astérisque 1

1973

Trois problèmes sur les sommes trigonométriques

Yves MEYER

société mathématique de france

Trois problèmes sur les sommes trigonométriques

Yves MEYER [1]

Classification mathématique par sujets (2010). — 42A16, 42A75, 42B37.

Mots clés. — Somme trigonométrique, fonction presque périodique, vibration, comportement asymptotique, ensemble modèle, nombre de Pisot.

Keywords and phrases. — Trigonometric sum, almost periodic function, vibration, asymptotic behavior, model set, Pisot numbers.

1. École normale supérieure Paris-Saclay, 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex. Laboratoire CMLA-CNRS/ENS. Email : yves.meyer@cmla.ens-cachan.fr.

TROIS PROBLÈMES SUR LES SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

Yves MEYER

Résumé. — Les fonctions presque périodiques ont été définies et étudiées par le mathématicien danois Harald Bohr. La motivation de Bohr était la théorie des nombres et l'étude des séries de Dirichlet. Un polynôme trigonométrique en une variable réelle x est une somme finie

$$S(x) = \sum_{1}^{N} c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

où les fréquences λ_k sont des nombres réels arbitraires et où les coefficients c_k sont des nombres réels ou complexes. Une fonction presque périodique au sens de Bohr est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite S_m de polynômes trigonométriques. Cette définition amène à calculer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$ ce qui est souvent difficile. Définissons $T(\epsilon) > 0$ comme la borne inférieure de l'ensemble des $|x|$ tels que $|S(x)| \geq (1-\epsilon)\|S\|_\infty$. Estimer $T(\epsilon)$ quand $\epsilon \to 0$ dépend des propriétés arithmétiques de l'ensemble des fréquences λ_k. Ce petit livre est consacré à ces questions qui sont illustrées sur trois exemples.

Abstract (Three problems about trigonometric sums). — Almost periodic functions have been defined and studied by the Danish mathematician Harald Bohr. Bohr's motivations were number theory and Dirichlet series. A trigonometric polynomial $S(x)$ is a function of the real variable x defined by

$$S(x) = \sum_{1}^{N} c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

were the frequencies λ_k are arbitrary real numbers and the coefficients c_k are real or complex numbers. An almost periodic function in the sense given by Bohr is a uniform limit on $\mathbb{R}$ of a sequence S_m of trigonometric polynomials. This definition leads to the computation or estimation of $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$ which is often a hard problem. Let us define $T(\epsilon) > 0$ as the lower bound of the set of $|x|$ such that $|S(x)| \geq (1-\epsilon)\|S\|_\infty$. The estimation of $T(\epsilon)$ as $\epsilon \to 0$ depends on the arithmetical property of the set of frequencies λ_k. This booklet is devoted to these issues which are illustrated on three examples.

Table des matières

Introduction

Voici trois problèmes sur des espaces de sommes trigonométriques (périodiques ou apériodiques) $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dont les fréquences appartiennent à un ensemble donné de nombres réels.

- Estimer le supremum M de $|P(t)|$ lorsque $-\infty < t < +\infty$.

- Déterminer combien de temps, à partir de 0, il faudra attendre pour voir $|P(t)|$ dépasser $M/2$ (ou cM, $c > 0$).

- Approcher les fonctions dont le spectre "continu" est un compact E (ou une partie de E) par des sommes trigonométriques dont les fréquences appartiennent à E.

Le premier problème est étudié dans la partie I sur l'exemple de la propagation des ondes sur une sphère élastique homogène. Dans la partie II de ce travail, le second problème trouvera quelques éléments de solution.

Enfin le problème de la synthèse spectrale est examiné dans un cas particulier (III).

L'intérêt des exemples choisis me parait venir de ce que la théorie des nombres y joue un rôle décisif.

I. ETUDE ASYMPTOTIQUE DES VIBRATIONS DES SPHERES

1. Soient $n \geqslant 3$ un entier naturel, $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien n-dimensionnel, $M = S^{n-1}$ la sphère $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ et $SO(n)$ le groupe orthogonal spécial. On peut munir M d'une structure riemannienne invariante par l'action de $SO(n)$; La distance géodésique entre deux points m et m_o de M sera alors notée $d(m,m_o)$ et $\Delta : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ désignera l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à cette métrique riemannienne.

Nous allons étudier le comportement asymptotique $(t \to +\infty)$ des solutions indéfiniment dérivables $u : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u . \tag{1.1}$$

Soient $H_k \subset \mathscr{C}^\infty(M)$, $k \geqslant 0$, les espaces usuels d'harmoniques sphériques ; φ $M \to \mathbb{R}$ appartient à H_k si φ est la restriction à M d'un polynôme homogène de degré k en n variables dont le laplacien ordinaire est nul. Les H_k sont les espaces propres de Δ et les valeurs propres correspondantes sont $-k(k+n-2)$ ([3]).

Toute solution $u \in \mathscr{C}^\infty(M \times \mathbb{R})$ de (1.1) peut être écrite sous la forme

$$u(m,t) = a_o + \sum_{k \geqslant 1} a_k(m) \cos\sqrt{k(k+n-2)}\,t + b_k(m) \sin\sqrt{k(k+n-2)}\,t \tag{1.2}$$

où a_o est une constante, a_k et b_k appartiennent à H_k, $k \geqslant 1$, et où la série (2) ainsi que toutes celles obtenues en appliquant les opérateurs Δ et $\frac{\partial}{\partial t}$ convergent uniformément sur $M \times \mathbb{R}$.

THEOREME 1. En dimension $n \geqslant 3$, il existe une constante $C_n > 0$ telle que, pour toute solution indéfiniment dérivable u de (1) dont le développement est donné par la formule (2) et pour tout m de M on ait

$$(1.3) \qquad |a_o| + \sum_{k \geqslant 1} (|a_k(m)| + |b_k(m)|) \leqslant C_n \varlimsup_{t \to +\infty} |u(m,t)|.$$

Plus précisément, soit $u : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution indéfiniment dérivable de (1) dont la moyenne a_o est nulle. Alors, pour tout $m \in M$,

$$(1.4) \qquad \sum_{k \geqslant 1} |a_k(m)| + |b_k(m)| \leqslant C_n \varlimsup_{t \to +\infty} u(m,t).$$

La meilleure constante possible C_n dans (1.4) n'est pas nécessairement la même que dans (1.3). L'inégalité (1.4) permet de déterminer les points $m \in M$ où l'oscillation prendra de très grandes valeurs, positives et négatives. Enfin (1.3) et (1.4) sont inexacts en dimension 2.

Le théorème 1 montre, en particulier, qu'en deux points antipodiques m et $-m$ de M, $\varlimsup_{t \to +\infty} |u(m,t)|$ et $\varlimsup_{t \to +\infty} |u(-m,t)|$ sont du même ordre de grandeur : on peut même (§ 5) améliorer ce résultat en montrant que si n est pair, il existe une constante δ_n telle que pour tout $t_o \in \mathbb{R}$ et tout $m \in M$, $u(m,t_o) \leqslant \delta_n \sup_{[t_o, t_o+2\pi]} |u(-m,t)|$. Si donc $u(m,t_o)$ est très grand, cette forte vibration se répercutera au point antipodique $-m$ au bout d'un temps ne dépassant pas 2π.

Mais comment cette forte vibration se propage-t-elle de m en $-m$? Est-ce en donnant de fortes vibrations aux points "intermédiaires" ?

THEOREME 2. Soient m_o un point de M, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ deux nombres positifs arbitrairement petits et $T > 0$ un nombre arbitrairement grand. On peut alors trouver une solution indéfiniment dérivable u de (1) telle que

(1.5) $|u(m,t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ dès que $d(m,m_o) \geqslant \eta$ et $d(m,-m_o) \geqslant \eta$

(1.6) $|u(m,t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $m \in M$ lorsque $|t| \leqslant T$

(1.7) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} |u(m_o,t)| \geqslant 1$ et $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} |u(-m_o,t)| \geqslant 1$.

Le théorème 2 signifie qu'une vibration qui était restée négligeable "pendant des siècles" peut dans un voisinage arbitrairement petit du "pôle nord" et du "pôle sud" devenir très grande tout en restant toujours négligeable sur le reste de la sphère.

Les solutions indéfiniment dérivables de (1.1) sont presque périodiques ; c'est-à-dire que ce sont des fonctions presque périodiques du temps uniformément par rapport à $m \in M$ ([4], ch. II). Nous allons caractériser l'espace de toutes les fonctions continues $u : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solutions "généralisées" de (1.1) - c'est-à-dire solutions au sens des distributions - qui sont presque périodiques - c'est-à-dire telle que $u(m,t)$ soit presque périodique en t uniformément en m.

THEOREME 3. Les solutions presque périodiques u de (1.1) sont données par les séries (infinies)

(1.8) $$u(m,t) = a_o + \sum_{k\geqslant 1} a_k(m) \cos\sqrt{k(k+n-2)}\,t + b_k(m) \sin\sqrt{k(k+n-2)}\,t$$

telles que a_o soit une constante, a_k et b_k des harmoniques sphériques de degré k et que la série

(1.9) $$|a_o| + \sum_{k\geqslant 1} |a_k(m)| + |b_k(m)|$$

converge uniformément sur M.

Evidemment la convergence uniforme de (1.9) sur M entraine la convergence uniforme de la série (1.8) sur $M \times \mathbb{R}$ et la somme u de (1.8) est donc presque périodique ; il est moins évident que toute solution presque-périodique de (1.1) admette une telle représentation.

THEOREME 4. Il existe une solution généralisée $u : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (1) qui est continue et bornée mais qui n'est pas presque-périodique.

Malgré son aspect technique, le résultat essentiel est le théorème 1. Sa démonstration est donnée au paragraphe 2. Le théorème 3 s'obtient alors sans difficulté. En utilisant les propriétés des fonctions zonales nous en déduirons le théorème 2 (§ 3) dont le théorème 4 sera un corollaire facile.

2. DEMONSTRATION DU THEOREME 1. Nous allons d'abord l'énoncer sous une forme un peu allégée (mais équivalente).

PROPOSITION 1. Si $n \geqslant 3$, il existe une constante C_n telle que, pour toute somme finie $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$s(t) = \sum_{k \geqslant 1} a_k \cos\sqrt{k(k+n-2)}\,t + b_k \sin\sqrt{k(k+n-2)}\,t \tag{2.1}$$

on ait

$$\sum_{k \geqslant 1} |a_k| + |b_k| \leqslant C_n \varlimsup_{t \to +\infty} s(t). \tag{2.2}$$

Admettons la proposition 1 et démontrons le théorème 1. Pour tout m fixé, a_o est la moyenne temporelle de la fonction presque-périodique $t \to u(m,t)$. On a donc $|a_o| \leqslant \varlimsup_{t \to +\infty} |u(m,t)|$. Cette inégalité, jointe à (2.2) donne (1.3) - les meilleures constantes possibles dans (1.3) et (2.2) ne sont peut-être pas les mêmes.

La démonstration de la proposition 1 se fait à l'aide des lemmes suivants.

LEMME 1. Soient $p_1, \ldots, p_n$ et p_{n+1} $n+1$ nombres premiers distincts. Alors $\sqrt{p_{n+1}}$ n'appartient pas au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$.

Pour tout nombre premier ℓ désignons par $\mathbf{Q}_\ell$ le corps ℓ-adique correspondant. En utilisant la loi de réciprocité quadratique et le théorème de Dirichlet ([16], p. 16 et p. 103) on peut trouver un nombre premier ℓ tel que, dans $\mathbf{Q}_\ell$, $p_1, \ldots, p_n$ deviennent des carrés mais que p_{n+1} n'en soit pas un. Le lemme 1 est donc prouvé.

LEMME 2. Soit D l'ensemble des entiers $q \geqslant 1$ sans diviseurs carrés (on convient ici que $1 \in D$). Alors les nombres $\sqrt{q}$ sont $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1.

LEMME 3. Soit $m \geqslant 1$ un entier, $\omega_1, \ldots, \omega_m$, m nombres réels $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants et $s_j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, m fonctions continues et 2π périodiques. Alors

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\ s_1(\omega_1 t) + \ldots + s_m(\omega_m t) = \sup_{\mathbf{R}} s_1(t) + \ldots + \sup_{\mathbf{R}} s_m(t). \tag{2.3}$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de Kronecker ([6], p. 175).

LEMME 4. Soit $\theta > 1$ un nombre réel et $N \geqslant 1$ un entier. Soit Λ la réunion de N suites croissantes Λ_j d'entiers, $1 \leqslant j \leqslant N$. Supposons que chaque Λ_j puisse être écrite $\Lambda_j = \{n(i,j),\ i \geqslant 1\}$ où $1 \leqslant n(1,j)$ et $\theta n(i,j) \leqslant n(i+1,j)$ pour tout $i \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant N$.

Alors il existe une constante $C(\theta,N)$, ne dépendant que de θ et de N telle que, pour toute somme finie $s(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \cos\lambda t + b_\lambda \sin\lambda t$, on ait

(2.4) $$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| + |b_\lambda| \leqslant C(\theta,N) \sup_{[0,2\pi]} s(t).$$

Cela résulte essentiellement de la démonstration du théorème 5.7.5 de [14] p. 124.

LEMME 5. Soit $q \geqslant 2$ un entier sans diviseurs carrés, $a \geqslant 1$ un entier et $\theta_q \geqslant 1$ l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Il existe un ensemble fini A de solutions $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a (x \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z})$ tel que $\mathrm{Card}\, A \leqslant a^2$ et tel que toute solution $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ s'écrive $z = \alpha\theta_q^j$ où $j \in Z$ et $\alpha \in A$.

Ceci est démontré dans [1] p. 90, theorem 5.

LEMME 6. L'unité fondamentale $\theta_q > 1$ d'un corps quadratique réel vérifie l'inégalité $\theta_q \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La démonstration de la proposition 1 est maintenant aisée. On appelle E l'ensemble des couples (j,q), $j \geqslant 1$, $q \in D$ tels que, pour un certain $k \geqslant 1$, on ait $k(k+n-2) = j^2q$. On pose alors

$$a_k = a(j,q) \quad \text{et} \quad b_k = b(j,q), \quad k \geqslant 1, \quad (j,q) \in E.$$

La somme finie $s(t) = \sum_{k\geqslant 1} a_k \cos\sqrt{k(k+n-2)}\,t + b_k \sin\sqrt{k(k+n-2)}\,t$ devient $\sum_{(j,q)\in E} a(j,q) \cos j\sqrt{q}\,t + b(j,q) \sin j\sqrt{q}\,t$. Pour tout $q \in D$ fixé, posons $s_q(t) = \sum_{(j,q)\in E} a(j,q)\cos jt + b(j,q) \sin jt$ de sorte que

(2.5) $$s(t) = \sum_{q\in D} s_q(\sqrt{q}\,t).$$

Le lemme 3 donne

(2.6) $$\varlimsup_{t\to+\infty} s(t) = \sum_{q\in D} \sup_{\mathbb{R}} s_q(t)$$

et il reste, pour tout $q \in D$ à calculer $\sup_{\mathbf{R}} s_q$.

Deux cas se présentent.

Si $q = 1$, $k(k+n-2) = j^2$ implique $(2k-n-2)^2 - 4j^2 = (n-2)^2$ et $2k+n-2 \pm 2j$ sont des diviseurs de $(n-2)^2$. Il y a, au plus, un nombre fini de valeurs de j possibles et l'on a

$$(2.7) \qquad \sum_{(j,1) \in E} |a(j,1)| + |b(j,1)| \leqslant C_n \sup_{\mathbf{R}} s_1(t).$$

Si $q \geqslant 2$, on a $(2k+n-2)^2 - 4j^2 q = (n-2)^2$. Posons $z = 2k + n - 2 + 2j\sqrt{q}$; on a, par hypothèse, $k \geqslant 1$, $n \geqslant 3$ et $j \geqslant 1$; donc $z > 0$. Le lemme 5 permet d'écrire $z = \alpha\, \theta_q^s$ où $\alpha > 0$ parcourt un ensemble fini $A(q,n)$ d'au plus $(n-2)^4$ éléments, $s \in \mathbb{Z}$ est un entier rationnel et $\theta_q \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Soit $z \to \bar{z}$ l'automorphisme de $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$; on a $\bar{z} = \bar{\alpha}\, \theta_q^{-s}$ et donc

$$(2.8) \qquad 4j\sqrt{q} = \alpha\, \theta_q^s - \bar{\alpha}\, \theta_q^{-s}.$$

Le second membre de (2.8) est une fonction croissante de s car $\bar{\alpha}$ est strictement positif $(\alpha\bar{\alpha} = (n-2)^2)$ et $\theta_q > 1$. La représentation (2.8) fournit des entiers $j \geqslant 1$ si et seulement si $s \geqslant s_o$. Appelons alors pour tout $\alpha \in A(q,n)$, $\Lambda(\alpha)$ l'ensemble des entiers $j = j_s \geqslant 1$ fournis par le premier membre de (2.8). On a immédiatement $j_{s+1} > \theta_q j_s$. Le lemme 4 peut être appliqué et donne, pour tout $q \geqslant 2$ appartenant à D,

$$(2.9) \qquad \sum_{(j,q) \in E} |a(j,q)| + |b(j,q)| \leqslant C_n \sup_{\mathbf{R}} s_q(t).$$

Les relations (2.6), (2.7) et (2.9) réunies donnent (2.1).

