extension de (K, ω), on note $\mathscr{I}(G, L) = \mathscr{I}(G_L, L)$ l'immeuble de G sur L. Cette construction est fonctorielle en (L, ω). En particulier, si L/K est Galoisienne, alors $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit sur $\mathscr{I}(G, L)$ en préservant toutes les structures mentionnées ci-dessus, y compris la métrique pour un choix convenable de la distance euclidienne. On a toujours une inclusion de $\mathscr{I}(G, K)$ dans l'ensemble $\mathscr{I}(G, L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ des points fixes de cette action. Lorsque l'extension L/K est non-ramifiée [21, 2.6.1] ou même seulement modérément ramifiée [19], on obtient en fait une égalité : $\mathscr{I}(G, K) = \mathscr{I}(G, L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$.

2.5.4. — Si de plus L/K est finie, alors $\mathscr{I}(G, L)$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{I}(H, K)$ où $H = \mathrm{Res}_K^L(G_L)$ est la restriction à la Weil de G_L — voir [21, 2.1]. Dans cette identification, l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $\mathscr{I}(G, L)$ considérée en (2.5.3) correspond à l'action de $\mathrm{Gal}(L/K) \subset \mathrm{Aut}(H)(K)$ sur $\mathscr{I}(H, K)$ considérée en (2.5.1).

2.5.5. — Nous aurons besoin du résultat suivant. Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$, L le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ d'un corps algébriquement clos k de caractéristique p, σ le Frobenius de k ou L. Pour un entier $s > 0$, on note $\mathbb{Q}_{p^s} = \mathrm{Frac}\ W(\mathbb{F}_{p^s})$ l'extension non-ramifiée de degré s de $\mathbb{Q}_p$ dans L, qui n'est autre que l'ensemble des points fixes de σ^s dans L. Alors :

$$\mathscr{I}(G, \mathbb{Q}_{p^s}) = \{x \in \mathscr{I}(G, L) : \sigma^s x = x\}\,.$$

Compte-tenu de 2.5.3, il suffit de le démontrer pour s assez grand. On peut donc supposer que G est quasi-déployé sur $K = \mathbb{Q}_{p^s}$ et que le corps de déploiement de G_K est une extension (finie) totalement ramifiée $\widetilde{K}$ de K. Cette hypothèse implique que le changement de base de K vers L est conservateur au sens de [3, 4.2.25]. Soit alors x un point de $\mathscr{I}(G, L)$ fixé par σ^s, y un point arbitraire de $\mathscr{I}(G, K)$. Puisque $\mathscr{I}(G, K)$ est fermé convexe dans $\mathscr{I}(G, L)$, il existe dans le segment $[x, y]$ de $\mathscr{I}(G, L)$ un unique z tel que $[x, y] \cap \mathscr{I}(G, K) = [z, y]$. Notons $T_z\mathscr{I}(G, K) \subset T_z\mathscr{I}(G, L)$ les espaces tangents en z dans $\mathscr{I}(G, K)$ et $\mathscr{I}(G, L)$, c'est-à-dire les quotients de ces immeubles pour la relation d'équivalence définie par $x' \sim x''$ si et seulement si $x' = x'' = z$, ou bien $x', x'' \neq z$ mais $x'(t) = x''(t)$ pour tout $t \geq 0$ suffisamment petit, où l'on note $x'(t)$ (resp. $x''(t)$) le point à distance t de z sur le segment $[z, x']$ (resp. $[z, x'']$). Puisque le changement de base de K vers L est conservateur, il résulte de [3, 4.6.20 et 4.6.33] que $T_z\mathscr{I}(G, K)$ est l'ensemble des points fixes de σ^s agissant sur $T_z\mathscr{I}(G, L)$. Puisque x et z sont fixés par σ^s, le germe en z du segment $[z, x]$ de $\mathscr{I}(G, L)$ est fixé par σ^s, il coïncide donc avec le germe en z d'un segment $[z, x']$ de $\mathscr{I}(G, K)$. Il en résulte que $x = z$ par définition de z, donc $x \in \mathscr{I}(G, K)$.

2.6. Isométries. — Pour une isométrie $\mathcal{F}$ d'un espace métrique $\mathcal{I}$, on note

$$\begin{aligned}\min(\mathcal{F}) &= \inf\{\mathrm{dist}(x,\mathcal{F}x) : x\in\mathcal{I}\}\\ \mathrm{Min}(\mathcal{F}) &= \{x\in\mathcal{I} : \mathrm{dist}(x,\mathcal{F}x)=\min(\mathcal{F})\}\,.\end{aligned}$$

On dit que $\mathcal{F}$ est semi-simple si et seulement si $\mathrm{Min}(\mathcal{F})\neq\varnothing$, et on dit alors que $\mathcal{F}$ est elliptique ou hyperbolique selon que $\min(\mathcal{F})=0$ ou $\neq 0$. On renvoie à [1, II.1] pour la définition des espaces métriques CAT(0) - tous les immeubles considérés ci-dessus sont de tels espaces d'après [1, Exercice II.1.9.c] et [2, Lemme 3.2.1].

Proposition 1. — *Soit $\mathcal{F}$ une isométrie d'un espace métrique $\mathcal{I}$ qui est CAT(0).*

1. *Le sous-espace* $\mathrm{Min}(\mathcal{F})$ *de $\mathcal{I}$ est convexe et fermé.*
2. *Pour toute isométrie α de $\mathcal{I}$,*

$$\min\left(\alpha\mathcal{F}\alpha^{-1}\right)=\min(\mathcal{F})\quad \textit{et}\quad \mathrm{Min}\left(\alpha\mathcal{F}\alpha^{-1}\right))=\alpha\left(\mathrm{Min}(\mathcal{F})\right).$$

3. *Soit $\mathcal{C}\subset\mathcal{I}$ une partie non-vide, complète, convexe et $\mathcal{F}$-invariante. Alors*

$$\min(\mathcal{F})=\min(\mathcal{F}|\mathcal{C})\quad \textit{et}\quad \mathrm{Min}(\mathcal{F}|\mathcal{C})=\mathrm{Min}(\mathcal{F})\cap\mathcal{C}.$$

De plus : $\mathcal{F}$ est semi-simple si et seulement si $\mathcal{F}|\mathcal{C}$ est semi-simple.

4. *Pour tout $s>0$, $\mathcal{F}$ est semi-simple si et seulement si $\mathcal{F}^s$ l'est, et alors*

$$\min(\mathcal{F}^s)=s\min(\mathcal{F})\quad \textit{et}\quad \mathrm{Min}(\mathcal{F})\subset\mathrm{Min}(\mathcal{F}^s)\,.$$

5. *L'isométrie $\mathcal{F}$ est hyperbolique si et seulement si il existe une géodésique $c:\mathbb{R}\to\mathcal{I}$ et un élément $a>0$ de $\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{F}c(t)=c(t+a)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Alors $a=\min(\mathcal{F})$. On dit que $c(\mathbb{R})$ est un axe de $\mathcal{F}$.*
6. *Si $\mathcal{F}$ est hyperbolique, les axes de $\mathcal{F}$ sont tous parallèles, leur réunion est égale à* $\mathrm{Min}(\mathcal{F})$, *et* $\mathrm{Min}(\mathcal{F})$ *est isométrique à un produit* $\mathrm{Min}'(\mathcal{F})\times\mathbb{R}$ *sur lequel $\mathcal{F}$ agit par $(x,t)\mapsto(x,t+\min(\mathcal{F}))$. Toute isométrie α de $\mathcal{I}$ qui commute avec $\mathcal{F}$ préserve* $\mathrm{Min}(\mathcal{F})$ *et s'y décompose en*

$$\alpha\mid\mathrm{Min}(\mathcal{F})=(\alpha',\alpha^v)$$

où α' est une isométrie de $\mathrm{Min}'(\mathcal{F})$ *et α^v une translation de $\mathbb{R}$. Enfin α est semi-simple si et seulement si α' l'est, et* $\mathrm{Min}(\alpha)\cap\mathrm{Min}(\mathcal{F})=\mathrm{Min}(\alpha')\times\mathbb{R}$.

