

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## **LA SURCOHÉRENCE ENTRAÎNE L'HOLONOMIE**

**Daniel Caro**

**Tome 144  
Fascicule 3**

**2016**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 429-476

---

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un  
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 144, septembre 2016

---

*Comité de rédaction*

Emmanuel BREUILLARD

Yann BUGEAUD

Jean-François DAT

Charles FAVRE

Marc HERZLICH

O'Grady KIERAN

Raphaël KRIKORIAN

Julien MARCHÉ

Emmanuel RUSS

Christophe SABOT

Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

*Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
[smf@smf.univ-mrs.fr](mailto:smf@smf.univ-mrs.fr)

Hindustan Book Agency  
O-131, The Shopping Mall  
Arjun Marg, DLF Phase 1  
Gurgaon 122002, Haryana  
Inde

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
[www.ams.org](http://www.ams.org)

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 43 € (\$ 64)

*Abonnement* Europe : 178 €, hors Europe : 194 € (\$ 291)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat : Nathalie Christiaën*

*Bulletin de la Société Mathématique de France*

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

[revues@smf.ens.fr](mailto:revues@smf.ens.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

---

## LA SURCOHÉRENCE ENTRAÎNE L'HOLONOMIE

PAR DANIEL CARO

---

RÉSUMÉ. — Soit  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel parfait. Soit  $\mathfrak{X}$  un schéma formel lisse sur  $\mathcal{V}$ . Nous définissons la notion de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérence dans  $\mathfrak{X}$  (après tout changement de base), ce qui correspond a priori à une notion plus faible que celle de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérence. Nous établissons qu'un module  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent après tout changement de base est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -holonome. De plus, nous en déduisons la propriété suivante de stabilité de la surholonomie: un complexe borné de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules  $\mathcal{E}$  est surholonome après tout changement de base si et seulement si, pour tout entier  $j$ ,  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$  est surholonome après tout changement de base.

ABSTRACT (*The overcoherence implies the holonomicity*). — Let  $\mathcal{V}$  be a mixed characteristic complete discrete valuation ring with perfect residue field. Let  $\mathfrak{X}$  be a smooth formal scheme over  $\mathcal{V}$  and  $D$  a divisor of its special fiber. We define the notion of  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -overcoherence in  $\mathfrak{X}$  (after any change of basis), which is a priori a weaker notion than the  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -overcoherence. We prove that a  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -overcoherent after any change of basis module is  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -holonomic. Furthermore, we check that this implies the following property of stability of the overholonomicity: a bounded complex  $\mathcal{E}$  of  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules is overholonomic after any change of basis if and only if, for any integer  $j$ ,  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$  is overholonomic after any change of basis.

---

*Texte reçu le 27 novembre 2012, révisé le 27 novembre 2014 et le 4 mai 2016, accepté le 19 mai 2016.*

DANIEL CARO, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, Campus 2, 14032 Caen Cedex, France. • *E-mail* : [daniel.caro@math.unicaen.fr](mailto:daniel.caro@math.unicaen.fr)

Classification mathématique par sujets (2000). — 14F30.

Mots clefs. —  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques, holonomie, cohomologie  $p$ -adique.

## Introduction

Ce travail s'inscrit dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques de P. Berthelot. Cette théorie constitue une version arithmétique de celle des modules sur le faisceau des opérateurs différentiels (pour une introduction générale consulter [7], autrement lire dans l'ordre [3], [5], [6]). Comme l'avait conjectuée Berthelot, cette théorie, via la notion de surholonomie (voir [15]), permet d'obtenir dans un travail en commun avec Tsuzuki (voir [20]) une cohomologie  $p$ -adique sur les variétés algébriques sur un corps de caractéristique  $p > 0$  stable par les six opérations cohomologiques de Grothendieck, i.e., image directe, image directe extraordinaire, image inverse, image inverse extraordinaire, produit tensoriel, foncteur dual. Voici le contexte de cette théorie : soit  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ , de corps résiduel supposé parfait. Soit  $\mathfrak{X}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel intègre et lisse,  $X$  sa fibre spéciale. Dans la version arithmétique de Berthelot, le faisceau des opérateurs différentiels usuels  $\mathcal{D}$  est remplacé par  $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{\dagger}$ . Plus précisément, il construit le faisceau sur  $\mathfrak{X}$  des opérateurs différentiels de niveau fini et d'ordre infini noté  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$  ; ce dernier correspondant à la tensorisation par  $\mathbb{Q}$  (indiqué par l'indice  $\mathbb{Q}$ ) du complété faible  $p$ -adique (indiqué par le symbole «  $\dagger$  ») du faisceau classique  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$  des opérateurs différentiels sur  $\mathfrak{X}$  (i.e. au sens de Grothendieck [21, 16]). Lorsque l'on parlera de structure de Frobenius (seulement dans ce cas-là), on suppose qu'il existe un isomorphisme  $\sigma: \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$  relevant l'endomorphisme de Frobenius de  $k$ . Berthelot a aussi obtenu la notion de  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module « holonome » en s'inspirant du cas classique : un  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent (i.e. un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent avec une structure de Frobenius) est holonome s'il est nul ou si la dimension de sa variété caractéristique est égale à la dimension de  $X$ . On dispose de plus de la caractérisation de Virrion de l'holonomie (voir [32]) : un  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent  $\mathcal{E}$  est holonome si et seulement si le foncteur dual  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -linéaire est acyclique pour  $\mathcal{E}$ . Plus généralement, soit  $D$  un diviseur de  $X$ . Le critère de Virrion permet d'étendre la notion d'holonomie de la manière suivante : un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -holonome si le foncteur dual  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire est acyclique pour  $\mathcal{E}$ . La conjecture la plus forte (car elle implique toutes les autres) de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie (voir [7, 5.3.6]) prédit qu'un  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module holonome est un  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module holonome. Lorsque  $\mathfrak{X}$  est projectif, cette conjecture a été établie (voir [19]). Par contre, un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module holonome n'est pas toujours un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module holonome, i.e., il faut faire plus attention sans structure de Frobenius. En effet, les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -cohérent (i.e.

les isocristaux surconvergents sur  $(X \setminus D, X)$  dans le langage de la cohomologie rigide) sont des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -modules holonomes mais ils ne sont pas toujours  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent (et donc encore moins  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -holonome). Pour espérer généraliser cette conjecture de Berthelot sans structure de Frobenius, il faut rajouter des conditions supplémentaires de type non-Liouville (voir [18] pour un tout premier travail dans cette direction).

Soit  $\mathcal{E} \in (F-)D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}})$ . Dans ce papier nous introduisons la notion de «  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérence dans  $\mathfrak{X}$  » : le complexe  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  si, pour tout diviseur  $T$  de  $X$ , on ait  $({}^{\dagger}T)(\mathcal{E}) \in (F-)D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}})$ , où  $({}^{\dagger}T)$  est le foncteur localisation en dehors de  $T$ . Cette notion rejoint celle de la  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérence définie dans [10]. En effet,  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent si et seulement si pour tout morphisme lisse de la forme  $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ , le complexe  $f^!(\mathcal{E})$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}({}^{\dagger}f^{-1}(D))_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}'$ . Nous prouvons dans ce papier l'implication  $(*)$  : si  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  et après tout changement de la base  $\mathcal{V}$  alors  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -holonome. En particulier, si  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent et après tout changement de la base  $\mathcal{V}$  alors  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -holonome. Nous avons besoin de la stabilité de la surcohérence après tout changement de la base  $\mathcal{V}$  pour pouvoir utiliser le théorème [16, 3.4] dont une version correcte nécessite l'ajout de l'hypothèse « et après tout changement de la base  $\mathcal{V}$  » (il manque cette indication dans la version publiée de [16, 3.4]). En effet, la seconde partie de la preuve de [16, 3.4] qui devait permettre de se ramener au cas d'un corps résiduel non dénombrable ne fonctionne pas. Pour remédier à cette erreur, il suffit d'ajouter l'hypothèse « et après tout changement de la base  $\mathcal{V}$  » aux résultats utilisant [16, 3.4] ou alors supposer le corps résiduel non dénombrable.

Cette implication  $(*)$  améliore le théorème plus faible déjà connu établissant qu'un  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent est surholonome et donc holonome (voir [20, 2.3.17] ou [17, 6.2.4] pour la version la plus générale possible). Lorsque  $\mathfrak{X}$  est de plus projectif, il découle de [19] que les notions de  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -holonomie et de  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérence dans  $\mathfrak{X}$  sont équivalentes, i.e. la réciproque est valable au moins dans cette situation géométrique et avec une structure de Frobenius.

Même dans le cas de la surcohérence (notion plus restrictive a priori que la surcohérence dans  $\mathfrak{X}$ ) avec structure de Frobenius évoquée ci-dessus, la preuve de ce papier est aussi intéressante puisqu'elle est directe et n'utilise pas le puissant théorème de la réduction semi-stable de Kedlaya. En effet, la preuve avec structure de Frobenius de l'équivalence entre surcohérence et surholonomie est le résultat d'un long processus dont voici une esquisse : Afin d'obtenir de surcroît des coefficients stables par dualité, la notion de surcohérence avait été raffinée via la notion de « surholonomie ». Nous avons établi comme son

nom l'indique qu'un module surholonome est holonome (voir [15]). Après avoir fait le lien avec la cohomologie rigide de Berthelot (voir [4], [29]), lien qui a été initié par Berthelot dans [3, 5, 6] puis prolongé dans l'ordre [14], [11, 13] (avec structure de Frobenius), [17] (sans structure de Frobenius), la notion de « dévissabilité en isocristaux surconvergens » a été développée. Lorsque que l'on dispose d'une structure de Frobenius, d'après [17, 5.2.4] (qui étend très légèrement [20]), on démontre en fait que ces trois notions de surholonomie, de surcohérence et de dévissabilité en  $F$ -isocristaux surconvergens sont toujours identiques. Pour prouver cette équivalence, on remarque d'abord par définition que la surholonomie entraîne la surcohérence. Puis, on a établi que la surcohérence implique la dévissabilité en  $F$ -isocristaux surconvergens (voir [13]). Enfin, pour boucler la preuve, il reste par dévissage à prouver la surholonomie des  $F$ -isocristaux surconvergens, ce qui est établi dans [20]. Un ingrédient fondamental de cette preuve est le théorème de la réduction semi-stable de Kedlaya (voir [25, 26, 27, 28]), théorème qui utilise la structure de Frobenius, qui est faux en général et qui prolonge de manière très remarquable le théorème de la monodromie  $p$ -adique établi séparément par André, Kedlaya, Mebkhout (voir [2, 23, 30]) ou du théorème analogue de Tsuzuki dans le cas des  $F$ -isocristaux unités (voir [31]).

On termine ce travail par une application sur la stabilité de la surholonomie : un complexe de  $\mathcal{D}_{X,\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules est surholonome après tout changement de base si et seulement si ses espaces de cohomologie le sont (voir 3.4.5).

Décrivons maintenant l'organisation de ce papier. Il s'articule en trois parties. Les deux premiers chapitres établissent des résultats préliminaires qui permettront d'obtenir les deux résultats principaux de ce travail donnés dans le dernier. Précisons à présent leur contenu.

Dans le premier chapitre, dans le cas d'une immersion fermée de schémas affines, lisses sur une base noethérienne et munis de coordonnées locales, nous calculons explicitement les morphismes d'adjonction entre l'image directe et l'image inverse extraordinaire dans les catégories de  $\mathcal{D}$ -modules. Nous vérifions ensuite que l'image directe par une immersion fermée commute à l'image inverse extraordinaire par une immersion fermée.

Dans le cas d'une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines, lisses et munis de coordonnées locales, nous étendons dans le deuxième chapitre le calcul des morphismes d'adjonction par passage à la limite projective de la situation du premier chapitre. Nous y expliquons pourquoi, afin d'obtenir des catégories stables par image directe et image inverse extraordinaire d'une immersion fermée, il s'agit de travailler cette fois-ci exclusivement avec des modules sur les sections globales de faisceaux d'opérateurs différentiels de niveau fixé, et non plus avec des modules sur des faisceaux d'opérateurs différentiels de niveau fixé.

Enfin, dans la dernière partie, après quelques compléments sur la notion d'holonomie sans structure de Frobenius développée dans [16], grâce aux isomorphismes de changement de base du premier chapitre et aux morphismes d'adjonction du deuxième chapitre, nous établissons le résultat principal de ce papier : un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  après tout changement de base est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -holonome. On vérifie ensuite que cela implique que la notion de « surholonomie après tout changement de base » est stable pour tout entier  $j$  par le foncteur  $j$ -ième espace de cohomologie, i.e. par  $\mathcal{H}^j$ .

## Notations

Soient  $\mathcal{V}$  un anneau de valuations discrètes complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ , de corps résiduels  $k$  supposé parfait, d'uniformisant  $\pi$ , de corps des fractions  $K$ . Lorsque l'on parlera de structure de Frobenius (seulement dans ce cas-là), on suppose qu'il existe un isomorphisme  $\sigma: \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$  relevant l'endomorphisme de Frobenius de  $k$ .

Les faisceaux seront notés avec des lettres calligraphiques, les lettres droites correspondantes signifiant alors leur section globale. Le symbole chapeau désigne toujours la complétion  $p$ -adique. Si  $f: \mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses, on notera pour tout  $i \in \mathbb{N}$  par  $f_i: Z_i \rightarrow X_i$  le morphisme de schémas induit par réduction modulo  $\pi^{i+1}$  (et de même pour d'autres lettres de l'alphabet). On notera simplement  $X$  ou  $Z$  à la place de  $X_0$  ou  $Z_0$ .

Nous reprendrons les notations standards concernant les faisceaux d'opérateurs différentiels apparaissant dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques de Berthelot (e.g. voir [5] pour les constructions détaillées de ces faisceaux et [7] pour les constructions des opérations cohomologiques telles que l'image directe ou l'image inverse extraordinaire).

*Remerciement.* — Je remercie Tomoyuki Abe pour une erreur décelée dans une version précédente de ce papier.

## 1. Immersion fermée de schémas lisses et $\mathcal{D}$ -modules quasi-cohérents

Dans ce chapitre, on désigne par  $m$  un entier positif,  $S$  un schéma noethérien. Sauf mention explicite du contraire, nous travaillerons dans la catégorie des  $S$ -schémas (lisses) et nous omettrons alors d'indiquer  $S$  dans les notations concernant les opérateurs différentiels.

**1.1. Préliminaires : quelques calculs en coordonnées locales.** — Soit  $u : Z \hookrightarrow X$  une immersion fermée de  $S$ -schémas lisses. On note  $\omega_X$  le faisceau des formes différentielles sur  $X$  de degré maximal, de même pour  $Z$ . On dispose du  $(\mathcal{D}_Z^{(m)}, u^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)})$ -bimodule  $\mathcal{D}_{Z \hookrightarrow X}^{(m)} := u^*\mathcal{D}_X^{(m)}$  et du  $(u^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, \mathcal{D}_Z^{(m)})$ -bimodule  $\mathcal{D}_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} := u_d^*(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$ , l'indice  $d$  signifiant que l'on choisit la structure droite du  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -bimodule à droite  $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ . D'après [6, 3.4.1], via l'isomorphisme de transposition échangeant les structures droite et gauche de  $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ , on rappelle que  $\mathcal{D}_{X \hookrightarrow Z}^{(m)}$  est isomorphe à  $\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} u_g^*(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})$ , l'indice  $g$  signifiant que l'on choisit la structure gauche cette fois-ci. Cependant, par souci de précisions (e.g. pour les calculs locaux), nous prendrons exclusivement la définition  $\mathcal{D}_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} := u_d^*(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$ .

Dans cette section, supposons  $S$  affine,  $X$  affine et muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_n$  relativement à  $S$  telles que  $Z = V(t_1, \dots, t_r)$ . Notons  $\mathcal{I}$  l'idéal de l'immersion fermée  $u$ . Conformément aux notations adoptées dans le préambule de ce papier, on note  $\mathcal{O}_S$ ,  $\mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{O}_Z$  les sections globales de  $\mathcal{O}_S$ ,  $\mathcal{O}_X$  et de  $\mathcal{O}_Z$ ; de même pour les sections globales d'autres faisceaux. On notera alors  $\partial_i^{<\underline{k}>(m)}$  pour  $i = 1, \dots, d$  et  $k \in \mathbb{N}$  les opérateurs de  $D_{X/S}^{(m)}$  associés canoniquement à ces coordonnées locales. Dans ce cas, les éléments de  $D_X^{(m)}$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \partial^{<\underline{k}>(m)}$  (resp.  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} \partial^{<\underline{k}>(m)} a_{\underline{k}}$ ), la somme n'ayant qu'un nombre fini de termes  $a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X$  non nuls et où  $\partial^{<\underline{k}>(m)} := \prod_{i=1}^n \partial_i^{<k_i>(m)}$ .

**NOTATIONS 1.1.1.** — La sous- $\mathcal{O}_S$ -algèbre de  $D_X^{(m)}$  engendrée par les éléments  $\{\partial_1^{<k_1>(m)}, \partial_2^{<k_2>(m)}, \dots, \partial_r^{<k_r>(m)} \mid k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}\}$  sera notée  $\mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$ . S'il n'y a pas de risque de confusion (avec les éléments de  $D_{X'}^{(m)}$  où  $X' = V(t_{r+1}, \dots, t_n)$ ), les éléments  $\partial^{<(\underline{i}, \underline{0})>(m)}$ , avec  $\underline{i} \in \mathbb{N}^r$  et  $\underline{0} \in \mathbb{N}^{n-r}$  de composantes nulles, constituant la  $\mathcal{O}_S$ -base canonique de cette  $\mathcal{O}_S$ -algèbre commutative seront simplement notés  $\partial^{<\underline{i}>(m)}$ .

On ne confondra cette  $\mathcal{O}_S$ -algèbre commutative avec le polynôme à puissances divisées de niveau  $m$  en  $r$  variables à coefficients dans  $\mathcal{O}_S$  de [5, 1.5.3] et noté  $\mathcal{O}_S < \partial_1, \dots, \partial_r >_{(m)}$ . On pourrait d'ailleurs appeler la  $\mathcal{O}_S$ -algèbre  $\mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$ , le polynôme à puissances « symétriquement » divisées de niveau  $m$  en  $r$  variables à coefficients dans  $\mathcal{O}_S$ .

**NOTATIONS 1.1.2.** — Dans ce qui suit, plusieurs notations et isomorphismes dépendront du choix des coordonnées locales mais pour alléger les notations nous ne les indiquerons pas.

On dispose de l'égalité  $D_{Z \hookrightarrow X}^{(m)} := \Gamma(Z, \mathcal{D}_{Z \hookrightarrow X}^{(m)}) = D_X^{(m)} / ID_X^{(m)}$ . Cette égalité est compatible avec les structures canoniques de  $D_X^{(m)}$ -modules à gauche



respectives. Pour tout  $P \in D_X^{(m)}$ , on note  $[P]_Z$  son image dans  $D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}$ . En particulier, si  $a \in O_X$ , alors  $[a]_Z$  désigne l'image de  $a$  dans  $O_Z$ .

La structure de  $D_Z^{(m)}$ -module à gauche sur  $D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}$  se décrira via l'isomorphisme 1.1.9.1 ci-dessous.

NOTATIONS 1.1.3. — Le module  $D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  est muni canoniquement d'une structure de  $D_Z^{(m)}$ -module à gauche. On bénéficie du morphisme canonique  $\sigma_{Z,X/S}^{(m)} : D_X^{(m)} \rightarrow D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  défini en posant

$$\sigma_{Z,X/S}^{(m)} \left( \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{<\underline{k}>^{(m)}} \right) := \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \left( \sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}} [a_{(\underline{i}, \underline{j})}]_Z \underline{\partial}^{<\underline{j}>^{(m)}} \right) \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>^{(m)}},$$

les  $a_{\underline{k}} \in O_X$  étant nuls sauf pour un nombre fini. S'il n'y a pas de doute sur la base ou sur le niveau, on notera simplement  $\sigma_{Z,X}$ .