3. PREUVE DU THEOREME 2. Soient m_o le point $(0, \ldots, 0, 1)$ de M, G le sous-groupe de $SO(n)$ laissant m_o invariant et $\varphi : M \to \mathbb{C}$ la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_n + ix_1)^k$; il est clair que φ appartient à H_k. Posons

$$Z_k(m) = \int_G \varphi(gm)dg \tag{3.1}$$

où gm est le résultat de l'action de g sur m et dg la mesure de Haar de G. On a $Z_k(m_o) = 1$, $Z_k(-m_o) = (-1)^k$ tandis que sur tout compact K de M ne contenant pas m_o et $-m_o$, Z_k tend uniformément vers 0 ([2]).

Il existe d'autre part une suite ε_k, $k \geqslant 0$, de nombres +1 ou −1 telle que, pour tout t réel et tout $N \geqslant 1$,

$$\left|\sum_1^N \varepsilon_k e^{ikt}\right| \leqslant 16\sqrt{N} \quad \text{(lemme 2, p. 134 [6]).} \tag{3.2}$$

Considérons $u(m,t) = \frac{1}{N}\sum_1^N \varepsilon_k Z_k(m)\cos\sqrt{k(k+n-2)}t$. On a $\sqrt{k(k+n-2)} = k + \frac{n-2}{2} + 0(\frac{1}{k})$ ce qui entraîne $|\cos\sqrt{k(k+n-2)}t - \cos(k+\frac{n-2}{2})t| \leqslant \frac{C|t|}{k}$ et $|u(m,t) - \frac{1}{N}\sum_1^N \varepsilon_k Z_k(m)\cos(k+\frac{n-2}{2})t| = 0(|t|\frac{\log N}{N})$; (3.2) donne alors $|u(m,t)| \leqslant \frac{16}{\sqrt{N}} + 0(|t|\frac{\log N}{N})$. Par ailleurs $|u(m,t)| \leqslant \frac{1}{N}\sum_1^N |Z_k(m)|$; quitte à choisir N assez grand, on peut assurer que $|u(m,t)| \leqslant \varepsilon$ si, soit $|t| \leqslant T$, soit $d(m,m_o) \geqslant \eta$ et $d(m,-m_o) \geqslant \eta$. Cependant $\overline{\lim}_{t\to+\infty} |u(m_o,t)| \geqslant 1/C_n$ et de même $\overline{\lim}_{t\to+\infty} |u(-m_o,t)| \geqslant 1/C_n$. Le théorème 2 est donc démontré.

Soit maintenant m_k, $k \geqslant 1$, une suite de points deux à deux distincts de M et $\eta_k > 0$ des nombres positifs assez petits pour que les disques de centres m_k et $-m_k$ et de rayon η_k soient deux à deux disjoints. Par abus de langage, appelons $Z_{j,k}$ la zonale d'ordre j (c'est-à-dire appartenant à H_j) mais construite en remplaçant le pôle nord par m_k. Il est possible de choisir une suite d'entiers N_k, $k \geqslant 1$, tendant assez vite vers l'infini pour que N_{k+1}/N_k tende vers l'infini et que

$$u_k(m,t) = \frac{1}{N_k}\sum_{N_{k-1}}^{N_k} \varepsilon_j Z_{j,k}(m)\cos\sqrt{j(j+n-2)}t \tag{3.3}$$

vérifie $|u_k(m,t)| \leqslant 2^{-k}$ si $d(m,m_k) > \eta_k$ et $d(m,-m_k) > \eta_k$ ou si $|t| \leqslant k$.

Posons

$$u(m,t) = \sum_{k\geq 1} u_k(m,t) \quad ; \tag{3.4}$$

la convergence est uniforme sur tout compact de $M \times \mathbb{R}$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, le développement en harmoniques sphériques de la fonction $m \to u(m,t)$, définie sur M est donné par le second membre de (3.4) - il faut remarquer que pour deux valeurs distinctes de k les degrés des harmoniques sphériques rentrant dans la composition des $u_k(m,t)$ correspondants sont toujours différents.

Supposons $u(m,t)$ presque-périodique ; alors $u(m,t)$ est donnée par la formule (1.8). Faisant $t = t_o$ et remarquant que le développement en harmoniques sphériques d'une fonction de $L^2(M)$ est unique, on obtient que les séries (1.8) et (3.4) sont identiques pour $u(m,t)$. Si $u(m,t)$ est presque-périodique, la série (3.4) doit être uniformément convergente sur $M \times \mathbb{R}$ en vertu du théorème 3. Cela entraîne $\sup\limits_{M \times \mathbb{R}} |u_k(m,t)| \to 0$; mais ce sup dépasse C_n^{-1} grâce au théorème 1. Donc $u(m,t)$ n'est pas presque-périodique. Il est clair que $|u(m,t)| \leq 2$ (les disques de centres m_k ou $-m_k$ et de rayon η_k sont deux à deux disjoints). Le théorème 4 est ainsi démontré.

4. LA THEORIE L^2. Nous nous proposons de montrer que les normes $\left[\sum_{k\geq 1} (a_k^2 + b_k^2)\right]^{1/2}$ et $\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |s(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$ sont équivalentes sur l'espace vectoriel des sommes trigonométriques finies (2.1). Cela nous permettra d'étudier au § 5 la propagation des grandes oscillations sur S^{n-1}.

Nous allons tout d'abord nous placer dans un cadre un peu plus général.

Soit Λ un ensemble de nombres réels et S_Λ l'espace vectoriel complexe des sommes trigonométriques finies

(4.1) $$f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda t} .$$

Une question intéressante est de savoir quels ensembles Λ de nombres réels ont, à la fois, les deux propriétés suivantes

(4.2) on peut trouver deux constantes $0 < C_1 < C_2$ telles que, pour tout $f \in S_\Lambda$,

$$C_1 \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\Big)^{1/2} \leqslant C_2\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2\Big)^{1/2}$$

(4.3) les sommes finies $f \in S_\Lambda$ sont denses dans $L^2[-\pi, \pi]$.

Nous ne savons pas résoudre ce problème mais le théorème ci-dessous suffira à nos besoins.

THEOREME 5. Soient $(\lambda_n)_{-\infty < n < +\infty}$ et $(\lambda'_n)_{-\infty < n < +\infty}$ deux suites de nombres réels. Supposons que, pour deux valeurs distinctes de n, les λ_n correspondants soient distincts. Faisons la même hypothèse sur les λ'_n et supposons que

(4.4) l'ensemble Λ des $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ait les propriétés (4.2) et (4.3)

(4.5) $\varepsilon = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} |\lambda'_n - \lambda_n|$ soit assez petit pour que $C_2(e^{\pi\varepsilon} - 1) < C_1$.

Alors il existe deux constantes C'_1 et C'_2 telles que pour tout $f \in S_{\Lambda'}$

$C'_1\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda'} |a_\lambda|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\Big)^{1/2} \leqslant C'_2\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda'} |a_\lambda|^2\Big)^{1/2}$ et $S_{\Lambda'}$ est dense dans $L^2[-\pi,\pi]$.

Le théorème 5 est implicitement contenu dans [7], [9] et [13] Chap. V § 86 ; sa démonstration utilise les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 2. Soit $(\lambda_n)_{-\infty < n < +\infty}$ une suite de nombres réels telle que, pour deux valeurs différentes de n, les λ_n correspondants soient toujours différents. Supposons que l'ensemble Λ des $(\lambda_n)_{n\in Z}$ vérifie (4.2) et (4.3) ; appelons

C_1 et C_2 les deux constantes figurant dans (4.2). Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $C_2(e^{\pi\varepsilon} - 1) < C_1$. Soit $(\lambda'_n)_{-\infty < n < +\infty}$ une seconde suite de nombres réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\lambda'_n - \lambda_n| \leqslant \varepsilon$. Alors l'ensemble Λ' des λ'_n, $n \in \mathbb{Z}$, possède aussi les propriétés (4.2) et (4.3).

Nous suivons [13]. Posons $\lambda'_n = \lambda_n + r_n$, $f(t) = \sum a_n e^{i\lambda_n t}$, $f'(t) = \sum a_n e^{i\lambda'_n t}$ (toutes les sommes sont finies). Alors $f' - f = \sum a_n (e^{i\lambda'_n t} - e^{i\lambda_n t}) = \sum a_n (e^{ir_n t} - 1) e^{i\lambda_n t} = \sum a_n e^{i\lambda_n t} \sum_{k \geqslant 1} \frac{(ir_n)^k}{k!} t^k = \sum_{k \geqslant 1} \frac{i^k t^k}{k!} g_k(t)$ où $g_k(t) = \sum a_n r_n^k e^{i\lambda_n t}$. Désignant par $\|\ .\ \|_2$ la norme L^2 sur $[-\pi, \pi]$, il vient $\| f' - f \|_2 \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \| \frac{t^k}{k!} g_k \|_2 \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{\pi^k}{k!} \| g_k \|_2 \leqslant C_2 (\sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon^k \pi^k}{k!}) (\sum |a_n|^2)^{1/2} \leqslant C_2 (e^{\pi\varepsilon} - 1)(\sum |a_n|^2)^{1/2}$. Si $C_2(e^{\pi\varepsilon} - 1) < C_1$, (4.2) entraîne l'inégalité correspondante pour f'. Soient $T : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$ l'opérateur continu dont la restriction à S_Λ est définie par $T(f) = f'$ et $I : L^2[-\pi,\pi] \to L^2[-\pi,\pi]$ l'opérateur identité. Si $C_2(e^{\pi\varepsilon} - 1) < C_1$, nous venons de montrer qu'il existe une constante $\rho < 1$ telle que $\| T - I \| < \rho$; T est donc surjectif et la proposition 2 est démontrée.

PROPOSITION 3. Soit $(\lambda_n)_{-\infty < n < +\infty}$ une suite de nombres réels telle que, pour deux valeurs distinctes de n, les λ_n correspondants soient différents. Faisons la même hypothèse sur les λ'_n et supposons que $\lambda'_n = \lambda_n$ dès que $|n| \geqslant N \geqslant 0$. Si l'ensemble Λ des λ_n, $-\infty < n < +\infty$, possède l'une des propriétés (4.2) ou (4.3), il en est de même de l'ensemble Λ' des λ'_n, $-\infty < n < +\infty$.

Montrons d'abord que (4.2) reste vraie si l'on remplace Λ par Λ'. Des deux inégalités (4.3), seule la première n'est pas évidente. Soit en effet Λ un ensemble de nombres réels. Supposons qu'il existe un $d > 0$ tel que $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \in \Lambda$ et

$\lambda' \neq \lambda$ entraînent $|\lambda' - \lambda| \geq d$. Alors pour tout intervalle I de nombres réels, il y a une constante C_I telle que $\int_I |f(t)|^2 dt \leq C_I^2 (\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2)$ pour tout $f \in S_\Lambda$ ([7]).

Pour passer de Λ à Λ' nous changeons la disposition d'un nombre fini de points (deux points distincts restant distincts). Il suffit pour cela de changer successivement la disposition d'un seul point. Il suffit donc de prouver la proposition 3 si $N = 1$.

Le problème est invariant par translation et nous supposerons donc que $0 = \lambda'_o \neq \lambda_o$.

Il nous faut montrer que la première des inégalités (4.2) reste vérifiée (avec une constante C'_1 au lieu de C_1) lorsqu'on remplace Λ par Λ'. Par dualité, on est ramené à montrer que

(4.6) il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour toute suite $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, on puisse trouver une fonction $g \in L^2[-\pi, \pi]$ ayant les propriétés suivantes : $\|g\|_2 \leq C \|a_n\|_2$ et, si $n \neq 0$, $\hat{g}(\lambda_n) = a_n$; tandis que $\hat{g}(0) = a_o$.

Pour construire g on utilise le lemme suivant.

LEMME 1. Si l'ensemble Λ des $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifie (4.2), on peut trouver une fonction $h \in L^2[-\pi, \pi]$ telle que $\hat{h}(\lambda_n) = 0$ si $n \neq 0$ tandis que $\hat{h}(0) = 1$.

En effet, on peut trouver une fonction $h_o \in L^2[-\pi, \pi]$ telle que $\hat{h}_o(\lambda_n) = 0$ pour tout $n \neq 0$ tandis que $\hat{h}_o(\lambda_o) = 1$. Deux cas se présentent. Si $\hat{h}_o(0) \neq 0$, $h = ch_o$. Si $\hat{h}_o(0) = 0$ on appelle $H_o : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction entière définie par

$$H_o(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itz} h_o(t) dt$$

et l'on désigne par $m \geq 1$ l'ordre du zéro 0 de H_o. Remplaçons h_o par $h_1 \in L^2[-\pi, \pi]$ définie par

$$h_1(t) = \int_{-\pi}^{t} h_o(s) ds.$$

La transformée de Fourier complexe H_1 de h_1 est $\frac{H_O(z)}{iz}$. Si $m = 1$, $H_1(0) = \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t)dt \neq 0$ et la fonction h cherchée est de la forme ch_1. Si $m > 1$, on remplace h_1 par $h_2(t) = \int_{-\pi}^{t} h_1(s)ds$ et ainsi de suite jusqu'à $h_m \in L^2[-\pi,\pi]$ dont la transformée de Fourier complexe est $H_o(z)/(iz)^m$. On a bien $\hat{h}_m(0) \neq 0$ et $\hat{h}_m(\lambda_n) = O$ si $n \neq 0$.

Montrons que si (4.6) est vraie pour Λ, (4.6) reste vraie pour Λ'. Soit $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $f \in L^2[-\pi,\pi]$ telle que $\hat{f}(\lambda_n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\|f\|_2 \leqslant C\|a_n\|_2$. Une combinaison linéaire convenable $g = f + \alpha h$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ et h est définie par le lemme 1) permet de réaliser $\hat{g}(0) = a_o$ tandis que $\hat{g}(\lambda_n) = \hat{f}(\lambda_n) = a_n$ si $n \neq 0$. La majoration de $\|g\|_2$ par $C'\|a_n\|_2$ ne présente aucune difficulté.

Montrons maintenant que si S_Λ est dense dans $L^2[-\pi,\pi]$, il en sera de même de $S_{\Lambda'}$.

Soit $f \in L^2[-\pi,\pi]$ telle que $\hat{f}(\lambda_n) = 0$ pour tout $n \neq 0$ et $\hat{f}(0) = 0$. Montrer que $S_{\Lambda'}$ est dense revient à prouver que f est la fonction nulle. Comme dans la preuve du lemme 1, posons

$$f_1(t) = \int_{-\pi}^{t} f(s)ds.$$

La transformée de Fourier complexe de f étant $F(z)$, celle de f_1 est la fonction entière $F(z)/(iz)$ et la transformée de Fourier complexe de $g(t) = f(t) - i\lambda_o f_1(t)$ est $G(z) = i(z - \lambda_o)F(z)/(iz)$. D'une part $g \in L^2[-\pi,\pi]$; d'autre part G est nulle sur Λ. Puisque S_Λ est dense dans $L^2[-\pi,\pi]$, $g = G = 0$. L'expression de G montre que $F = 0$ ainsi que f. La proposition 3 est démontrée.

5. APPLICATIONS DE LA THEORIE L^2 AUX VIBRATIONS DES SPHERES.

Alors que le théorème 1 n'est exact qu'en dimension $n \geqslant 3$, les résultats ci-dessous ne dépendent pas de la dimension $n \geqslant 2$.