Démonstration. — Voir [1, II.6.2, 6.7, 6.8 et 6.9]. □

Remarque 2. — *Dans* (6), *la projection*

$$p_1:\mathrm{Min}(\mathcal{F})\twoheadrightarrow\mathrm{Min}'(\mathcal{F})$$

est canonique : ses fibres sont les axes de $\mathcal{F}$, et $\mathrm{Min}'(\mathcal{F})$ *est muni de la métrique quotient. On obtient la seconde projection*

$$p_2 : \mathrm{Min}(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$$

en fixant un point x_0 de $\mathrm{Min}(\mathcal{F})$ *: $p_2(x)$ est alors la distance entre x_0 et la projection convexe de x sur l'unique axe de $\mathcal{F}$ passant par x_0.*

3. Isocristaux

3.1. — Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{Q}_p$, k un corps algébriquement clos de caractéristique p, L le corps des fractions de $W(k)$, et σ le Frobenius de L. On note $\mathrm{Rep}(G)$ la catégorie des représentations algébriques de G sur des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathrm{Isoc}(k)$ la catégorie des isocristaux sur k et $\mathbb{D}$ le groupe diagonalisable sur $\mathbb{Q}_p$ dont le groupe des caractères est $X^\star(\mathbb{D}) = \mathbb{Q}$. Les références pour cette section sont [6, 16, 7].

3.2. — A tout élément b de $G(L)$, on associe les objets suivants :

1. le G-isocristal $\beta_b : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Isoc}(k)$,
2. son groupe d'automorphismes $J_b = \mathrm{Aut}^{\otimes}(\beta_b)$,
3. son morphisme de Newton $\nu_b : \mathbb{D}_L \to G_L$, et
4. le centralisateur $M_b = Z_{G_L}(\nu_b)$ de ν_b dans G_L.

3.3. — Rappelons brièvement la définition de ces objets. Tout d'abord,

$$\forall (V,\rho) \in \mathrm{Rep}(G) : \qquad \beta_b(V,\rho) = (V \otimes L, \rho(b) \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma)) .$$

Ensuite, J_b est le schéma en groupes sur $\mathbb{Q}_p$ tel que pour toute $\mathbb{Q}_p$-algèbre R,

$$J_b(R) = \{g \in G(R \otimes L) | g \cdot b = b \cdot \sigma(g)\} .$$

Enfin, ν_b est caractérisé par la propriété suivante : pour toute représentation (V,ρ) de G et tout élément λ de $\mathbb{Q} = X^\star(\mathbb{D})$, la partie isocline de pente λ dans l'isocristal $\beta_b(V,\rho)$ est la composante λ-isotypique pour l'action $\rho \circ \nu_b$ de $\mathbb{D}_L$ sur $V \otimes L$. Il résulte facilement de ces définitions (cf. [6, 4.4.3] ou [17, §1.7]) que

$$\mathrm{Int}(b) \circ \sigma(\nu_b) = \nu_b \quad \text{dans } \mathrm{Hom}_L(\mathbb{D}_L, G_L) . \tag{3.1}$$

3.4. — Le $\mathbb{Q}_p$-schéma en groupes J_b est une forme définie sur $\mathbb{Q}_p$ du sous-groupe de Levi M_b de G_L. Plus précisément, pour toute L-algèbre R, le morphisme canonique de L-algèbres $R \otimes L \to R$, vu comme augmentation de la R-algèbre $R \otimes L$, induit une rétraction du morphisme $G(R) \to G(R \otimes L)$, dont le composé

$$J_b(R) \hookrightarrow G(R \otimes L) \twoheadrightarrow G(R)$$

avec l'inclusion de $J_b(R)$ dans $G(R \otimes L)$ est un isomorphisme de $J_b(R)$ sur le sous-groupe $M_b(R)$ de $G(R) = G_L(R)$, cf. [7, §3.3 et Appendix A]. On obtient ainsi un isomorphisme de schémas en groupes sur L, que l'on note $\iota_b : J_{b,L} \to M_b$.

3.5. — Identifions $\sigma(M_b) \hookrightarrow \sigma(G_L) = G_L$ au centralisateur de $\sigma(\nu_b)$ dans G_L. L'équation 3.1 montre alors que l'automorphisme $\mathrm{Int}(b)$ de G_L induit un isomorphisme $\sigma(M_b) \to M_b$ de schémas en groupes sur L, qui n'est autre que la « donnée de descente » sur M_b induite par ι_b, i.e., le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} J_{b,L} & \xrightarrow{\iota_b} & M_b & \hookrightarrow & G_L & \to & \mathrm{Spec}(L) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \sigma \\ J_{b,L} & \xrightarrow{\sigma(\iota_b)} & \sigma(M_b) & \hookrightarrow & G_L & \to & \mathrm{Spec}(L) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ J_{b,L} & \xrightarrow{\iota_b} & M_b & \hookrightarrow & G_L & \to & \mathrm{Spec}(L). \end{array} \tag{3.2}$$

Dans ce diagramme, tous les carrés du haut sont cartésiens et ne servent qu'à définir la seconde ligne. La commutativité des carrés du bas (où les flèches verticales du carré central sont induites par $\mathrm{Int}(b)$) est essentiellement une tautologie.

3.6. — Puisque $\mathbb{D}$ est commutatif, le morphisme $\nu_b : \mathbb{D}_L \to G_L$ se factorise en un morphisme central $\mathbb{D}_L \to M_b$ que l'on note encore ν_b. On déduit de (3.1) et (3.2) que le morphisme $\iota_b^{-1} \circ \nu_b : \mathbb{D}_L \to J_{b,L}$ est σ-invariant. Il provient donc d'un morphisme central $\nu_b^J : \mathbb{D} \to J_b$ de schémas en groupes sur $\mathbb{Q}_p$.

3.7. — Soit $g \in G(L)$ et $b' = gb\sigma(g)^{-1}$. Alors g induit un isomorphisme $\beta_b \to \beta_{b'}$, donc aussi un isomorphisme $J(g) : J_b \to J_{b'}$. Pour toute $\mathbb{Q}_p$-algèbre R, l'isomorphisme $J(g) : J_b(R) \to J_{b'}(R)$ est induit par l'automorphisme $\mathrm{Int}(g)$ de $G(R \otimes L)$. Enfin $\mathrm{Int}(g) \circ \nu_b = \nu_{b'}$, $\mathrm{Int}(g)(M_b) = M_{b'}$ et $\mathrm{Int}(g) \circ \iota_b = \iota_{b'} \circ J(g)$.