En considérant la structure de  $O_X$ -module induite par la structure de  $D_X^{(m)}$ -module à gauche sur  $D_X^{(m)}$  (resp. induite par la structure de  $D_Z^{(m)}$ -module à gauche sur  $D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$ ), on vérifie que  $\sigma_{Z,X}$  est  $O_X$ -linéaire (pour les structures gauches, à ne pas confondre avec la linéarité comme  $D_X^{(m)}$ -modules à droite de 1.1.9). De plus,  $\sigma_{Z,X}$  est surjective et son noyau est  $ID_X^{(m)}$ . On notera alors par  $\bar{\sigma}_{Z,X/S}^{(m)} : D_X^{(m)}/ID_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  ou simplement  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  l'isomorphisme  $O_Z$ -linéaire induit caractérisé par la formule

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{Z,X} \left( \left[ \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{<\underline{k}>^{(m)}} \right]_Z \right) &:= \sigma_{Z,X} \left( \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{<\underline{k}>^{(m)}} \right) \\ &= \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \left( \sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}} [a_{(\underline{i}, \underline{j})}]_Z \underline{\partial}^{<\underline{j}>^{(m)}} \right) \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>^{(m)}}. \end{aligned}$$

1.1.4 (Changement de base et de niveau). — Soient  $m' \geq m$  un entier,  $S' \rightarrow S$  un morphisme de schémas noethériens affines (pour simplifier). On note  $X' := X \times_S S'$ ,  $Z' := Z \times_S S'$ ,  $u' : Z' \hookrightarrow X'$  l'immersion fermée induite et  $f : X' \rightarrow X$  la projection canonique. D'après [5, 2.2.2.2] et [5, 2.2.16], on dispose des morphismes d'anneaux  $f^{-1} \mathcal{D}_{X/S}^{(m)} \rightarrow f^* \mathcal{D}_{X'/S}^{(m)} \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}_{X'/S'}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_{X'/S'}^{(m')}$ . On dispose ainsi des homomorphismes d'anneaux  $D_{X/S}^{(m)} \rightarrow D_{X'/S'}^{(m')}$ ,  $D_{Z/S}^{(m)} \rightarrow D_{Z'/S'}^{(m')}$ .

Les coordonnées locales  $t_1, \dots, t_n$  sur  $X$  relativement à  $S$  induisent canoniquement des coordonnées locales  $t'_1, \dots, t'_n$  sur  $X'$  relativement à  $S'$ . On notera alors  $\partial_i'^{<k>^{(m)}}$  pour  $i = 1, \dots, d$  et  $k \in \mathbb{N}$  les opérateurs de  $D_{X'/S'}^{(m')}$ ,

associés. Notons  $O_{S'}\{\partial'_1, \dots, \partial'_r\}^{(m')}$  la sous- $O_{S'}$ -algèbre de  $D_{X'/S'}^{(m')}$  engendrée par les éléments  $\partial'_i{}^{<k>(m')}$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Comme l'homomorphisme  $D_{X/S}^{(m)} \rightarrow D_{X'/S'}^{(m')}$  envoie  $\partial_i{}^{<k>(m)}$  sur  $\partial'_i{}^{<k>(m')}$ , il induit la factorisation  $O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \rightarrow O_{S'}\{\partial'_1, \dots, \partial'_r\}^{(m')}$ . Avec de plus la formule [5, 2.2.3.1], on calcule que les morphismes  $\sigma_{Z,X/S}^{(m)}$  commutent aux changements de base et aux changements de niveau, i.e. le diagramme canonique commutatif :

$$(1.1.4.1) \quad \begin{array}{ccc} D_{X/S}^{(m)} & \xrightarrow{\sigma_{Z,X/S}^{(m)}} & D_{Z/S}^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{X'/S'}^{(m')} & \xrightarrow{\sigma_{Z',X'/S'}^{(m')}} & D_{Z'/S'}^{(m')} \otimes_{O_{S'}} O_{S'}\{\partial'_1, \dots, \partial'_r\}^{(m')} \end{array}$$

est commutatif.

NOTATIONS 1.1.5. — Soit  $\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}$ . On ne confondra pas l'élément  $\underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>(m)} \in D_X^{(m)}$  avec l'élément  $\underline{\partial}^{<\underline{j}>(m)} \in D_Z^{(m)}$ . Pour éviter les risques de confusion (e.g. pour les formules 1.1.7.2 ou 1.2.6.2), contrairement à la situation de 1.1.1, on ne simplifiera pas dans cette situation l'écriture de  $\underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>(m)}$  via  $\underline{\partial}^{<\underline{j}>(m)}$ .

On note  $D_{Z,X}^{(m)}$  la sous- $O_X$ -algèbre de  $D_X^{(m)}$  engendrée par les éléments de la forme  $\underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>(m)}$ , avec  $\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}$ . Via la formule [5, 2.2.4.(iv)], les éléments de  $D_{Z,X}^{(m)}$  s'écrivent (de manière unique) de la forme  $\sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}} b_{\underline{j}} \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>(m)}$  (ou de la forme  $\sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}} \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>(m)} b_{\underline{j}}$ ) avec  $b_{\underline{j}} \in O_X$  et nuls sauf pour un nombre fini.

Comme  $I$  est engendré comme  $O_X$ -module par  $t_1, \dots, t_r$  qui sont dans le centre de  $D_{Z,X}^{(m)}$ , on obtient  $D_{Z,X}^{(m)} I = I D_{Z,X}^{(m)}$ . Par unicité des écritures décrites ci-dessus, on dispose de plus de l'égalité  $I D_X^{(m)} \cap D_{Z,X}^{(m)} = I D_{Z,X}^{(m)}$ . En identifiant  $D_Z^{(m)}$  aux éléments de  $D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  dont les coefficients de  $\underline{\partial}^{<\underline{i}>(m)}$  sont nuls pour  $\underline{i} \neq \underline{0}$ , on vérifie la formule  $\sigma_{Z,X}^{-1}(D_Z^{(m)}) = D_{Z,X}^{(m)}$ . L'isomorphisme  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  se factorise ainsi en l'isomorphisme  $O_Z$ -linéaire (pour les structures gauches)

$$(1.1.5.1) \quad \bar{\sigma}_{Z,X} : D_{Z,X}^{(m)} / D_{Z,X}^{(m)} I = D_{Z,X}^{(m)} / I D_{Z,X}^{(m)} \xrightarrow{\sim} D_Z^{(m)},$$

toujours noté  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  si aucune confusion n'est à craindre.

1.1.6. — Soient  $Z' \hookrightarrow Z$  une seconde immersion fermée,  $P \in D_{Z',X}^{(m)}$ . Avec les identifications du type de 1.1.5 (e.g. on voit  $\sigma_{Z,X}^{(m)}(P)$  comme un élément

de  $D_Z^{(m)}$ ), on dispose alors de l'égalité de transitivité dans  $D_{Z'}^{(m)}$  :

$$(1.1.6.1) \quad \sigma_{Z',Z}^{(m)} \circ \sigma_{Z,X}^{(m)}(P) = \sigma_{Z',X}^{(m)}(P).$$

LEMME 1.1.7. — Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche,  $x \in E$ ,  $P \in D_{Z,X}^{(m)}$ ,  $[-]_Z$  la surjection canonique  $E \rightarrow E/IE$ . En se rappelant que  $\sigma_{Z,X}(P) = \bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z) \in D_Z^{(m)}$  (voir 1.1.5.1), on dispose de la formule

$$(1.1.7.1) \quad \sigma_{Z,X}(P) \cdot [x]_Z = [P \cdot x]_Z.$$

*Démonstration.* — Comme la formule 1.1.7.1 est  $O_X$ -linéaire par rapport à  $P$  (pour la structure gauche de  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $D_{Z,X}^{(m)}$ ), comme le cas où  $P \in \mathcal{O}_X$  est clair, il suffit de prouver que, pour tout  $\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}$ , on dispose de la formule :

$$(1.1.7.2) \quad \underline{\partial}^{<\underline{j}>(m)} \cdot [x]_Z = [\underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j})>(m)} \cdot x]_Z,$$

où  $\underline{0} \in \mathbb{N}^r$  est de composantes nulles,  $\underline{\partial}^{<\underline{j}>(m)} \in D_Z^{(m)}$  et  $\underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j})>(m)} \in D_X^{(m)}$ . Cela découle d'un calcul aisé en se rappelant de la définition de la structure de  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module à gauche sur  $u^*(\mathcal{E})$  construite fonctoriellement à partir des stratifications correspondant à la structure de  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche sur  $\mathcal{E}$  (voir [6]).  $\square$

LEMME 1.1.8. — *L'isomorphisme 1.1.5.1*

$$(1.1.8.1) \quad \bar{\sigma}_{Z,X} : D_{Z,X}^{(m)} / D_{Z,X}^{(m)} I = D_{Z,X}^{(m)} / I D_{Z,X}^{(m)} \xrightarrow{\sim} D_Z^{(m)}$$

est un isomorphisme de  $O_Z$ -algèbres. On dispose ainsi du morphisme de  $O_X$ -algèbres  $\sigma_{Z,X} : D_{Z,X}^{(m)} \rightarrow D_Z^{(m)}$ .

*Démonstration.* — On sait déjà que  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  est un isomorphisme  $O_Z$ -linéaire (pour les structures gauches). Soient  $P, Q \in D_{Z,X}^{(m)}$ . Il reste à établir la formule  $\bar{\sigma}_{Z,X}([PQ]_Z) = \bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z) \bar{\sigma}_{Z,X}([Q]_Z)$ . Par  $O_Z$ -linéarité de  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  (pour les structures gauches), il suffit de l'établir pour  $P = \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j})>(m)}$  et  $Q = b \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{l})>(m)}$ , où  $b \in O_X$  et  $\underline{j}, \underline{l} \in \mathbb{N}^{n-r}$ . D'après la formule [5, 2.2.4.(iv)], on calcule dans  $D_X^{(m)}$  :

$$\underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j})>(m)} b \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{l})>(m)} = \sum_{\underline{j}' \leq \underline{j}} \left\{ \frac{\underline{j}}{\underline{j}'} \right\} \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j}-\underline{j}')>(m)}(b) \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j}')>(m)} \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{l})>(m)}.$$

Avec [5, 2.2.4.(iii)] utilisé sur  $D_X^{(m)}$  puis sur  $D_Z^{(m)}$ , on en déduit la formule 1.1.8.2 :  
(1.1.8.2)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{Z,X}([\underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j})>(m)} \underline{b} \underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{l})>(m)}]_Z) \\ = \sum_{\underline{j}' \leq \underline{j}} \left\{ \frac{\underline{j}}{\underline{j}'} \right\} [\underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j}-\underline{j}')>(m)}(\underline{b})]_Z \underline{\partial}^{<\underline{j}'>(m)} \underline{\partial}^{<\underline{l}>(m)} \\ (1.1.8.3) \\ = \sum_{\underline{j}' \leq \underline{j}} \left\{ \frac{\underline{j}}{\underline{j}'} \right\} \underline{\partial}^{<(\underline{j}-\underline{j}')>(m)}([\underline{b}]_Z) \underline{\partial}^{<\underline{j}'>(m)} \underline{\partial}^{<\underline{l}>(m)} = \underline{\partial}^{<(\underline{j})>(m)}[\underline{b}]_Z \underline{\partial}^{<\underline{l}>(m)}. \end{aligned}$$

D'après 1.1.7.1 utilisé pour  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ , pour tout  $\underline{j}'' \leq \underline{j}$ , on dispose de la formule  $\underline{\partial}^{<\underline{j}''>(m)}([\underline{b}]_Z) = [\underline{\partial}^{<(\underline{0},\underline{j}'')>(m)}(\underline{b})]_Z$ , ce qui donne la première égalité de 1.1.8.3. La dernière résulte de [5, 2.2.4.(iv)] sur  $D_Z^{(m)}$ . D'où le résultat.  $\square$

PROPOSITION 1.1.9. — Les éléments de  $D_X^{(m)}$  s'écrivent de manière unique de la forme  $\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} P_{\underline{i}} \underline{\partial}^{<(\underline{i},\underline{0})>(m)}$ , avec  $P_{\underline{i}} \in D_{Z,X}^{(m)}$  nuls sauf pour un nombre fini. L'isomorphisme  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  est en fait  $D_Z^{(m)}$ -linéaire et se caractérise par la formule :

$$(1.1.9.1) \quad \begin{aligned} D_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} = D_X^{(m)} / ID_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} D_Z^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \\ \left[ \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} P_{\underline{i}} \underline{\partial}^{<(\underline{i},\underline{0})>(m)} \right]_Z \mapsto \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \bar{\sigma}_{Z,X}([P_{\underline{i}}]_Z) \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>(m)}. \end{aligned}$$

Via cet isomorphisme  $\bar{\sigma}_{Z,X}$ , on munit alors  $D_Z^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  d'une structure canonique de  $(D_Z^{(m)}, D_X^{(m)})$ -bimodule prolongeant sa structure de  $D_Z^{(m)}$ -module à gauche. Le morphisme  $\sigma_{Z,X}$  est alors  $D_X^{(m)}$ -linéaire à droite.

Démonstration. — La  $D_Z^{(m)}$ -linéarité résulte de l'isomorphisme d'anneaux du lemme 1.1.8 et de la formule 1.1.7.1 utilisée pour  $\mathcal{E} = D_X^{(m)}$ .  $\square$

NOTATIONS 1.1.10. — On identifie  $\omega_X$  et  $\mathcal{O}_X$ ,  $\omega_Z$  et  $\mathcal{O}_Z$  (ces identifications dépendent du choix des coordonnées locales que l'on a fixées une bonne fois pour toute dans cette section). Modulo ces identifications, on obtient l'égalité  $D_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} = D_X^{(m)} / D_X^{(m)} I$ . On vérifie par construction que la structure de  $D_X^{(m)}$ -module à gauche sur  $D_{X \hookrightarrow Z}^{(m)}$  correspond à la structure de  $D_X^{(m)}$ -module à gauche sur  $D_X^{(m)} / D_X^{(m)} I$ . On munit ainsi, via cette identification,  $D_X^{(m)} / D_X^{(m)} I$  d'une structure de  $(D_X^{(m)}, D_Z^{(m)})$ -bimodule prolongeant sa structure canonique de  $D_X^{(m)}$ -module à gauche. Pour tout  $P \in D_X^{(m)}$ , on note  $[P]'_Z$  son image dans  $D_X^{(m)} / D_X^{(m)} I$ .

Comme  $ID_X^{(m)} \cap D_{Z,X}^{(m)} = ID_{Z,X}^{(m)} = D_{Z,X}^{(m)} I = D_X^{(m)} I \cap D_{Z,X}^{(m)}$ , on obtient alors pour tout  $P \in D_{Z,X}^{(m)}$  la formule  $[P]_Z = [P]'_Z$ .

NOTATIONS 1.1.11. — Considérons  $O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}$  muni de sa structure canonique de  $D_Z^{(m)}$ -module à droite. On construit le morphisme  $\tau_{Z,X/S}^{(m)} : D_X^{(m)} \rightarrow O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}$  en posant

$$\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} \underline{\partial}^{<\underline{k}>^{(m)}} a_{\underline{k}} \mapsto \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \left( \underline{\partial}^{<\underline{i}>^{(m)}} \otimes \sum_{\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}} \underline{\partial}^{<\underline{j}>^{(m)}} [a_{(\underline{i}, \underline{j})}]_Z \right),$$

les  $a_{\underline{k}} \in O_X$  étant nuls sauf pour un nombre fini. S'il n'y a pas de doute sur la base et le niveau, on notera simplement  $\tau_{Z,X}$ . De plus, les morphismes  $\tau_{Z,X/S}^{(m)}$  commutent aux changements de base et de niveau, i.e., on dispose du diagramme commutatif analogue à 1.1.4.1.

En considérant la structure de  $O_X$ -module induite par la structure de  $D_X^{(m)}$ -module à droite sur  $D_X^{(m)}$  (resp. induite par la structure de  $D_Z^{(m)}$ -module à droite sur  $O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}$ ), on vérifie que  $\tau_{Z,X}$  est  $O_X$ -linéaire (pour les structures droites, à ne pas confondre avec la linéarité comme  $D_X^{(m)}$ -modules à gauche de 1.1.15). Le morphisme  $\tau_{Z,X}$  est surjective, de noyau  $D_X^{(m)} I$ . On notera  $\bar{\tau}_{Z,X/S}^{(m)} : D_X^{(m)} / D_X^{(m)} I \xrightarrow{\sim} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}$  ou simplement  $\bar{\tau}_{Z,X}$  l'isomorphisme  $O_Z$ -linéaire induit.

LEMME 1.1.12. — *L'isomorphisme de la forme  $D_{Z,X}^{(m)} / D_{Z,X}^{(m)} I \xrightarrow{\sim} D_Z^{(m)}$  induit par  $\tau_{Z,X}$  est identique à celui induit par  $\sigma_{Z,X}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $P \in D_{Z,X}^{(m)}$ . Il s'agit de prouver  $\sigma_{Z,X}(P) = \tau_{Z,X}(P)$ . Par  $\mathcal{O}_S$ -linéarité de  $\sigma_{Z,X}$  et  $\tau_{Z,X}$ , il suffit de considérer le cas où  $P = \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>^{(m)}} b$ , avec  $\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}$  et  $b \in O_X$ . Or, il résulte de 1.1.8 la première égalité :  $\sigma_{Z,X}(P) = \sigma_{Z,X}(\underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>^{(m)}}) \sigma_{Z,X}(b) = \underline{\partial}^{<\underline{j}>^{(m)}} [b]_Z = \tau_{Z,X}(P)$ .  $\square$

NOTATIONS 1.1.13. — Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module à gauche,  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module à droite,  $x \in E$ ,  $y \in \mathcal{M}$ ,  $P \in D_X$ . On rappelle que, via l'identification entre  $\mathcal{O}_X$  et  $\omega_X$  (resp. entre  $\mathcal{O}_X$  et  $\omega_X^{-1}$ ) l'action de  $P$  sur  $x$  (resp.  $y$ ) pour la structure de  $\mathcal{D}_X$ -module à droite (resp. à gauche) tordue de  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X$  (resp. de  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ ) est  ${}^t P \cdot x$  (resp.  $y \cdot {}^t P$ ), où «  ${}^t P$  » désigne l'adjoint de  $P$  (voir [6, 1.2]). Il est immédiat que l'on dispose pour tout  $P \in D_{Z,X}^{(m)}$  de la formule  ${}^t \bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z) = \bar{\tau}_{Z,X}([{}^t P]_Z)$ . Avec 1.1.12, on obtient ainsi

$$(1.1.13.1) \quad {}^t \bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z) = \bar{\sigma}_{Z,X}([{}^t P]_Z).$$

LEMME 1.1.14. — *Soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à droite,  $y \in M$ ,  $P \in D_{Z,X}^{(m)}$ . Via l'identification de  $\Gamma(Z, u^*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z)$  avec  $M/MI$ , ce dernier*

est muni d'une structure canonique de  $D_Z^{(m)}$ -module à droite. Notons  $[-]'_Z$  la surjection canonique  $M \rightarrow M/MI$ . On a la formule

$$(1.1.14.1) \quad [y]'_Z \cdot \bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z) = [y \cdot P]'_Z.$$

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{E} := \mathcal{M} \otimes_{\theta_X} \omega_X^{-1}$ . Afin de clarifier la preuve, les identifications entre  $\omega_X^{-1}$  et  $\theta_X$  ou entre  $\omega_Z$  et  $\theta_Z$  seront indiquées explicitement par le symbole  $\leftrightarrow$ . On dispose ainsi du diagramme commutatif par définition :

$$(1.1.14.2) \quad \begin{array}{ccc} M & \longleftrightarrow & E \\ \downarrow [-]'_Z & & \downarrow [-]_Z \\ M/MI & \longleftrightarrow & E/IE. \end{array}$$

Nous allons maintenant traduire (puis vérifier) l'égalité 1.1.14.1 correspondant dans  $E/IE$ . Notons  $x \in E$ , l'élément correspondant à  $y \in M$ . En regardant le diagramme 1.1.14.2, l'élément de  $E/IE$  correspondant à  $[y]'_Z$  est  $[x]_Z$ . Avec les rappels de 1.1.13, cela implique que l'élément de  $E/IE$  qui correspond à  $[y]'_Z \cdot \bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z)$  est  ${}^t(\bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z)) \cdot [x]_Z$ . D'un autre côté, avec 1.1.13, l'élément de  $E$  correspondant à  $y \cdot P$  est  ${}^tP \cdot x$ . Via le diagramme commutatif 1.1.14.2, il en résulte que l'élément de  $E/IE$  qui correspond à  $[y \cdot P]'_Z$  est  $[{}^tP \cdot x]_Z$ .