Commençons par transcrire le théorème 5 à la situation qui nous occupe.

PROPOSITION 4. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Il existe deux constantes positives α_n et β_n telles que, pour toute solution C^∞ de (1.1) qui s'écrit

$$u(m,t) = \sum_{k\geqslant 0} a_k(m)\cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t + \sum_{k\geqslant 1} b_k(m)\sin\sqrt{k(k+n-2)}\, t$$

et pour tout t_o réel, on ait

$$(5.1) \qquad \alpha_n\Big(\sum_{k\geqslant 0}|a_k(m)|^2 + \sum_{k\geqslant 1}|b_k(m)|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{t_o}^{t_o+2\pi}|u(m,t)|^2\, dt\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\beta_n\Big(\sum_{k\geqslant 0}|a_k(m)|^2 + \sum_{k\geqslant 1}|b_k(m)|^2\Big)^{1/2}.$$

Soient, en effet

$$(5.2) \qquad a = n-2 \quad , \quad \lambda_k = k + a/2 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et

$$(5.3) \qquad \lambda'_k = \sqrt{k(k+a)} \quad \text{si } k \geqslant 0, \qquad \lambda'_k = -\sqrt{k(k+a)} \quad \text{si } k \leqslant -a-1 = -n+1$$

et si $-a \leqslant k \leqslant 1$, soient $\lambda'_{-a}, \dots, \lambda'_{-1}$ a nombres réels arbitraires deux à deux différents et différents des autres λ'_k. Alors $\lambda'_k - \lambda_k \to 0$ $(|k| \to +\infty)$. Le théorème 5 s'applique et montre que l'ensemble des λ'_k, $-\infty < k < +\infty$ a les propriétés (4.2) et (4.3). La proposition 4 est démontrée.

De plus, les sommes finies $\sum_{k\geqslant 0} a_k \cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t + \sum_{k\geqslant 1} b_k \sin\sqrt{k(k+n-2)}\, t$ sont denses dans un sous-espace fermé E de $L^2[-\pi,\pi]$ dont la codimension est $n-2$.

DEFINITION 1. Pour toute solution C^∞ $u(m,t)$ de (1.1) nous désignerons par

$\| u(m,.)\|_2$ la quantité $(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | u(m,t)|^2\, dt)^{1/2}$.

Remarquons que $(\sum | a_k(m)|^2 + \sum_{k\geqslant 1} | b_k(m)|^2)^{1/2}$ ou $(\frac{1}{2\pi}\int_{t_o}^{t_o+2\pi} | u(m,t)|^2 dt)^{1/2}$ constituent des expressions équivalentes de $\| u(m,.)\|_2$ au sens que les quotients sont bornés supérieurement et inférieurement par des constantes absolues.

Les solutions $u(m,t) = \frac{1}{N}\sum_1^N \varepsilon_k Z_k(m)\cos\sqrt{k(k+n-2)}\, t$ du § 3 avaient la propriété que $\| u(m_o,.)\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$ tandis que $\overline{\lim}_{t\to+\infty} u(m_o,t)$ était de l'ordre de grandeur de 1. Nous allons maintenant voir que si une solution quelconque u de (1.1) prend une valeur $u(m_o,t_o)$ beaucoup plus grande que $\| u(m_o,.)\|_2$, alors $| u(m_o,t_o+2\pi)|$ sera aussi très grand (il y a une sorte de périodicité dans la succession des "pics") et, si la dimension n est paire, $|u(-m_o,t_o+\pi)|$ est également très grand.

Pour être plus précis, il existe une constante C_n, $n \geqslant 2$, telle que pour toute solution u de (1.1), tout $m \in S^{n-1}$ et tout t réel,

(5.2) $\quad | u(m,t+2\pi) - u(m,t)| \leqslant C_n\| u(m,.)\|_2$ si n est pair

(5.3) $\quad |u(m,t+2\pi) + u(m,t)| \leqslant C_n\|u(m,.)\|_2$ si n est impair.

Désignons par Hu la transformée de Hilbert de u définie par

$$(Hu)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\leqslant|u|\leqslant\pi} u(t+u)\frac{du}{u} .$$

Alors, $-m$ étant le point antipodal de m sur S^{n-1},

(5.4) $\quad |u(-m,t) - u(m,t+\pi)| \leqslant C_n \|u(m,.)\|_2$ si $n \equiv 2 \pmod 4$

(5.5) $\quad |u(-m,t) + u(m,t+\pi)| \leqslant C_n \|u(m,.)\|_2$ si $n \equiv 0 \pmod 4$

tandis que

(5.6) $\quad |u(-m,t) - (Hu)(m,t+\pi)| \leqslant C_n \|u(m,.)\|_2$ si $n \equiv 1 \pmod 4$

et

(5.7) $\quad |u(-m,t) + (Hu)(m,t+\pi)| \leqslant C_n \|u(m,.)\|_2$ si $n \equiv 3 \pmod 4$.

Un corollaire de ces inégalités est que, si n est pair, pour toute solution C^∞ u de (1.1) le quotient $\sup_{[t_o,t_o+2\pi]} |u(m,t)| / \sup_{[t_o,t_o+2\pi]} |u(-m,t)|$ est compris entre deux constantes absolues ne dépendant que de la dimension ; mais c'est inexact si n est impair car la transformée de Hilbert d'une fonction bornée ne l'est pas nécessairement ([18], Ch. VII, § 2).

Les preuves des inégalités (5.2) à (5.7) sont semblables. Nous nous contenterons donc de vérifier (5.6).

Rappelons que $\lambda'_k = \sqrt{k(k+n-2)}$ si $k \geqslant 0$ et que $\lambda'_k = -\sqrt{k(k+n-2)}$ si $k \leqslant -n+1$ de sorte que $\lambda'_k = k + \frac{n-2}{2} + 0(k^{-1})$ si $|k| \to +\infty$.

Soit $u(m,t)$ une solution C^∞ de (1.1). On peut alors écrire u comme une série $u(m,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(m) e^{i\lambda'_k t}$ où $c_k(m)$ est, pour $k \geqslant 0$ une harmonique sphérique d'ordre k, et, pour $k \leqslant -n+1$, d'ordre $-n+2-k$.

Posons alors $\tilde{u}(m,t) = \sum_{k \geqslant 0} c_k(m) e^{i\lambda'_k t} - \sum_{k \leqslant -n+1} c_k(m) e^{i\lambda'_k t}$.

Puisque n est impair,

$$u(-m,t) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k c_k(m) e^{i\lambda'_k t} - \sum_{k \leqslant -n+1} (-1)^k c_k(m) e^{i\lambda'_k t} .$$

Par ailleurs, si $n \equiv 1 \pmod 4$, $e^{i\pi\lambda'_k} = -i(-1)^k + 0(k^{-1})$, $|k| \to +\infty$, et il en résulte que, pour tout $m \in S^{n-1}$ et tout t réel,

$$(5.8) \qquad |\tilde{u}(m,t+\pi) + iu(-m,t)| \leqslant C'_n \|u(m,.)\|_2 .$$

Il reste à comparer $\tilde{u}(m,t)$ à $(Hu)(m,t)$. Il est facile de vérifier que si $x \to +\infty$ $H(e^{itx}) = e^{itx}(i + 0(x^{-1}))$ tandis que si $x \to -\infty$, $H(e^{itx}) = e^{itx}(-i + 0(x^{-1}))$. Il en résulte

$$(5.9) \qquad |(Hu)(m,t) - i\,\tilde{u}(m,t)| \leqslant C''_n \|u(m,.)\|_2 .$$

Les inégalités (5.8) et (5.9) donnent (5.6).

II. ESPACES DE FONCTIONS PRESQUE PERIODIQUES QUE L'ON PEUT DEFINIR SUR UN INTERVALLE COMPACT.

6. La généralisation naturelle des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et périodiques est l'espace des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ presque périodiques au sens de Bohr. Mais quelle est la généralisation naturelle de l'espace des fonctions continues et périodiques de période donnée ?

Ce sera un espace vectoriel complexe E de fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ayant les trois propriétés suivantes

- E est invariant par translation
- E est fermé pour la topologie de la convergence uniforme
- on peut trouver deux nombres positifs $T > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $f \in E$

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| = \|f\|_\infty \leqslant C \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |f(t)|. \tag{6.1}$$

Il y a alors un ensemble Λ de nombres réels tel que E soit l'ensemble de toutes les fonctions presque-périodiques dont les fréquences appartiennent à Λ. En d'autres termes, soit S_Λ l'espace vectoriel complexe de toutes les sommes trigonométriques finies $P(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \exp 2\pi i \lambda t$ dont les fréquences appartiennent à Λ; E est la fermeture de S_Λ pour la topologie de la convergence uniforme (sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0,T]$).

DEFINITION 2. Soit Λ un ensemble de nombres réels. Nous dirons que Λ est un ensemble cohérent de fréquences s'il existe un nombre positif fini T tel que les normes $\sup_{[0,T]} |f|$ et $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ soient équivalentes sur S_Λ. Le infimum des $T > 0$ ayant cette propriété sera appelée la densité harmonique de Λ et notée $d_h(\Lambda)$.

La densité harmonique de Λ est appelée, dans [10], la période attachée à Λ.

Un programme ambitieux serait de déterminer tous les ensembles cohérents de fréquences. Nous connaîtrions alors tous les espaces vectoriels fermés E, invariants par translation de fonctions presque périodiques que l'on peut "définir sur un intervalle compact" au sens de (6.1). De plus, il nous faudrait pour chaque ensemble cohérent de fréquences, savoir calculer la densité harmonique. Disons tout de suite que le simple calcul de la densité harmonique d'un ensemble arbitraire Λ de fréquences entières semble très difficile (§ 9 et § 10).

Si Λ est un ensemble fini, (6.1) est satisfaite pour tout $T > 0$. Soit alors $C = C(T)$ l'infimum des $C > 0$ tels que (6.1) soit vérifiée pour tout $f \in S_\Lambda$. Il est clair que si $\operatorname{Card} \Lambda \geqslant 2$, $C(T)$ tend vers l'infini quand T tend vers 0 et il serait très intéressant de trouver alors un équivalent ou une estimation de cet infiniment grand. Retenons simplement qu'un ensemble fini est un ensemble cohérent de fréquences dont la densité harmonique est nulle.

Ainsi nous restreindrons notre attention aux ensembles infinis Λ de nombres réels.

Le théorème 6 du § 9 permet de calculer la densité harmonique de nombreux ensembles Λ d'entiers. On observe alors que la densité harmonique diffère beaucoup des densités usuelles. Le théorème 6 ne s'applique cependant pas à tout ensemble Λ d'entiers. Un contre exemple est donné au § 15.

Le théorème 9 du §13 est la généralisation naturelle du théorème 6 aux ensembles de nombres réels. Il permet de décider pour quels nombres réels θ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, est un ensemble cohérent de fréquences et de calculer alors la densité harmonique de Λ. On voit que nous ne savons encore traiter que des exemples.

L'intérêt des méthodes employées est de s'appliquer au problème de la synthèse spectrale (§ 16) en relation avec les nombres de Pisot.

L'amélioration des résultats par rapport aux travaux antérieurs sur le sujet réside dans l'utilisation systématique de certaines propriétés d'équirépartition modulo 1 et d'une méthode introduite par Y. Katznelson ([5]) pour montrer qu'une mesure de Radon est discrète.

7. UNE INEGALITE VERIFIEE PAR LA DENSITE HARMONIQUE. Nous allons d'abord relier la "théorie L^∞" à la "théorie L^2".

PROPOSITION 5. Soit Λ un ensemble cohérent de fréquences dont la densité harmonique est $d_h(\Lambda)$ (définition 2). Alors pour tout $T > d_h(\Lambda)$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour chaque $P(t) = \sum a_\lambda \exp 2\pi i\lambda t \in S_\Lambda$, on ait

$$\sum |a_\lambda|^2 \leqslant C \int_0^T |P(t)|^2\, dt. \tag{7.1}$$

La preuve est très simple. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $T - \varepsilon > d_h(\Lambda)$; alors il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $P \in S_\Lambda$,

$$\sup_{\mathbb{R}} |P| \leqslant C_1 \sup_{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon} |P(t)|. \tag{7.2}$$

Soit f une fonction continue d'une variable réelle à valeurs complexes, nulle hors de $[0, \varepsilon]$ et telle que $\int_0^\varepsilon |f|^2\, dt = 1$. Définissons $P_f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $P_f(t_0) = \int_{\mathbb{R}} P(t_0+t)f(t)dt = \int_0^\varepsilon P(t_0+t)f(t)dt$. Alors $P_f \in S_\Lambda$ et (7.2) donnent

$$|P_f(t_0)| \leqslant C_1 \sup_{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon} |P_f(t)|. \tag{7.3}$$

L'inégalité de Schwarz montre que $|P_f(t)| \leqslant (\int_t^{t+\varepsilon} |P(s)|^2\, ds)^{1/2}$ et donc

$\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T-\varepsilon} |P_f(t)| \leqslant \left(\int_0^T |P(s)|^2 ds\right)^{1/2}$. On obtient

(7.4) $$|P_f(t_0)| \leqslant C_1\left(\int_0^T |P(s)|^2\, ds\right)^{1/2} .$$

Prenant le supremum en f dans (7.4) on a

(7.5) $$\left(\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} |P(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant C_1\left(\int_0^T |P(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

On élève (7.5) au carré et l'on prend la moyenne en t_0 pour obtenir (7.1) avec $C = C_1^2/\varepsilon$.

Soit Λ un ensemble de nombres réels. Pour tout $x > 0$ soit $N(x\ ,\Lambda) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \mathrm{Card}(\Lambda \cap [t,t+x])$ et soit

(7.6) $$\Delta^+(\Lambda) = \lim_{x \to +\infty} x^{-1} N(x,\Lambda).$$

PROPOSITION 6. Soit Λ un ensemble de nombres réels. Alors

(7.7) $$\Delta^+(\Lambda) \leqslant d_h(\Lambda).$$

En effet, pour tout ensemble Λ de nombres réels, une inégalité du type (7.1) entraîne que Λ est uniformément discret (il y a un $\ell > 0$ tel que les différents intervalles $[\lambda,\ \lambda+\ell]$ soient deux à deux disjoints). Alors (7.1) implique $T \geqslant \Delta^+(\Lambda)$ et pour tout $T > \Delta^+(\Lambda)$ il y a une constante C assez grande pour que (7.1) soit vérifiée ; (7.7) est ainsi prouvée.

8. LA DENSITE PRESQUE-PERIODIQUE D'UN ENSEMBLE D'ENTIERS.

Soit $\mathbf{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le groupe dual de $\mathbb{Z}$, $\mathbf{T}_d$ le même groupe muni de la topologie discrète et $I : \mathbf{T}_d \to \mathbf{T}$ l'injection canonique. Le groupe dual $\widetilde{\mathbb{Z}}$ de $\mathbf{T}_d$ est le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ et $J : \mathbb{Z} \to \widetilde{\mathbb{Z}}$ est l'homomorphisme dual de I ; J est injectif et d'image dense.

Nous désignerons par μ la mesure de Haar de $\mathbb{Z}$ normalisée par $\mu(\widetilde{\mathbb{Z}}) = 1$.

DEFINITION 3. La densité presque-périodique, notée $d_p(\Lambda)$, d'un ensemble Λ d'entiers rationnels est la mesure (par μ) de la fermeture de $J(\Lambda)$ dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$.

Par exemple, si Λ est une réunion finie d'ensembles $a\mathbb{Z}+b$, la densité presque périodique coïncide avec la densité ordinaire.

PROPOSITION 7. Pour tout ensemble Λ d'entiers rationnels, on a la double inégalité

$$\Delta^+(\Lambda) \leqslant d_h(\Lambda) \leqslant d_p(\Lambda) \quad ; \tag{8.1}$$

en d'autres termes, la densité harmonique de Λ est toujours comprise entre la densité supérieure de répartition et la densité presque-périodique de Λ.

La seconde inégalité de (8.1) sera prouvée, dans un cadre plus général, au § 13 (proposition 11).

9. UN EXEMPLE DE CALCUL DE LA DENSITE HARMONIQUE. Soit $m \geqslant 1$ un entier naturel, $F \subset [0,m-1]$ un ensemble fini ayant q éléments $(1 \leqslant q \leqslant m)$. Soit $\Lambda = F + m\mathbb{Z}$; les points de Λ sont les entiers rationnels dont les résidus modulo m appartiennent à F.