3.8. — On dit d'un élément b de $G(L)$ qu'il est décent si et seulement s'il existe un entier $s \geq 1$ tel que $s\nu_b : \mathbb{D}_L \to G_L$ se factorise à travers un cocaractère $(s\nu_b) : \mathbb{G}_{m,L} \to G_L$ pour lequel l'équation suivante, dite de décence, est vérifiée :

$$(b, \sigma)^s = ((s\nu_b)(p), \sigma^s) \quad \text{dans } G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle . \tag{3.3}$$

On vérifie qu'alors b, ν_b, M_b et $\iota_b : J_{b,L} \to M_b$ sont définis sur la sous-extension $\mathbb{Q}_{p^s}$ de $L/\mathbb{Q}_p$, cf. [17, Cor. 1.9], et l'isomorphisme $\sigma(M_b) \to M_b$ induit par $\mathrm{Int}(b)$ est alors une authentique donnée de descente sur M_b relativement à l'extension finie et non-ramifiée $\mathbb{Q}_{p^s}/\mathbb{Q}_p$, cf. [17, Cor. 1.14]. La description explicite de $b \mapsto \nu_b$ dans [6, §4.3] montre que tout élément b de $G(L)$ est σ-conjugué à un élément décent.

3.9. — Lorsque G est quasi-déployé sur $\mathbb{Q}_p$, tout élément de $G(L)$ est σ-conjugué à un élément b tel que $\nu_b : \mathbb{D}_L \to G_L$ est défini sur $\mathbb{Q}_p$ d'après la preuve de [6, 6.2], qui renvoie à [5, 1.1.3]. Alors M_b est également défini sur $\mathbb{Q}_p$, b est un élément basique et G-régulier de $M_b(L)$, et J_b est une forme intérieure de M_b – cf [6, §6].

4. Le théorème principal

On reprend les hypothèses et notations de la section précédente. On fixe en outre une métrique euclidienne invariante sous $G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$ sur l'immeuble $\mathscr{I}(G, L)$, comme expliqué dans la section 2.5.3. Pour tout élément b de $G(L)$, on note $\mathscr{T}_b$ l'isométrie de $\mathscr{I}(G, L)$ induite par l'élément (b, σ) de $G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$. On définit également une fonction $G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$-invariante

$$| - | : \mathrm{Hom}\,(\mathbb{D}_L, G_L) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

de la manière suivante. Soit $\nu \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{D}_L, G_L)$ et S un tore déployé maximal de G_L tel que $\nu \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{D}_L, S) = X_\star(S) \otimes \mathbb{Q}$. On note $\nu_S \in X_\star(S) \otimes \mathbb{R}$ la translation correspondante de l'appartement $\mathscr{A}(S)$ de $\mathscr{I}(G, L)$. Si $\theta = (g, \sigma^s) \in G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$, alors explicitement $\theta(\nu) = \mathrm{Int}(g)(\sigma^s(\nu))$ et $\theta(S) = \mathrm{Int}(g)(\sigma^s(S))$. Le morphisme $\theta(\nu)$ se factorise à travers $\theta(S)$, et θ induit une isométrie de $\mathscr{I}(G, L)$ qui envoie $\mathscr{A}(S)$ sur $\mathscr{A}(\theta(S))$ en entrelaçant les translations ν_S et $\theta(\nu)_{\theta(S)}$. La fonction $|\nu| = |\nu_S|$ est donc bien définie (elle ne dépend pas du choix de S) et $G(L) \rtimes \langle \sigma \rangle$-invariante.

THÉORÈME 3. — *Avec les notations ci-dessus, pour tout $b \in G(L)$,*

1. *L'isométrie $\mathscr{T}_b$ de $\mathscr{I}(G, L)$ est semi-simple et* $\min(\mathscr{T}_b) = |\nu_b|$.
2. *L'action de $J_b(\mathbb{Q}_p) = \{g \in G(L) | gb = b\sigma(g)\}$ sur $\mathscr{I}(G, L)$ stabilise* $\mathrm{Min}(\mathscr{T}_b)$.

3. *Il existe une bijection $J_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariante*

$$\mathscr{I}(J_b, \mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Min}(\mathscr{F}_b) \subset \mathscr{I}(G, L)$$

qui est bien définie à translation près par un élément de $V(J_b, \mathbb{Q}_p)$.

Démonstration. — Le deuxième point du théorème est évident, et c'est un cas particulier du deuxième point de la proposition 1 : puisque $J_b(\mathbb{Q}_p)$ est le commutant de (b, σ) dans $G(L)$, l'action de $J_b(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathscr{I}(G, L)$ commute à $\mathscr{F}_b$ et stabilise donc $\mathrm{Min}(\mathscr{F}_b)$. D'autre part, si $b' = gb\sigma(g)^{-1}$ pour un élément g de $G(L)$, alors

$$\mathscr{F}_{b'} = g\mathscr{F}_b g^{-1} \quad \text{et} \quad \nu_{b'} = \mathrm{Int}(g) \circ \nu_b$$

donc $\mathrm{Min}(\mathscr{F}_{b'}) = g\,(\mathrm{Min}(\mathscr{F}_b))$, $\min(\mathscr{F}_{b'}) = \min(\mathscr{F}_b)$ et $|\nu_{b'}| = |\nu_b|$. Enfin, l'isomorphisme $J(g) : J_b \to J_{b'}$ induit des isomorphismes $J(g)$-équivariants

$$\mathscr{I}'(J_b, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathscr{I}'(J_{b'}, \mathbb{Q}_p) \quad \text{et} \quad V(J_b, \mathbb{Q}_p) \longrightarrow V(J_{b'}, \mathbb{Q}_p).$$

Quitte à remplacer b par b', on peut donc d'après 3.8 supposer qu'il existe un entier $s > 0$ tel que $s\nu_b : \mathbb{D}_L \to G_L$ se factorise en un cocaractère $(s\nu_b) : \mathbb{G}_{m,L} \to G_L$ avec

$$(b, \sigma)^s = (s\nu_b(p), \sigma^s) \quad \text{dans} \quad G(L) \rtimes \langle\sigma\rangle\,.$$

On rappelle qu'alors b, ν_b, M_b et ι_b sont définis sur $\mathbb{Q}_{p^s}$. On choisit s suffisamment grand pour qu'aussi $V(G, L) = V(G, \mathbb{Q}_{p^s})$ et $V(M_b, L) = V(M_b, \mathbb{Q}_{p^s})$. On pose

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_b, \quad \nu = \nu_b, \quad M = M_b, \quad J = J_b \quad \text{et} \quad \iota_b : J_{\mathbb{Q}_{p^s}} \to M_{\mathbb{Q}_{p^s}}\,.$$

Le lemme suivant démontre et précise la première assertion du théorème.