Il s'agit ainsi de vérifier dans  $E/IE$  l'égalité :  ${}^t(\bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z)) \cdot [x]_Z = [{}^tP \cdot x]_Z$ . Cela découle de 1.1.13.1 puis 1.1.7 qui induisent les égalités  ${}^t\bar{\sigma}_{Z,X}([P]_Z) \cdot [x]_Z = \bar{\sigma}_{Z,X}({}^t[P]_Z) \cdot [x]_Z = [{}^tP \cdot x]_Z$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.1.15.** — Les éléments de  $D_X^{(m)}$  s'écrivent de manière unique de la forme  $\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>^{(m)}} P_{\underline{i}}$ , avec  $P_{\underline{i}} \in D_{Z,X}^{(m)}$  nuls sauf pour un nombre fini. L'isomorphisme  $\bar{\tau}_{Z,X}$  est en fait  $D_Z^{(m)}$ -linéaire et est caractérisé par la formule :

$$(1.1.15.1) \quad \begin{aligned} \bar{\tau}_{Z,X} : D_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} = D_X^{(m)} / D_X^{(m)} I &\xrightarrow{\sim} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)} \\ \left[ \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>^{(m)}} P_{\underline{i}} \right]'_Z &\mapsto \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<(\underline{i})>^{(m)}} \otimes \bar{\sigma}_{Z,X}([P_{\underline{i}}]_Z). \end{aligned}$$

Via cet isomorphisme  $\bar{\tau}_{Z,X}$ , on munit alors  $O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}$  d'une structure canonique de  $(D_X^{(m)}, D_Z^{(m)})$ -bimodule prolongeant sa structure de  $D_Z^{(m)}$ -module à droite. Le morphisme  $\tau_{Z,X}$  est alors  $D_X^{(m)}$ -linéaire.

*Démonstration.* — Pour la validité de la formule, cela découle du lemme 1.1.12. La  $D_Z^{(m)}$ -linéarité se déduit de l'isomorphisme d'anneaux du lemme 1.1.8 et du lemme 1.1.14 utilisé pour  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X^{(m)}$ .  $\square$

**1.2. Adjonction : images directes, images inverses extraordinaire par une immersion fermée.** — On reprend les notations et hypothèses de la section 1.1.

1.2.1. — Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module à gauche quasi-cohérent. L'image directe par  $u$  de niveau  $m$  de  $\mathcal{F}$  est définie dans [7] en posant  $u_+^{(m)}(\mathcal{F}) := u_*(\mathcal{D}_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_Z^{(m)}} \mathcal{F})$ . Comme  $\mathcal{D}_{X \hookrightarrow Z}^{(m)}$  est un  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module localement libre (voir 1.1.15), le symbole  $\mathbb{L}$  est inutile. On obtient de plus les isomorphismes

$$(1.2.1.1) \quad \begin{aligned} \Gamma(X, u_+^{(m)}(\mathcal{F})) &= D_{X \hookrightarrow Z}^{(m)} \otimes_{D_Z^{(m)}} F \\ &\xrightarrow{\sim} (O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}) \otimes_{D_Z^{(m)}} F \\ &\xrightarrow{\sim} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} F. \end{aligned}$$

1.2.2. — On reprend les notations de 1.1.4. Par abus de notations, on écrira  $\mathcal{O}_S$  le faisceau déduit de  $\mathcal{O}_S$  par image inverse pour les catégories de faisceaux d'ensemble (e.g.  $u^{-1}$ ). De même pour  $\mathcal{O}_{S'}$ . On dispose ainsi de l'isomorphisme  $u_+^{(m)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ . Comme  $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{D}_{X \hookrightarrow Z/S}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X' \hookrightarrow Z'/S'}^{(m)})$  et  $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{D}_{Z/S}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Z'/S'}^{(m)}$ , on vérifie facilement l'isomorphisme de changement

$$(1.2.2.1) \quad \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} u_+^{(m)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_+^{(m')}(\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}).$$

Pour le cas général, on pourra d'ailleurs consulter [7, 2.4.2]. Comme le morphisme  $\bar{\tau}_{Z,X/S}^{(m)}$  est compatible aux changements de base et de niveau, on vérifie qu'il en est de même de l'isomorphisme 1.2.1.1, i.e., pour tout morphisme  $\mathcal{D}_{Z'/S'}^{(m)}$ -linéaire de la forme  $\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  avec  $\mathcal{F}'$  un  $\mathcal{D}_{Z'/S'}^{(m')}$ -module à gauche quasi-cohérent, le diagramme canonique (1.2.2.2)

$$(1.2.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} u_+^{(m)}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & u_+^{(m')}(\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & u_+^{(m')}(\mathcal{F}') \\ \downarrow \sim \bar{\tau}_{Z,X/S}^{(m)} & & \downarrow \sim \bar{\tau}_{Z',X'/S'}^{(m)} & & \downarrow \sim \bar{\tau}_{Z',X'/S'}^{(m')} \\ \mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{S'}\{\partial'_1, \dots, \partial'_r\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} (\mathcal{O}_{S'} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{S'}\{\partial'_1, \dots, \partial'_r\}^{(m')} \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} (\mathcal{F}') \end{array}$$

est commutatif.

1.2.3. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche quasi-cohérent. On dispose de la formule  $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) = \bigcap_{s=1}^r \ker(\mathcal{E} \xrightarrow{t_s} \mathcal{E})$  (on devrait plutôt écrire  $u^{-1}(\bigcap_{s=1}^r \ker(\mathcal{E} \xrightarrow{t_s} \mathcal{E}))$ ). On notera  $\mathcal{H}^0 u^!(E) := \Gamma(Z, \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})) = \bigcap_{s=1}^r \ker(E \xrightarrow{t_s} E)$ . On munit  $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$  d'une structure canonique de  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module via l'isomorphisme  $\bar{\sigma}_{Z,X}$  de 1.1.8 (égal à celui induit par  $\tau_{Z,X}$

d'après 1.1.12) de la manière suivante : pour tout  $P \in D_{Z,X}^{(m)}$ , pour tout  $x \in \mathcal{H}^0 u^!(E)$ , on pose

$$(1.2.3.1) \quad \sigma_{Z,X}(P) \cdot x := P \cdot x.$$

LEMME 1.2.4. — Soient  $\underline{i} \in \mathbb{N}^r$ ,  $P \in D_Z^{(m)}$ ,  $Q \in D_{Z,X}^{(m)}$ . Si on dispose dans  $D_X^{(m)}$  de l'égalité  $\underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})> (m)} Q = Q \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})> (m)}$ , on obtient alors dans respectivement  $D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  et  $O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}$  les formules

$$(1.2.4.1) \quad (P \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>}) \cdot Q = (P \sigma_{Z,X}(Q)) \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>}, \quad Q \cdot (\underline{\partial}^{<\underline{i}>} \otimes P) = \underline{\partial}^{<\underline{i}>} \otimes (\sigma_{Z,X}(Q) P).$$

Démonstration. — Soit  $Q' \in D_{Z,X}^{(m)}$  tel que  $P = \sigma_{Z,X}(Q')$ . D'après 1.1.9.1 et 1.1.8, on obtient dans  $D_Z^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$  la première égalité :

$$\begin{aligned} P \sigma_{Z,X}(Q) \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>} &= \sigma_{Z,X}(Q' Q \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>}) = \sigma_{Z,X}(Q' \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>} Q) \\ &= \sigma_{Z,X}(Q' \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>}) \cdot Q = (P \otimes \underline{\partial}^{<\underline{i}>}) \cdot Q, \end{aligned}$$

l'avant dernière égalité résultant de la  $D_X^{(m)}$ -linéarité à droite de  $\sigma_{Z,X}$  (par définition de 1.1.9). On procède de même pour établir la seconde égalité.  $\square$

1.2.5 (Morphisme d'adjonction I). — Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche quasi-cohérent. On construit le morphisme canonique d'adjonction

$$(1.2.5.1) \quad \text{adj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^0 u^! \left( u_+^{(m)}(\mathcal{F}) \right),$$

en posant, pour toute section  $x \in F$ ,  $\text{adj}(x) = 1 \otimes x$  (i.e., via l'isomorphisme 1.2.1.1,  $\text{adj}(x) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}}$  avec  $x_{\underline{k}} = x$  si  $\underline{k} = 0$  et  $x_{\underline{k}} = 0$  sinon). Comme 1 est dans le centre de  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ , la formule de droite de 1.2.4.1 pour  $\underline{i} = \underline{0}$  est valable pour tous  $P \in D_Z^{(m)}$ ,  $Q \in D_{Z,X}^{(m)}$ . Via la formule 1.2.3.1, on en déduit que le morphisme 1.2.5.1 est  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire. Si  $S$  est annulé par une puissance de  $p > 0$ , ce morphisme est injectif mais pas forcément surjectif (e.g., considérer  $\partial_1^{<p^N>} \otimes x$  pour  $N$  assez grand).

PROPOSITION 1.2.6 (Morphisme d'adjonction II). — Pour tout  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche quasi-cohérent  $\mathcal{E}$ , on dispose du morphisme canonique de  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à gauche :

$$(1.2.6.1) \quad \text{adj} : u_+^{(m)}(\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})) \rightarrow \mathcal{E}.$$



Ce morphisme est caractérisé par la formule : pour tout élément de  $O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} \mathcal{H}^0 u^!(E)$  de la forme  $\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes x_{\underline{i}}$ , avec  $x_{\underline{i}} \in \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$  nuls sauf pour un nombre fini de termes, on a modulo l'isomorphisme 1.2.1.1

$$(1.2.6.2) \quad \text{adj}\left(\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes x_{\underline{i}}\right) = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}} \cdot x_{\underline{i}}.$$

*Démonstration.* — Il s'agit de prouver que le morphisme noté  $\text{adj}$  et défini par la formule 1.2.6.2 est  $D_X^{(m)}$ -linéaire. Soient  $P \in D_X^{(m)}$ ,  $x \in \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ ,  $\underline{i} \in \mathbb{N}^r$ . Par  $\mathcal{O}_S$ -linéarité de  $\text{adj}$ , il suffit de vérifier  $\text{adj}(P \cdot (\underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes x)) = P \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}} \cdot x$ . Or, comme  $\tau_{Z, X}$  est  $D_X^{(m)}$ -linéaire (voir 1.1.15), on a dans  $(O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}) \otimes_{D_Z^{(m)}} E$  :

$$P \cdot (\underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes 1) \otimes x = \tau_{Z, X}(P \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}}) \otimes x.$$

Par  $\mathcal{O}_S$ -linéarité en  $P$  de la formule à établir, on se ramène à l'un des trois cas ci-dessous traités séparément.

- Si  $P = \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>_{(m)}}$  avec  $\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}$ , on calcule  $\tau_{Z, X}(P \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}}) \otimes x = (\underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes 1) \otimes \underline{\partial}^{<\underline{j}>_{(m)}} \cdot x$ . Comme d'après 1.2.3.1  $\underline{\partial}^{<\underline{j}>_{(m)}} \cdot x = \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>_{(m)}} \cdot x$ , on en tire :

$$\begin{aligned} \text{adj}(P \cdot (\underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes x)) &= \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}} \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>_{(m)}} \cdot x \\ &= \underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j})>_{(m)}} \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}} \cdot x = P \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}} \cdot x. \end{aligned}$$

- Si  $P = \underline{\partial}^{<(\underline{i}', \underline{0})>_{(m)}}$  avec  $\underline{i}' \in \mathbb{N}^r$ , cela découle d'un calcul analogue en utilisant de plus la formule [5, 2.2.4.(iii)].

- Il reste à traiter le cas où  $P = a \in O_X$ . En prenant l'adjoint de la formule la formule [5, 2.2.4.(iv)], on calcule dans  $D_X^{(m)}$  :

$$(1.2.6.3) \quad a \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}} = \sum_{\underline{i}' \leq \underline{i}} (-1)^{|\underline{i} - \underline{i}'|} \left\{ \begin{matrix} \underline{i} \\ \underline{i}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{<(\underline{i}', \underline{0})>_{(m)}} \underline{\partial}^{<(\underline{i} - \underline{i}', \underline{0})>_{(m)}}(a).$$

D'où

$$\begin{aligned} \tau_{Z, X}(a \underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>_{(m)}}) \otimes x &= \sum_{\underline{i}' \leq \underline{i}} (-1)^{|\underline{i} - \underline{i}'|} \left\{ \begin{matrix} \underline{i} \\ \underline{i}' \end{matrix} \right\} (\underline{\partial}^{<\underline{i}'>_{(m)}} \otimes 1) \otimes [\underline{\partial}^{<(\underline{i} - \underline{i}', \underline{0})>_{(m)}}(a)]_{Z, X} x. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\text{adj}(a \cdot (\underline{\partial}^{<\underline{i}>_{(m)}} \otimes x)) = \sum_{\underline{i}' \leq \underline{i}} (-1)^{|\underline{i} - \underline{i}'|} \left\{ \begin{matrix} \underline{i} \\ \underline{i}' \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{<(\underline{i}', \underline{0})>_{(m)}} \cdot ([\underline{\partial}^{<(\underline{i} - \underline{i}', \underline{0})>_{(m)}}(a)]_{Z, X} x).$$

D'après 1.2.3.1, on a par définition :  $[\underline{\partial}^{<(\underline{i}-\underline{i}', \underline{0})>^{(m)}}(a)]_Z x = \underline{\partial}^{<(\underline{i}-\underline{i}', \underline{0})>^{(m)}}(a)x$ . En réutilisant la formule 1.2.6.3 (à l'envers), on termine la vérification de l'égalité.  $\square$

REMARQUES 1.2.7. — L'isomorphisme de transposition  $\gamma : D_X^{(m)} \rightarrow D_X^{(m)}$  se factorise par l'isomorphisme  $\gamma : D_X^{(m)}/ID_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} D_X^{(m)}/D_X^{(m)}I$ .

### 1.3. Changement de base pour les faisceaux quasi-cohérents sur les schémas

NOTATIONS 1.3.1. — Soit  $T \rightarrow S$  un morphisme de schémas noethériens affines. Dans toute cette section, nous considérons les deux carrés cartésiens

$$(1.3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} Z \hookrightarrow X & & Z_T \hookrightarrow X_T \\ \uparrow b & \uparrow a & \uparrow b_T \\ Z' \hookrightarrow X' & & Z'_T \hookrightarrow X'_T \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{u} & \\ & \xrightarrow{u'} & \end{array}$$

dont les morphismes du carré de gauche sont des immersions fermées de  $S$ -schémas lisses, dont le carré de droite se déduit du carré de gauche par changement de base via  $T \rightarrow S$ .

On suppose de plus  $X$  affine, muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_d$  telles qu'il existe des entiers  $1 \leq r \leq d-1$ ,  $1 \leq s \leq d-r$  vérifiant  $X' = V(t_1, \dots, t_r)$  et  $Z = V(t_{r+1}, \dots, t_{r+s})$ . On note  $I$  l'idéal engendré par  $t_1, \dots, t_r$  et  $J$  l'idéal engendré par  $t_{r+1}, \dots, t_{r+s}$ .

L'image inverse (en tant que  $\mathcal{O}_X$ -module, i.e., à ne pas confondre avec l'image inverse en tant que  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module) par  $a$  d'un  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  se notera

$$(1.3.1.2) \quad \mathbb{L}a^*(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{Z \hookrightarrow X}^{(m)} \otimes_{a^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}} a^{-1}\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_Z^{(m)}).$$

De même, l'image inverse (en tant que  $\mathcal{O}_Z$ -module) par  $b$  d'un  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module  $\mathcal{F}$  se notera  $\mathbb{L}b^*(\mathcal{F})$ .

LEMME 1.3.2. — *On dispose des égalités*

$$(1.3.2.1) \quad (D_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)})J = D_{X'}^{(m)}J \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$$

$$(1.3.2.2) \quad I(\mathcal{O}_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} D_Z^{(m)}) = \mathcal{O}_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} ID_Z^{(m)}.$$

*Démonstration.* — L'égalité 1.3.2.1 découle de la formule 1.2.4.1 (en remplaçant dans les notations le symbole  $Z$  par  $X'$ ) et du fait que  $J$  est engendré par  $t_{r+1}, \dots, t_{r+s}$  qui commutent aux éléments de la forme  $\underline{\partial}^{<(\underline{i}, \underline{0})>^{(m)}}$ , où  $\underline{i} \in \mathbb{N}^r$ . De même, on obtient l'égalité 1.3.2.2 à partir de la seconde formule de 1.2.4.1.  $\square$

LEMME 1.3.3. — Avec les notations de 1.3.1, soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module quasi-cohérent. Dans ce cas, on dispose de l'isomorphisme de  $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ -modules :

$$(1.3.3.1) \quad a^* \circ u_+^{(m)}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_+^{(m)} \circ b^*(\mathcal{F}).$$

En outre, celui-ci commute aux morphismes de changement de niveau et de base, i.e., avec les notations de 1.2.2, pour tout  $m' \geq m$ , pour tout  $\mathcal{D}_{Z'/T}^{(m')}$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{F}'$ , pour tout morphisme  $\mathcal{D}_{Z/S}^{(m)}$ -linéaire de la forme  $\vartheta_T \otimes_{\vartheta_S} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ , le diagramme canonique

(1.3.3.2)

$$\begin{array}{ccccc} \vartheta_T \otimes_{\vartheta_S} (a^* \circ u_+^{(m)}(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\sim} & a_T^* \circ u_{T+}^{(m)}(\vartheta_T \otimes_{\vartheta_S} \mathcal{F}) & \longrightarrow & a_T^* \circ u_{T+}^{(m')}(\mathcal{F}') \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \vartheta_T \otimes_{\vartheta_S} (u_+^{(m)} \circ b^*(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\sim} & u_{T+}^{(m)} \circ b_T^*(\vartheta_T \otimes_{\vartheta_S} \mathcal{F}) & \longrightarrow & u_{T+}^{(m')} \circ b_T^*(\mathcal{F}'), \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux sont ceux de la forme 1.3.3.1 et où les isomorphismes horizontaux de gauche se déduisent de 1.2.2.1, est commutatif.

Démonstration. — Via les théorèmes de type A, il suffit de le vérifier pour les sections globales. On obtient

$$(1.3.3.3) \quad a^* \circ u_+^{(m)}(F) = (D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)} J) \otimes_{D_Z^{(m)}} F$$

$$(1.3.3.4) \quad u_+^{(m)} \circ b^*(F) = (D_{X'}^{(m)}/D_{X'}^{(m)} J) \otimes_{D_{Z'}^{(m)}} (D_Z^{(m)}/ID_Z^{(m)}) \otimes_{D_Z^{(m)}} F.$$

On bénéficie des isomorphismes  $D_{X'}^{(m)}$ -linéaires :

(1.3.3.5)

$$\begin{aligned} & (D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)} J) \\ & \xrightarrow{\sim} (D_{X'}^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)} J) \\ & \xrightarrow{\sim} (D_{X'}^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}) / (D_{X'}^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}) J \\ & \xrightarrow{\sim} (D_{X'}^{(m)}/D_{X'}^{(m)} J) \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}, \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme résultant de la première égalité de 1.3.2. On dispose de plus des isomorphismes  $D_Z^{(m)}$ -linéaires :

(1.3.3.6)

$$\begin{aligned} (D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)} J) \\ \xrightarrow{\sim_{\text{Id} \otimes \bar{\tau}_{Z,X}}} (D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (O_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}) \\ \xrightarrow{\sim} O_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}/ID_Z^{(m)}, \end{aligned}$$

dont le dernier isomorphisme découle de la seconde égalité de 1.3.2. Il en dérive le carré suivant :

(1.3.3.7)

$$\begin{array}{ccc} (D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)} J) & \xrightarrow[\sim]{1.3.3.5} & (D_{X'}^{(m)}/D_{X'}^{(m)} J) \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \\ \downarrow \sim_{1.3.3.6} & & \downarrow \sim_{\bar{\tau}_{Z'}, X' \otimes \text{Id}} \\ O_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}/ID_Z^{(m)} & \xrightarrow[\sim]{\text{Id} \otimes \bar{\sigma}_{Z', Z}} & O_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_{Z'}^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}. \end{array}$$

Le carré 1.3.3.7 est commutatif. En effet, soient  $P \in D_{Z', X'}^{(m)}$ ,  $i \in \mathbb{N}^r$ ,  $j \in \mathbb{N}^s$ . Les éléments du terme en haut à gauche  $(D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)} J)$  sont des sommes d'éléments de la forme  $Q := [\partial^{<(\underline{0}, \underline{j}, \underline{0})>^{(m)}} P \partial^{<(\underline{i}, \underline{0}, \underline{0})>^{(m)}}]_{X'} \otimes [1]_{Z'}$ . On calcule que cet élément  $Q$  s'envoie via 1.3.3.5 sur  $[\partial^{<(\underline{j}, \underline{0})>^{(m)}} \sigma_{X', X}^{(m)}(P)]_{Z'} \otimes \partial^{<\underline{i}>^{(m)}}$ . Avec la formule de transitivité 1.1.6.1, ce dernier s'envoie via la flèche de droite du carré 1.3.3.7 sur  $\partial^{<\underline{j}>^{(m)}} \otimes \sigma_{Z', X}^{(m)}(P) \otimes \partial^{<\underline{i}>^{(m)}}$ . D'un autre côté, comme  $Q = [1]_{X'} \otimes [\partial^{<(\underline{0}, \underline{j}, \underline{0})>^{(m)}} P \partial^{<(\underline{i}, \underline{0}, \underline{0})>^{(m)}}]_{Z'}$ , la flèche de gauche du carré de 1.3.3.7 envoie  $Q$  sur  $\partial^{<\underline{j}>^{(m)}} \otimes [\sigma_{Z, X}^{(m)}(P) \partial^{<(\underline{i}, \underline{0})>^{(m)}}]_{Z'}$ . Ce dernier s'envoie via la flèche du bas sur  $\partial^{<\underline{j}>^{(m)}} \otimes \sigma_{Z', X}^{(m)}(P) \otimes \partial^{<\underline{i}>^{(m)}}$ . On en déduit la commutativité du diagramme 1.3.3.7.