Alors la densité de Λ est q/m. Nous allons voir que la densité harmonique de Λ est q/m et prouver, en fait, un résultat un peu plus précis. Pour cela appelons A la matrice $\left(\exp \frac{2\pi iaj}{m}\right)_{a\in F,\, 0\leqslant j\leqslant q-1}$ et $A^{-1} = (c_{j,a})_{0\leqslant j\leqslant q-1,\, a\in F}$ est la matrice inverse. Soit $M = \sup\limits_{0\leqslant k\leqslant m-1} \sum\limits_{j=0}^{q-1} \left| \sum\limits_{a\in F} c_{j,a} \exp \frac{2\pi iak}{m} \right|$.

Avec ces notations, on peut énoncer

PROPOSITION 8. Soit I un intervalle de longueur q/m et f une somme trigonométrique dont les fréquences appartiennent à Λ. Alors

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leqslant M \sup_{I} |f|. \tag{9.1}$$

Le problème est invariant par translation et il suffit d'examiner le cas où $I = \left[0\ ,\ \frac{q}{m}\right]$. La somme trigonométrique f peut être écrite

$$f(t) = \sum_{a \in F} \exp 2\pi iat\ f_a(mt) \tag{9.2}$$

où chaque somme trigonométrique f_a est périodique de période 1. Il est alors naturel de décomposer $\left[0\ ,\ \frac{q}{m}\right]$ en q intervalles $I_j = \left[\frac{j}{m}\ ,\ \frac{j+1}{m}\right]$, $0 \leqslant j \leqslant q-1$ et de poser

$$f_j(t) = \sum_{a \in F} \exp(2\pi ija/m)\exp 2\pi iat\ f_a(mt), \qquad 0 \leqslant j \leqslant q-1. \tag{9.3}$$

L'hypothèse $\sup\limits_{I} |f| = 1$ s'écrit alors $\sup\limits_{I_o} |f_j(t)| \leqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant q-1$, puisque $f_j(t) = f(t + \frac{j}{m})$, $t \in I_o$.

Les équations (9.3) s'écrivent

$$\exp 2\pi iat\ f_a(mt) = \sum_{j=0}^{q-1} c_{a,j}\, f_j(t), \qquad a \in F,\ \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{m} \tag{9.4}$$

et tout $t' \in [0,1]$ peut être écrit de façon unique $t' = t + \frac{k}{m}$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{m})$ de sorte que

$$f(t') = \sum_{a \in F} \exp(2\pi iak/m)\exp 2\pi iat\ f_a(mt) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{a \in F} \exp(2\pi iak/m) c_{a,j}\, f_j(t). \tag{9.5}$$

Puisque $|f_j(t)| \leqslant 1$, $|f(t')| \leqslant \sum\limits_{j=0}^{q-1} \left|\sum\limits_{a \in F} c_{j,a} \exp(2\pi iak/m)\right| \leqslant M$. C.Q.F.D.

Pour voir que M était la meilleure constante possible, soit k un entier et $z_o, \ldots, z_{q-1}$ des nombres complexes de module 1 tels que $M = \sum\limits_{o}^{q-1} \sum\limits_{a \in F} z_j c_{j,a} \exp(2\pi iak/m)$. Soient f_j, $0 \leqslant j \leqslant q-1$ des fonctions définies sur $\left[0, \frac{1}{m}\right]$, à valeurs complexes, continues, nulles en 0 et en $\frac{1}{m}$, telles que $f_j(\frac{1}{2m}) = z_j$ et que $\sup |f_j| = 1$. Les relations (9.3) permettent de définir $\exp 2\pi iat\ f_a(mt)$ sur $\left[0\ ,\ \frac{1}{m}\right]$;

puisque $f_a(0) = f_a(1) = 0$, f_a peut être prolongée en une fonction continue périodique de période 1 et nous pouvons définir $f(t)$ dont le spectre est contenu dans Λ par (9.2). Enfin, $\sup_I |f| = 1$ résulte des hypothèses faites sur les f_j tandis que (9.5) montre que $|f(\frac{1}{2m} + k)| = M$. L'inégalité (9.1), étant supposée vraie pour toute somme trigonométrique $f \in S_\Lambda$, reste vraie pour toute fonction continue dont le spectre est contenu dans Λ; M est donc la plus petite constante possible pouvant figurer au second membre de (9.1).

Soit maintenant Λ un ensemble quelconque d'entiers rationnels. Pour tout entier $m \geqslant 1$, formons l'ensemble $\Lambda_m \subset [0, m-1]$ des résidus modulo m de Λ. Soit q_m le cardinal de Λ_m. Alors $\Lambda \subset \Lambda_m + m\mathbb{Z}$ et donc

(9.6) $$d_h(\Lambda) \leqslant d_h(\Lambda_m + mZ) = \frac{q_m}{m}.$$

Avec ces notations, on peut donc énoncer

PROPOSITION 9. Pour tout ensemble Λ d'entiers rationnels et tout entier $m \geqslant 1$, soit q_m le nombre de résidus distincts $\bmod m$ des entiers de Λ. Alors

(9.7) $$d_h(\Lambda) \leqslant \underline{\lim} \frac{q_m}{m} \quad (m \to +\infty).$$

En général (9.7) n'est pas une égalité mais, sous des hypothèses très raisonnables sur Λ, c'est le cas (théorème 6 ci-dessous).

THEOREME 6. Soit Λ un ensemble d'entiers rationnels. Supposons que pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout entier $m \geqslant 1$, il existe une suite $(\lambda_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de Λ telle que

(9.8) $\lambda_k \equiv \lambda \pmod m$ pour tout $k \geqslant 1$ et

(9.9) la suite $(\alpha\lambda)_{k \geqslant 1}$ soit équirépartie $\bmod 1$ pour tout α irrationnel.

Pour tout entier $m \geqslant 1$, désignons par q_m le nombre de résidus distincts, mod m, d'entiers de Λ. Alors la densité harmonique de Λ est égale à $\liminf q_m/m \quad (m \to +\infty)$. C'est également la mesure de la fermeture de Λ dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ (densité presque périodique de Λ).

En d'autres termes, la densité harmonique de Λ est la borne inférieure des densités des ensembles périodiques contenant Λ.

COROLLAIRE. Supposons que les hypothèses (9.8) et (9.9) soient satisfaites par un ensemble Λ d'entiers. Soit Λ_1 l'ensemble des entiers $j \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $m \geqslant 1$ on puisse trouver un $\lambda \in \Lambda$ congru à j (mod m). Alors les densités harmoniques de Λ et Λ_1 sont égales.

En effet, l'inclusion évidente $\Lambda \subset \Lambda_1$ donne $d_h(\Lambda) \leqslant d_h(\Lambda_1)$. Mais, pour tout $m \geqslant 1$, $\Lambda_1 \subset \Lambda + m\mathbb{Z}$ implique $d_h(\Lambda_1) \leqslant \liminf d_h(\Lambda + m\mathbb{Z}) = d_h(\Lambda)$ grâce au théorème 6. On a donc $d_h(\Lambda) = d_h(\Lambda_1)$.

10. DEMONSTRATION DU THEOREME 6. Nous allons d'abord montrer que la densité presque périodique $d_p(\Lambda)$ de Λ est la borne inférieure des densités des ensembles périodiques contenant Λ.

Soit i l'injection canonique du groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et soit G le groupe dual de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; G est le produit $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ des groupes des entiers p-adiques. Soit $h : \mathbb{Z} \to G$ l'homomorphisme dual de i. La valeur prise en $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par le caractère x de G est notée $\langle x,t \rangle$ et si $x = h(m)$, on a $\langle x,t \rangle = \exp 2\pi imt$.

Soit U la fermeture de $h(\Lambda)$ dans G et enfin soit μ la mesure de Haar de G normalisée par $\mu(G) = 1$.

En utilisant l'axiome du choix, nous pouvons décomposer $\mathbb{R}_d$ en somme directe $\mathbb{Q} \oplus D$; D est un sous-groupe de $\mathbb{R}_d$ dont l'intersection avec $\mathbb{Q}$ est réduite à $\{0\}$. Alors $\mathbb{R}_d/\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus D$ et $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est le produit de G et du groupe compact Δ dual de D.

LEMME 1. La fermeture de $J(\Lambda)$ dans $\mathbb{Z}$ est le produit $U \times \Delta$.

L'inclusion évidente $J(\Lambda) \subset U \times \Delta$ montre que la fermeture de $J(\Lambda)$ est contenue dans $U \times \Delta$. Soit σ la mesure de Haar de Δ normalisée par $\sigma(\Delta) = 1$. Pour tout $x \in U$ et tout voisinage compact V de x dans G, nous allons construire une mesure de probabilité ρ portée par V et une suite μ_k, $k \geqslant 1$, de mesures discrètes de probabilité, portées par $J(\Lambda)$ et tendant faiblement vers $\rho \otimes \sigma$. Le lemme 1 en résultera.

Remarquons que V contient un voisinage de la forme $h(\lambda) + mG$. Soit alors μ_k la mesure donnant la masse $1/k$ aux points $J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_k)$ lorsque la suite $(\lambda_k)_{k \geqslant 1}$ est définie par (9.8) et (9.9). Soit ν une limite faible d'une sous-suite des μ_k. Alors $\hat{\nu} = 0$ sur D ce qui entraîne aussitôt que $\nu = \rho \otimes \sigma$.

LEMME 2. On a $\mu(U) = \liminf q_m/m \quad (m \to +\infty)$.

En effet, un système fondamental de voisinages de 0 dans G est formé des mG où $m \geqslant 1$. Puisque U est compact, on a $\mu(U) = \liminf \mu(U + mG) = \liminf \mu(h(\Lambda) + mG) = \liminf \mathrm{Dens}(\Lambda + mZ) = \liminf q_m/m$.

On peut alors énoncer le

LEMME 3. Soit Λ un ensemble d'entiers rationnels vérifiant les hypothèses (9.8) et (9.9) du théorème 6. Alors la densité presque-périodique $d_p(\Lambda)$ de Λ (c'est-à-dire la mesure de la fermeture de Λ dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$) est égale à la borne inférieure des densités des ensembles périodiques d'entiers contenant Λ.

En effet, par le lemme 1, $d_p(\Lambda) = \mu(U) = \liminf q_m/m$ (lemme 2).

L'inégalité (9.7) peut alors être réécrite $d_h(\Lambda) \leqslant d_p(\Lambda)$ et prouver le théorème 6 revient à montrer que $d_p(\Lambda) \leqslant d_h(\Lambda)$.

Nous arrivons au centre de la démonstration du théorème 6.

LEMME 4. Soient Λ un ensemble d'entiers rationnels, T et C deux nombres positifs. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(10.1) pour tout $P \in S_\Lambda$, $\sup\limits_{\mathbb{R}} |P| \leqslant C \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |P(t)|$,

(10.2) pour tout intervalle I de longueur T et tout $P \in S_\Lambda$, $|P(0)| \leqslant C \sup\limits_{I} |P|$,

(10.3) pour tout intervalle compact I de longueur T, il existe une mesure de Radon complexe μ portée par I, de norme ne dépassant pas C et telle que $\int_I \exp 2\pi i \lambda t \, d\mu(t) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

La démonstration immédiate du lemme 4 est laissée au lecteur. L'intervalle I étant fixé, nous désignerons par $C(I, \Lambda)$ la borne inférieure des constantes C figurant dans (10.2). La mesure μ définie dans (10.3) peut être choisie de norme égale à $C(I, \Lambda)$. Ce choix optimal de la norme rend automatiquement μ discrète et portée par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ comme nous allons le prouver.

Remarquons d'abord que, pour tout $P \in S_\Lambda$, les relations (10.3) entraînent

$$P(0) = \int_I P(t) \, d\mu(t). \tag{10.4}$$

Par définition de $C(I, \Lambda)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une somme trigonométrique $P_o \in S_\Lambda$ telle que

(10.5) $$\sup_I |P_o| = 1 \quad \text{et}$$

(10.6) $$|P_o(0)| \geqslant C(I, \Lambda) - \varepsilon .$$

Nous allons "corriger" P_o en une suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de S_Λ ayant à peu près les mêmes propriétés que P_o mais tendant vers 0 sur le complémentaire de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Il en résultera, sans trop de peines, que μ est portée par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Pour définir P_n, écrivons

(10.7) $$P_o(t) = \sum_{a \in A} d(a) \exp 2\pi i a t$$

où A est une partie finie de Λ et posons

(10.8) $$d = \sum_{a \in A} |d(a)| .$$

Décomposons $d\mu$ en la somme $d\rho + d\sigma$ d'une partie $d\rho$ portée par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ($d\rho$ est une mesure discrète) et d'une partie $d\sigma$ étrangère à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Soit F une partie finie de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ assez grande pour que

(10.9) $$\int_{F^c} d|\rho| \leqslant \varepsilon / d$$

où F^c désigne le complémentaire de F dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Soit $m \geqslant 1$ un entier assez grand pour que $mF \equiv 0 \pmod 1$. Pour tout $a \in A$, les hypothèses (9.8) et (9.9) nous permettent de construire une suite $(\lambda_k(a))_{k \geqslant 1}$ d'éléments de Λ telle que $\lambda_k(a) \equiv a \pmod m$ et que $(\alpha \lambda_k(a))_{k \geqslant 1}$ soit équirépartie mod 1 pour tout α irrationnel. Définissons alors

(10.10) $$P_n(t) = n^{-1} \sum_{a \in A} d(a) \sum_{k=1}^{n} \exp(2\pi i \lambda_k(a) t).$$

Pour tout $t \in F$, les congruences vérifiées par les λ_k et F entraînent $P_n(t) = P_o(t)$ et donc

(10.11) $$\sup_F |P_n(t)| \leqslant 1.$$

Partout ailleurs

(10.12) $$|P_n(t)| \leqslant d$$

tandis que si $t \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $P_n(t) \to 0$.

Puisque P_n appartient à S_Λ pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire

(10.13) $$P_n(0) = P(0) = \int_I P_n(t)d\mu(t) = \int_F P_n(t)d\rho(t) + \int_{F^c} P_n(t)d\rho(t) + \int_I P_n(t)d\sigma(t)$$

$$= I_n + J_n + K_n.$$

L'inégalité (10.11) entraîne $|I_n| \leqslant \|\rho\|$ tandis que (10.9) et (10.12) donnent $|J_n| \leqslant \varepsilon$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue entraîne $K_n \to 0$. Enfin $|P(0)| \geqslant C(I,\Lambda) - \varepsilon = \|\mu\| - \varepsilon$. En laissant tendre n vers l'infini, (10.13) devient donc

(10.14) $$\|\mu\| - \varepsilon \leqslant \|\rho\| + \varepsilon .$$

On peut faire tendre ε vers 0 dans (10.14) pour avoir

$$\|\mu\| = \|\rho\| + \|\sigma\| \leqslant \|\rho\|$$

qui implique $\sigma = 0$ ce qu'il fallait prouver.

Rappelons que $i : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'injection canonique et que $h : \mathbb{Z} \to G = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ est l'homomorphisme dual. Soit toujours U la fermeture de $h(\Lambda)$ dans G. Appelons x_o un point quelconque de G et soit $U' = U + x_o$. Enfin Λ' est l'ensemble de tous les $j \in \mathbb{Z}$ tels que $h(j) \in U'$.

LEMME 5. On a $C(I\ ,\ \Lambda') \leqslant C(I\ ,\ \Lambda)$.

Grâce à l'injection i la mesure ρ peut être considérée comme portée par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ou par $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les relations (10.3) s'écrivent alors

$$(10.15) \qquad 1 = \int \langle x,t\rangle \, d\rho(t) \quad \text{pour tout} \quad x \in h(\Lambda) ;$$

$\langle x,t\rangle$ est la valeur prise par le caractère x de G sur $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et cette valeur est $\exp 2\pi i \lambda t$ si $x = h(\lambda)$.

Le second membre de (10.15) est une fonction continue sur G ; elle vaut donc 1 pour tout x de U. Posons $d\rho'(t) = \overline{\langle x_o,t\rangle}\, d\rho(t)$; on a $\|\rho'\| = \|\rho\| = C(I , \Lambda)$ tandis que $1 = \int_I \langle x',t\rangle \, d\rho'(t)$ pour tout $x' = x + x_o \in U'$. Si $x' = h(\lambda')$, on retrouve bien les relations (10.3) pour l'ensemble Λ'. Le lemme 5 est démontré.