Lemme 4. — *Avec les notations ci-dessus,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}\,(\mathscr{F}^s) &= \{x \in \mathscr{I}_M(G, L) : \mathscr{F}^s x = x - s\nu\} = \mathscr{I}_M\,(G, \mathbb{Q}_{p^s}) \\ \textit{et} \qquad \mathrm{Min}\,(\mathscr{F}) &= \{x \in \mathscr{I}_M(G, \mathbb{Q}_{p^s}) : \mathscr{F}x = x - \nu\} \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Démonstration. — Puisque $\mathrm{Int}(b) \circ \sigma(\nu) = \nu$, $\mathrm{Int}(b) \circ \sigma(M) = M$ et $\mathscr{F}$ stabilise $\mathscr{C} = \mathscr{I}_M\,(G, \mathbb{Q}_{p^s})$. L'équation de décence montre que $\mathscr{F}^s$ agit sur $\mathscr{C}$ comme la translation de vecteur $v_M(s\nu(p)) = -s\nu \in V(M, \mathbb{Q}_{p^s})$, donc $\mathscr{F}^s|\mathscr{C}$ est semi-simple et $\min\,(\mathscr{F}^s|\mathscr{C}) = s|\nu|$. D'après (3) et (4) de la proposition 1, $\mathscr{F}$ est semi-simple et $\min(\mathscr{F}) = |\nu|$. D'après (5) et (6) (si $\nu \neq 0$), les axes de $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}^s$) sont des droites parallèles de direction ν, et leur réunion est égale à $\mathrm{Min}(\mathscr{F})$ (resp. $\mathrm{Min}(\mathscr{F}^s)$). La réunion de toutes les droites parallèles à ces axes n'est autre que le sous-espace $\mathscr{I}_M(G, L)$ de $\mathscr{I}(G, L)$ — voir [20, §3.9]. Dans tous les cas, on a donc

$$\mathrm{Min}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Min}(\mathscr{F}^s) \subset \mathscr{I}_M(G, L)$$

avec plus précisément

$$\begin{aligned}\mathrm{Min}(\mathscr{F}) &= \{x \in \mathscr{I}_M(G,L) : \mathscr{F}x = x - \nu\}\,,\\ \mathrm{Min}(\mathscr{F}^s) &= \{x \in \mathscr{I}_M(G,L) : \mathscr{F}^s x = x - s\nu\}\,.\end{aligned}$$

Choisissons comme en 2.5.2 une isométrie $M(L)$-équivariante

$$\mathscr{I}(M,L) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{I}_M(G,L)$$

dont on peut aussi supposer, d'après [9, Proposition 2.1.5], qu'elle commute à l'action de σ^s. L'équation de décence montre que l'action de $\mathscr{F}^s$ sur $\mathscr{I}_M(G,L)$ correspond à l'action de $(s\nu(p),\sigma^s)$ sur $\mathscr{I}(M,L) = \mathscr{I}'(M,L) \times V(M,L)$, i.e., à

$$(x',x^v) \mapsto (\sigma^s x', \sigma^s x^v - s\nu) = (\sigma^s x', x^v) - s\nu.$$

On en déduit en utilisant 2.5.5 que

$$\mathrm{Min}\,(\mathscr{F}^s) = \mathscr{C} = \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Min}\,(\mathscr{F}) = \{x \in \mathscr{C} : \mathscr{F}x = x - \nu\}$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Plongeons maintenant l'immeuble $\mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_p)$ dans $\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s})$. Pour cela, commençons par choisir comme en 2.5.2 une isométrie $M(\mathbb{Q}_{p^s})$-équivariante

$$\theta : \mathscr{I}(M,\mathbb{Q}_{p^s}) \longrightarrow \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}).$$

Soit $\mathscr{G}_\theta$ l'isométrie de $\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s})$ définie par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_{p^s}) \xrightarrow{\iota} \mathscr{I}(M,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\theta} & \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) \\ \sigma\downarrow & & \downarrow \mathscr{G}_\theta \\ \mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_{p^s}) \xrightarrow{\iota} \mathscr{I}(M,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\theta} & \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}). \end{array}$$

LEMME 5. — *Il existe un unique vecteur $\mathscr{V}_\theta \in V(M,\mathbb{Q}_{p^s})$ tel que*

$$\mathscr{G}_\theta = \mathscr{F} - \mathscr{V}_\theta \quad \textit{sur} \quad \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}).$$

Démonstration. — On forme le diagramme commutatif suivant, analogue de 3.2 :

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\iota} & \mathscr{I}(M,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\theta} & \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) \\ \sigma\downarrow & & \sigma\downarrow & & \sigma\downarrow \\ \mathscr{I}(\sigma J,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\sigma\iota} & \mathscr{I}(\sigma M,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\sigma\theta} & \mathscr{I}_{\sigma M}(G,\mathbb{Q}_{p^s}) \\ \| & & *\downarrow & & *\downarrow \\ \mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\iota} & \mathscr{I}(M,\mathbb{Q}_{p^s}) & \xrightarrow{\theta'} & \mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}). \end{array}$$

Les flèches verticales du haut proviennent du changement de base $\sigma : \mathbb{Q}_{p^s} \to \mathbb{Q}_{p^s}$, tandis que les flèches verticales marquées du bas sont induites par l'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(b)$ de G (qui envoie σM sur M). La commutativité du premier carré de gauche est une tautologie, celle du second résulte de la formule $\mathrm{Int}(b) \circ \sigma(\iota) = \iota$. La commutativité des deux carrés de droite définit les isométries $\sigma\theta$ et θ', qui sont donc nécessairement $(\sigma M)(\mathbb{Q}_{p^s})$ et $M(\mathbb{Q}_{p^s})$-équivariantes (respectivement), ainsi que torales, selon la terminologie de [9, 1.3.3]. En particulier, θ' et θ ne diffèrent que d'une translation par un élément de $V'(M,\mathbb{Q}_{p^s})$ — cf. [9, 2.1.5.ii]. D'autre part, le composé des deux flèches verticales de droite est induit par l'action $\mathscr{G}$ de l'élément (b,σ) de $G(L)\rtimes\langle\sigma\rangle$ sur $\mathscr{I}(G,L)$, où l'on fait maintenant agir $G(L)$ sur $\mathscr{I}(G,L)$ par automorphismes intérieurs, comme dans la section 2.5.1. On a donc d'une part $\mathscr{G}_\theta = \mathscr{G} - \mathscr{V}'_\theta$ sur $\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s})$ pour un élément $\mathscr{V}'_\theta \in V'(M,\mathbb{Q}_{p^s})$, et $\mathscr{F} = \mathscr{G} + v_G(b)$ sur tout $\mathscr{I}(G,L)$ avec $v_G(b)\in V(G,\mathbb{Q}_{p^s})$. Donc $\mathscr{G}_\theta = \mathscr{F} - \mathscr{V}_\theta$ sur $\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s})$, avec

$$\mathscr{V}_\theta = (\mathscr{V}'_\theta, v_G(b)) \quad \text{dans} \quad V(M,\mathbb{Q}_{p^s}) = V'(M,\mathbb{Q}_{p^s})\times V(G,\mathbb{Q}_{p^s}).$$

L'unicité est évidente. □

Par définition de $\mathscr{G}_\theta$ et $\mathscr{V}_\theta$ et en utilisant 2.5.3, on obtient une isométrie

$$\mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\theta\iota} \left\{x\in\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) : \mathscr{G}_\theta x = x\right\} = \{x\in\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) : \mathscr{F}x = x + \mathscr{V}_\theta\}$$

qui est équivariante pour les actions de $J(\mathbb{Q}_p) = \{g\in M(\mathbb{Q}_{p^s}) : b\sigma(g) = gb\}$.