Considérons à présent le diagramme canonique :

(1.3.3.8)

$$\begin{array}{ccc} (D_{X'}^{(m)}/D_{X'}^{(m)} J) \otimes_{D_{Z'}^{(m)}} (D_Z^{(m)}/ID_Z^{(m)}) & \xrightarrow[\sim]{\text{Id} \otimes \bar{\sigma}_{Z', Z}} & (D_{X'}^{(m)}/D_{X'}^{(m)} J) \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \\ \downarrow \sim_{\bar{\tau}_{Z'}, X' \otimes \text{Id}} & & \downarrow \sim_{\bar{\tau}_{Z'}, X' \otimes \text{Id}} \\ O_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_Z^{(m)}/ID_Z^{(m)} & \xrightarrow[\sim]{\text{Id} \otimes \bar{\sigma}_{Z', Z}} & O_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{O_S} D_{Z'}^{(m)} \otimes_{O_S} O_S\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}. \end{array}$$

Ce carré 1.3.3.8 est commutatif. En effet, pour tous  $i \in \mathbb{N}^r$ ,  $j \in \mathbb{N}^s$ ,  $P \in D_{Z', X'}^{(m)}$ ,  $Q \in D_{Z', Z}^{(m)}$ , on calcule que  $[\partial^{<(\underline{j}, \underline{0})>^{(m)}} P]_{Z'} \otimes [Q \partial^{<(\underline{i}, \underline{0})>^{(m)}}]_{Z'}$  s'envoie via les deux chemins possibles de 1.3.3.8 sur  $\partial^{<\underline{j}>^{(m)}} \otimes \sigma_{Z', X'}^{(m)}(P) \sigma_{Z', Z}^{(m)}(Q) \otimes \partial^{<\underline{i}>^{(m)}}$ .

Comme les flèches de droite (resp. du bas) des carrés 1.3.3.7 et 1.3.3.8 sont identiques, comme les flèches de gauche (resp. du haut) des carrés 1.3.3.7 et 1.3.3.8 sont  $D_Z^{(m)}$ -linéaires (resp.  $D_{X'}^{(m)}$ -linéaires), il en résulte l'isomorphisme canonique de  $(D_{X'}^{(m)}, D_Z^{(m)})$ -bimodules

$$(1.3.3.9) \quad (D_X^{(m)}/ID_X^{(m)}) \otimes_{D_X^{(m)}} (D_X^{(m)}/D_X^{(m)}J) \xrightarrow{\sim} (D_{X'}^{(m)}/D_{X'}^{(m)}J) \otimes_{D_{Z'}^{(m)}} (D_Z^{(m)}/ID_Z^{(m)}).$$

D'où l'isomorphisme 1.3.3.1. Vérifions à présent sa commutation au changement de niveaux, i.e. supposons  $S = T$ . Par fonctorialité de l'isomorphisme 1.3.3.1, il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme

$$(1.3.3.10) \quad \begin{array}{ccc} a^* \circ u_+^{(m)}(\mathcal{F}') & \longrightarrow & a^* \circ u_+^{(m')}(\mathcal{F}') \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ u_+^{(m')} \circ b^*(\mathcal{F}') & \longrightarrow & u_+^{(m')} \circ b^*(\mathcal{F}'). \end{array}$$

Pour cela, il suffit de constater que les isomorphismes des carrés 1.3.3.7 et 1.3.3.8 commutent au changement de niveaux. Cette vérification résulte facilement de la commutation aux changements de niveau des isomorphismes de la forme  $\bar{\sigma}$  (i.e., on dispose du carré commutatif 1.1.4.1) et de ceux de la forme  $\bar{\tau}$  de 1.1.15. De même, on vérifie qu'il commute aux changements de base, i.e. on valide la commutativité du carré de gauche de 1.3.3.2.  $\square$

LEMME 1.3.4. — *Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -module quasi-cohérent plat. On dispose alors de l'annulation :*

$$(1.3.4.1) \quad \forall n \neq 0, \mathcal{H}^n \mathbb{L}a^* u_+(\mathcal{F}) = 0.$$

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $r \geq 1$ . Dans un premier temps, supposons  $X' = V(t_1)$ . Dans ce cas, pour  $n \notin \{-1, 0\}$ ,  $\mathcal{H}^n \mathbb{L}a^* u_+(\mathcal{F}) = 0$ . De plus,  $\mathcal{H}^{-1} \mathbb{L}a^* u_+(\mathcal{F}) = \ker(u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{t_1} u_+(\mathcal{F}))$ . Or, d'après 1.2.1.1,  $u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S\{\partial_{r+1}, \dots, \partial_{r+s}\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}$ . Comme  $\mathcal{F}$  n'a pas de  $t_1$  torsion, le lemme 1.2.4 nous permet de conclure (en effet  $t_1$  commute aux  $\underline{\partial}^{<(\underline{0}, \underline{j}, \underline{0})>_{(m)}}$ , avec  $\underline{j} \in \mathbb{N}^s$ ).

Supposons à présent  $r \geq 2$  et posons  $X'' = V(t_1, \dots, t_{r-1})$  et  $Z'' = Z \cap X''$ ,  $b' : Z'' \hookrightarrow Z$ ,  $a' : X'' \hookrightarrow X$ ,  $a'' : X' \hookrightarrow X''$ ,  $u'' : Z'' \hookrightarrow X''$  les immersions fermées induites. Par hypothèse de récurrence et d'après 1.3.3.1, on obtient :  $\mathbb{L}a'^* \circ u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a'^* \circ u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u_+'' \circ b'^*(\mathcal{F})$ . D'après le cas  $r = 1$ , on vérifie aussi  $\mathbb{L}a''^* \circ u_+'' \circ b'^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a''^* \circ u_+'' \circ b'^*(\mathcal{F})$ . Il en dérive :  $\mathbb{L}a''^* \circ \mathbb{L}a'^* \circ u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a''^* \circ a'^* \circ u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a^* \circ u_+(\mathcal{F})$ . L'isomorphisme  $\mathbb{L}a^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}a''^* \circ \mathbb{L}a'^*$  nous permet de conclure.  $\square$

PROPOSITION 1.3.5. — *On bénéficie pour tout  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  de l'isomorphisme*

$$(1.3.5.1) \quad a^! \circ u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u'_+ \circ b^!(\mathcal{F}).$$

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{P}$  une résolution gauche de  $\mathcal{F}$  par des  $\mathcal{D}_Z^{(m)}$ -modules quasi-cohérents plats (il suffit de prendre une résolution de  $F$  par des  $D_Z^{(m)}$ -modules plats puis on applique le foncteur  $\mathcal{D}_Z^{(m)} \otimes_{D_Z^{(m)}} -$ ). Comme les foncteurs  $u_+$  et  $u'_+$  sont exactes, par 1.3.4, on obtient  $\mathbb{L}a^*u_+(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} a^*u_+(\mathcal{P})$  et  $u'_+ \circ \mathbb{L}b^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} u'_+ \circ b^*(\mathcal{P})$ . Le lemme 1.3.3 nous permet de conclure.  $\square$

## 2. Immersion fermée de $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses : adjonction pour les $D$ -modules

Soient  $m$  un entier positif,  $u : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses d'idéal  $\mathcal{J}$ . Berthelot a défini la catégorie dérivée des complexes de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -modules quasi-cohérents à cohomologie bornée, notée  $D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$  (voir [7]). De même sur  $\mathcal{Z}$ . Il a de plus construit les foncteurs image directe par  $u$  de niveau  $m$  noté  $u_+^{(m)} : D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}) \rightarrow D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$  et le foncteur image inverse extraordinaire par  $u$  de niveau  $m$  noté  $u^!{}^{(m)} : D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}) \rightarrow D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)})$  (e.g., voir [7]). Pour alléger, on pourra simplement noter  $u_+$  ou  $u^!$ .

**2.1. Manque de stabilité des faisceaux quasi-cohérents sans  $p$ -torsion sur un schéma formel.** — La notion de faisceau quasi-cohérent sans  $p$ -torsion apparaît naturellement dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques. Malheureusement, cette catégorie n'est pas stable a priori par le foncteur  $\mathcal{H}^0 u^!$  (voir 2.1.8). C'est pour cette raison que nous travaillerons par la suite (e.g. dans la section 2.2) avec leur section globale et non avec le faisceau tout entier.

DÉFINITION 2.1.1. — Le séparé complété (pour la topologie  $p$ -adique)

d'un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  est le  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module défini en posant  $\widehat{\mathcal{E}} := \varprojlim_i \left( \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E} \right).$

– Un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  est séparé complet si le morphisme canonique

$$(2.1.1.1) \quad \mathcal{E} \rightarrow \varprojlim_i \left( \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E} \right) = \widehat{\mathcal{E}}$$

est un isomorphisme.

– Un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  est sans  $p$ -torsion si pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathfrak{X}$ ,  $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E})$  est sans  $p$ -torsion.

- Un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  est pré-pseudo-quasi-cohérent si, pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$ , le  $\mathcal{O}_{X_i}$ -module  $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E}$  est quasi-cohérent.
- Un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  est pseudo-quasi-cohérent s'il est séparé complet et pré-pseudo-quasi-cohérent.
- Un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}$  sans  $p$ -torsion est quasi-cohérent s'il est pseudo-quasi-cohérent.

LEMME 2.1.2. — Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pré-pseudo-quasi-cohérent, alors  $\widehat{\mathcal{E}}$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pseudo-quasi-cohérent.

Démonstration. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pré-pseudo-quasi-cohérent. Il résulte de [5, 3.3.1.2] que le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{E}}/\pi^{i+1}\widehat{\mathcal{E}} = \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E}$  est un isomorphisme (on remarque que l'hypothèse de pré-pseudo-quasi-cohérence est a priori nécessaire). Il en résulte que  $\widehat{\mathcal{E}}$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pseudo-quasi-cohérent.  $\square$

2.1.3. — Supposons  $\mathfrak{X}$  affine. Soit  $E$  un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. On définit canoniquement un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module en posant  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E := \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E$ , i.e., le séparé complété de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E$ .

Comme  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E$  est pré-pseudo-quasi-cohérent, il résulte du lemme 2.1.2 que  $\mathcal{E} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pseudo-quasi-cohérent.

Comme  $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E) \xrightarrow{\sim} D_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E$ , comme le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$  commute aux limites projectives, on obtient alors  $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} E$ .

2.1.4. — Soient  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pseudo-quasi-cohérent et  $\mathfrak{U}$  un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$ . Il résulte de [5, 3.3.2.1] que pour tout entier  $n \geq 1$  on ait l'annulation  $H^n(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$ . En appliquant le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{U}, -)$  à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0$ , on en déduit que le morphisme canonique

$$(2.1.4.1) \quad D_{U_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{U}}^{(m)}} \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}_i)$$

est un isomorphisme. On en déduit les trois points suivants :

- Le morphisme canonique  $\widehat{\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})} \rightarrow \varprojlim_i \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}_i)$  est un isomorphisme. En

appliquant le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{U}, -)$  à 2.1.1.1, on obtient l'isomorphisme  $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E}_i)$ . Ainsi,  $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$  est séparé complet pour la topologie  $p$ -adique.

• On déduit de 2.1.4.1 que le morphisme canonique  $\mathcal{D}_{U_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathcal{U}}^{(m)}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}_i|_{\mathcal{U}}$  est un isomorphisme. En passant à la limite projective, on en déduit le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{U}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}_{\mathcal{U}}^{(m)}} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$  (avec les notations de 2.1.3 pour le premier terme) est un isomorphisme.

• Comme le système  $(\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{E}_i))_{i \in \mathbb{N}}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler, comme  $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{E}) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ , il résulte alors de [8, 7.20] l'isomorphisme canonique  $\varprojlim_i \left( \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E} \right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\varprojlim_i \left( \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E} \right)$ .

REMARQUES 2.1.5. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion et quasi-cohérent. Il découle de troisième point de 2.1.4, l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\varprojlim_i \left( \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E} \right).$$

On obtient  $\mathcal{E} \in D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$  (définition de Berthelot), ce qui justifie notre terminologie de quasi-cohérence sans  $p$ -torsion.

2.1.6. — On remarque que le fait qu'un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module soit pseudo-quasi-cohérent (resp. sans  $p$ -torsion et quasi-cohérent) est local en  $\mathfrak{X}$ . Avec 2.1.3 et 2.1.4, on obtient alors la description locale suivante de ces modules : Supposons que  $\mathfrak{X}$  soit affine. Les foncteurs  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} -$  et  $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$  induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -modules séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique (resp. sans  $p$ -torsion et séparés et complets) et la catégorie des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module pseudo-quasi-cohérents (resp. sans  $p$ -torsion et quasi-cohérents).

2.1.7 (Image directe par  $u$  d'un  $\mathcal{D}$ -module). — Soit  $\mathcal{F}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion et quasi-cohérent (voir 2.1.1). Comme  $\mathcal{F}$  est sans  $p$ -torsion, alors l'image directe de niveau  $m$  de  $\mathcal{F}$  par  $u$  telle que définie par Berthelot (voir [7, 3.5.1]) est donnée par la formule  $u_+^{(m)}(\mathcal{F}) := \mathbb{R}\varprojlim_i u_{i+} \mathcal{F}_i^{(m)}$ . Or, d'après

les isomorphismes de changement de base (1.2.2), pour tous entiers  $i' \geq i$ , on a l'isomorphisme  $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{X_{i'}}^{(m)}} u_{i'+}(\mathcal{F}_{i'}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} u_{i+}(\mathcal{F}_i^{(m)})$ . D'après la version [8, 7.20] de Mittag-Leffler, on en déduit le premier isomorphisme

$$u_+^{(m)}(\mathcal{F}) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_i u_{i+} \mathcal{F}_i^{(m)} \xleftarrow{\sim} u_* \left( \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathcal{Z}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{Z}}^{(m)}} \mathcal{F} \right),$$

le dernier résultant du fait que  $u_*$  commute aux limites projectives.



Supposons de plus que  $\mathfrak{X}$  possède des coordonnées locales  $t_1, \dots, t_n$  telles que  $Z = V(t_1, \dots, t_r)$ . La sous- $\mathcal{V}$ -algèbre de  $D_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  engendrée par la famille d'éléments  $\{\partial_1^{<k_1>(m)}, \partial_2^{<k_2>(m)}, \dots, \partial_r^{<k_r>(m)} \mid k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}\}$  sera notée  $\mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)}$ . On note  $D_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  la sous- $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -algèbre de  $D_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  engendrée par les éléments de la forme  $\partial^{<(\underline{0}, \underline{j})>(m)}$ , avec  $\underline{j} \in \mathbb{N}^{n-r}$ . Comme pour 1.1.11, on construit le morphisme canonique  $\tau_{Z, \mathfrak{X}/\mathcal{V}}^{(m)} : D_{\mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} D_Z^{(m)}$ . Comme pour 1.1.15, on vérifie qu'il induit l'isomorphisme d'anneaux  $\bar{\tau}_{Z, \mathfrak{X}/\mathcal{V}}^{(m)} : D_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} / ID_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} D_Z^{(m)}$  et l'isomorphisme  $(D_{\mathfrak{X}}^{(m)}, D_Z^{(m)})$ -bilinéaire  $\bar{\tau}_{Z, \mathfrak{X}} : D_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)} = D_{\mathfrak{X}}^{(m)} / D_{\mathfrak{X}}^{(m)} I \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} D_Z^{(m)}$ .

Si aucune ambiguïté n'est à craindre (sur le niveau par exemple), on notera simplement  $\hat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}}$  la complétion  $p$ -adique de  $\bar{\tau}_{Z, \mathfrak{X}/\mathcal{V}}^{(m)}$ , i.e.  $\varprojlim_i \bar{\tau}_{Z_i, X_i/S_i}^{(m)}$ , où  $\phi := \text{Spf } \mathcal{V}$  et  $S_i$  sont les réductions modulo  $\pi^{i+1}$ . On notera de même l'isomorphisme d'anneaux  $\hat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}} : \hat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} / ID_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \hat{D}_Z^{(m)}$  induit.

Les éléments de  $\hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  s'écrivent de manière unique de la forme  $\sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<(\underline{i}, \underline{0})>(m)} P_{\underline{i}}$ , avec  $P_{\underline{i}} \in \hat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)}$ , les  $P_{\underline{i}}$  convergeant vers 0 pour la topologie  $p$ -adique. L'isomorphisme  $(\hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}, \hat{D}_Z^{(m)})$ -bilinéaire  $\hat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}}$  est donné par la formule :

$$(2.1.7.1) \quad \begin{aligned} \hat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}} : \hat{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)} = \hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} / \hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} I &\xrightarrow{\sim} \mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \hat{\otimes}_{\mathcal{V}} \hat{D}_Z^{(m)} \\ \left[ \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<(\underline{i}, \underline{0})>(m)} P_{\underline{i}} \right]'_Z &\mapsto \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<(\underline{i})>(m)} \otimes \hat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}}([P_{\underline{i}}]'_Z), \end{aligned}$$

où  $[-]'_Z$  désigne le morphisme canonique  $\hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} / \hat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} I$ . Il en résulte l'isomorphisme

$$(2.1.7.2) \quad \Gamma(\mathfrak{X}, u_+^{(m)}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \hat{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)} \hat{\otimes}_{\hat{D}_Z^{(m)}} F \xrightarrow[\hat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}}]{\sim} \mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \hat{\otimes}_{\mathcal{V}} F.$$

Par stabilité de la quasi-cohérence par image directe par  $u$  (voir [7]), on en déduit que  $u_+^{(m)}(\mathcal{F})$  est un  $\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion et quasi-cohérent.

REMARQUES 2.1.8. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion et quasi-cohérent. Comme  $\mathcal{E} \in D_{\text{qc}}^b(\hat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$ , par stabilité de la quasi-cohérence (voir [7]), on obtient  $u^!(\mathcal{E}) \in D_{\text{qc}}^b(\hat{\mathcal{D}}_Z^{(m)})$ . On remarque que  $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$  est sans  $p$ -torsion et donc  $(\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}))_i := \mathcal{D}_{Z_i}^{(m)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}_{Z_i}^{(m)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}} \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ . Par contre, il paraît faux que  $(\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}))_i$  soit un  $\mathcal{D}_{Z_i}^{(m)}$ -module quasi-cohérent. Ainsi, on

a a priori  $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \notin D_{\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(m)})$ . Par contre, on vérifie par un calcul que le morphisme canonique

$$(2.1.8.1) \quad \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E}) \rightarrow \varprojlim_i \mathcal{H}^0 u_i^!(\mathcal{E}_i)$$

est un isomorphisme ( cela résulte aussi de l'isomorphisme  $u^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\varprojlim_i u_i^!(\mathcal{E}_i)$ , auquel on applique le foncteur  $\mathcal{H}^0$ ). Comme  $u_i^!(\mathcal{E}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Z_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}}^{\mathbb{L}} u^!(\mathcal{E})$ , on obtient l'isomorphisme  $\mathcal{H}^0 u_i^!(\mathcal{E}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathcal{D}_{Z_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}}^{\mathbb{L}} u^!(\mathcal{E}))$ . En particulier, les  $\mathcal{D}_{Z_i}^{(m)}$ -modules apparaissant dans la limite projective 2.1.8.1 sont quasi-cohérents.