Le lemme 5 entraîne $d_h(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda)$. Mais nous savons que

$$(10.16) \qquad \Delta^+(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda).$$

Or le théorème ergodique de Birkhoff nous apprend que pour presque tout $x_o \in G$, l'ensemble Λ' a une densité qui est précisément la mesure de Haar de U, soit $d_p(\Lambda)$. On a donc, pour presque tout x_o,

$$(10.17) \qquad d_p(\Lambda) \leqslant \Delta^+(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda) \leqslant d_p(\Lambda).$$

Ce qui implique l'égalité de $d_p(\Lambda)$ et de $d_h(\Lambda)$.

11. APPLICATIONS DU THEOREME 6.

THEOREME 7. Soient $n \geqslant 1$ un entier, S un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{a}}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$, P un polynôme dans $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ et Λ l'image par P de $\mathbb{Z}^n \cap (S + \underline{\underline{a}})$. Alors la densité harmonique de Λ est indépendante de $\underline{\underline{a}}$, de S, et est donnée par la règle suivante. Pour tout nombre premier $p \geqslant 2$, soit U_p l'image de $P : (\mathbb{Z}_p)^n \to \mathbb{Z}_p$; soit ω_p la mesure de Haar de U_p (celle de $\mathbb{Z}_p$ étant 1). Alors la densité harmonique de Λ est $\prod_{p \geqslant 2} \omega_p$ (le produit est étendu à tous les nombres premiers).

En revanche la densité au sens usuel de Λ dépend de S comme le montre l'exemple suivant. Soit Λ l'ensemble de toutes les sommes $m^4 + mn$ où $1 \leqslant n \leqslant m-1$; S est ici défini par $0 < y < x$ et $\Delta^+(\Lambda) = 0$. Mais si S est tout $\mathbb{Z}^2$, Λ devient $\mathbb{Z}$ et $d_h(\Lambda) = 1$. Pour démontrer le théorème 7, montrons d'abord que (9.8) et (9.9) sont satisfaites. Si P est de degré 0, c'est-à-dire une constante, Λ est réduit à un point et tout est évident et sans intérêt. Nous supposerons donc que le degré de P est $\geqslant 1$. Puisque S est un cône ouvert, pour tout $\underline{\underline{x}} \in S + \underline{\underline{a}}$, on peut trouver un élément $\underline{\underline{g}} \in \mathbb{Z}^n$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{g}}t \in S + \underline{\underline{a}}$ et que $P(\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{g}}t)$ soit un polynôme en t de degré $\geqslant 1$. Posons alors $\lambda_k = P(\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{g}}mk)$; la vérification de (9.8) est immédiate car $\lambda = P(\underline{\underline{x}})$ et celle de (9.9) résulte d'un théorème classique d'H. Weyl ([2] Ch. IV, th. VI, p. 71).

Soit, avec les notations du § 10, $\Lambda' = P(\mathbb{Z}^n)$ et Λ_1 l'ensemble de tous les $j \in Z$ tels que $h(j) \in U$. En d'autres termes Λ_1 est l'ensemble des $j \in \mathbb{Z}$ tels que, pour tout $m \geqslant 1$, j soit congru modulo m à au moins un point de Λ. Par le corollaire du théorème 6, $d_h(\Lambda) = d_h(\Lambda_1)$ et si nous montrons que $\Lambda' \subset \Lambda_1$, la première partie du théorème 7 sera prouvée. Mais pour tout $\underline{\underline{x}} \in Z^n$ on peut former un vecteur $\underline{\underline{g}} \in \mathbb{Z}^n$ et trouver un $t_o > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant t_o$ $\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{g}}t \in S + \underline{\underline{a}}$ (S est un cône ouvert). Donc pour k assez grand $\lambda_k = P(\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{g}}mk) \in \Lambda$ et $\lambda_k \equiv P(\underline{\underline{x}}) \pmod m$ ce qu'il fallait montrer.

Puisque $\mathbb{Z}$ (ou $h(\mathbb{Z})$) est dense dans le produit G des $\mathbb{Z}_p$, $p \geqslant 2$, $U = \prod_{p \geqslant 2} U_p$ et $\mu(U) = \prod_{p \geqslant 2} \omega_p$. Le théorème 7 est ainsi complètement démontré.

12. UN THEOREME SUR LES NOMBRES DE PISOT. Soit θ un nombre

réel et Λ_θ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Nous nous proposons de calculer, pour toute valeur de θ, la densité harmonique de Λ_θ. Pour cela il est nécessaire de rappeler la définition des nombres de Pisot.

DEFINITION 4. Soit $x > 1$ un nombre réel. On dit que x est un nombre de Pisot si x est un entier algébrique et si tous les conjugués de x différents de x, sont des nombres réels ou complexes de module strictement inférieur à 1.

Par exemple, tout entier naturel $x \geqslant 2$ est un nombre de Pisot. Si θ (ou $-\theta$) est un nombre de Pisot, nous désignerons par $\mathcal{K}$ le corps $\mathbb{Q}(\theta)$ et par n le degré de $\mathcal{K}$ sur $\mathbb{Q}$. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les n isomorphismes de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$ ordonnés de façon que

(12.1) $\sigma_1(\theta) = \theta$

(12.2) $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ soient réels

(12.3) si $n = r + 2s$ et $s \geqslant 1$, σ_{r+j} et σ_{r+j+s} soient conjugués (sur $\mathbb{C}$) pour $1 \leqslant j \leqslant s$.

Soit D le déterminant $\mathrm{Det}(\sigma_j(\theta^k))_{1\leqslant j\leqslant n, 0\leqslant k\leqslant n-1}$ et $|D|$ son module.

Enfin soit $U_\theta \subset \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ la partie compacte définie comme l'ensemble de toutes les sommes infinies $\left(\sum_0^\infty \varepsilon_k \sigma_j(\theta^k)\right)_{2\leqslant j\leqslant r+s}$ associées à toutes les suites ε_k de 0 ou de 1.

La mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ est notée mes. et est normalisée par la condition que la mesure de l'ensemble défini par $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ $(2 \leqslant j \leqslant r)$ et $|z_j| \leqslant 1$ $(r+1 \leqslant j \leqslant r+s)$ est π^s.

Avec ces notations, on peut énoncer le

THEOREME 8. Soit θ un nombre réel et Λ_θ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

(12.4) Si $\theta = 0$, Λ est réduit à $\{0 , 1\}$ et sa densité harmonique est 0.

(12.5) Si $\theta = 1$, $\Lambda = \mathbb{N}$ dont la densité harmonique est 1.

(12.6) Si $\theta = -1$, $\Lambda = \mathbb{Z}$ dont la densité harmonique est 1.

(12.7) Si $-1 < \theta < 1$, la densité harmonique de Λ_θ est $+\infty$.

(12.8) Si $\theta > 1$ n'est pas un nombre de Pisot, la densité harmonique de Λ_θ est $+\infty$.

(12.9) Si $1 < \theta \leqslant 2$ et si θ est un nombre de Pisot, la densité harmonique de Λ_θ est finie, non nulle et vaut $2^s \operatorname{mes}(U_\theta)/|D|$.

(12.10) En particulier si $\theta = 2$, $\Lambda_\theta = \mathbb{N}$ dont la densité harmonique est 1.

(12.11) Si $\theta > 2$ est un nombre de Pisot, la densité harmonique de Λ_θ est 0.

(12.12) Si $\theta < -1$ et si $-\theta$ n'est pas un nombre de Pisot, la densité harmonique de Λ_θ est $+\infty$.

(12.13) Si $-2 < \theta < -1$ et si $-\theta$ est un nombre de Pisot la densité harmonique de Λ_θ est finie, non nulle et vaut $2^s \operatorname{mes}(U_\theta)/|D|$.

(12.14) Si $\theta = -2$, $\Lambda = \mathbf{Z}$ dont la densité harmonique est 1.

(12.15) Si $\theta < -2$ et si $-\theta$ est un nombre de Pisot, la densité harmonique de Λ_θ est 0.

Les seules parties du théorème 8 qui n'avaient pas été démontrées dans [10] sont (12.9) et (12.13). La preuve ci-dessous utilisera certains résultats de [10] et occupera les § 13 et 14.

13. LES MODELES ASSEZ REGULIERS. La preuve du théorème 8 est très semblable à celle du théorème 6 et un modèle assez régulier sera un ensemble de nombres réels dont les propriétés sont semblables à celles des ensembles d'entiers Λ intervenant au théorème 6.

Bien que les groupes $\mathbb{R}^n$ suffisent à la preuve de (12.9) et (12.13) nous donnerons les définitions et les preuves dans le cadre un peu plus général nécessaire à l'étude du problème de la synthèse spectrale (§ 16).

Soit G un groupe commutatif localement compact. Soit $\mathbb{R}\times G$ le groupe produit, $i : \mathbb{R}\times G \to \mathbb{R}$ et $j : \mathbb{R}\times G \to G$ les deux projections. Supposons qu'il existe un sous groupe $D \subset \mathbb{R}\times G$ ayant les trois propriétés suivantes

(13.1) D est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}\times G$

(13.2) $(\mathbb{R}\times G)/D$ est compact

(13.3) i restreinte à D est injective et d'image dense dans $\mathbb{R}$

(13.4) j restreinte à D est injective et d'image dense dans G.

DEFINITION 5. Avec les notations ci-dessus, D est appelé un échangeur entre $\mathbb{R}$ et G. Pour tout $d \in D$, nous écrirons $x = t^*$ et $t = x^*$ si $t = i(d)$ et $x = j(d)$. L'application $*$ définit un isomorphisme entre $i(D)$ et $j(D)$.

Pour toute partie F de $i(D)$, F^* sera l'image de F par cet isomorphisme. Pour toute mesure atomique μ portée par $i(D)$, μ^* sera la mesure portée par $j(D)$ et donnant à chaque $x = j(d)$ la masse que donne μ à $t = i(d)$.

Soit Γ le groupe dual de G : pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in G$, $\langle \gamma, x \rangle$ est la valeur prise en x par le caractère γ. Soit $\Delta \subset \mathbb{R}\times\Gamma$ le sous-groupe des couples $(s\ ,\ \gamma)$, $s \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$ tels que pour tout $d = (t\ ,\ x) \in D$, on ait $\exp 2\pi its = \langle \gamma\ ,\ x \rangle$. Alors Δ jouit dans $\mathbb{R} \times \Gamma$ des mêmes propriétés que D possède dans $\mathbb{R} \times G$; Δ est un échangeur entre $\mathbb{R}$ et Γ. Soient $p : \mathbb{R} \times \Gamma \to \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \times \Gamma \to \Gamma$ les projections canoniques et H le sous-groupe $p(\Delta)$ de $\mathbb{R}$. Si $s = p(\delta)$ et $\gamma = q(\delta)$, $\delta \in \Delta$, nous écrirons $\gamma = s^*$ ou $s = \gamma^*$ de sorte que pour tout $t \in i(D)$ et tout $s \in H$, on a

$$\langle s^*\ ,\ t^* \rangle = \exp 2\pi ist. \tag{13.5}$$

DEFINITION 6. Avec les notations ci-dessus, soit U une partie relativement compacte de G. Le modèle Λ de nombres réels défini par G, D et U est l'ensemble de tous les $t = i(d)$ tels que $d \in D$ et que $j(d) \in U$.

Soient μ une mesure de Haar sur G et ν une mesure de Haar sur $(\mathbb{R} \times G)/D$; nous normalisons ν par la condition que sa masse totale est 1. Les mesures μ et ν sont reliées par la formule habituelle

$$\int_{\mathbb{R} \times G} f(t,x)dt \otimes d\mu = \int_{(\mathbb{R} \times G)/D} \tilde{f}\, d\nu\ ; \tag{13.6}$$

$f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{C}$ est une fonction continue à support compact et $\tilde{f}$ est la fonction D-périodique définie sur $\mathbb{R} \times G$ (et donc automatiquement sur $(\mathbb{R} \times G)/D$) par $\tilde{f}(t,x) = \sum_{d \in D} f(t - i(d)\ ,\ x - j(d))$. Ainsi μ est normalisée.

DEFINITION 7. Une partie compacte U de G est dite intégrable au sens de Riemann si la frontière de U est de mesure nulle pour μ.

Un modèle régulier est un modèle défini par un compact U de G intégrable au sens de Riemann.

PROPOSITION 10. Soit Λ un modèle régulier. Tout intervalle $[t, t+T]$, $t \in \mathbb{R}$, $T > 0$ contient $T\mu(U) + o(T)$ points de Λ $(T \to +\infty)$; le o est uniforme en t. La densité harmonique d'un modèle régulier, sa densité au sens ordinaire et la mesure $\mu(U)$ de U coïncident.

Ainsi les modèles réguliers généralisent les ensembles de la forme $F + m\mathbb{Z}$ introduits dans la proposition 8. Plus précisément si l'on prend pour G le produit topologique restreint de tous les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$ associés à tous les nombres premiers $p \geqslant 2$ et pour D le corps $\mathbb{Q}$ plongé canoniquement dans son anneau des adèles $(\mathbb{R} \times G)$, il est facile de voir que $F + m\mathbb{Z}$ devient un modèle régulier.

Cependant si la longueur de l'intervalle I vaut exactement la densité du modèle régulier Λ, les normes $\sup\limits_{\mathbb{R}} |P|$ et $\sup\limits_{I} |P|$ cessent, en général, d'être équivalentes sur S_Λ ; elles le redeviennent dès que la longueur de I dépasse la densité de Λ ([10] et [11]).

Enfin la proposition 10 est prouvée dans [10].

Soit maintenant Λ un modèle quelconque. La première idée qui vient pour calculer la densité harmonique de Λ est d'écrire

(13.7) $$d_h(\Lambda) \leqslant \inf d_h(M)$$

où le infimum est étendu à tous les modèles réguliers M contenant Λ.

Nous allons tirer une conséquence importante de l'inégalité (13.7).

PROPOSITION 11. Soit Λ un modèle défini par (G, D, U). Soit K la fermeture de U dans G et soit μ la mesure de Haar de G normalisée par (13.6). Alors

(13.8) $$d_h(\Lambda) \leqslant \mu(K).$$

Pour montrer (13.8), il suffit, pour tout $\varepsilon > 0$, de construire un modèle régulier M contenant Λ et dont la densité ne dépasse pas $\mu(K) + \varepsilon$. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 1. Soit G un groupe commutatif localement compact et $K \subset G$ une partie compacte. La mesure de K est la borne inférieure des mesures des compacts L, intégrables au sens de Riemann et contenant K.

Si M est le modèle régulier défini par L, on aura donc bien $\text{Dens}\, M = \mu(L) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$ pour un choix approprié de L. Il reste à prouver le lemme 1. Le lemme suivant est la première étape de la démonstration.

LEMME 2. Soit G un groupe abélien localement compact. On peut alors trouver un système fondamental de voisinages compacts de 0 qui soient intégrables au sens de Riemann.

Le théorème de structure montre que G contient un sous-groupe ouvert H de la forme $N \times \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 0$ où N est un groupe compact. On peut prendre pour voisinages de 0 dans $N \times \mathbb{R}^n$ des produits $V \times W$ où V est un voisinage de 0 dans N et W dans $\mathbb{R}^n$. Il suffit donc de prouver le résultat pour N ; il est assez clair pour $\mathbb{R}^n$.

Tout groupe commutatif compact peut être obtenu comme limite projective de produits $F \times \mathbb{T}^m$, $m \geqslant 0$ où $\mathbb{T}^m$ est le tore m-dimensionnel et F un groupe fini. Un système fondamental de voisinages de 0 dans N sera alors formé des images réciproques de systèmes fondamentaux de voisinages de 0 dans les divers $F \times \mathbb{T}^m$. Or dans chacun de ces facteurs on peut choisir ces voisinages de 0 intégrables au sens de Riemann. Il en sera de même pour N et le lemme 2 est prouvé.

Revenant au lemme 1, soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et $A \supset K$ une partie ouverte de G telle que $\mu(A) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$. Soit V un voisinage compact de 0, intégrable au sens de Riemann et tel que $K + V \subset A$. On peut recouvrir le compact K à l'aide d'un nombre fini $x_j + V$, $x_j \in K$, $1 \leqslant j \leqslant n$, de translatés de V. La réunion L des $x_j + V$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est intégrable au sens de Riemann, contient K, est contenue dans A et vérifie donc $\mu(L) \leqslant \mu(K) + \varepsilon$. Le lemme 1 est démontré.