Lemme 6. — *Soit $\mathscr{G} = \mathrm{Int}(b)\circ\sigma$ agissant sur $V(M,\mathbb{Q}_{p^s})$ et*

$$\mathscr{Z}_\theta = \sum_{i=0}^{s-1}\tfrac{s-1-2i}{2s}\cdot\mathscr{G}^i(\mathscr{V}_\theta)\in V(M,\mathbb{Q}_{p^s}).$$

Alors la translation par $\mathscr{Z}_\theta$ induit une isométrie $J(\mathbb{Q}_p)$-équivariante

$$\{x\in\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) : \mathscr{F}x = x+\mathscr{V}_\theta\} \xrightarrow{+\mathscr{Z}_\theta} \{x\in\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s}) : \mathscr{F}x = x-\nu\}.$$

Démonstration. — Puisque $\mathscr{G}_\theta$ est conjugué à σ, $\mathscr{G}_\theta^s = \mathrm{Id}$ sur $\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s})$. Or

$$\mathscr{G}_\theta^s = (\mathscr{F}-\mathscr{V}_\theta)^s = \mathscr{F}^s - \sum_{i=0}^{s-1}\mathscr{G}^i(\mathscr{V}_\theta) = \mathrm{Id} - s\nu - \sum_{i=0}^{s-1}\mathscr{G}^i(\mathscr{V}_\theta)$$

car $\mathscr{F}\circ(\mathrm{Id}-\mathscr{V}_\theta) = (\mathrm{Id}-\mathscr{G}(\mathscr{V}_\theta))\circ\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^s = \mathrm{Id}-s\nu$ sur $\mathscr{I}_M(G,\mathbb{Q}_{p^s})$ d'après le lemme 4. On obtient donc l'élégante formule

$$-\nu = \tfrac{1}{s}\sum_{i=0}^{s-1}\mathscr{G}^i(\mathscr{V}_\theta) \quad \text{dans} \quad V(M,\mathbb{Q}_{p^s}).$$

On en déduit que $\mathscr{G}(\mathscr{Z}_\theta)+\nu+\mathscr{V}_\theta = \mathscr{Z}_\theta$; le lemme en résulte immédiatement. □

En combinant les lemmes 4 et 6, on obtient une isométrie $J(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :

$$\iota_\theta = (\theta\circ\iota + \mathscr{Z}_\theta) : \mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Min}(\mathscr{F})$$

qui dépend à priori de θ. Mais si l'on change θ en $\theta' = \theta + v$ avec $v\in V(M,\mathbb{Q}_{p^s})$, alors $\mathscr{G}_{\theta'} = \mathscr{G}_\theta + v - \mathscr{G}(v)$, donc $\mathscr{V}_{\theta'} = \mathscr{V}_\theta + \mathscr{G}(v) - v$ puis

$$\mathscr{Z}_{\theta'} = \mathscr{Z}_\theta + v_0 - v \quad \text{et} \quad \iota_{\theta'} = \iota_\theta + v_0 \quad \text{avec} \quad v_0 = \tfrac{1}{s}\sum_{i=0}^{s-1}\mathscr{G}^i v.$$

Puisque $\iota : J_{\mathbb{Q}_{p^s}} \to M_{\mathbb{Q}_{p^s}}$ induit un isomorphisme de $V(J,\mathbb{Q}_p)$ sur $V(M,\mathbb{Q}_{p^s})^{\mathscr{G}=\mathrm{Id}}$, il existe un unique $u_0 \in V(J,\mathbb{Q}_p)$ tel que $\iota(u_0) = v_0$, et alors

$$\forall x \in \mathscr{I}(J,\mathbb{Q}_p) : \qquad \iota_{\theta'}(x) = \iota_\theta(x) + v_0 = \iota_\theta(x+u_0) \quad \text{dans} \quad \mathrm{Min}(\mathscr{F}).$$

Cette isométrie est donc bien définie à translation près par un élément de $V(J,\mathbb{Q}_p)$, ce qui achève la preuve du théorème. □

4.1. L'inégalité de Mazur. — La distance sur l'immeuble $\mathscr{I}(G,L)$ admet un raffinement vectoriel défini par A. Parreau dans [14],

$$d_G : \mathscr{I}(G,L) \times \mathscr{I}(G,L) \twoheadrightarrow \mathscr{C}(G,L)$$

où $\mathscr{C}(G,L)$ est la chambre de Weyl universelle fermée définie par

$$\mathscr{C}(G,L) = G(L)\backslash \varinjlim V(S,L),$$

où S parcourt les tores maximaux L-déployés de G_L. Si l'on choisit un tel tore S et une chambre de Weyl fermée $\overline{\mathfrak{C}}$ dans $V(S,L)$, alors

$$\overline{\mathfrak{C}} \simeq \Omega(S)\backslash V(S,L) \simeq \mathscr{C}(G,L),$$

où $\Omega(S)$ est le groupe de Weyl de S. En particulier, $\mathscr{C}(G,L)$ est un monoïde uniquement divisible et ordonné, muni d'une fonction longueur $|-| : \mathscr{C}(G,L) \to \mathbb{R}_+$ définie comme en la formule 4.1 ainsi que d'une action de $\langle\sigma\rangle$ compatible avec toutes ces structures.

La distance vectorielle d_G est définie comme suit. Pour $x, y \in \mathscr{I}(G,L)$, on choisit un appartement $\mathscr{I}(S,L)$ les contenant. Il existe alors un unique $v \in V(S,L)$ tel que $y = x + v$ dans $\mathscr{I}(S,L)$. L'image $d_G(x,y)$ de v dans $\mathscr{C}(G,L)$ ne dépend pas du choix de S. A. Parreau montre dans [14, Prop. 3.5] que pour tous $x, y, z \in \mathscr{I}(G,L)$,

$$d_G(x,z) \leq d_G(x,y) + d_G(y,z).$$

On retrouve la distance usuelle via $\mathrm{dist}(x,y) = |d_G(x,y)|$.

Soit $\mathscr{C}(G,\mathbb{Q}_p)$ l'ensemble des points fixes de σ dans $\mathscr{C}(G,L)$, et

$$\sharp : \mathscr{C}(G,L) \longrightarrow \mathscr{C}(G,\mathbb{Q}_p)$$

la rétraction obtenue en prenant la moyenne sur les orbites galoisiennes. On pose

$$d_G^\sharp : \mathscr{I}(G,L) \times \mathscr{I}(G,L) \longrightarrow \mathscr{C}(G,\mathbb{Q}_p), \quad d_G^\sharp = \sharp \circ d_G.$$

C'est maintenant une application $G(L) \rtimes \langle\sigma\rangle$-invariante telle que

$$d_G^\sharp(x,z) \leq d_G^\sharp(x,y) + d_G^\sharp(y,z) \quad \text{et} \quad |d_G^\sharp(x,y)| \leq \mathrm{dist}(x,y)$$

On note t l'application $G(L)$-invariante et $\langle\sigma\rangle$-équivariante

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{D}_L, G_L) = \varinjlim \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,L}, S_L) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathscr{C}(G,L).$$

Il résulte de l'équation (3.1) que $t(\nu)$ est dans $\mathscr{C}(G,\mathbb{Q}_p)$.