**2.2. Images directes et images inverses extraordinaires de  $D$ -modules par une immersion fermée.** — Même si cela n'est pas toujours nécessaire, supposons dans cette section que  $\mathfrak{X}$  est affine et possède des coordonnées locales  $t_1, \dots, t_n$  telles que  $Z = V(t_1, \dots, t_r)$ . Comme cela est expliqué au début de la section précédente, nous travaillerons ici dans les catégories de  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -modules (ou  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -modules) sans  $p$ -torsion, séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique. Nous définirons sur ces catégories la notion d'image directe (resp. d'image inverse extraordinaire) de niveau  $m$  par  $u$  notée  $u_+^{(m)}$  et (resp.  $\mathcal{H}^0 u^!$ ).

**2.2.1 (Image directe par  $u$  d'un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module).** — Soit  $F$  un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. On définit l'image directe de  $F$  par  $u$  de niveau  $m$  en posant

$$u_+^{(m)}(F) := \varprojlim_i u_{i+}(F_i) = \widehat{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\widehat{D}_Z^{(m)}} F \xrightarrow[\widehat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}}]{\sim} \mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}} F.$$

La formule 2.1.7.2 justifie la notation. On obtient ainsi un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. Via cet isomorphisme, les éléments de  $u_+^{(m)}(F)$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}}$ , avec  $x_{\underline{k}} \in F$  et  $\lim_{|\underline{k}| \rightarrow \infty} x_{\underline{k}} = 0$  (pour la topologie  $p$ -adique de  $F$ ). De plus, les éléments de  $\left(u_+^{(m)}(F)\right)_{\mathbb{Q}}$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}}$ , avec  $x_{\underline{k}} \in F_{\mathbb{Q}}$  et  $\lim_{|\underline{k}| \rightarrow \infty} x_{\underline{k}} = 0$  (pour la topologie de  $F_{\mathbb{Q}}$  induite par la topologie  $p$ -adique de  $F$ ). Pour ne pas alourdir les notations nous avons noté  $\underline{\partial}^{<\underline{k}>}$  la classe de  $\underline{\partial}^{<\underline{k}>}$  dans  $\widehat{D}_{\mathfrak{X} \leftarrow Z}^{(m)}$ .

**LEMME 2.2.2.** — *Soit  $F \hookrightarrow G$  un monomorphisme de  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -modules sans  $p$ -torsion, séparés et complets pour la topologie  $p$ -adique.*

1. *Le morphisme  $u_+^{(m)}(F) \rightarrow u_+^{(m)}(G)$  (resp.  $(u_+^{(m)}(F))_{\mathbb{Q}} \rightarrow (u_+^{(m)}(G))_{\mathbb{Q}}$ ) est alors un monomorphisme.*

2. Le morphisme canonique  $u_+^{(m)}(F) \rightarrow u_+^{(m)}(G)$  (resp.  $(u_+^{(m)}(F))_{\mathbb{Q}} \rightarrow (u_+^{(m)}(G))_{\mathbb{Q}}$ ) est alors un isomorphisme si et seulement si le morphisme canonique  $F \hookrightarrow G$  (resp.  $F_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ ) est un isomorphisme.

*Démonstration.* — Cela découle des descriptions de 2.2.1 (ou alors de 2.3.1).  $\square$

LEMME 2.2.3. — Soit  $F$  un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. Alors  $F$  est un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module cohérent si et seulement si  $u_+^{(m)}(F)$  est un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module cohérent.

*Démonstration.* — Comme le foncteur  $u_+^{(m)}$  défini par Berthelot pour les faisceaux préserve la cohérence, comme on dispose des théorèmes de type A, l'isomorphisme 2.1.7.2 nous permet de conclure la nécessité de l'assertion du lemme. Réciproquement, supposons que  $F$  n'est pas un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module cohérent. Il existe alors une suite strictement croissante  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous- $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module cohérent de  $F$ . Il résulte alors du lemme 2.2.2 que l'on obtient la suite strictement croissante  $(u_+^{(m)}(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de sous- $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module cohérent de  $u_+^{(m)}(F)$ . Comme  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  est noethérien, ce dernier n'est pas un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module cohérent.  $\square$

REMARQUES 2.2.4. — Soit  $H^{(m)}$  un  $\widehat{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module tel qu'il existe un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module  $\mathring{H}^{(m)}$  sans  $p$ -torsion, séparé et complet (pour la topologie  $p$ -adique), tel que  $\mathring{H}_{\mathbb{Q}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} H^{(m)}$ . On remarque que la topologie sur  $H^{(m)}$  induite par la base de voisinage de  $p^n \mathring{H}^{(m)}$  fait de  $H^{(m)}$  un  $K$ -espace de Banach.

En outre, si  $H^{(m)}$  est un  $\widehat{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent, alors cette topologie est indépendant du choix d'un tel  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module  $\mathring{H}^{(m)}$  et ce dernier est forcément  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -cohérent. En effet, cela résulte du théorème de Banach (e.g. voir [9, 2.8.1]) et de la noethérianité de  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ .

On en déduit que si  $H^{(m)}$  est un  $\widehat{D}_{Z, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent alors  $(u_+^{(m)}(\mathring{H}^{(m)}))_{\mathbb{Q}}$  est un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent et ne dépend pas du  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module séparé complet  $\mathring{H}^{(m)}$  sans  $p$ -torsion, tel que  $\mathring{H}_{\mathbb{Q}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} H^{(m)}$ . On le note alors  $u_+^{(m)}(H^{(m)})$ .

2.2.5 (Image inverse extraordinaire par  $u$  d'un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module)

Soient  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion et quasi-cohérent et  $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$  le  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique correspondant. On pose  $\mathcal{E}_i := \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E} \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}$  et  $E_i := D_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} E$ .

$E \xleftarrow{\sim} D_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} E$ . On rappelle la notation  $\mathcal{H}^0 u_i^!(E_i) = \bigcap_{s=1}^r \ker(E_i \xrightarrow{t_s} E_i)$  (voir 1.2.3). On définit l'image inverse extraordinaire de  $E$  par  $u$  en posant

$$(2.2.5.1) \quad \mathcal{H}^0 u^!(E) := \varprojlim_i \mathcal{H}^0 u_i^!(E_i) \subset \varprojlim_i E_i = E.$$

Il découle de 2.1.8.1 que l'on a l'isomorphisme  $\Gamma(Z, \mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})) = \mathcal{H}^0 u^!(E)$ , ce qui justifie la notation.

On calcule  $\mathcal{H}^0 u^!(E) = \bigcap_{s=1}^r \ker(E \xrightarrow{t_s} E)$ . On munit  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  d'une structure canonique de  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module à gauche via l'isomorphisme  $\widehat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}} : \widehat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} / \widehat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} I \xrightarrow{\sim} \widehat{D}_Z^{(m)}$  de la manière suivante : pour tout  $P \in \widehat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)}$ , pour tout  $x \in \mathcal{H}^0 u^!(E)$ , on pose

$$(2.2.5.2) \quad \widehat{\tau}_{Z, \mathfrak{X}}([P]_Z') \cdot x := P \cdot x,$$

où  $[-]_Z'$  désigne le morphisme canonique  $\widehat{D}_Z^{(m)} \rightarrow \widehat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} / \widehat{D}_{Z, \mathfrak{X}}^{(m)} I$ .

Comme pour  $s = 1, \dots, r$  les applications  $t_s : E \rightarrow E$  sont continues, comme  $\mathcal{H}^0 u^!(E) = \bigcap_{s=1}^r \ker(E \xrightarrow{t_s} E)$ , cela entraîne que  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  est séparé complet pour la topologie induite par la topologie  $p$ -adique de  $E$ . Comme  $E$  est sans  $p$ -torsion, on déduit aussi du calcul  $\mathcal{H}^0 u^!(E) = \bigcap_{s=1}^r \ker(E \xrightarrow{t_s} E)$  l'égalité  $\mathcal{H}^0 u^!(E) \cap p^{i+1} E = p^{i+1} \mathcal{H}^0 u^!(E)$ . En particulier, la topologie  $p$ -adique de  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  et la topologie de  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  induite par la topologie  $p$ -adique de  $E$  sont identiques. Il en résulte que  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  est un  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique.

Terminons par une remarque : lorsque  $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$  est de surcroît quasi-cohérent,  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  est alors le  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module associé à  $\mathcal{H}^0 u^!(\mathcal{E})$ .

REMARQUES 2.2.6. — Soit  $E$  un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. En posant  $\left(\mathcal{H}^0 u^!(E)\right)_i := D_{Z_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_Z^{(m)}} \mathcal{H}^0 u^!(E)$ , comme  $\mathcal{H}^0 u^!(E) \cap p^{i+1} E = p^{i+1} \mathcal{H}^0 u^!(E)$ , on obtient l'inclusion

$$(2.2.6.1) \quad \left(\mathcal{H}^0 u^!(E)\right)_i \subset \mathcal{H}^0 u_i^!(E_i).$$

En prenant la structure de  $D_{Z_i}^{(m)}$ -module sur  $\left(\mathcal{H}^0 u^!(E)\right)_i$  induite par la structure de  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module de  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  définie par la formule 2.2.5.2 et la structure de  $D_{Z_i}^{(m)}$ -module de  $\mathcal{H}^0 u_i^!(E_i)$  donnée par l'égalité 1.2.3.1, on vérifie que l'inclusion 2.2.6.1 est  $D_{Z_i}^{(m)}$ -linéaire. En général, celle-ci n'est pas bijective.

REMARQUES 2.2.7. — Avec les notations de 2.2.6, le morphisme canonique  $u_+ \mathcal{H}^0 u^!(E) = \varprojlim_i u_{i+} \left( \mathcal{H}^0 u^!(E) \right)_i \rightarrow \varprojlim_i u_{i+} \mathcal{H}^0 u^!_i(E_i)$  est un isomorphisme, i.e. que le morphisme canonique

$$\mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{V}} \mathcal{H}^0 u^!(E) \rightarrow \varprojlim_i (O_{S_i} \{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_{S_i}} \mathcal{H}^0 u^!_i(E_i))$$

est un isomorphisme. En effet, les éléments  $x \in \mathcal{V}\{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{V}} \mathcal{H}^0 u^!(E)$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $x = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{l}>} \otimes x_{\underline{l}}$ , avec  $x_{\underline{l}} \in \mathcal{H}^0 u^!(E)$  (et convergeant vers 0). Soit  $(x_i)_i \in \varprojlim_i (O_{S_i} \{\partial_1, \dots, \partial_r\}^{(m)} \otimes_{O_{S_i}} \mathcal{H}^0 u^!_i(E_i))$ . On écrit de manière unique  $x_i$  sous la forme  $x_i = \sum_{\underline{l} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{l}>} \otimes x_{\underline{l},i}$ , avec  $x_{\underline{l},i} \in \mathcal{H}^0 u^!_i(E_i)$  et la somme étant cette fois-ci finie. Par unicité, on obtient que  $(x_{\underline{l},i})_i \in \varprojlim_i \mathcal{H}^0 u^!_i(E_i)$ . L'égalité  $\mathcal{H}^0 u^!(E) = \varprojlim_i \mathcal{H}^0 u^!_i(E_i)$  nous permet alors de conclure.

**2.3. Adjonction.** — Nous reprenons les notations et hypothèses de la section 2.2. Nous vérifions que le foncteur  $u_+^{(m)}$  est adjoint à gauche de  $\mathcal{H}^0 u^!$ .

PROPOSITION 2.3.1 (Morphisme d'adjonction I). — Soit  $F^{(m)}$  un  $\widehat{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. On définit le morphisme canonique d'adjonction

$$(2.3.1.1) \quad \text{adj} : F^{(m)} \rightarrow \mathcal{H}^0 u^! \left( u_+^{(m)}(F^{(m)}) \right),$$

en posant  $\text{adj}(x) = 1 \otimes x$  (i.e.  $\text{adj}(x) = \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \underline{\partial}^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}}$  avec  $x_{\underline{k}} = x$  si  $\underline{k} = 0$  et  $x_{\underline{k}} = 0$  sinon), pour tout  $x \in F^{(m)}$ . Le morphisme  $\text{adj}$  est un isomorphisme de  $\widehat{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}$ -modules.

Démonstration. — Établissons d'abord sa  $\widehat{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}$ -linéarité. Pour tout  $\widehat{D}_{\mathbb{Z}}^{(m)}$ -module à gauche  $G$ , on note  $[-]_i$  le morphisme canonique  $G \rightarrow G/\pi^{i+1}G$ . On dispose du diagramme commutatif :

$$(2.3.1.2) \quad \begin{array}{ccc} F^{(m)} & \xrightarrow{\text{adj}} & \mathcal{H}^0 u^! \circ u_+^{(m)}(F^{(m)}) \\ \downarrow [-]_i & & \downarrow [-]_i \\ F_i^{(m)} & \xrightarrow{\text{adj}} & \left( \mathcal{H}^0 u^! \circ u_+^{(m)}(F^{(m)}) \right)_i \hookrightarrow \mathcal{H}^0 u^!_i \circ u_{i+}^{(m)}(F_i^{(m)}), \end{array}$$

dont la flèche en bas à droite découle de 2.2.6.1. On calcule que le morphisme composé du bas est le morphisme  $\text{adj}$  de 1.2.5.1 qui est  $D_{\mathbb{Z}_i}^{(m)}$ -linéaire. Comme l'inclusion 2.2.6.1 est  $D_{\mathbb{Z}_i}^{(m)}$ -linéaire, il en résulte que la flèche en bas à gauche de

2.3.1.2 est aussi  $D_{Z_i}^{(m)}$ -linéaire. Par passage à la limite projective, il en résulte que le morphisme du haut de 2.3.1.2 est  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -linéaire.

Vérifions à présent sa bijectivité. L'injectivité est évidente. Or, via la description 2.2.1 de l'image directe et avec ses notations, pour  $1 \leq i \leq r$ , on obtient dans  $u_+^{(m)}(F^{(m)})$  la relation

$$t_i \cdot \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} (\partial^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}}) = - \sum_{\underline{k} \geq 1_i} \left\{ \begin{smallmatrix} k_i \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \partial^{<\underline{k}-1_i>} \otimes x_{\underline{k}},$$

où  $1_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  avec 1 à la  $i$ ème place (en effet, il suffit de vérifier l'égalité modulo  $\pi^{i+1}$ , ce qui découle des formules de [5, 2.2.4] et 1.1.15.1). On en déduit aussitôt que tous les éléments de  $\mathcal{H}^0 u^! \circ u_+^{(m)}(F^{(m)})$  sont de la forme  $1 \otimes x$  avec  $x \in F^{(m)}$ .  $\square$

**PROPOSITION 2.3.2** (Morphisme d'adjonction II). — *Soit  $E^{(m)}$  un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. Considérons la flèche*

$$(2.3.2.1) \quad \text{adj} : u_+^{(m)} \circ \mathcal{H}^0 u^!(E^{(m)}) \rightarrow E^{(m)}$$

*donnée par  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}} \rightarrow \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<\underline{k}>} \cdot x_{\underline{k}}$ , avec  $x_{\underline{k}} \in \mathcal{H}^0 u^!(E^{(m)})$  et  $\lim_{|\underline{k}| \rightarrow \infty} x_{\underline{k}} = 0$ . L'application adj est un morphisme de  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -modules.*

*Démonstration.* — Considérons le diagramme canonique suivant

$$(2.3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} u_+^{(m)} \circ \mathcal{H}^0 u^!(E^{(m)}) & \xrightarrow[\text{2.3.2.1}]{\text{adj}} & E^{(m)} \\ \downarrow [-]_i & & \downarrow [-]_i \\ u_{i+}^{(m)} \left( \mathcal{H}^0 u^!(E^{(m)}) \right)_i & \xrightarrow{\quad} u_{i+}^{(m)} \circ \mathcal{H}^0 u_i^!(E_i^{(m)}) & \xrightarrow[\text{1.2.6.1}]{\text{adj}} E_i^{(m)} \end{array}$$

dont la flèche en bas à gauche se construit via l'inclusion 2.2.6.1. Avec 1.2.6, le morphisme composé du bas de 2.3.2.2 est  $D_{X_i}^{(m)}$ -linéaire. Or, on calcule que les deux chemins possible du diagramme envoient un élément de la forme  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<\underline{k}>} \otimes x_{\underline{k}}$  sur  $\sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \partial^{<\underline{k}>} \cdot [x_{\underline{k}}]_i$ . D'où la commutativité de 2.3.2.2. Ainsi la réduction modulo  $\pi^{i+1}$  du morphisme adj de 2.3.2.1 est  $D_{X_i}^{(m)}$ -linéaire. On obtient le résultat par passage à la limite projective.  $\square$

**2.3.3.** — Soient  $E$  (resp.  $F$ ) un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module (resp.  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module) sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. Via le morphisme d'adjonction 2.3.1.1, le foncteur  $\mathcal{H}^0 u^!$  induit l'application

$$(2.3.3.1) \quad \text{Hom}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}(u_+^{(m)}(F), E) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{D}_Z^{(m)}}(F, \mathcal{H}^0 u^! E).$$

Via le morphisme d'adjonction 2.3.2.1, le foncteur  $u_+^{(m)}$  induit l'application

$$(2.3.3.2) \quad \mathrm{Hom}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}(F, \mathcal{H}^0 u^! E) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}(u_+^{(m)}(F), E).$$

On calcule que le morphisme composé

$$(2.3.3.3) \quad u_+^{(m)}(F) \xrightarrow{2.3.1.1} u_+^{(m)} \circ \mathcal{H}^0 u^! \circ u_+^{(m)}(F) \xrightarrow{2.3.2.1} u_+^{(m)}(F),$$

dont la première flèche est l'image par  $u_+^{(m)}$  de 2.3.1.1 et dont la deuxième est 2.3.2.1 utilisé pour  $E = u_+^{(m)}(F)$ , est l'identité. Comme la première flèche est un isomorphisme, la seconde aussi. Par un calcul, on vérifie de plus que le morphisme composé

$$\mathcal{H}^0 u^!(E) \xrightarrow{2.3.2.1} \mathcal{H}^0 u^! \circ u_+^{(m)} \circ \mathcal{H}^0 u^!(E) \xrightarrow{2.3.1.1} \mathcal{H}^0 u^!(E)$$

est l'identité. Il en résulte que les applications 2.3.3.1 et 2.3.3.2 ci-dessus sont réciproques l'une de l'autre.

REMARQUES 2.3.4. — Par manque de stabilité de la catégorie des faisceaux quasi-cohérents mise en exergue dans la section 2, on ne dispose pas a priori d'un analogue dans ce contexte.

### 3. La surcohérence implique l'holonomie

**3.1. Compléments sur l'holonomie sans structure de Frobenius.** — On suppose pour simplifier que  $\mathfrak{X}$  est intègre. On désigne par  $m$  un entier positif.

NOTATIONS 3.1.1. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent. Notons  $(F_{(m)}^i(\mathcal{E}))_{i \geq 0}$  la filtration décroissante définie par la suite spectrale

$$(3.1.1.1) \quad E_2^{r,s} = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}}^r(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}}^s(\mathcal{E}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}), \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}) \Rightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{E})$$

pour  $n = 0$ , i.e.,  $F_{(m)}^i(\mathcal{E})/F_{(m)}^{i+1}(\mathcal{E}) = E_{\infty}^{i,-i}$ . Lorsque le niveau ne fait pas de doute, on écrira  $F^i(\mathcal{E})$  au lieu de  $F_{(m)}^i(\mathcal{E})$ . Il découle aussitôt de [16, 1.3] et avec ses notations que, pour tout  $0 \leq i < \mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E})$ , on obtient  $E_2^{i,i} = 0$ . Il en résulte, pour tout  $0 \leq i \leq \mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E})$ , l'égalité  $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ .

LEMME 3.1.2. — Soit  $0 \rightarrow \mathcal{E}' \xrightarrow{f} \mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{E}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents. Alors, on dispose de la formule  $\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}) = \min\{\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}'), \mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}'')\}$ . Autrement dit, pour tout entier  $i \in \mathbb{N}$  fixé, l'égalité  $\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}) \geq i$  est vérifiée si et seulement si les deux égalités  $\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}') \geq i$  et  $\mathrm{codim}^{(m)}(\mathcal{E}'') \geq i$  sont satisfaites.

*Démonstration.* — Il ne coûte pas grand chose de supposer  $\mathfrak{X}$  affine. Soient  $\overset{\circ}{E}$  un  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module cohérent sans  $p$ -torsion tel que  $\overset{\circ}{E}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} E$ . Par nothérianité de  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ , on obtient des  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -modules cohérents sans  $p$ -torsion en posant  $\overset{\circ}{E}' := f^{-1}(\overset{\circ}{E})$ ,  $\overset{\circ}{E}'' := g(\overset{\circ}{E})$ . On vérifie que la suite canoniquement induite  $0 \rightarrow \overset{\circ}{E}' \rightarrow \overset{\circ}{E} \rightarrow \overset{\circ}{E}'' \rightarrow 0$  est exacte et que l'on dispose des isomorphismes canoniques  $\overset{\circ}{E}'_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} E'$  et  $\overset{\circ}{E}''_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} E''$ . La suite exacte obtenue modulo  $\pi$ , combinée avec [7, 5.2.4.(i)] donne la formule souhaitée.  $\square$

PROPOSITION 3.1.3. — Avec les notations de 3.1.1, pour tout  $0 \leq i \leq d$ ,  $F^i(\mathcal{E})$  est le plus grand sous  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent de codimension supérieure ou égale à  $i$  de  $\mathcal{E}$ .

*Démonstration.* — D'après [16, 1.3],  $\text{codim}^{(m)}(E_2^{i,i}) \geq i$ . Avec le lemme 3.1.2, on en déduit que  $\text{codim}^{(m)}(E_{\infty}^{i,i}) \geq i$ . Comme  $F^i(\mathcal{E})/F^{i+1}(\mathcal{E}) = E_{\infty}^{i,i}$ , il en résulte que  $F^i(\mathcal{E})$  est de codimension supérieure ou égale à  $i$ . Soit  $\mathcal{E}^i$  un sous- $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent de  $\mathcal{E}$  de codimension supérieure ou égale à  $i$ . Par fonctorialité de la suite spectrale de 3.1.1.1, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F^i(\mathcal{E}^i) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{E}^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^i(\mathcal{E}) & \hookrightarrow & \mathcal{E}. \end{array}$$

La flèche du haut est bien une égalité d'après 3.1.1 et parce que  $\mathcal{E}^i$  est de codimension supérieure ou égale à  $i$ . Il en résulte l'inclusion  $\mathcal{E}^i \hookrightarrow F^i(\mathcal{E})$  factorisant ce diagramme commutatif. D'où le résultat.  $\square$

PROPOSITION 3.1.4. — Soient  $m' \geq m \geq$  deux entiers,  $\mathcal{E}^{(m)}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ -module cohérent. On note  $\mathcal{E}^{(m')} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} \mathcal{E}^{(m)}$ ,  $(F_{(m)}^i(\mathcal{E}^{(m)}))_{i \geq 0}$  et  $(F_{(m')}^i(\mathcal{E}^{(m')}))_{i \geq 0}$  les filtrations décroissantes de 3.1.1. On dispose de l'isomorphisme canonique

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}} F_{(m)}^i(\mathcal{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} F_{(m')}^i(\mathcal{E}^{(m')}).$$

*Démonstration.* — Cela résulte du fait que l'extension  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m')}$  est plate (voir [5]) et que le foncteur dual commute aux extensions (voir [32]).  $\square$

3.1.5. — Les assertions de 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3 (resp. 3.1.4) restent valables en remplaçant  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$  (resp.  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(m')}$ ) par  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ .



NOTATIONS 3.1.6. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. On note  $\mathcal{E}^* := \mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ . On pose aussi  $\mathcal{E}^{\text{hol}} := (\mathcal{E}^*)^*$ . On dispose ainsi du foncteur  $(-)^{\text{hol}} : \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger) \rightarrow \text{Hol}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$  défini par  $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^{\text{hol}}$ . En considérant la suite spectrale de 3.1.1.1 (avec  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$  remplacé par  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ ), on vérifie l'égalité  $F^d(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\text{hol}}$ . D'après 3.1.3 (avec la remarque 3.1.5),  $\mathcal{E}^{\text{hol}}$  est le plus grand sous-module holonome de  $\mathcal{E}$ . On remarque de plus que le foncteur oubli  $\text{Hol}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger) \rightarrow \text{Coh}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$  est adjoint à gauche du foncteur  $(-)^{\text{hol}}$ . En particulier, le foncteur  $(-)^{\text{hol}}$  est exact à gauche et commute aux limites projectives.

LEMME 3.1.7. — Soient  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme fini étale,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent.

1. On dispose des isomorphismes  $f_+(\mathcal{E}^{\text{hol}}) \xrightarrow{\sim} f_+(\mathcal{E})^{\text{hol}}$  et  $f_+(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}}) \xrightarrow{\sim} f_+(\mathcal{E})/f_+(\mathcal{E})^{\text{hol}}$ .
2.  $\mathcal{E}$  est holonome si et seulement si  $f_+(\mathcal{E})$  est holonome.
3. Si  $\mathcal{E}$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  (voir la définition 3.2.1) alors  $f_+(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{Y}$ .

Démonstration. — La première assertion 1 résulte du théorème de dualité relative (voir [33]) et de l'exactitude du foncteur  $f_+$  lorsque  $f$  est fini et étale. La seconde résulte du premier isomorphisme de 1 via le fait qu'un monomorphisme  $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents est un isomorphisme si et seulement si  $f_+(\mathcal{E}') \hookrightarrow f_+(\mathcal{E})$  est un isomorphisme. La dernière assertion découle de l'isomorphisme de commutation du foncteur localisation aux images directes (voir [10, 2.2.18.2]) et du fait que le foncteur  $f_+$  est acyclique car  $f$  est fini et étale.  $\square$

LEMME 3.1.8. — Soit  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$  un monomorphisme de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents. Le morphisme  $\mathcal{E}'^{\text{hol}} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{hol}}$  induit par le foncteur  $(-)^{\text{hol}}$  (voir 3.1.6) est alors un monomorphisme. De plus,  $\mathcal{E}'^{\text{hol}} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}^{\text{hol}}$ .

Démonstration. — La première assertion résulte de l'exactitude à gauche du foncteur  $(-)^{\text{hol}}$  (voir 3.1.6). Comme  $\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}^{\text{hol}}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome (car inclus dans un module  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -holonome) inclus dans  $\mathcal{E}'$ , comme  $\mathcal{E}'^{\text{hol}}$  est le plus grand sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome de  $\mathcal{E}'$ , on en déduit que  $\mathcal{E}'^{\text{hol}} = \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}^{\text{hol}}$ .  $\square$

LEMME 3.1.9. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. Le morphisme canonique  $\mathcal{E}^* \rightarrow (\mathcal{E}^{\text{hol}})^*$  est un isomorphisme, i.e.,  $(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}})^* = 0$ . En particulier,  $(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}})^{\text{hol}} = 0$ .

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}} := \mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}}$ . Comme  $\mathcal{E}^{\text{hol}}$  est holonome, alors  $\mathcal{H}^{-1}\mathbb{D}(\mathcal{E}^{\text{hol}}) = 0$ . En appliquant le foncteur  $\mathcal{H}^0\mathbb{D}$  à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E}^{\text{hol}} \xrightarrow{\text{adj}} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{n-hol}} \rightarrow 0$ , il en résulte que l'on obtient la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E}_{\text{n-hol}}^* \rightarrow \mathcal{E}^* \rightarrow (\mathcal{E}^{\text{hol}})^* \rightarrow 0$ . Comme c'est un morphisme de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes, quitte à utiliser l'isomorphisme de bidualité, il suffit de vérifier qu'en appliquant le foncteur  $\mathcal{H}^0\mathbb{D}$  au morphisme  $\mathcal{E}^* \rightarrow (\mathcal{E}^{\text{hol}})^*$ , on obtient un isomorphisme. Or, ce dernier est le morphisme  $(-)^{\text{hol}}(\text{adj}) : (\mathcal{E}^{\text{hol}})^{\text{hol}} \rightarrow \mathcal{E}^{\text{hol}}$ . Comme le morphisme d'adjonction de la forme  $\text{adj} : \mathcal{F}^{\text{hol}} \subset \mathcal{F}$  est fonctoriel en  $\mathcal{F}$ , on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{\text{hol}} & \xrightarrow{\text{adj}} & \mathcal{E} \\ \text{adj} \uparrow & & \uparrow \text{adj} \\ (\mathcal{E}^{\text{hol}})^{\text{hol}} & \xrightarrow{(-)^{\text{hol}}(\text{adj})} & \mathcal{E}^{\text{hol}} \end{array}$$

Comme  $\mathcal{E}^{\text{hol}}$  est holonome, la flèche de gauche est bijective. De plus, les flèches du haut et de droite sont identiques. Il en résulte que la flèche du bas est un isomorphisme.  $\square$

**3.2. Surcohérence dans un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse.** — On désignera par  $\mathfrak{X}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse et  $D$  un diviseur de sa fibre spéciale  $X$ . Pour tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$ , on note  $(^\dagger Z)$  le foncteur localisation en dehors de  $Z$  (voir [10, 2]). L'objectif de cette section est de valider l'isomorphisme 3.2.9.1. Pour cela, introduisons d'abord la notion suivante.

**DÉFINITION 3.2.1.** — Soit  $\mathcal{E}$  un objet de  $(F-)\mathcal{D}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}})$ .

- $\mathcal{E}$  est «  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  » si  $\mathcal{E} \in (F-)\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}})$  et si, pour tout diviseur  $T$  de  $X$ , on ait  $(^\dagger T)(\mathcal{E}) \in (F-)\mathcal{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}})$ .
- On dit que  $\mathcal{E}$  est «  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  et après tout changement de base » si, pour tout morphisme d'anneaux de valuation discrète complets d'inégales caractéristiques  $(0, p)$  de corps résiduels parfaits de la forme le morphisme canonique  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ,  $\mathcal{J} := \text{Spf}(\mathcal{V})$ ,  $\mathcal{J}' := \text{Spf}(\mathcal{V}')$ ,  $f : \mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}' \rightarrow \mathfrak{X}$  le morphisme canonique,  $D' := f^{-1}(D)$ , le complexe induit par changement de base par  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  noté  $f^*(\mathcal{E}) := \mathcal{D}_{\mathfrak{X}'/\mathcal{J}'}^\dagger(^\dagger D')_{\mathbb{Q}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}/\mathcal{J}}^\dagger(^\dagger D)_{\mathbb{Q}}} f^{-1}\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^\dagger(^\dagger D')_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}'$  (pour les opérateurs différentiels d'ordre fini, le changement de base a été défini et étudié dans [6, 3.2]; on en déduit la version  $\mathcal{D}^\dagger$  de manière usuelle). De même, on ajoutera « après tout changement de base » pour d'autres notions, e.g. la surholonomie.

- Enfin un  $(F-)\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  s'il l'est en tant qu'objet de  $(F-)D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$ . Lorsque  $D$  est vide ou s'il n'y a aucune ambiguïté sur  $D$ , on dira plus simplement surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ .

EXEMPLES 3.2.2. — 1. Les propriétés de cohérence et d'holonomie sont stables par changement de base. Plus précisément, soit un morphisme d'anneaux de valuation discrète complets d'inégales caractéristiques  $(0, p)$  de corps résiduels parfaits de la forme le morphisme canonique  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ,  $\mathcal{J} := \mathrm{Spf}(\mathcal{V})$ ,  $\mathcal{J}' := \mathrm{Spf}(\mathcal{V}')$ , soient  $f : \mathfrak{X}' := \mathfrak{X} \times_{\mathcal{J}} \mathcal{J}' \rightarrow \mathfrak{X}$  le morphisme canonique,  $D' := f^{-1}(D)$ . Si  $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$ , alors  $f^*(\mathcal{E}) \in D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger D')_{\mathbb{Q}})$ . De plus, si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module holonome (voir [16, 2.10] ou [7] pour une définition lorsque  $\mathcal{E}$  est muni d'une structure de Frobenius), alors  $f^*(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger D')_{\mathbb{Q}}$ -module holonome. En effet, cela se déduit du fait que l'extension  $f^{-1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{\dagger}(\dagger D')_{\mathbb{Q}}$  est plate (en effet, avec [5], on se ramène au cas des opérateurs différentiels d'ordre fini, cas qui résulte alors du fait que  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  est plate).

2. Lorsque  $\mathfrak{X}$  est un  $\mathcal{V}$ -schéma formel propre et lisse, d'après [20, 2.3.17], les notions de  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -complexes surcohérents, de  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -complexes surholonomes, de  $F$ -complexes dévissables en  $F$ -isocristaux surcohérents sont équivalentes. D'après le théorème de la réduction semistable de Kedlaya ([28]), les  $F$ -isocristaux surconvergens sont « potentiellement unipotent avec des résidues nilpotents », i.e. après une altération génériquement étale ils deviennent unipotents avec des résidues nilpotents. Il découle du théorème [20, 2.3.13] (et en calquant la preuve de [20, 2.3.15]) que les isocristaux potentiellement unipotents avec des résidues nilpotents sont surholonomes. Comme le fait qu'un isocristal surconvergent soit potentiellement unipotent avec des résidues nilpotents est stable par n'importe quel changement de base, il en résulte que les  $F$ -isocristaux surcohérents sont surholonomes et après tout changement de base. Par dévissage, il en découle qu'un  $F$ - $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -complexe surholonome est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -complexe surholonome et après tout changement de base.

LEMME 3.2.3. — 1. Soit  $(\mathfrak{X}_i)_i$  un recouvrement ouvert de  $\mathfrak{X}$ . Un complexe  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  si et seulement si  $\mathcal{E}|_{\mathfrak{X}_i}$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}_i$  pour tout  $i$ .

2. Si deux termes d'un triangle distingué de  $D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$  sont surcohérents dans  $\mathfrak{X}$ , alors le troisième l'est.

3. Un complexe  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  si et seulement si pour tout entier  $j \in \mathbb{Z}$  les modules  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$  sont surcohérents dans  $\mathfrak{X}$ .

4. Pour tout sous-schéma fermé  $Z$  de  $X$ , pour tout complexe  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$  surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ , le complexe  $(\dagger Z)(\mathcal{E})$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ .

*Démonstration.* — Les deux premières assertions sont triviales. La troisième résulte du fait que le foncteur  $(\dagger T)$  avec  $T$  un diviseur de  $X$  est exact sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -modules cohérents. Traitons à présent le quatrième. Lorsque  $Z$  est un diviseur, cela découle de la formule [10, 2.2.14] : pour tout diviseur  $T$  de  $X$ , on a  $(\dagger T) \circ (\dagger Z)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z \cup T)(\mathcal{E})$ . On termine la vérification par récurrence sur le nombre de générateurs de l'idéal de  $\mathcal{O}_X$  induit par  $Z \hookrightarrow X$ , en utilisant des triangles distingués de Mayer-Vietoris (voir [10, 2.2.16]).  $\square$

LEMME 3.2.4 (Berthelot-Kashiwara/surcohérence dans un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse)

Soit  $u : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses telle que  $D \cap Z$  soit un diviseur de  $Z$ . Les foncteurs  $u_+$  et  $u^!$  induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des  $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}}$ -modules (resp. des complexes de  $D^b(\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}})$ ) surcohérents dans  $Z$  et celle des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -modules (resp. des complexes de  $D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$ ) à support dans  $Z$  surcohérents dans  $\mathfrak{X}$ .

*Démonstration.* — D'après la version cohérente du théorème de Berthelot-Kashiwara (voir [7, 5.3.3]), le lemme est déjà connu en remplaçant la notion de surcohérence dans un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse par celle de cohérence (en effet, le cas respectif découle du cas non respectif, car les foncteurs  $u_+$  et  $u^!$  sont acycliques sur les catégories non respectives). Soient  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent dans  $Z$  et  $T$  un diviseur de  $X$ . D'après la dernière assertion de 3.2.3,  $(\dagger T \cap Z)(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Il en résulte que  $u_+((\dagger T \cap Z)(\mathcal{F}))$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent. Or, par [10, 2.2.18.2],  $u_+ \circ (\dagger T \cap Z)(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T) \circ u_+(\mathcal{F})$ . On a ainsi vérifié que  $u_+(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ . De même, en utilisant [10, 2.2.18.1] et via la version cohérente du théorème de Berthelot-Kashiwara, on vérifie que si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -module à support dans  $Z$  surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ , alors  $u^!(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent dans  $Z$ .  $\square$

LEMME 3.2.5. — Soient  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}})$  un complexe surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  et  $u : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses telle que  $D \cap Z$  soit un diviseur de  $Z$ . Alors,  $u^!(\mathcal{E})$  est un complexe de  $D^b(\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}})$  surcohérent dans  $Z$ .

*Démonstration.* — Par 3.2.3, via le triangle de localisation en  $Z$  de  $\mathcal{E}$  (e.g. voir [7, 5.3.6]), la  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}(\dagger D)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérence dans  $\mathfrak{X}$  de  $\mathcal{E}$  et  $(\dagger Z)(\mathcal{E})$  implique celle de  $\mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E})$ . Comme ce dernier est à support dans  $Z$ , avec le théorème de Berthelot-Kashiwara de 3.2.4, on obtient alors que  $u^! \mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E})$  est  $\mathcal{D}_Z^{\dagger}(\dagger D \cap Z)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent dans  $Z$ . Comme d'après [10, 2.2.18.1],  $u^! \circ \mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^{\dagger} \circ u^!(\mathcal{E}) = u^!(\mathcal{E})$ , on a terminé la démonstration.  $\square$

3.2.6. — Soit  $a : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses. Pour tout  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $\mathcal{E}^{(m)}$ , pour tout  $\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module  $E^{(m)}$ , on définit un complexe à gauche de  $\widehat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}$ -module ou respectivement de  $\widehat{D}_Z^{(m)}$ -module en posant

$$(3.2.6.1) \quad \mathbb{L}a^*(\mathcal{E}^{(m)}) := \widehat{\mathcal{D}}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{a^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} a^{-1}\mathcal{E}^{(m)},$$

$$(3.2.6.2) \quad \mathbb{L}a^*(E^{(m)}) := \widehat{D}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{\widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} E^{(m)}.$$

On définit de la même façon le foncteur  $\mathbb{L}a^*$  sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules (resp. des  $D_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules) et le foncteur  $\mathbb{L}a_i^*$  sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ -modules (resp. des  $D_{X_i}^{(m)}$ -modules).

3.2.7. — Soit  $a : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent. Soit  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{I}_i$ ) l'idéal de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$  (resp.  $\mathcal{O}_{X_i}$ ) induit par l'immersion fermée  $Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  (resp.  $Z_i \hookrightarrow X_i$ ). Comme  $\mathcal{O}_{Z_i} = a^{-1}\mathcal{O}_{X_i}/a^{-1}\mathcal{I}_i$ , on vérifie alors  $\mathcal{D}_{Z_i \hookrightarrow X_i}^{(m)} := a_i^* \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} = a^{-1}(\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}/\mathcal{I}_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)})$ . Comme  $\mathcal{I}$  est  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -cohérent,  $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module à droite cohérent. Comme  $\mathcal{I}$  est  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -plat, alors il en résulte que  $\mathcal{I} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  et donc  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$  sont des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -modules à droite cohérent. Via [5, 3.3.9], cela entraîne que le morphisme canonique

$$(3.2.7.1) \quad \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \varprojlim_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}/\mathcal{I}_i \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$$

est un isomorphisme. De plus, il découle de [5, 3.2.3] que le morphisme canonique

$$(3.2.7.2) \quad \widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/I \widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \rightarrow \varprojlim_i D_{X_i}^{(m)}/I_i D_{X_i}^{(m)}$$

est un isomorphisme. Comme le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$  commute aux limites projectives, les isomorphismes 3.2.7.1 et 3.2.7.2 entraînent

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/\mathcal{I} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}/I \widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}.$$

Comme  $\widehat{\mathcal{D}}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} = \varprojlim_i \mathcal{D}_{Z_i \hookrightarrow X_i}^{(m)}$ , comme  $a_*$  commute aux limites projectives, on

dédduit de 3.2.7.1 l'isomorphisme  $a_* \widehat{\mathcal{D}}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} / \mathcal{I} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ , i.e.  $\widehat{\mathcal{D}}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} a^{-1}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} / \mathcal{I} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$ . On en tire  $\widehat{D}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)} / I \widehat{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ .

En passant au produit tensoriel par  $\mathbb{Q}$  sur  $\mathbb{Z}$  puis à la limite inductive sur le niveau, on obtient alors :  $\mathcal{D}_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^\dagger = a^{-1}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger / \mathcal{I} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$  et  $D_{Z \hookrightarrow \mathfrak{X}}^\dagger = D_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger / I D_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ . D'où les isomorphismes :

$$(3.2.7.3) \quad a^!(\mathcal{E})[d_a] \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}a^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} a^{-1}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger / \mathcal{I} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger}^{\mathbb{L}} \mathcal{E}),$$

$$(3.2.7.4) \quad \mathbb{L}a^*(E) \xrightarrow{\sim} D_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger / I D_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger}^{\mathbb{L}} E,$$

où  $d_a$  est la dimension relative de  $a$ , le premier isomorphisme provenant de [7, 4.3.2.2], le second résultant du fait que le foncteur  $a^{-1}$  préserve la platitude.

REMARQUES 3.2.8. — Avec les notations de 3.2.6, il découle du premier isomorphisme de 3.2.7.3 et de 3.2.5 que si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  alors  $\mathbb{L}a^*(\mathcal{E})$  est surcohérent dans  $\mathcal{Z}$ .

LEMME 3.2.9. — Soit  $a : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses dont l'idéal de définition est principal. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent tel que  $\mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E})$  soit un  $\mathcal{D}_{Z, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. On dispose alors de l'isomorphisme canonique :

$$(3.2.9.1) \quad a^*(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, a^*(\mathcal{E})).$$

*Démonstration.* — Soit  $t$  un élément engendrant l'idéal de définition de  $a$ . Via la résolution plate  $0 \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \xrightarrow{t} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger / t \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger \rightarrow 0$ , on déduit de 3.2.7.3 les deux égalités  $a_* a^*(\mathcal{E}) = \mathcal{E} / t \mathcal{E}$  et  $a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E}) = \ker(t : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E})$ . De même, par 3.2.7.4, on obtient  $a^*(E) = E / t E$ . Comme  $\mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{Z, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent, il vérifie les théorèmes de type A et B. Comme le foncteur  $a_*$  est exact et préserve les injectifs (car son adjoint à gauche  $a^{-1}$  est exact), il en résulte que, pour tout  $i \geq 1$ ,  $H^i(\mathfrak{X}, a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E})) = 0$ . Comme  $\mathcal{E}$  vérifie aussi le théorème de type B, en appliquant le foncteur  $\mathbb{R}\Gamma(\mathfrak{X}, -)$  à la suite exacte  $0 \rightarrow a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} / a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E}) \rightarrow 0$ , il en dérive que, pour tout  $i \geq 1$ ,  $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{E} / a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E})) = 0$  et  $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} / a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E})) = E / \Gamma(Z, \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E}))$ . On en déduit qu'en appliquant le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$  à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E} / a_* \mathcal{H}^0 a^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{t} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} / t \mathcal{E} \rightarrow 0$ , on obtient l'isomorphisme  $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E} / t \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} E / t E$ .

□

PROPOSITION 3.2.10. — Soit  $a : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses. On suppose  $\mathfrak{X}$  muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_n$  telles que  $Z = V(t_1, \dots, t_r)$ . Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ . On bénéficie de l'isomorphisme canonique :

$$(3.2.10.1) \quad a^*(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, a^*(\mathcal{E})).$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur  $r$ . Lorsque  $r = 1$ , cela découle du lemme 3.2.9. Notons  $\mathfrak{X}' := V(t_1)$ . D'après 3.2.8, en notant  $b : \mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathfrak{X}$  l'immersion fermée canonique,  $\mathcal{E}' := b^*(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}'$ . En notant  $c : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}'$  l'immersion fermée canonique, par hypothèse de récurrence, on obtient les isomorphismes  $b^*(E) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X}', b^*(\mathcal{E})) = E'$  et  $c^*(E') \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, c^*(\mathcal{E}'))$ . Comme  $a^*(E) \xrightarrow{\sim} c^* \circ b^*(E)$  et  $a^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} c^* \circ b^*(\mathcal{E})$ , on en déduit le résultat.  $\square$

REMARQUES 3.2.11. — L'isomorphisme 3.2.10.1 est utilisé dans la démonstration du lemme 3.3.4 (voir l'étape II.4). J'ignore si cet isomorphisme reste valable lorsque  $\mathcal{E}$  est seulement un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent.

3.3. Preuve du résultat principal. — Soient  $\mathfrak{X}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse et  $D$  un diviseur de sa fibre spéciale  $X$ .

LEMME 3.3.1. — Soit  $a : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses. Soient  $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)}$ -module cohérent sans  $p$ -torsion et  $\mathring{E}^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$ . Notons  $\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)} := \mathring{\mathcal{E}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}}^{\mathbb{L}} \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V} \xleftarrow{\sim} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V}$ ,  $\mathring{E}_i^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)})$ .

Si pour tout entier  $i$  le morphisme canonique  $\mathbb{L}a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}) \rightarrow a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)})$  est un isomorphisme, on dispose alors des isomorphismes canoniques :

$$(3.3.1.1) \quad \mathbb{L}a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}),$$

$$(3.3.1.2) \quad \mathbb{L}a^*(\mathring{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} a^*(\mathring{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i a_i^*(\mathring{E}_i^{(m)}),$$

$$(3.3.1.3) \quad a^*(\mathring{E}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)})).$$

Démonstration. — D'après [7, 3.4.5], on dispose de l'isomorphisme

$$\mathbb{L}a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathbb{L}a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}).$$

On obtient ainsi les deux isomorphismes canoniques du milieu

$$(3.3.1.4) \quad a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xleftarrow{\sim} \mathbb{L}a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\lim_{\leftarrow i} \mathbb{L}a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}) \\ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\lim_{\leftarrow i} a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}) \xleftarrow{\sim} \varprojlim_i a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}).$$

Comme  $\mathbb{L}a^*(\mathring{\mathcal{E}}^{(m)})$  (resp.  $\mathbb{R}\lim_{\leftarrow i} a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)})$ ) est un complexe à gauche (resp. à droite), ces deux complexes sont donc isomorphes à un module. D'où les deux isomorphismes aux extrémités de 3.3.1.4.

Traisons à présent le second isomorphisme. Via le théorème de type *A* pour les  $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ -modules quasi-cohérents, on obtient par associativité du produit tensoriel l'isomorphisme canonique  $\mathbb{L}a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Z_i}^{(m)} \otimes_{D_{Z_i}^{(m)}} \mathbb{L}a_i^*(\mathring{E}_i^{(m)})$ .

Via le théorème de type *A* pour les modules  $\mathcal{D}_{Z_i}^{(m)}$ -modules quasi-cohérents, comme  $\mathbb{L}a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)})$ , il en résulte l'isomorphisme  $\mathbb{L}a_i^*(\mathring{E}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} a_i^*(\mathring{E}_i^{(m)})$ . De plus, on dispose d'après 2.1.4.1 de l'isomorphisme canonique  $\mathring{E}_i^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathring{E}^{(m)} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V}$ . On obtient alors de manière analogue (on utilise l'appendice *B* de [8] au lieu de [7, 3.4.5]) les isomorphismes 3.3.1.4 avec des lettres droites. En particulier, on a vérifié 3.3.1.2. Comme le foncteur  $\Gamma(Z, -)$  commute aux limites projectives, comme  $\Gamma(Z, a_i^*(\mathring{\mathcal{E}}_i^{(m)})) \xrightarrow{\sim} a_i^*(\mathring{E}_i^{(m)})$ , on en déduit l'isomorphisme 3.3.1.3 à partir de 3.3.1.1 et 3.3.1.2.  $\square$

Je remercie le rapporteur pour les deux premiers lemmes ci-dessous (et leur preuve) qui permettront de simplifier la preuve de 3.3.4 par rapport à une ancienne version (consultable sur arxiv).

**LEMME 3.3.2.** — *Soit  $(M^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  un système inductif d'espaces de Banach tel que  $M := \varinjlim_m M^{(m)}$  soit un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors, pour tout entier  $m_0$ , il existe  $m_1 \geq m_0$  tel que, pour tout  $m \geq m_1$ , la flèche canonique  $\mathrm{Im}(M^{(m_0)} \rightarrow M^{(m)}) \rightarrow M$  soit injective.*

*Démonstration.* — Soit  $m_0 \in \mathbb{N}$ . Traitons d'abord le cas où  $M = 0$ . Soit  $K_m$  le noyau de la flèche  $M^{(m_0)} \rightarrow M^{(m)}$ . Comme  $M^{(m)}$  est séparé, alors  $K_m$  est fermé. Puisque  $M = 0$ , on a alors  $\cup_{m \geq m_0} K_m = M^{(m_0)}$ . Comme  $M^{(m_0)}$  est un  $K$ -espace de Banach, il vérifie la propriété de Baire. On en déduit que pour  $m_1$  assez grand  $K_{m_1} = M^{(m_0)}$ , ce qui nous permet de conclure. Considérons à présent le cas général. Quitte à augmenter  $m_0$ , on peut supposer que  $M^{(m_0)} \rightarrow M$  soit surjective. Choisissons  $V^{(m_0)}$  un  $K$ -sous-espace vectoriel de  $M^{(m_0)}$  de dimension finie tel que  $V^{(m_0)} \rightarrow M$  soit surjective. En notant  $V^{(m)}$  l'image de  $V^{(m_0)}$  dans  $M^{(m)}$  muni de la topologie induite par celle  $V^{(m)}$ , il suffit alors d'appliquer le premier cas au système inductif  $(M^{(m)}/V^{(m)})_{m \geq m_0}$ .  $\square$



LEMME 3.3.3. — Soit  $u: Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses avec  $Z$  de dimension nulle. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent à support dans  $Z$ . Alors tout sous-quotient de  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérent. De plus, pour tout ouvert affine  $\mathfrak{U}$  de  $\mathfrak{X}$ , tout sous-quotient de  $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$  est  $\Gamma(\mathfrak{U}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ -cohérent.

Démonstration. — Soit  $\mathcal{E}'$  un sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module de  $\mathcal{E}$ . Pour la première assertion, il suffit de prouver que  $\mathcal{E}'$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérent. On peut supposer  $Z$  intègre et  $\mathfrak{X}$  affine et muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_r$ . Posons  $E := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$  et  $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger)$ . Notons  $(E'_i)_{i \in I}$  la famille des sous  $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules de type fini de  $E'$  (avec  $I$  un ensemble filtrant). Comme  $E$  est  $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérent, les  $E'_i$  sont alors  $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérents. Pour tout  $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module  $G$  posons  $\mathcal{H}^0 u^!(G) = \bigcap_{s=1}^r \ker(G \xrightarrow{t_s} G)$ . Comme  $\mathcal{H}^0 u^!(E)$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, il en est de même du sous  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{H}^0 u^!(E')$ . Comme  $\mathcal{H}^0 u^!(E')$  est la réunion des  $\mathcal{H}^0 u^!(E'_i)$ , il en résulte que pour  $i_0$  assez grand  $\mathcal{H}^0 u^!(E'_{i_0}) = \mathcal{H}^0 u^!(E')$ . Avec la version arithmétique de Berthelot du théorème de Kashiwara, il en résulte que  $E'_i = E'_{i_0}$  pour  $i \geq i_0$ .

Concernant la seconde assertion, on peut supposer  $\mathfrak{X}$  affine. Soit  $E'$  un sous- $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module de  $E$ . Posons  $\mathcal{E}' := \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger} E'$ . Comme  $\mathcal{E}'$  est un sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module de  $\mathcal{E}$ , d'après la première partie du lemme,  $\mathcal{E}'$  est cohérent. Comme  $E'$  est limite inductive de ses sous- $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents, d'après le théorème de type A (voir [5, 3.6.5]) et comme les foncteurs  $\Gamma(\mathfrak{X}, -)$  et  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger}$  commutent aux limites inductives filtrantes, on obtient  $E' = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E}')$ . Ainsi,  $E'$  est  $D_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -cohérent. □

LEMME 3.3.4. — Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  et après tout changement de base. Notons  $Z$  le support de  $\mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}}$ . Par l'absurde, on suppose que  $Z$  est non-vide. Pour toute composante irréductible  $Z'$  de  $Z$ , il existe alors un ouvert affine  $\mathcal{Y}$  de  $\mathfrak{X}$  tel que

1. l'ouvert  $Y \cap Z'$  soit lisse et dense dans  $Z'$  ;
2. le module  $(\mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}})|_{\mathcal{Y}}$  soit holonome.

Démonstration. — On remarquera que l'hypothèse de finitude sur  $\mathcal{E}$  n'est utilisée qu'à l'étape II.4).

Étape I) : Préliminaires, réduction du problème et notations.

Étape 1). Le lemme est local en  $\mathfrak{X}$ . Quitte à remplacer  $\mathfrak{X}$  par un ouvert affine  $\mathcal{Y}$  de  $\mathfrak{X}$  tel que  $Y \cap Z' = Y \cap Z$  et tel que  $Y \cap Z'$  soit un ouvert lisse et dense dans  $Z'$ , on peut ainsi supposer  $\mathfrak{X}$  affine,  $Z = Z'$  et  $Z$  lisse. D'après le théorème

[16, 3.7] et la proposition 3.2.5, il existe un ouvert dense de  $\mathfrak{X}$  sur lequel  $\mathcal{E}$  devient holonome. Il en résulte que la dimension du support de  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}} := \mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}}$  est strictement plus petite que celle de  $X$ . Notons  $r \geq 1$  la codimension de  $Z$  dans  $X$ . D'après [22, Exp. III], il existe alors une immersion fermée de  $\mathcal{V}$ -schémas formels affines et lisses de la forme  $Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  qui relève  $Z \hookrightarrow X$ . Grâce au théorème de Kedlaya de [24], quitte à rétrécir  $\mathfrak{X}$ , il existe un morphisme fini et étale de la forme  $h : \mathfrak{X} \rightarrow \hat{\mathbb{A}}_q^d$  tel que  $h(Z) \subset \mathbb{A}_k^{d-r}$ . Grâce au lemme 3.1.7, on se ramène ainsi au cas où  $Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$  est l'immersion fermée  $\hat{\mathbb{A}}_q^{d-r} \hookrightarrow \hat{\mathbb{A}}_q^d$ .

*Étape 2).* Comme  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}}$  est à support dans  $Z$ , d'après le théorème de Berthelot-Kashiwara, il existe un  $\mathcal{D}_{Z,\mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}} \xrightarrow{\sim} u_+(\mathcal{F})$ . Il suffit de prouver qu'il existe un ouvert dense  $\mathfrak{V}$  de  $Z$  tel que  $\mathcal{F}|_{\mathfrak{V}}$  soit un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{V},\mathbb{Q}}$ -module libre de type fini, ce qui sera établi à l'étape II).

En effet, cela entraîne a fortiori que  $\mathcal{F}|_{\mathfrak{V}}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{V},\mathbb{Q}}^\dagger$ -module holonome (voir l'exemple [16, 2.11]). De plus, comme l'holonomie est préservée par l'image directe d'une immersion fermée, comme  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}} \xrightarrow{\sim} u_+(\mathcal{F})$ , il en résulte l'holonomie de  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}}|_{\mathcal{Y}}$  pour tout ouvert  $\mathcal{Y}$  de  $\mathfrak{X}$  tel que  $\mathcal{Y} \cap Z = \mathfrak{V}$ . D'où la vérification de l'étape 2).

*Étape 3).* D'après [16, 3.6], quitte à faire un changement de base, grâce à l'étape 2), on se ramène au cas où  $k$  est algébriquement clos et non dénombrable.

*Étape 4).* Il existe  $m_0$  assez grand, il existe un  $\hat{\mathcal{D}}_{Z,\mathbb{Q}}^{(m_0)}$ -module cohérent  $\mathcal{F}^{(m_0)}$  tel que l'on dispose de l'isomorphisme  $\mathcal{D}_{Z,\mathbb{Q}}^\dagger \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{Z,\mathbb{Q}}^{(m_0)}} \mathcal{F}^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ . À présent,  $m$  désignera toujours un entier plus grand que  $m_0$ . Notons  $\mathcal{F}^{(m)} := \hat{\mathcal{D}}_{Z,\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}_{Z,\mathbb{Q}}^{(m_0)}} \mathcal{F}^{(m_0)}$ . On dispose des morphismes canoniques  $\hat{D}_{Z,\mathbb{Q}}^{(m)}$ -linéaires  $\rho_m : F^{(m)} \rightarrow F^{(m+1)}$  (on rappelle que les lettres droites désignent les sections globales du faisceau correspondant). Soit  $\mathring{\mathcal{F}}^{(m_0)}$  un  $\hat{\mathcal{D}}_Z^{(m_0)}$ -module cohérent sans  $p$ -torsion tel que  $\mathring{\mathcal{F}}_Q^{(m_0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(m_0)}$ . On construit par récurrence sur  $m \geq m_0 + 1$  un  $\hat{\mathcal{D}}_Z^{(m)}$ -module cohérent  $\mathring{\mathcal{F}}^{(m)}$  sans  $p$ -torsion tel que  $\mathring{\mathcal{F}}_Q^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(m)}$  et tel que  $\rho_{m-1}(\mathring{F}^{(m-1)}) \subset \mathring{F}^{(m)}$  (en effet, via des théorèmes de type A, cela découle de la noéthérianité de  $\hat{D}_Z^{(m)}$ ). Comme  $\mathring{\mathcal{F}}^{(m)}$  est sans  $p$ -torsion, on pose et on obtient  $\mathring{\mathcal{F}}_i^{(m)} := \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{L}} \mathring{\mathcal{F}}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{V}} \mathring{\mathcal{F}}^{(m)}$ .

On note ensuite  $\mathring{\mathcal{E}}_{\text{n-hol}}^{(m)} := u_+^{(m)}(\mathring{\mathcal{F}}^{(m)})$  et  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}}^{(m)} := \mathring{\mathcal{E}}_{\text{n-hol},\mathbb{Q}}^{(m)}$ . Grâce à la première étape (étape qui n'utilise pas l'hypothèse de finitude sur les fibres) du théorème [16, 3.4], il existe un ouvert dense  $Z_{(m)}$  de  $Z$  tel que  $\mathring{\mathcal{F}}^{(m)}|_{Z_{(m)}}$  est isomorphe au complété  $p$ -adique d'un  $\mathcal{O}_{Z_{(m)}}$ -module libre. Il est donc de la forme  $\mathring{\mathcal{F}}^{(m)}|_{Z_{(m)}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{Z_{(m)}}^{E_m})^\wedge$  où  $E_m$  est un ensemble a priori dénombrable.

Désignons alors par  $t_1, \dots, t_d$  les coordonnées canoniques de  $\mathfrak{X}$  telles que  $Z = V(t_1, \dots, t_r)$ . On obtient des sous- $\mathcal{V}$ -schémas formels fermés de  $\mathfrak{X}$  en posant  $\mathfrak{X}' := V(t_{r+1}, \dots, t_d)$  et  $Z' := V(t_1, \dots, t_d)$ . On obtient alors le diagramme canonique cartésien :

$$(3.3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & \mathfrak{X} \\ b \uparrow & & \uparrow a \\ Z' & \xrightarrow{u'} & \mathfrak{X}' \end{array}$$

Comme  $k$  est algébriquement clos et non dénombrable (voir l'étape 3)), quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $|Z'| \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Z_{(m)}$ .