Nous pouvons maintenant généraliser le théorème 6. Ce théorème exprimait que si Λ est un ensemble d'entiers "assez régulier", la densité harmonique de Λ est la borne inférieure des densités des ensembles périodiques d'entiers contenant Λ.

Le théorème 9 ci-dessous signifie que la densité harmonique d'un modèle "assez régulier" est la borne inférieure des densités des modèles réguliers contenant Λ.

DEFINITION 8 (les modèles assez réguliers). Soit, avec les notations de la définition 6, Λ un modèle défini par un triplet (G, D, U) et soit H le sous-groupe $p(\Delta)$ de $\mathbb{R}$. Nous dirons que le modèle Λ est assez régulier si les conditions suivantes sont remplies

(13.9) H est un sous-groupe dénombrable de $\mathbb{R}$;

(13.10) l'ensemble Λ^* de tous les $j(d)$ tels que $d \in D$ et $i(d) \in \Lambda$ est dense dans U ;

pour tout $\lambda = i(d) \in \Lambda$ et tout voisinage V de $\lambda^* = j(d) \in G$, on peut trouver une suite μ_k, $k \geqslant 1$, de mesures de probabilité portées par Λ et telle que

(13.11) pour tout $k \geqslant 1$, μ_k^* soit portée par V

(13.12) pour tout nombre réel s n'appartenant pas à H, $\hat{\mu}_k(s) \to 0$ $(k \to +\infty)$.

($\hat{\mu}_k$ est la transformée de Fourier de la mesure μ_k).

Cette définition présente une ambiguité. Si un ensemble Λ de nombres réels est donné et si nous venons de vérifier que Λ est un modèle défini par un triplet (G, D, U) il se peut que Λ soit un modèle assez régulier sans que les propriétés (13.9) à (13.12) soient satisfaites. Cela tient à ce que ce même modèle Λ peut être défini à l'aide d'un autre triplet (G', D', U') pour lesquels (13.9) à (13.12) sont vraies. Pour être plus précis, il faudrait dire qu'un modèle assez régulier est un ensemble Λ pour lequel il existe un triplet (G, D, U) tel que Λ soit un modèle défini par (G, D, U) et que (13.9) à (13.12) aient lieu.

Donnons un exemple très simple de cette ambiguité. Soit Λ l'ensemble des carrés parfaits. Soit G le produit topologique restreint de tous les corps p-adiques $\mathbb{Q}_p$, $p \geqslant 2$. Alors $A = \mathbb{R} \times G$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Le corps $\mathbb{Q}$ peut être considéré comme un sous-anneau discret de A de la façon suivante : un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ est envoyé en l'élément d de A dont la composante $i(d)$ sur $\mathbb{R}$ est r vu comme un nombre réel, les composantes de $j(d)$ dans chaque $\mathbb{Q}_p$ étant r comme élément de $\mathbb{Q}_p$. Soit $U = \Lambda^* = \{j(d) ; d \in D \text{ et } i(d) \in \Lambda\}$. Alors Λ est un modèle assez régulier. Voici maintenant une façon de définir Λ comme un modèle dans que Λ soit un modèle assez régulier. Soit $G = \mathbb{Q}_2$, $D \subset \mathbb{R} \times G$ le sous-anneau des $d = (t,t)$ où $t = m2^q$, $m \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$. Alors $U = \Lambda^*$ est dense dans l'ensemble K des carrés de $\mathbb{Z}_2$. Dans ce cas Λ est défini comme un modèle sans que (13.9) à (13.12) soient vraies. Sinon la densité harmonique de Λ, donnée par la mesure de K dans G (théorème 9) serait égale à $1/6$. Or cette densité harmonique est nulle (théorème 7 ou théorème 9).

THEOREME 9. La densité harmonique d'un modèle assez régulier Λ est la borne inférieure des densités des modèles réguliers contenant Λ. En d'autres termes si le modèle assez régulier Λ est défini par le triplet (G , D , U) tel que (13.9) à (13.12) aient lieu, la densité harmonique de Λ est la mesure $\mu(K)$ de la fermeture K de U dans G, lorsque la mesure de Haar μ de G est normalisée par (13.6).

Avant de démontrer le théorème 9, donnons en deux exemples

En premier lieu, montrons que si $\mathbb{R} \times G$ est l'anneau des adèles A de $\mathbb{Q}$, le théorème 9 fournit le théorème 6. En effet le groupe dual de A est A lui-même. Soit $\xi : A \to \mathbf{T}$ un caractère continu, non trivial, égal à 1 sur $\mathbb{Q} = D$. Alors la dualité entre A et lui-même peut être définie par $\langle x,y \rangle = \xi(xy)$, $x \in A$, $y \in A$. L'orthogonal de $D = \mathbb{Q}$ est alors $\Delta = \mathbb{Q}$ regardé comme plongé dans A. Donc $H = p(\Delta) = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Soit d'autre part N le produit de tous les $\mathbb{Z}_p$, $p \geqslant 2$. Un système fondamental de voisinages de 0 dans G est formé des mN, $m \geqslant 1$. Si $\lambda \in \Lambda$ et $\lambda_1 \in \Lambda$, dire que $\lambda_1^* \in \lambda^* + mN$ revient à écrire $\lambda_1 \equiv \lambda \pmod{m}$. Reprenant les notations du théorème 6, la mesure μ_k donnera la masse k^{-1} aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. L'hypothèse (9.9) du théorème 6 entraîne que $\hat{\mu}_k(s) \to 0$ si $s \notin \mathbb{Q}$.

Un second exemple d'application du théorème 9 est la preuve des assertions (12.9) et (12.13) du théorème 8.

Soit, avec les notations du § 12, G le groupe $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$; $\mathbb{R} \times G = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ et $D \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ est le sous-groupe fermé de tous les $d = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_{r+s}(t))$ tels que $t \in \mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}\theta^{n-1}$. L'orthogonal Δ de D est le sous-groupe des suites $\delta = (y_1, \ldots, y_r, z_{r+1}, \ldots, z_{r+s})$ dans $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ telles que, pour tout $k \geqslant 0$

$$(13.13) \qquad y_1 \sigma_1(\theta^k) + \ldots + y_r \sigma_r(\theta^k) + \mathcal{R}e\left[z_{r+1}\sigma_{r+1}(\theta^k) + \ldots + z_{r+s}\sigma_{r+s}(\theta^k)\right] \in \mathbb{Z}.$$

Posons, pour tout $1 \leqslant j \leqslant s$, $y_{r+j} = \frac{1}{2} z_{r+j}$, $y_{r+j+s} = \frac{1}{2} \bar{z}_{r+j}$; (13.13) devient

$$(13.14) \qquad \sum_1^n y_j \sigma_j(\theta^k) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 0.$$

Soit Tr la trace et $\omega_1, \ldots, \omega_n$ une base duale de $(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1})$ dans $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\theta)$ définie par $\mathrm{Tr}(\omega_j \theta^k) = 0$ si $j \neq k+1$ et $\mathrm{Tr}(\omega_j \theta^{j-1}) = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant n$.

Les congruences (13.14) pour $k \geqslant n$ sont des conséquences des congruences (13.14) écrites pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ car θ est un entier algébrique. Ces n premières congruences impliquent que l'on puisse trouver n entiers rationnels $q_1, \ldots, q_n$ tels que $y_1 = q_1\omega_1 + \ldots + q_n\omega_n$ et que $y_2, \ldots, y_n$ soient conjugués de y_1. Le sous-groupe H est donc $\mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_n$.

Il reste à définir U et à construire les mesures μ_k, $k \geqslant 1$.

Soit U l'ensemble des points $(\sigma$ [illegible] $\sigma_{r+s}(\lambda))$ pour lesquels $\lambda = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Les inégalités $|\sigma_j(\theta)| < 1$ vérifiées pour $2 \leqslant j \leqslant n$ entraînent que U est relativement compact.

Soient enfin $\ell \geqslant 0$ un entier, $\lambda = \sum_0^{\ell} \varepsilon_j \theta^j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1, un élément arbitraire de Λ et V un voisinage compact de 0 dans $G = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$. Pour tout entier $m \geqslant \ell$ et tout $k \geqslant 1$, μ_k est la mesure donnant la masse 2^{-k} à chacun des 2^k points $\lambda + \sum_{m+1}^{m+k} \alpha_j \theta^j$, $\alpha_j = 0$ ou 1.

La mesure μ_k^* charge les points $x = (x_u)_{2 \leqslant u \leqslant n}$ de G définis par $x_u = \sigma_u(\lambda) + \sum_{m+1}^{m+k} \alpha_j \sigma_u(\theta^j)$, $2 \leqslant u \leqslant n$. Si m est assez grand, les inégalités $|\sigma_u(\theta)| < 1$,

$2 \leq u \leq n$, montrent que μ_k^* est, pour tout $k \geq 1$, porté par $\lambda^* + V$.

On a alors $|\hat{\mu}_k(s)| = \prod_{m+1}^{m+k} |\cos \pi\theta^j s|$. Si le produit infini $\prod_0^\infty |\cos \pi\theta^j s|$ n'est pas nul, nécessairement $s \in \mathbb{Q}(\theta)$ et $\mathrm{Tr}(\theta^j s) \in \mathbb{Z}$ dès que $j \geq j_0$ ([12], p. 27, prop. 4). Mais un nombre de Pisot de l'intervalle $]1,2[$ est une unité (θ vérifie une relation de la forme $\sum_{j \geq 0} \pm\theta^j = 0$ comme on s'en rend compte en comptant les points de Λ tombant dans un intervalle $[0,T]$). Ainsi $\mathrm{Tr}(\theta^j s) \in \mathbb{Z}$ pour j assez grand équivaut à la même condition pour tout $j \geq 0$; s appartient à H et le théorème 8 est prouvé.

Nous montrerons au § 19 que pour tout nombre de Pisot θ, l'ensemble Λ_θ correspondant est un modèle assez régulier ; il ne suffira plus alors de prendre $G = \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$.

14. LA DEMONSTRATION DU THEOREME 9 est très semblable à celle du théorème 6.

a) Une formule préliminaire. Nous dirons qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est H-presque périodique si φ est une fonction presque-périodique dont le spectre est contenu dans H. Pour une telle fonction φ, nous pouvons définir une fonction presque périodique $\varphi^* : G \to \mathbb{C}$ de la façon suivante. Si $\delta \in \Delta$ et si $\varphi_\delta(t) = \exp(2\pi i p(\delta) t)$, nous poserons $\varphi_\delta^*(x) = \langle q(\delta), x \rangle$, $x \in G$, de sorte que, pour tout $t \in i(D)$ on ait $\varphi(t) = \varphi^*(t^*)$. Si φ est une combinaison linéaire finie $\varphi(t) = \sum a_\delta \varphi_\delta$, nous posons $\varphi^* = \sum a_\delta \varphi_\delta^*$. Puisque $i(D)$ est dense dans $\mathbb{R}$ tandis que $j(D)$ est dense dans G, on a alors

(14.1) $$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi| = \sup_{t \in i(D)} |\varphi(t)| = \sup_{t^* \in j(D)} |\varphi^*(t^*)| = \sup_G |\varphi^*|.$$

L'application $\varphi \to \varphi^*$ est donc isométrique et se prolonge sans ambiguité en une isométrie entre l'espace des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont H-presque-périodiques et l'espace des fonctions $\varphi^* : G \to \mathbb{C}$ qui sont $q(\Delta)$-presque périodiques. On a, pour toute mesure atomique μ, portée par $i(D)$, et toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est H-presque-périodique

(14.2) $$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu = \int_G \varphi^* d\mu^*$$

et en particulier $\varphi(t) = \varphi^*(t^*)$ pour tout $t \in i(D)$.

b) Compacts associés. Un lemme préliminaire. Nous dirons qu'une partie compacte E de $\mathbb{R}$ est associée à Λ s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute somme trigonométrique $P \in S_\Lambda$ (c'est-à-dire dont les fréquences appartiennent à Λ), on ait

(14.3) $$\sup_{\mathbb{R}} |P| \leqslant C \sup_{s \in E} |P(s)|.$$

LEMME 1. Soient Λ un modèle assez régulier et E un compact associé à Λ. On peut alors trouver une mesure atomique ρ, portée par $E \cap H$, de norme au plus C (C est défini par (14.3)) et telle que, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

(14.4) $$\int_E \exp 2\pi i \lambda s \, d\rho(s) = 1.$$

Soit, en effet, $a = \sup |P(0)|$ lorsque $P \in S_\Lambda$ et que $\sup_E |P| \leqslant 1$. Par hypothèse $0 < a \leqslant C < +\infty$. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'il existe une mesure de Radon complexe μ portée par E, telle que $\|\mu\| = a$ et que

(14.5)
$$P(0) = \int_E P(s)d\mu(s)$$

pour tout $P \in S_\Lambda$.

Par définition de a, on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver $Q \in S_\Lambda$ tel que

(14.6)
$$\sup_E |Q| = 1$$

tandis que

(14.7)
$$Q(0) \geqslant a - \varepsilon = \|\mu\| - \varepsilon .$$

Ecrivons Q comme une somme finie

(14.8)
$$Q(s) = \sum_{\lambda \in B} b(\lambda) \exp 2\pi i \lambda s \quad ;$$

B est une partie finie de Λ et nous poserons

(14.9)
$$b = \sum_{\lambda \in B} |b_\lambda| .$$

Soit maintenant $\mu = \rho + \sigma$ la décomposition de μ en une partie atomique ρ portée par H et une partie σ étrangère à H (ρ est atomique parce que H est dénombrable). Soit $F \subset H \cap S$ une partie finie de H assez grande pour que la somme des masses de $|\rho|$ aux points de $H \setminus F$ ne dépasse pas ε/b ($H \setminus F$ désigne le complémentaire de F dans H).

Formons un voisinage W de 0 dans G assez petit pour que $\sup_{F^* \times W} |\langle \gamma, x \rangle - 1| \leqslant \varepsilon/b$. Pour tout $\lambda \in B$, considérons le voisinage $V_\lambda = W + \lambda^*$ de $\lambda^* \in U$. Puisque Λ est assez régulier, on peut trouver une suite $\mu_{k,\lambda}$, $k \geqslant 1$, de mesures de probabilités portées par Λ et telles que

(14.10) pour tout $k \geqslant 1$ et tout $\lambda \in B$, $\mu^*_{k,\lambda}$ soit portée par V_λ et

(14.11) $\hat{\mu}_{k,\lambda}(s) \to 0$ $(k \to +\infty)$ si s n'appartient pas à H.

A l'aide des $\mu_{k,\lambda}$, nous modifions Q en Q_k ; Q_k a, en gros, les mêmes propriétés que Q et, en outre, si $s \notin H$, $Q_k(s) \to 0$ $(k \to +\infty)$. Plus précisément on pose, avec les notations de (14.8),

(14.12) $$Q_k(s) = \sum_{\lambda \in B} b_\lambda \int_\Lambda \exp 2\pi i t s \, d\mu_{k,\lambda}(t) .$$

Il est clair que Q_k est, pour tout $k \geqslant 1$, une fonction presque-périodique dont le spectre est contenu dans Λ (nous écrirons $Q_k \in \bar{S}_\Lambda$) et que $Q_k(s) \to 0$ $(k \to +\infty)$ si s n'appartient pas à H.