Théorème 7 (Inégalité de Mazur). — *Pour tout* $x \in \mathscr{I}(G, L)$,

$$t(\nu) \leq d_G^\sharp(\mathscr{F}x, x) \ \textit{dans}\ \mathscr{C}(G, \mathbb{Q}_p).$$

De plus, si $t(\nu) = d_G^\sharp(\mathscr{F}x, x)$, *alors* $x \in \mathscr{I}(M, L)$.

Démonstration. — Soit $n > 0$ tel que σ^n agisse trivialement sur $\mathscr{C}(G, L)$. Soit y la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Min}(\mathscr{F}^n)$, de sorte que $\mathscr{F}^n y = y - n\nu$ est aussi la projection orthogonale de $\mathscr{F}^n x$ sur $\mathrm{Min}(\mathscr{F}^n)$. Pour tout élément z dans l'enclos

$$\diamondsuit(\mathscr{F}^n y, y) = \{z \in \mathscr{I}(G, L) : d_G(\mathscr{F}^n y, z) + d_G(z, y) = d_G(\mathscr{F}^n y, y)\},$$

l'inégalité suivante est vérifiée dans $\mathscr{C}(G, L)$:

$$d_G(\mathscr{F}^n z, z) \leq d_G(\mathscr{F}^n z, \mathscr{F}^n y) + d_G(\mathscr{F}^n y, z) = d_G(z, y) + d_G(\mathscr{F}^n y, z) = d_G(\mathscr{F}^n y, y)$$

avec $d_G(\mathscr{F}^n y, y) = n \cdot t(\nu)$ car $y = \mathscr{F}^n y + n\nu$ dans $\mathscr{I}(M, L)$. En particulier,

$$\mathrm{dist}(\mathscr{F}^n z, z) = |d_G(\mathscr{F}^n z, z)| \leq |n \cdot t(\nu)| = \min(\mathscr{F}^n),$$

donc z appartient à $\mathrm{Min}(\mathscr{F}^n)$. Il en résulte que y et $\mathscr{F}^n y$ sont aussi les projections orthogonales de x et $\mathscr{F}^n x$ sur le sous-ensemble fermé convexe et d_G-convexe $\diamondsuit(\mathscr{F}^n y, y)$ de $\mathscr{I}(G, L)$. D'après [14, Corollaire 4.4], la projection orthogonale sur un d_G-convexe diminue la d_G-distance, et donc :

$$n \cdot t(\nu) = d_G(\mathscr{F}^n y, y) \leq d_G(\mathscr{F}^n x, x).$$

En appliquant $\sharp$ des deux côtés, on obtient

$$n \cdot t(\nu) \leq d_G^\sharp(\mathscr{F}^n x, x) \leq \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} d_G^\sharp(\mathscr{F}^{i+1} x, \mathscr{F}^i x) = n \cdot d_G^\sharp(\mathscr{F}x, x),$$

donc $t(\nu) \leq d_G^\sharp(\mathscr{F}x, x)$. Si de plus $t(\nu) = d_G^\sharp(\mathscr{F}x, x)$, alors

$$d_G(\mathscr{F}^n x, x) \leq \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} d_G(\mathscr{F}^{i+1} x, \mathscr{F}^i x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i d_G(\mathscr{F}x, x) = n \cdot d_G^\sharp(\mathscr{F}x, x) = n \cdot t(\nu),$$

donc $\mathrm{dist}(\mathscr{F}^n x, x) \leq |n \cdot t(\nu)| = \min(\mathscr{F}^n)$ et $x \in \mathrm{Min}(\mathscr{F}^n) \subset \mathscr{I}(M, L)$. □

4.2. — Dans cette section, supposons pour simplifier que G est non ramifié. L'inégalité de Mazur est habituellement énoncée pour la $G(L)$-orbite $\mathscr{I}^\circ(G, L)$ d'un point hyperspécial de $\mathscr{I}(G, \mathbb{Q}_p)$. L'image de la restriction de d_G à une telle orbite est égale à $\mathscr{C}^\circ(G, L) = G(L)\backslash\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,L}, G_L)$, et d_G induit une bijection

$$G(L)\backslash\big(\mathscr{I}^\circ(G, L) \times \mathscr{I}^\circ(G, L)\big) \xrightarrow{1:1} \mathscr{C}^\circ(G, L).$$

L'application $\sharp$ envoie $\mathscr{C}^\circ(G, L)$ dans l'ensemble $\mathscr{N}(G, \mathbb{Q}_p)$ des points fixes de $\langle\sigma\rangle$ dans $\mathscr{N}(G, L) = G(L)\backslash\mathrm{Hom}(\mathbb{D}_L, G_L)$, comme illustré dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}^\circ(G,L) \arrow[r, hookrightarrow] \arrow[dr, "\sharp"'] & \mathscr{N}(G,L) \arrow[r, hookrightarrow] \arrow[d, "\sharp"] & \mathscr{C}(G,L) \arrow[d, "\sharp"] \\
& \mathscr{N}(G,\mathbb{Q}_p) \arrow[r] & \mathscr{C}(G,\mathbb{Q}_p).
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathscr{A}^\circ(G,L)$ l'image de $\mathscr{I}^\circ(G,L)$ dans l'alcôve fermée universelle

$$\mathscr{A}(G,L) = G^{\mathrm{sc}}(L)\backslash\mathscr{I}(G,L),$$

où G^{sc} est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G. Soit

$$\omega_G : G(L) \twoheadrightarrow \pi(G,L)$$

la coïmage de l'action de $G(L)$ sur $\mathscr{A}(G,L)$. Alors $\pi(G,L)$ est un groupe abélien de type fini qui agit simplement et transitivement sur $\mathscr{A}^\circ(G,L)$. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{I}^\circ(G,L) & \times & \mathscr{I}^\circ(G,L) & \xrightarrow{d_G} & \mathscr{C}^\circ(G,L) \\
\downarrow [-] & & \downarrow [-] & & \downarrow [-] \\
\mathscr{A}^\circ(G,L) & \times & \mathscr{A}^\circ(G,L) & \xrightarrow{d_G} & \pi(G,L)
\end{array}$$

où l'application du bas envoie $(x, \pi\cdot x)$ sur π. Pour tout $x \in \mathscr{I}(G,L)$, on a donc

$$[d_G(x,\mathscr{F}x)] = d_G\left([x],[\mathscr{F}x]\right) \equiv \omega_G(b) \bmod (\sigma-1)\pi(G,L).$$

Cette égalité accompagne souvent l'inégalité de Mazur.

4.3. Estimation immobilière. — La proposition suivante améliore le résultat principal de [18] selon lequel il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $\mathrm{dist}(x,\mathscr{F}_b(x)) > \kappa\cdot\mathrm{dist}(x,\mathscr{I}(M_b,\mathbb{Q}_{p^s}))$ pour tout $x \in \mathscr{I}(G,L)$, lorsque b satisfait l'équation de décence (3.3).