*Étape 5).* Comme  $|Z'| \in Z_{(m)}$ , via en outre 3.3.1.2, on obtient l'isomorphisme  $b^*(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{V}^{(E_m)})^\wedge$ . Ainsi,  $b^*(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)})$  est sans  $p$ -torsion, séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique. D'après 3.3.1.2 et 3.3.1.3 on bénéficie de plus des isomorphismes

$$b^*(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) = b^*(\mathring{F}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i b_i^*(\mathring{F}_i^{(m)}).$$

Remarquons enfin que via 2.1.4.1, on bénéficie de l'isomorphisme  $b_i^*(\mathring{F}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}/\pi^{i+1}\mathcal{V} \otimes_{\mathcal{V}} b^*(\mathring{F}^{(m)})$ .

*Étape II) : il existe un entier  $m_2$  assez grand tel que  $\mathcal{F}|_{Z_{(m_2)}}$  soit un  $\mathcal{O}_{Z_{(m_2)}, \mathbb{Q}}$ -module libre de type fini.*

*Étape 1). Acyclicité.* D'après 1.3.5.1, on dispose des isomorphismes  $\mathbb{L}a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} u'_{i+} \circ \mathbb{L}b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)})$  (en effet, on remarque que les dimensions relatives de  $a$  et  $b$  sont identiques). Comme  $\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}|_{Z_{(m)}}$  est plat, on obtient  $\mathbb{L}b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}) \xleftarrow{\sim} b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)})$ . D'où les isomorphismes

$$(3.3.4.2) \quad \mathbb{L}a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} u'_{i+} \circ b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}).$$

*Étape 2). Le module  $a^*(\mathring{\mathcal{E}}_{\text{n-hol}}^{(m)})$  est pseudo-quasi-cohérent (voir la définition 2.1.1). Plus précisément, on dispose des isomorphismes canoniques*

$$(3.3.4.3) \quad \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\mathring{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}}^{(m)} \left( a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \right) \xrightarrow{\sim} a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)})$$

$$(3.3.4.4) \quad a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}).$$

*Preuve :* On bénéficie de l'isomorphisme canonique

$$(3.3.4.5) \quad \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\mathring{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}}^{\mathbb{L}} \left( \mathbb{L}a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}a_i^* \left( \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathring{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}^{\mathbb{L}} u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \right).$$

Comme  $\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}$  est cohérent et sans  $p$ -torsion, il en est de même de  $u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)})$ . D'après [7, 3.5.1], on dispose alors des isomorphismes canoniques

$$(3.3.4.6) \quad \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}^{(m)}}^{\mathbb{L}} u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}}^{(m)}} u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}).$$

Via le premier isomorphisme de 3.3.4.2, on en déduit les isomorphismes :

$$(3.3.4.7) \quad \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}'}^{(m)}}^{\mathbb{L}} \left( \mathbb{L}a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \right) \\ \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}'}^{(m)}} \left( a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \right) \xrightarrow{\sim} a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}).$$

D'après [7, 3.4.5], comme  $u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)})$  est cohérent,  $\mathbb{L}a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)})$  est quasi-cohérent. Il en dérive

$$(3.3.4.8) \quad \mathbb{L}a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}'}^{(m)}}^{\mathbb{L}} \left( \mathbb{L}a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) \right).$$

Il dérive alors de 3.3.4.7 et 3.3.4.8 les isomorphismes du haut du diagramme ci-dessous :

$$(3.3.4.9) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{L}a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_i \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}'}^{(m)}}^{\mathbb{L}} (a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)})) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_i a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}) \\ \downarrow \sim & & \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)}) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_i \mathcal{D}_{X'_i}^{(m)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{x}'}^{(m)}} (a^* \circ u_+(\mathring{\mathcal{G}}^{(m)})) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_i a_i^* \circ u_{i+}(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}). \end{array}$$

Comme la flèche horizontale du haut à droite est un isomorphisme entre un complexe à gauche sur la gauche et un complexe à droite sur la droite, il en résulte que les morphismes verticaux (et donc ceux du bas) sont bien des isomorphismes. D'où le résultat.

Remarquons au passage que le fait que le morphisme canonique  $\varprojlim_i u'_{i+} \circ b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}) \rightarrow \varprojlim_i u'_{i+} \circ b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)})$  soit un isomorphisme se voit directement.

En effet, d'après [7, 2.2.3.2 et 2.4.2], la formation de  $u'_{i+} \circ b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)})$  commute aux changements de base. Il en résulte que le système  $(u'_{i+} \circ b_i^*(\mathring{\mathcal{G}}_i^{(m)}))_i$  est quasi-cohérent au sens de Berthelot. Par [8, 7.20], on dispose alors d'une version faisceutique quasi-cohérente de Mittag-Leffler qui s'applique ici. D'où le résultat.

Étape 3) On dispose des isomorphismes canoniques :

$$(3.3.4.10) \quad a^*(\overset{\circ}{E}_{\text{n-hol}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} a^* \circ u_+(\overset{\circ}{F}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i a_i^* \circ u_{i+}(\overset{\circ}{F}_i^{(m)}) \\ \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i u'_{i+} \circ b_i^*(\overset{\circ}{F}_i^{(m)}) \xrightarrow{\sim} u'_+ \circ b^*(\overset{\circ}{F}^{(m)}).$$

Preuve : Par 2.1.7.2, il vient  $\Gamma(\mathfrak{X}, u_+(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^{(m)})) \xrightarrow{\sim} u_+(\overset{\circ}{F}^{(m)})$ . Comme  $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\text{n-hol}}^{(m)} = u_+(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^{(m)})$ , on a donc vérifié le premier isomorphisme de 3.3.4.10. Vérifions à présent le second. Grâce au premier isomorphisme de 3.3.4.2 et à 3.3.4.6, on remarque que l'on peut utiliser 3.3.1.3 pour  $u_+(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^{(m)})$ . On obtient donc le premier isomorphisme :  $\Gamma(\mathfrak{X}', a^*(u_+(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^{(m)}))) \xrightarrow{\sim} a^*(\Gamma(\mathfrak{X}, u_+(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^{(m)}))) \xrightarrow{\sim} a^* \circ u_+(\overset{\circ}{F}^{(m)})$ . Or, en utilisant les théorèmes de type A pour les modules quasi-cohérents sur les schémas, on vérifie l'isomorphisme canonique :  $\Gamma(X'_i, a_i^* \circ u_{i+}(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_i^{(m)})) \xrightarrow{\sim} a_i^* \circ u_{i+}(\overset{\circ}{F}_i^{(m)})$ . Comme le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{X}', -)$  commute aux limites projectives, il en résulte  $\Gamma(\mathfrak{X}', \varprojlim_i a_i^* \circ u_{i+}(\overset{\circ}{\mathcal{F}}_i^{(m)})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i a_i^* \circ u_{i+}(\overset{\circ}{F}_i^{(m)})$ . On a ainsi vérifié qu'en appliquant le foncteur  $\Gamma(\mathfrak{X}', -)$  à l'isomorphisme 3.3.4.4 on obtient (à isomorphisme canonique près) le deuxième isomorphisme de 3.3.4.10. De même, le troisième isomorphisme 3.3.4.10 résulte du deuxième isomorphisme de 3.3.4.2. Enfin, le dernier isomorphisme de 3.3.4.10 résulte de l'étape I.5). D'où le résultat.

Étape 4) : Conclusion. a) En appliquant  $\mathcal{H}^0 u'^!$  au composé de 3.3.4.10, d'après le lemme 2.3.1, on obtient l'isomorphisme  $\mathcal{H}^0 u'^! a^*(\overset{\circ}{E}_{\text{n-hol}}^{(m)}) \xrightarrow{\sim} b^*(\overset{\circ}{F}^{(m)})$ . En tensorisant par  $\mathbb{Q}$  puis en passant à la limite sur le niveau, on obtient  $\mathcal{H}^0 u'^! a^*(E_{\text{n-hol}}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_m b^*(F^{(m)})$ .

b) Via les théorèmes de type A et B pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents, on dispose de la surjection  $E \twoheadrightarrow E_{\text{n-hol}}$ . En lui appliquant le foncteur  $a^*$  exact à droite, on obtient la surjection  $a^*(E) \twoheadrightarrow a^*(E_{\text{n-hol}})$ . Comme par hypothèse  $\mathcal{E}$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}$ , grâce à 3.2.10.1, on bénéficie alors de l'isomorphisme  $\Gamma(\mathfrak{X}', a^*(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} a^*(E)$ . Comme  $a^*(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent à support dans  $\mathcal{Z}'$ , d'après 3.3.3 on en déduit que  $a^*(E_{\text{n-hol}})$  est un  $D_{\mathfrak{X}', \mathbb{Q}}^\dagger$ -module cohérent. Via le théorème de Kashiwara, on en déduit que  $\mathcal{H}^0 u'^! a^*(E_{\text{n-hol}})$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie.

c) On déduit de a) et b) que  $\varinjlim_m b^*(F^{(m)})$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Avec [12, 2.2.6], on vérifie que  $(b^*(F^{(m)}))_m$  est un système inductif de  $K$ -espaces de Banach. On peut ainsi utiliser le lemme 3.3.2 pour ce système inductif. Via [12, 2.2.8], on en déduit qu'il existe un entier  $m_1$  assez grand tel que pour tout  $m \geq m_1$   $b^*(F^{(m)})$  soit un  $K$ -espace vectoriel de

dimension finie. En reprenant les étapes I.5) et I.6) de la preuve de [16, 3.4] qui restent valables (l'hypothèse de finitude sur les fibres n'est utilisée qu'en amont de la preuve), on établit qu'il existe un entier  $m_2$  assez grand tel que  $\mathcal{F}|_{Z(m_2)}$  soit un  $\mathcal{O}_{Z(m_2), \mathbb{Q}}$ -module libre de type fini.  $\square$

**THÉORÈME 3.3.5.** — *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  et après tout changement de base. Alors  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}D)_{\mathbb{Q}}$ -holonome.*

*Démonstration.* — Grâce à [5, 4.3.12], on se ramène au cas où le diviseur  $D$  est vide. Posons  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}} := \mathcal{E}/\mathcal{E}^{\text{hol}}$ . Notons  $Z$  le support de  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}}$ . Par l'absurde, supposons  $Z$  non-vide et soit  $Z'$  une composante irréductible. D'après 3.3.4, il existe alors un ouvert  $\mathcal{Y}$  de  $\mathfrak{X}$  tel que l'ouvert  $Y \cap Z'$  soit lisse et dense dans  $Z'$  et tel que le module  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}}|_{\mathcal{Y}}$  soit holonome. Or,  $(\mathcal{E}_{\text{n-hol}}|_{\mathcal{Y}})^{\text{hol}} = (\mathcal{E}_{\text{n-hol}})^{\text{hol}}|_{\mathcal{Y}} = 0$ , la dernière égalité provenant de 3.1.9. De plus, comme le module  $\mathcal{E}_{\text{n-hol}}|_{\mathcal{Y}}$  est holonome, on obtient l'égalité  $(\mathcal{E}_{\text{n-hol}}|_{\mathcal{Y}})^{\text{hol}} = (\mathcal{E}_{\text{n-hol}}|_{\mathcal{Y}})$  (voir 3.1.6). On a ainsi abouti à une contradiction.  $\square$

**3.4. Application : autour de la surholonomie.** — On désignera par  $\mathfrak{X}$  un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse. Le foncteur  $\mathbb{D}$  indique le foncteur dual  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -linéaire comme défini par Virrion (voir [32]).

**DÉFINITION 3.4.1.** — Soit  $\mathcal{E}$  un objet de  $(F-)D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ . On définit par récurrence sur l'entier  $r \geq 0$ , la notion de  *$r$ -surholonomie dans  $\mathfrak{X}$* , de la façon suivante :

1. Le complexe  $\mathcal{E}$  est « 0-surholonome dans  $\mathfrak{X}$  » si  $\mathcal{E}$  est surcohérent dans  $\mathfrak{X}$  ;
2. Pour tout entier  $r \geq 1$ ,  $\mathcal{E}$  est «  $r$ -surholonome dans  $\mathfrak{X}$  » si  $\mathcal{E}$  est  $(r-1)$ -surholonome dans  $\mathfrak{X}$  et pour tout diviseur  $T$  de  $X$ , le complexe  $\mathbb{D} \circ ({}^{\dagger}T)(\mathcal{E})$  est  $r-1$ -surholonome dans  $\mathfrak{X}$ .

On dit que  $\mathcal{E}$  est « surholonome dans  $\mathfrak{X}$  » si  $\mathcal{E}$  est  $r$ -surholonome dans  $\mathfrak{X}$  pour tout entier  $r$ . Enfin un  $(F-)\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger}$ -module est  $r$ -surholonome (resp. surholonome) dans  $\mathfrak{X}$  s'il l'est en tant qu'objet de  $(F-)D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$ .

**COROLLAIRE 3.4.2.** — *Soient  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{\dagger})$  et  $r \in \mathbb{N}$ . Alors, le complexe  $\mathcal{E}$  est  $r$ -surholonome dans  $\mathfrak{X}$  (resp. surholonome dans  $\mathfrak{X}$ ) après tout changement de base (voir 3.2.1 pour la signification de « après tout changement de base ») si et seulement si pour tout entier  $j \in \mathbb{Z}$  les modules  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$  sont  $r$ -surholonome dans  $\mathfrak{X}$  (resp. surholonome dans  $\mathfrak{X}$ ) après tout changement de base.*

*Démonstration.* — Il découle de 3.3.5 que les complexes  $r$ -surholonomes dans  $\mathfrak{X}$  sont holonomes. On vérifie alors le corollaire par récurrence sur  $r$  en utilisant le fait que le foncteur dual  $\mathbb{D}$  (resp. le foncteur extension  $({}^\dagger T)$  avec  $T$  un diviseur de  $X$ ) est acyclique sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules holonomes (resp. cohérents et donc holonomes).  $\square$

3.4.3. — D'après [1, 3.8], pour tout morphisme lisse  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathcal{V}$ -schémas formels lisses de dimension relative  $d_f$ , on dispose d'après Abe de l'isomorphisme canonique

$$(3.4.3.1) \quad f^! \circ \mathbb{D} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \circ f^! (d_f)[2d_f].$$

PROPOSITION 3.4.4. — Soient  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$  et  $r \in \mathbb{N}$ . Alors  $\mathcal{E}$  est surcohérent (resp.  $r$ -surholonome, resp. surholonome) si et seulement si, pour tout morphisme lisse  $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  de  $\mathcal{V}$ -schémas formels,  $f^!(\mathcal{E})$  est surcohérent (resp.  $r$ -surholonome, resp. surholonome) dans  $\mathfrak{X}'$ .

*Démonstration.* — Le cas concernant la surcohérence résulte de la commutation de l'image inverse extraordinaire au foncteur de localisation (voir [10, 2.2.18.1]). Le cas de la  $r$ -surholonome se traite par récurrence sur  $r$ . On procède de manière analogue en utilisant en plus l'isomorphisme 3.4.3.1 vérifié par Abe.  $\square$

COROLLAIRE 3.4.5. — Soient  $\mathcal{E} \in D^b(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger)$  et  $r \in \mathbb{N}$ . Alors, le complexe  $\mathcal{E}$  est  $r$ -surholonome (resp. surholonome) après tout changement de base si et seulement si pour tout entier  $j \in \mathbb{Z}$  les modules  $\mathcal{H}^j(\mathcal{E})$  sont  $r$ -surholonomes (resp. surholonomes) après tout changement de base.

*Démonstration.* — Cela découle de 3.4.2, de la caractérisation de 3.4.4 et du fait que le foncteur  $f^*$  avec  $f : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  un morphisme lisse est acyclique sur la catégorie des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -modules cohérents.  $\square$

REMARQUES 3.4.6. — L'isomorphisme 3.4.3.1 d'Abe est nécessaire afin de vérifier la caractérisation 3.4.4 de la surholonomie. Cependant, on aurait pu vérifier directement le corollaire 3.4.5 à partir de 3.3.5 sans utiliser cet isomorphisme en reprenant les arguments d'acyclicité du foncteur dual, localisation et image inverse extraordinaire par un morphisme lisse.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. ABE – « Explicit calculation of Frobenius isomorphisms and Poincaré duality in the theory of arithmetic  $\mathscr{D}$ -modules », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **131** (2014), p. 89–149.
- [2] Y. ANDRÉ – « Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie  $p$ -adique », *Invent. math.* **148** (2002), p. 285–317.
- [3] P. BERTHELOT – « Cohomologie rigide et théorie des  $\mathscr{D}$ -modules », in  *$p$ -adic analysis (Trento, 1989)*, Lecture Notes in Math., vol. 1454, Springer, Berlin, 1990, p. 80–124.
- [4] ———, « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie », prépublication IRMAR 96-03 [https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Cohomologie\\_Rigide\\_I.pdf](https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/publis/Cohomologie_Rigide_I.pdf), 1996.
- [5] ———, «  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **29** (1996), p. 185–272.
- [6] ———, «  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* **81** (2000).
- [7] ———, « Introduction à la théorie arithmétique des  $\mathscr{D}$ -modules », *Astérisque* **279** (2002), p. 1–80.
- [8] P. BERTHELOT & A. OGUS – *Notes on crystalline cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1978.
- [9] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis*, Grundle. math. Wiss., vol. 261, Springer, Berlin, 1984.
- [10] D. CARO – «  $\mathscr{D}$  modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions  $L$  », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 1943–1996.
- [11] ———, « Dévissages des  $F$ -complexes de  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques en  $F$ -isocristaux surconvergents », *Invent. math.* **166** (2006), p. 397–456.
- [12] ———, « Fonctions  $L$  associées aux  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compos. Math.* **142** (2006), p. 169–206.
- [13] ———, «  $F$ -isocristaux surconvergents et surcohérence différentielle », *Invent. math.* **170** (2007), p. 507–539.
- [14] ———, «  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergents. Cas lisse », *Bull. Soc. Math. France* **137** (2009), p. 453–543.
- [15] ———, «  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques surholonomes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **42** (2009), p. 141–192.
- [16] ———, « Holonomie sans structure de Frobenius et critères d’holonomie », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), p. 1437–1454.
- [17] ———, « Pleine fidélité sans structure de Frobenius et isocristaux partiellement surconvergents », *Math. Ann.* **349** (2011), p. 747–805.



- [18] ———, « Stabilité de l'holonomie sans structure de Frobenius : cas des courbes », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **126** (2011), p. 89–106.
- [19] ———, « Stabilité de l'holonomie sur les variétés quasi-projectives », *Compos. Math.* **147** (2011), p. 1772–1792.
- [20] D. CARO & N. TSUZUKI – « Overholonomicity of overconvergent  $F$ -isocrystals over smooth varieties », *Ann. of Math.* **176** (2012), p. 747–813.
- [21] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV », *Publ. Math. IHÉS* **32** (1967).
- [22] A. GROTHENDIECK (éd.) – *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris), 3, Soc. Math. France, Paris, 2003.
- [23] K. S. KEDLAYA – « A  $p$ -adic local monodromy theorem », *Ann. of Math.* **160** (2004), p. 93–184.
- [24] ———, « More étale covers of affine spaces in positive characteristic », *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), p. 187–192.
- [25] ———, « Semistable reduction for overconvergent  $F$ -isocrystals. I. Unipotence and logarithmic extensions », *Compos. Math.* **143** (2007), p. 1164–1212.
- [26] ———, « Semistable reduction for overconvergent  $F$ -isocrystals. II. A valuation-theoretic approach », *Compos. Math.* **144** (2008), p. 657–672.
- [27] ———, « Semistable reduction for overconvergent  $F$ -isocrystals. III. Local semistable reduction at monomial valuations », *Compos. Math.* **145** (2009), p. 143–172.
- [28] ———, « Semistable reduction for overconvergent  $F$ -isocrystals, IV : local semistable reduction at nonmonomial valuations », *Compos. Math.* **147** (2011), p. 467–523.
- [29] B. LE STUM – *Rigid cohomology*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 172, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [30] Z. MEBKHOUT – « Analogue  $p$ -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie  $p$ -adique », *Invent. math.* **148** (2002), p. 319–351.
- [31] N. TSUZUKI – « Morphisms of  $F$ -isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root  $F$ -isocrystals », *Duke Math. J.* **111** (2002), p. 385–418.
- [32] A. VIRRION – « Dualité locale et holonomie pour les  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), p. 1–68.
- [33] ———, « Trace et dualité relative pour les  $\mathscr{D}$ -modules arithmétiques », in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 1039–1112.