Puisque $d\mu_{k,\lambda}$ est une mesure de probabilité, on a pour tout $k \geqslant 1$,

(14.13) $$Q_k(0) = \sum_{\lambda \in B} b_\lambda = Q(0) \quad \text{et}$$

(14.14) $$|Q_k(s)| \leqslant \sum_{\lambda \in B} |b_\lambda| = b \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Si $s \in H$, on a

(14.15) $$Q_k(s) = Q_k^*(s^*) = \sum_{\lambda \in B} b_\lambda \int_{V_\lambda} \langle s^*, x \rangle d\mu_{k,\lambda}^*(x) =$$

$$\sum_{\lambda \in B} b_\lambda \langle s^*, \lambda^* \rangle \int_W \langle s^*, x \rangle d\mu_{k,\lambda}^*(\lambda^* + x).$$

Mais $s \in F$ et $x \in W$ entraînent $|\langle s^*, x \rangle - 1| \leqslant \varepsilon/b$ et la mesure de probabilité $d\mu_{k,\lambda}^*(\lambda^* + x)$ est portée par W ; on a donc

(14.16) $$\left| \int_W \langle s^*, x \rangle d\mu_{k,\lambda}^*(\lambda^* + x) - 1 \right| \leqslant \varepsilon/b.$$

En combinant les inégalités (14.16) dans (14.15), on obtient

(14.17) $$|Q_k(s) - Q(s)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 1 \quad \text{et tout} \quad s \in F.$$

L'inégalité (14.7) peut encore être écrite

(14.18) $$Q_k(0) \geqslant \|\mu\| - \varepsilon$$

et, puisque $Q_k \in \bar{S}_\Lambda$ pour tout $k \geqslant 1$,

(14.19) $$Q_k(0) = \int_E Q_k(s) d\mu(s) = \int_E Q_k(s) d\rho(s) + \int_E Q_k(s) d\sigma(s) =$$

$$\int_F Q_k(s)d\rho(s) + \int_{H\smallsetminus F} Q_k(s)d\rho(s) + \int_E Q_k(s)d\sigma(s)$$

que l'on abrègera en

$$Q_k(0) = A_k + B_k + C_k. \tag{14.20}$$

Grâce à (14.6) et (14.17), $|Q_k(s)| \leqslant 1+\varepsilon$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $s \in F$; donc $|A_k| \leqslant (1+\varepsilon)\|\rho\|$. La définition de F et (14.14) impliquent $|B_k| \leqslant \varepsilon$. Enfin les sommes trigonométriques Q_k sont uniformément bornées sur E et tendent vers 0 hors de H ; H est de mesure nulle pour σ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être appliqué à C_k. On obtient $C_k \to 0$ $(k \to +\infty)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut laisser k tendre vers l'infini dans (14.18) pour avoir

$$(1+\varepsilon)\|\rho\| + \varepsilon \geqslant \|\mu\| - \varepsilon = \|\rho\| + \|\sigma\| - \varepsilon. \tag{14.21}$$

On peut maintenant faire tendre ε vers 0 dans (14.21) pour en déduire $\|\rho\| \geqslant \|\rho\| + \|\sigma\|$ et $\sigma = 0$ ce qu'il fallait prouver.

c) Changement de modèles ; un second lemme.

LEMME 2. Soit Λ un modèle assez régulier défini par (G, D, U). Soit K la fermeture de U dans G, x_0 un point quelconque de G et $K' = K + x_0$. Soit enfin Λ' le modèle défini par (G, D, K'). Alors tout compact E associé à Λ est aussi associé à Λ'.

Puisque S_Λ est invariant par translation, il suffit de montrer que si E est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et C une constante finie, la propriété

$$|P(0)| \leqslant C \sup_{s\in E} |P(s)| \quad \text{pour tout } P \in S_\Lambda \tag{14.22}$$

implique, pour cette même constante C,

(14.23) $$|P(0)| \leqslant C \sup_{s\in E} |P(s)| \quad \text{pour tout} \quad P \in S_{\Lambda'} .$$

Tout ceci découle du lemme 1. Soit ρ la mesure atomique portée par $S \cap H$ et définie par le lemme 1. Soit $M \subset q(\Delta)$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels qu'il existe $s \in E$ vérifiant $(\gamma, s) \in \Delta$. Soit τ la mesure atomique portée par M et donnant à chaque $s^* \in M$ la masse que ρ donnait à $s \in E$. Posons $\varphi(x) = \int_M \langle\gamma, x\rangle \, d\tau(\gamma)$. Pour tout $x \in \Lambda^*$, (14.4) devient $\varphi(x) = 1$. La fonction continue φ est encore égale à 1 sur la fermeture K de Λ^* dans G (Λ^* est dense dans U lui-même dense dans K).

Appelons maintenant $d\tau'(\gamma)$ la mesure atomique $\langle\overline{\gamma, x_o}\rangle \, d\tau(\gamma)$. Pour tout $x' = x_o + x \in K'$, on a

(14.24) $$\varphi'(x') = \int_M \langle\gamma, x'\rangle \, d\tau'(\gamma) = 1 .$$

Par ailleurs $\|\tau'\| = \|\tau\| \leqslant C$ (lemme 1). Nous retransportons la mesure atomique $d\tau'$, portée par M en une mesure atomique $d\rho'$ portée par E (τ' est définie à l'aide de ρ' comme τ à l'aide de ρ). Si $(\lambda', x') \in D$, (14.24) devient

(14.25) $$\int_E \exp 2\pi i \lambda' s \, d\rho'(s) = 1 \qquad (\lambda' \in \Lambda')$$

ce qui entraîne, par simple combinaison linéaire, $P(0) = \int_E P(s) d\rho'(s)$ pour tout $P \in S_{\Lambda'}$. L'inégalité $\|\rho'\| = \|\tau'\| \leqslant C$ donne (14.23).

d) Fin de la preuve du théorème 9. Soit maintenant $E = [0, T]$ un intervalle. Le lemme 2 implique alors l'inégalité $d_h(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda)$ que nous réécrirons, grâce à (7.6) et à la proposition 7, (14.26) $$\Delta^+(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda') \leqslant d_h(\Lambda) \leqslant \text{mes } K.$$

Si nous pouvons trouver un $x_o \in G$ tel que $\Delta^+(\Lambda') = \text{mes } K$, les inégalités (14.26) deviennent l'égalité $d_h(\Lambda) = \text{mes } K$.

Le fait que, pour presque tout $x_o \in G$, la densité de Λ' existe et soit égale à la mesure de K est une conséquence du théorème ergodique que nous énoncerons sous la forme suivante

LEMME 3. Soit $\mathcal{G}$ un groupe commutatif compact et $h : \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme injectif et d'image dense. Soit $J \in L^1(\mathcal{G})$ et pour tout $\omega \in \mathcal{G}$, soit $J_\omega : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ définie par $J_\omega(x) = J(x - \omega)$. Alors pour presque tout $\omega \in \mathcal{G}$, la moyenne de $J_\omega \circ h$ existe et vaut $\int_{\mathcal{G}} J(x)\, dx$.

Supposons maintenant que $\mathcal{G}$ soit le groupe $(\mathbb{R} \times G)/D$. Appelons h la composée des applications canoniques $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R} \times G \to (\mathbb{R} \times G)/D$ et α la composée des applications correspondantes $G = \{0\} \times G \to \mathbb{R} \times G \to (\mathbb{R} \times G)/D$. Alors h (resp. α) est injective et d'image dense dans $\mathcal{G}$.

Soit N le compact $\alpha(K)$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, soit $N_\varepsilon \subset \mathcal{G}$ la somme directe $N + h([0,\varepsilon])$; en d'autres termes, N_ε est l'image de $[0,\varepsilon] \times K \subset \mathbb{R} \times G$ par l'application canonique de $\mathbb{R} \times G$ sur $\mathcal{G}$. Soit x_o un élément arbitraire de G, $\omega_o = \alpha(x_o)$ et $N'_\varepsilon = N_\varepsilon + \omega_o$; il est à remarquer que ω_o n'est pas un élément arbitraire de $\mathcal{G}$.

Si J' est la fonction caractéristique de N'_ε, $J' \circ h$ est la fonction caractéristique de la réunion des intervalles $[\lambda', \lambda'+\varepsilon]$ où $\lambda' \in \Lambda'$. Or K étant donné, il y a une valeur de $\varepsilon > 0$ assez petite pour que, quel que soit $x_o \in G$, les intervalles $[\lambda', \lambda'+\varepsilon]$ soient deux à deux disjoints quand λ' parcourt Λ'. La vérification très simple de ce fait est laissée au lecteur (voir aussi [15], ch. I). Dans toute la suite nous choisissons ε assez petit pour qu'il en soit ainsi. Alors la moyenne de $J' \circ h$, si elle existe, est ε Dens Λ'.

Montrons maintenant que pour presque tout $x_0 \in G$, la moyenne de $J' \circ h$ existe et vaut la mesure de N_ε.

Soit en effet J la fonction caractéristique de N_ε et, avec les notations du lemme 3, soit Ω l'ensemble des $\omega \in \mathcal{G}$ tels que la moyenne de $J_\omega \circ h$ existe et soit la mesure de N_ε. Si $\omega \in \Omega$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, $\omega + h(t_0) \in \Omega$; en effet changer ω en $\omega + h(t_0)$ revient à faire la translation de t_0 sur la fonction $J_\omega \circ h$ correspondante et cela n'a pas d'influence sur la moyenne.

D'autre part le groupe compact $\mathcal{G}$ est localement la somme directe de $h(\mathbb{R})$ et de $\alpha(G)$. L'ensemble Ω est de mesure pleine dans $\mathcal{G}$ et est stable modulo $h(\mathbb{R})$. Le théorème de Fubini montre que, pour presque tout $x_0 \in G$, $\alpha(x_0) + h(\mathbb{R})$ est contenu dans Ω ce qu'il fallait prouver.

On a ainsi, pour presque tout $x_0 \in G$, ε Dens $\Lambda' = \text{mes } N_\varepsilon = \varepsilon \text{ mes } K$ soit Dens $\Lambda' = \text{mes } K$. La preuve du théorème 9 est ainsi terminée.

15. UN CONTRE-EXEMPLE. Pour mieux comprendre le rôle des hypothèses des théorèmes 1 et 4 nous allons construire un modèle (plus précisément un ensemble d'entiers) dont la densité harmonique n'est pas donnée par la conclusion du théorème 9. La mise au point de ce contre-exemple a été faite en collaboration avec Y. Katznelson (Jérusalem, mai 1972).

THEOREME 10. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble Λ d'entiers qui est dense dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ et dont la densité harmonique ne dépasse pas ε.

Alors tout modèle régulier M contenant Λ a une densité $\geqslant 1$. La densité harmonique de Λ n'est pas la borne inférieure des densités des modèles réguliers contenant Λ.

Soit $(n_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'entiers naturels définis par $n_o = 0$ et $n_{k+1} = kn_k + 1$. Soient Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k n_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et, pour tout entier $m \geqslant 0$, Λ_m l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k > m} \varepsilon_k n_k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. On a les deux propriétés suivantes.

LEMME 1. Il existe une constante (absolue) C telle que la densité harmonique de Λ_m ne dépasse pas $C(m\,!)^{-1}$. (Th. III, p. 244 et lemme 3 p. 246 de [12]).

LEMME 2. Pour tout entier $m \geqslant 0$, Λ_m est dense dans le compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$.

La preuve du lemme 2 est très élémentaire. Nous allons cependant élargir le problème en vue des applications au problème de la synthèse spectrale données au § 16.

Soit G un groupe abélien localement compact et $(x_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'éléments de G ; soit S l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k x_k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Appelons Γ le groupe dual de G et pour tout $\chi \in \Gamma$, soit $\chi(x)$ la valeur prise en $x \in G$ par le caractère χ de Γ.

PROPOSITION 12. Avec les notations ci-dessus, supposons que l'ensemble S soit relativement compact dans G. Appelons Γ_0 le sous-groupe de Γ défini par

(15.1) $$\sum_0^\infty |1 - \chi(x_k)| < +\infty$$

et soit $G_0 \subset G$ l'orthogonal de Γ_0. Appelons $\pi : G \to G/G_0$ la projection canonique et posons $y_k = \pi(x_k)$, $k \geqslant 0$. Alors

(15.2) la famille $(y_k)_{k \geqslant 0}$ est sommable dans G/G_0 ;

(15.3) si $L \subset G/G_0$ désigne l'ensemble compact de toutes les sommes convergentes $\sum_0^\infty \varepsilon_k y_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, la fermeture de S dans G n'est autre que $\pi^{-1}(L)$.

La preuve de la proposition 12 est immédiate. Soit pour tout $k \geqslant 0$, R_k l'ensemble des sommes finies $\sum_{j \geqslant k} \varepsilon_j x_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1 et F_k l'ensemble des sommes $\sum_0^{k-1} \varepsilon_j x_j$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1. Alors $S = F_k + R_k$ $(k \geqslant 0)$. Soit $\overline{R}_k$ l'adhérence de R_k dans G ; l'intersection G_0 des $\overline{R}_k$, $k \geqslant 0$, est une partie compacte, non vide de G. On a $S = F_k + R_k$ qui implique $\overline{S} = F_k + \overline{R}_k \supset F_k + G_0$; donc $\overline{S} \supset \bigcup_{k \geqslant 0} (F_k + G_0) = S + G_0$. Puisque G_0 est compact, la fermeture de $S + G_0$ est $\overline{S} + G_0$; on a ainsi $\overline{S} \supset \overline{S} + G_0$ et donc $\overline{S} = \overline{S} + G_0$ car $0 \in G_0$.

La même démonstration fournit évidemment $\overline{R}_k = \overline{R}_k + G_0$ et en prenant l'intersection, $G_0 = G_0 + G_0$; la partie compacte G_0, stable pour l'addition est un sous-groupe fermé.

Soit Γ_0 l'annulateur de G_0. Un caractère χ de Γ_0 vaut 1 sur le groupe compact G_0 et donc tend uniformément vers 1 sur les compacts $\overline{R}_k$ dont l'intersection est G_0. Posons $\chi(x_k) = \exp 2\pi i \varphi_k$, $k \geqslant 0$, $-\frac{1}{2} \leqslant \varphi_k < \frac{1}{2}$. Pour

$k \geqslant k_o$, on a $|\exp 2\pi i(\sum_{k \geqslant k_o} \varepsilon_k \varphi_k) - 1| \leqslant 1$ pour toute suite $\varepsilon_k = 0$ ou 1. En raisonnant par récurrence sur $\sum_{k \geqslant k_o} \varepsilon_k = n$, on en déduit que $-\frac{1}{6} \leqslant \sum_{k \geqslant k_o} \varepsilon_k \varphi_k \leqslant \frac{1}{6}$ $(\varepsilon_k = 0$ ou $1)$ et donc $\sum_{k \geqslant k_o} |\varphi_k| \leqslant \frac{1}{3}$. Ainsi $\chi \in \Gamma_o$ entraine (15.1). Réciproquement (15.1) entraine clairement que χ tend uniformément vers 1 sur R_k $(k \to +\infty)$.

Soit ϑ un voisinage arbitraire de 0 dans G/G_o. Alors $\pi^{-1}(\vartheta)$ est un voisinage du groupe compact G_o et, dès que k est assez grand, R_k est tout entier contenu dans $\pi^{-1}(\vartheta)$. Il existe donc un k_o tel que $\sum_{k \geqslant k_o} \varepsilon_k y_k \in \vartheta$ pour toute suite (finie) ε_k de 0 et de 1. La famille $(y_k)_{k \geqslant 0}$ est sommable dans G/G_o.

On a $\pi(\overline{S}) = L$ et $\overline{S} = \overline{S} + G_o$. Cela entraîne $\overline{S} = \pi^{-1}(L)$.

COROLLAIRE. Soit G un groupe compact. Supposons que pour tout $\chi \in \Gamma$ qui n'est pas le caractère nul, on ait $\sum_{k \geqslant 0} |1 - \chi(x_k)| = +\infty$. Alors l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k x_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 est dense dans G. Pour tout entier $m \geqslant 1$; il en est de même de l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant m} \varepsilon_k x_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

Revenant au théorème 10, nous appellerons Γ le groupe $\mathbf{T} = \mathbb{R}/\mathbf{Z}$ muni de la topologie discrète et $G = \widetilde{\mathbf{Z}}$ le compactifié de Bohr de $\mathbf{Z}$. Pour montrer que Λ_m est dense dans G pour tout $m \geqslant 1$, il suffit de s'assurer que, pour tout $t \neq 0$ (mod 1), $\sum_{k \geqslant 0} |1 - \exp 2\pi i t n_k| = +\infty$.

Nous utiliserons le lemme (presque évident) suivant

LEMME 3. Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ deux nombres réels, $m \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$

deux entiers et $n = mq + 1$. Si t est un nombre réel tel que $|\exp 2\pi it - 1| \geqslant \varepsilon$ et $|\exp 2\pi imt - 1| \leqslant \eta$ alors $|\exp 2\pi int - 1| \geqslant \varepsilon - q\eta$.