Proposition 8. — *Il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de $b \in G(L)$ telle que*

$$\forall x \in \mathscr{I}(G,L): \qquad \mathrm{dist}\left(x,\mathscr{F}_b(x)\right) \geq \max\left(\min\left(\mathscr{F}_b\right), \kappa\cdot\mathrm{dist}\left(x,\mathrm{Min}\left(\mathscr{F}_b\right)\right)\right).$$

Démonstration. — Pour tout $b \in G(L)$, notons $\mathscr{G}_b$ et $\mathscr{V}_b$ les isométries de $\mathscr{I}'(G,L)$ et $V(G,L)$ induites par l'élément (b,σ) de $G(L)\rtimes\langle\sigma\rangle$, de sorte que

$$\mathscr{F}_b = (\mathscr{G}_b,\mathscr{V}_b) \quad \text{sur} \quad \mathscr{I}(G,L) = \mathscr{I}'(G,L)\times V(G,L).$$

D'après [13, Th. 4.1] il existe une constante $\alpha_0 \in]0,\pi]$ indépendante de b telle que

$$\forall x \in \mathscr{I}'(G,L): \qquad \mathrm{dist}\left(x,\mathscr{G}_b(x)\right) \geq \sin\left(\tfrac{\alpha_0}{2}\right)\cdot\mathrm{dist}\left(x,\mathrm{Min}\left(\mathscr{G}_b\right)\right).$$

D'autre part, $\mathcal{V}_b(x) = \sigma(x) + v_G(b)$ pour tout $x \in V(G,L)$. Notant $r > 0$ l'ordre de σ sur $V(G,L)$, un calcul élémentaire fournit la minoration suivante :

$$\forall x \in V(G,L): \qquad \operatorname{dist}(x, \mathcal{V}_b(x)) \geq 2\sin\left(\tfrac{\pi}{r}\right) \cdot \operatorname{dist}(x, \operatorname{Min}(\mathcal{V}_b)).$$

On en déduit l'existence de la constante κ désirée. Explicitement, $\kappa = \sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)$ si $r = 1$ et $\kappa = \min\left(\sin\left(\frac{\alpha_0}{2}\right), 2\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)$ si $r > 1$. □

Remarque 9. — *Pour tout type $\mu \in \mathcal{C}(G,L)$, notons $X_{\mathcal{F}}(\mu)$ l'ensemble des $x \in \mathcal{I}(G,L)$ tels que $d_G(\mathcal{F}x, x) = \mu$. C'est une partie fermée de $\mathcal{I}(G,L)$, stable sous $J(\mathbb{Q}_p)$ ainsi que sous $\mathcal{F}^s$ si $\sigma^s\mu = \mu$. D'après le théorème ci-haut, $X_{\mathcal{F}}(\mu) \neq \varnothing$ implique $\nu \leq \mu^\sharp$ et $X_{\mathcal{F}}(\mu) \subset \mathcal{I}_M(G,L)$ lorsque $\nu = \mu^\sharp$. Dans tous les cas, la projection convexe sur* $\operatorname{Min}(\mathcal{F})$ *définit une application*

$$\operatorname{pr}: X_{\mathcal{F}}(\mu) \to \operatorname{Min}(\mathcal{F})$$

qui est $J(\mathbb{Q}_p)$- et $\mathcal{F}^s$-équivariante, et dont les fibres sont uniformément bornées. On peut donc envisager $X_{\mathcal{F}}(\mu)$ comme une espèce de tube autour du lieu minimal de $\mathcal{F}$, et stratifier $X_{\mathcal{F}}(\mu)$ par les fibres de pr *(qui correspondent aux sections du tube). Lorsque G est un groupe unitaire non-ramifié (et pour certains μ bien choisis), une stratification similaire a été étudiée par Vollaard et Wedhorn dans* [22] *pour l'intersection $X^\circ_{\mathcal{F}}(\mu)$ de notre $X_{\mathcal{F}}(\mu)$ avec la $G(L)$-orbite $\mathcal{I}^\circ(G,L)$ d'un point hyperspécial de $\mathcal{I}(G,\mathbb{Q}_p)$.*

5. Exemple : GL_n

Pour les groupes classiques, on identifie souvent les immeubles de Bruhat-Tits avec certains espaces de normes p-adiques. Nous illustrons ici ce que donne la transposition de nos constructions cristallines à ces modèles plus concrets d'immeubles dans le cas du groupe linéaire général, c'est-à-dire pour les isocristaux sans structures additionnelles.

Soit donc h un entier positif, V un espace vectoriel de dimension h sur $\mathbb{Q}_p$ et $G = \mathrm{GL}(V)$. On fixe un élément $b \in G(L)$ et on note $(N, \mathcal{F})$ l'isocristal défini par

$$N = V \otimes L \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = b \circ (\mathrm{Id}_V \otimes \sigma).$$

On note $(N, \mathcal{F}) = \oplus (N_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ la décomposition isocline de $(N, \mathcal{F})$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d(\lambda)}{h(\lambda)}$ où $d(\lambda)$ et $h(\lambda) > 0$ sont relativement premiers. On pose

$$\mathbb{F}(\lambda) = \left\{x \in k : \sigma^{h(\lambda)}(x) = x\right\} \quad \text{et} \quad K(\lambda) = \left\{x \in L : \sigma^{h(\lambda)}(x) = x\right\}$$

et on note $(N^0_\lambda, \mathcal{F}^0_\lambda)$ l'isocristal sur $\mathbb{F}(\lambda)$ qui est donné par :

$$N^0_\lambda = \left\{x \in N_\lambda : \mathcal{F}^{h(\lambda)}_\lambda x = p^{d(\lambda)} x\right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^0_\lambda = \mathcal{F}_\lambda | N^0_\lambda.$$

Soient $J = \prod J_\lambda$ et J_λ les groupes d'automorphismes de $(N, \mathscr{F})$ et $(N_\lambda, \mathscr{F}_\lambda)$. Alors

$$J_\lambda(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{Aut}_L\left(N_\lambda, \mathscr{F}_\lambda\right) = \mathrm{Aut}_{K(\lambda)}\left(N_\lambda^0, \mathscr{F}_\lambda^0\right) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{D}(\lambda)}\left(N_\lambda^0\right)$$

où $\mathbb{D}(\lambda)$ est le corps gauche de centre $\mathbb{Q}_p$ engendré sur $K(\lambda)$ par un élément π_λ tel que $\pi_\lambda x = \sigma(x)\pi_\lambda$ pour tout $x \in K(\lambda)$ et $\pi_\lambda^{h(\lambda)} = p^{d(\lambda)}$, que l'on fait agir sur le $K(\lambda)$-espace vectoriel N_λ^0 par $\pi_\lambda \mapsto \mathscr{F}_\lambda^0$.

On munit $A \in \{L, K(\lambda), \mathbb{D}(\lambda)\}$ de la valuation normalisée par $|p| = 1/p$; si X est un A-espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathscr{N}(X, A)$ l'ensemble des A-normes de X, c'est-à-dire l'ensemble des normes $\alpha : X \to \mathbb{R}_+$ telles que $\alpha(ax) = |a|\,\alpha(x)$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in X$. L'immeuble $\mathscr{I}(G, L)$ s'identifie à l'ensemble $\mathscr{N}(N, L)$ des L-normes de N, où $G(L) \rtimes \langle\sigma\rangle$ agit par $(g \cdot \alpha)(x) = \alpha(g^{-1}x)$. L'immeuble $\mathscr{I}(M, L) \simeq \mathscr{I}_M(G, L)$ du Levi $M = \prod \mathrm{GL}(N_\lambda)$ de G_L correspond au sous-ensemble $\prod \mathscr{N}(N_\lambda, L)$ des L-normes de N qui se décomposent selon $N = \oplus N_\lambda$. Enfin

$$\mathrm{Min}(\mathscr{F}) = \prod \mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda) \subset \prod \mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda^{h(\lambda)}) \subset \prod \mathscr{N}(N_\lambda, L) \subset \mathscr{N}(N, L)$$

où les sous-ensembles $\mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda)$ et $\mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda^{h(\lambda)})$ de $\mathscr{N}(N_\lambda, L)$ sont définis par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda) \quad &= \left\{\alpha \in \mathscr{N}(N_\lambda, L) : \forall x \in N_\lambda,\ (\mathscr{F}_\lambda \cdot \alpha)(x) = p^\lambda \cdot \alpha(x)\right\}, \\
\mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda^{h(\lambda)}) &= \left\{\alpha \in \mathscr{N}(N_\lambda, L) : \forall x \in N_\lambda,\ (\mathscr{F}_\lambda^{h(\lambda)} \cdot \alpha)(x) = p^{d(\lambda)} \cdot \alpha(x)\right\} \\
&= \left\{\alpha \in \mathscr{N}(N_\lambda, L) : \forall x \in N_\lambda,\ \alpha(\mathscr{F}_\lambda^{h(\lambda)} x) = \alpha(p^{d(\lambda)} x)\right\}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité identifie $\mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda^{h(\lambda)})$ et $\mathscr{N}(N_\lambda^0, K(\lambda))$, puis

$$\mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda) = \left\{\alpha \in \mathscr{N}(N_\lambda^0, K(\lambda)) : \forall x \in N_\lambda^0,\ \alpha(\pi_\lambda x) = |\pi_\lambda|\,\alpha(x)\right\} = \mathscr{N}(N_\lambda^0, \mathbb{D}(\lambda)).$$

Puisque $\mathscr{I}(J_\lambda, \mathbb{Q}_p) \simeq \mathscr{N}(N_\lambda^0, \mathbb{D}(\lambda))$, on a ainsi vérifié que $\mathrm{Min}(\mathscr{F}) \simeq \mathscr{I}(J, \mathbb{Q}_p)$.

Remarque 10. — *Un cristal dans N est un W-réseau M de N qui est stable par $\mathscr{F}$ et $\mathscr{V} = p\mathscr{F}^{-1}$. De tels réseaux n'existent que lorsque toutes les pentes λ de N sont comprises entre* 0 *et* 1. *Sous cette hypothèse, la proposition* [11, Prop. 5.17] *montre que les cristaux minimaux au sens de Oort* [12] *sont les boules des L-normes de N qui sont dans* $\mathrm{Min}(\mathscr{F}) = \prod \mathrm{Min}(\mathscr{F}_\lambda)$ *: pour tout $\alpha \in \mathrm{Min}(\mathscr{F})$ et $r > 0$, la boule $B(\alpha \leq r) := \{x | \alpha(x) \leq r\}$ est un cristal minimal, et tous les cristaux minimaux sont de cette forme. Pour* GL_n, *l'unicité bien connue du cristal minimal à isomorphisme près découle du fait que tous les sommets de $\mathscr{I}(J, \mathbb{Q}_p)$ sont conjugués sous $J(\mathbb{Q}_p)$ quand J est une forme intérieure d'un Lévi de* GL_n. *Pour un groupe G arbitraire, le nombre d'orbites de cette action est seulement fini.*

Remerciements. — Nous remercions l'Institut Max Planck de Bonn pour ses conditions de travail et son hospitalité idéales, pour toute la durée de l'année 2011 pour le second auteur, et pour un séjour d'une semaine en août 2011 pour le premier auteur. Ce travail a aussi bénéficié de nombreux échanges avec Guy Rousseau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. R. Bridson & A. Haefliger – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundl. Math. Wiss., vol. 319, Springer, Berlin, 1999.

[2] F. Bruhat & J. Tits – « Groupes réductifs sur un corps local », *Publ. Math. IHÉS* **41** (1972), p. 5–251.

[3] ———, « Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée », *Publ. Math. IHÉS* **60** (1984), p. 197–376.

[4] C. Cornut – « Filtrations and buildings », prépublication HAL-01085000.

[5] R. E. Kottwitz – « Shimura varieties and twisted orbital integrals », *Math. Ann.* **269** (1984), p. 287–300.

[6] ———, « Isocrystals with additional structure », *Compositio Math.* **56** (1985), p. 201–220.

[7] ———, « Isocrystals with additional structure. II », *Compositio Math.* **109** (1997), p. 255–339.

[8] ———, « On the Hodge-Newton decomposition for split groups », *Int. Math. Res. Not.* **2003** (2003), p. 1433–1447.

[9] E. Landvogt – « Some functorial properties of the Bruhat-Tits building », *J. reine angew. Math.* **518** (2000), p. 213–241.

[10] R. P. Langlands & M. Rapoport – « Shimuravarietäten und Gerben », *J. reine angew. Math.* **378** (1987), p. 113–220.

[11] E. Lau, M.-H. Nicole & A. Vasiu – « Stratifications of Newton polygon strata and Traverso's conjectures for p-divisible groups », *Ann. of Math.* **178** (2013), p. 789–834.

[12] F. Oort – « Minimal p-divisible groups », *Ann. of Math.* **161** (2005), p. 1021–1036.

[13] A. Parreau – « Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries », in *Crystallographic groups and their generalizations (Kortrijk, 1999)*, Contemp. Math., vol. 262, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 263–302.

[14] ———, « La distance vectorielle dans les immeubles affines et les espaces symétriques », prépublication, 2010.

[15] G. Prasad & J.-K. Yu – « On finite group actions on reductive groups and buildings », *Invent. math.* **147** (2002), p. 545–560.

[16] M. Rapoport & M. Richartz – « On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure », *Compositio Math.* **103** (1996), p. 153–181.

[17] M. Rapoport & T. Zink – *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Math. Studies, vol. 141, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1996.

[18] ______, « A finiteness theorem in the Bruhat-Tits building : an application of Landvogt's embedding theorem », *Indag. Math.* **10** (1999), p. 449–458.

[19] G. Rousseau – « Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux », thèse de doctorat, Université Paris XI, Orsay, 1977.

[20] ______, « Exercices métriques immobiliers », *Indag. Math. (N.S.)* **12** (2001), p. 383–405.

[21] J. Tits – « Reductive groups over local fields », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 29–69.

[22] I. Vollaard & T. Wedhorn – « The supersingular locus of the Shimura variety of $\mathrm{GU}(1, n-1)$ II », *Invent. math.* **184** (2011), p. 591–627.