En effet $|\exp 2\pi int - 1| = |\exp 2\pi iqmt \exp 2\pi it - \exp 2\pi iqmt + \exp 2\pi iqmt - 1| \geqslant$ $|\exp 2\pi it - 1| - |\exp 2\pi iqmt - 1| \geqslant \varepsilon - q\eta$.

Revenant au lemme 2, on pose $\varepsilon = |\exp 2\pi it - 1|$. Pour tout $k \geqslant 1$, on a $|\exp 2\pi itn_k - 1| + |\exp 2\pi itn_{k+1} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2k}$; en effet $|\exp 2\pi itn_k - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2k}$ entraîne par le lemme 3, $|\exp 2\pi itn_{k+1} - 1| \geqslant \varepsilon - k\frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2}$. La série $\sum_{k\geqslant 0} |1 - \exp 2\pi itn_k|$ est donc divergente.

III. LES NOMBRES DE PISOT ET LE PROBLEME DE LA SYNTHESE SPECTRALE.

16. ENONCE DU THEOREME PRINCIPAL. Soit φ un élément de $L^\infty(\mathbb{R})$. Le spectre de φ est le support de la distribution $\hat{\varphi}$, transformée de Fourier de φ. Soit E un ensemble compact de nombres réels. Appelons B_E l'espace de Banach de toutes les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et bornées, dont le spectre est contenu dans E. Un sous-espace S_E de B_E est constitué des sommes trigonométriques finies $\varphi(t) = \sum_{\lambda\in E} a_\lambda \exp 2\pi i\lambda t$. Le problème de la synthèse spectrale est de savoir si S_E est dense dans B_E. Il faut naturellement préciser la topologie de B_E. Si E est dénombrable, S_E est effectivement dense dans B_E pour la topologie définie par la norme. Si E n'est pas dénombrable, il n'en est plus ainsi. Le seul problème raisonnable est alors de savoir si S_E est dense dans B_E pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

S'il en est ainsi, on peut être plus exigeant et essayer de trouver des méthodes d'approximation. On peut essayer, lorsque c'est possible, de construire une suite $\mathcal{L}_k$, $k \geqslant 1$, d'opérateurs continus de B_E dans S_E tels que, pour tout $\varphi \in B_E$, $\mathcal{L}_k \varphi \to \varphi$ au sens de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Les opérateurs $\mathcal{L}_k$ possèdent alors les deux propriétés suivantes, en apparence plus précises.

(16.1) la suite des normes des $\mathcal{L}_k$ est bornée (la norme de l'opérateur $\mathcal{L}_k$: $B_E \to S_E \subset B_E$ correspond à la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}} |\varphi|$ de l'espace de Banach B_E).

(16.2) pour tout $\varphi \in B_E$, $\mathcal{L}_k \varphi$ converge vers φ, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

La convergence uniforme sur toute la droite réelle étant exclue, les propriétés (16.1) et (16.2) s'en rapprochent le plus possible.

Soit $\theta > 2$ un nombre réel et E l'ensemble compact de toutes les sommes $\sum_1^\infty \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Pour tout $k \geqslant 1$, soit F_k l'ensemble des 2^k sommes $\sum_1^k \varepsilon_j \theta^{-j}$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1. Alors E est la réunion des 2^k compacts disjoints $\lambda + \theta^{-k} E$, $\lambda \in F_k$ $(k \geqslant 1)$; toute fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dont le spectre est contenu dans E peut donc être écrite comme une somme trigonométrique perturbée

$$\varphi(t) = \sum_{\lambda \in F_k} a_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t \tag{16.3}$$

dont les coefficients $a_\lambda(t)$, au lieu d'être des constantes, sont des fonctions continues bornées dont les fréquences appartiennent à $\theta^{-k}E$. Les a_λ sont donc des fonctions à "basse-fréquences" vérifiant les inégalités

(16.4) $$|a_\lambda(t_2) - a_\lambda(t_1)| \leqslant \frac{\theta^{-k}}{\theta-1} |t_2 - t_1| \sup_{\mathbb{R}} |a_\lambda|$$

pour tous t_1 et t_2 réels. Ainsi lorsque θ est très grand, les $a_\lambda(t)$ sont des fonctions "très plates" comparées aux termes à "hautes fréquences" $\exp 2\pi i \lambda t$ et, autour de 0, il devient naturel d'approcher $\varphi(t)$ par les sommes trigonométriques pures $\mathcal{L}_k \varphi = \varphi_k$ définies par

(16.5) $$\varphi_k(t) = \sum_{\lambda \in F_k} a_\lambda(0) \exp 2\pi i \lambda t.$$

L'argument heuristique ci-dessus n'est pas sans fondement : pour tout $\theta > 2$, il y a une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

(16.6) $$|\varphi(t) - \varphi_k(t)| \leqslant C\, 2^k \theta^{-k} |t| \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

soit vérifiée pour toute fonction $\varphi \in B_E$, tout $k \geqslant 1$ et tout t réel.

L'inégalité (16.6) montre que les $\varphi_k = \mathcal{L}_k \varphi$ satisfont la condition (16.2). Il est alors tentant de poser les deux questions suivantes : (16.6) peut-elle être améliorée en

(16.7) $$|\varphi(t) - \varphi_k(t)| \leqslant C\, \theta^{-k} |t| \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$$

(qui assurera une meilleure approximation locale de φ par φ_k) ?

Existe-t-il une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \geqslant 1$,

(16.8) $$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k| \leqslant C \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \ ?$$

La réponse est donnée par le théorème ci-dessous où, rappelons-le θ est un nombre réel > 2 et E est l'ensemble compact de toutes les sommes $\sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k \theta^{-k}$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

THEOREME 11. Avec les notations ci-dessus, pour tout nombre réel $\theta > 2$, les trois conditions suivantes sont équivalentes

a) il existe une constante positive C telle que, pour toute fonction $\varphi \in B_E$, tout $k \geqslant 1$ et tout t réel, (16.7) soit vérifiée (B_E est l'espace des fonctions continues et bornées $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ dont le spectre est contenu dans E),

b) il existe une constante positive C telle que, pour tout $\varphi \in B_E$, et pour tout $k \geqslant 1$ (16.8) soit vérifiée,

c) θ est un nombre de Pisot dont nous désignerons par n le degré sur $\mathbf{Q}$ tel que, pour tout entier $k \geqslant 0$, toute suite $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ de -1, 0 ou 1 et toute suite $q_o, \ldots, q_{n-1}$ d'entiers rationnels

(16.9) $$\varepsilon_o + \varepsilon_1\theta + \ldots + \varepsilon_k\theta^k = (1-\theta^{k+1})(q_o + q_1\theta + \ldots + q_{n-1}\theta^{n-1}) \quad \text{entraîne}$$

$$\varepsilon_o = \varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_k = q_o = q_1 = \ldots = q_{n-1} = 0.$$

En d'autres termes, soient, pour tout $k \geqslant 0$, Λ_k l'ensemble des 2^k sommes $\sum_o^k \varepsilon_j\theta^j$ où $\varepsilon_j = 0$ ou 1 et R l'anneau $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\theta + \ldots + \mathbf{Z}\theta^{n-1}$. La condition c) exprime que 0 est le seul élément de $\Lambda_k - \Lambda_k$ qui soit divisible, dans l'anneau R, par $1-\theta^{k+1}$.

Avant de commencer la preuve du théorème 11 (qui s'étendra des § 17 à 25), montrons par un exemple que la seconde partie de la condition c) n'est pas superflue.

Pour tout entier $m \geqslant 1$, $\theta = \dfrac{m+2+\sqrt{m^2+4}}{2}$ est un nombre de Pisot, solution de $\theta^2 - (m+2)\theta + m = 0$ et la condition c) n'est pas satisfaite puisque $1 = (1-\theta)(m+1-\theta)$. Si $\theta = \dfrac{m+2+\sqrt{m^2+4}}{2}$, les φ_k ne constituent pas une bonne approximation de φ. Il est cependant prouvé dans [12] que, pour tout nombre de Pisot $\theta > 2$, il est possible de construire une suite d'opérateurs $\mathcal{L}_k : B_E \to S_E$ possédant les propriétés (16.1) et (16.2). Il est fort probable que ce dernier résultat est en défaut dès que $\theta > 2$ n'est pas un nombre de Pisot. En fait, lorsque θ n'est pas un nombre de Pisot, on ne sait même pas si S_E est ou non dense dans B_E pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Quand $\theta \geqslant 3$ est un entier naturel, la condition c) du théorème 6 est évidemment satisfaite et les φ_k constituent d'excellentes approximations de φ.

17. UN PROBLEME PORTANT SUR UN SEUL OPERATEUR. Soit $\theta > 2$ et Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

Soit X l'espace vectoriel de toutes les fonctions continues et bornées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont des sommes finies

(17.1) $$f(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i\lambda t$$

telles que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, le spectre de f_λ soit contenu dans E. La norme de $f \in X$ est $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$. Soit enfin S_Λ l'espace de toutes les sommes trigonométriques finies dont les fréquences appartiennent à Λ.

DEFINITION 9. Avec les notations ci-dessus, $\mathcal{L} : X \to S_\Lambda$ est l'opérateur linéaire transformant toute somme finie $f(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i\lambda t$ en $g(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(0) \exp 2\pi i\lambda t$ (le spectre de chaque f_λ est contenu dans E).

En particulier si $\varphi \in B_E$ et $P \in S_\Lambda$, $L(\varphi P) = \varphi(0)P$. Soit, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\tau_j : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'isométrie définie par $\tau_j \psi = \psi_j$ si $\psi_j(t) = \psi(\theta^j t)$, $-\infty < t < +\infty$

Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathcal{L}_k = \tau_{-k} \circ \mathcal{L} \circ \tau_k$; les opérateurs $\mathcal{L}_k$ sont uniformément bornés si et seulement si $\mathcal{L}$ est continu. De même (16.7) est équivalent à la condition (17.2) ci-dessous

(17.2) $$|(\mathcal{L}f)(t) - f(t)| \leqslant C\,|t|\,\|f\|_\infty \quad \text{pour tout} \quad f \in X.$$

18. LE CAS OÙ θ N'EST PAS UN NOMBRE DE PISOT. En premier lieu, montrons que l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est pas continu. En effet, tout d'abord Λ n'est pas un ensemble cohérent de fréquences et il y a une suite P_k, $k \geqslant 1$, de sommes trigonométriques dont les fréquences appartiennent à Λ et telle que

(18.1) $$\sup_{\mathbb{R}} |P_k| = 1 \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 1 \quad \text{tandis que}$$

(18.2) $P_k \to 0$ $(k \to +\infty)$ uniformément sur toute partie compacte de $\mathbb{R}$ ([12], p. 110, th. IV).

D'autre part E est alors un ensemble de multiplicité.

Il y a donc une fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, nulle à l'infini, telle que $\varphi(0) = 1$ et dont le spectre est contenu dans E. Alors $P_k\varphi \in X$ pour tout $k \geqslant 1$, $\|P_k\varphi\|_\infty \to 0$ $(k \to +\infty)$ tandis que $\mathcal{L}(P_k\varphi) = P_k$ vérifie $\|P_k\|_\infty = 1$ pour tout $k \geqslant 1$. L'opérateur $\mathcal{L}$ n'est donc pas continu.

Montrons que si $\theta > 2$ n'est pas un nombre de Pisot, (17.2) est en défaut. Soient $Q_k(t) = \exp \pi i t(1 + \theta + \ldots + \theta^k) \cos \pi t \cos \pi\theta t \ldots \cos \pi\theta^k t$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$, $R_k(t) = Q_k(t - h)$. Alors Q_k tend uniformément vers 0 sur tout compact ne contenant pas 0. Soit $\varphi \in B_E$ une fonction non identiquement nulle mais nulle en 0 et à l'infini et formons $R_k\varphi \in X$. On a $\lim\limits_{k \to +\infty} \|R_k\varphi\|_\infty = |\varphi(h)|$. Puisque $\mathcal{L}(R_k\varphi) = 0$, (17.2) entraînerait, pour tout $k \geqslant 1$ et tout t réel

$$|\varphi(t)\, R_k(t)| \leqslant C\,|t|\; \|\varphi\, R_k\|_\infty . \tag{18.3}$$

On remplace t par h dans (18.3) et l'on fait tendre k vers l'infini pour obtenir

$$|\varphi(h)| \leqslant C\,|h|\;|\varphi(h)| \tag{18.4}$$

de sorte que φ est identiquement nulle sur un voisinage de 0. Le spectre de la fonction φ est compact ; φ est la restriction à l'axe réel d'une fonction entière. Donc φ est identiquement nulle. Il y a une contradiction.

19. LE CAS OÙ θ EST UN NOMBRE DE PISOT : plan de la démonstration. Tout d'abord, nous allons montrer que si θ est un nombre de Pisot, Λ est un modèle assez régulier. Alors le théorème 11 devient un cas particulier d'une propriété plus générale, le théorème 12, dont la démonstration s'étend du § 20 au § 24. Le passage du théorème 12 au théorème 11 est fait au § 25.

PROPOSITION 13. Si θ est un nombre de Pisot, l'ensemble Λ de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 est un modèle assez régulier (Définition 8 du § 13).

Pour démontrer la proposition 13, quelques rappels sur l'anneau des adèles d'un corps de nombre sont nécessaires. Par corps local, nous désignerons un corps commutatif localement compact non discret. Soit $\mathcal{K}$ une extension de degré n du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Une place p sur $\mathcal{K}$ est un isomorphisme d'image dense de dans un corps local ; deux tels isomorphismes p et p' dans K et K' étant considérés comme équivalents si l'on passe de l'un à l'autre par un isomorphisme de

K sur K'. L'ensemble (dénombrable) des places p sur $\mathcal{K}$ sera noté P. Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la place correspondante sera dite infinie ; au contraire si K est ultramétrique, la place correspondante est dite finie.

Sur chaque corps local, il y a une valeur absolue canonique et pour tout $p \in P$, nous désignerons par $\mathcal{K}_p$ le corps local K correspondant et par $|\ |_p$ la valeur absolue correspondante.

Revenons à notre nombre de Pisot θ. Soit $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\theta)$. Puisque θ est "naturellement" un nombre réel, il y a une place canonique $i : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ définie par $i(\theta) = \theta$. Soit r le nombre d'isomorphismes distincts de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}$; alors n, le degré de $\mathcal{K}$ sur $\mathbb{Q}$ peut être écrit $n = r + 2s$, $1 \leqslant r$, $0 \leqslant s$, et l'on peut ordonner les isomorphismes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$ de sorte que

(19.1) $\quad \sigma_1 = i$

(19.2) $\quad \sigma_j(\mathcal{K})$ soit réel si et seulement si $1 \leqslant j \leqslant r$

(19.3) $\quad$ pour $1 \leqslant j \leqslant s$, σ_{j+r} et σ_{j+r+s} soient conjugués sur $\mathbb{C}$.

Ainsi les n isomorphismes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ne définissent que $r+s$ places sur $\mathcal{K}$.

Soit F l'ensemble (fini) des places $p \in P$ telles que $|\theta|_p < 1$. Alors F contient $\{\sigma_2, \dots, \sigma_{r+s}\}$.

Appelons $A' = G$ le produit topologique restreint de tous les $\mathcal{K}_p$, $p \neq i$; en d'autres termes A' est l'anneau des adèles construit en "oubliant" la place i sur $\mathcal{K}$ et l'anneau des adèles A de $\mathcal{K}$ est le produit $\mathbb{R} \times A' = \mathbb{R} \times G$.

Enfin $\mathcal{K}$ peut être considéré comme un sous-anneau de $\mathbb{R} \times G$ grâce à l'injection canonique de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R} \times G$ définie par $t \to (p(t))_{p \in P}$ $(t \in \mathcal{K})$.

Soient $i : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}$ et $j : \mathbb{R} \times G \to G$ les deux projections canoniques. Alors $i(\mathcal{K})$ est dense dans $\mathbb{R}$ $(i(\mathcal{K}) = \mathbb{Q}(\theta)$ qui est bien dense dans $\mathbb{R})$; $j(\mathcal{K})$ est dense dans $A' = G$ car nous avons "oublié" une place dans la construction de A') ; $\mathcal{K}$ est discret dans $\mathbb{R} \times G$ et $(\mathbb{R} \times G)/\mathcal{K}$ est compact ([17], Ch. IV).

Le groupe localement compact dual de A est A lui-même. Si ξ est un caractère sur A, égal à 1 sur le sous-groupe fermé $\mathcal{K}$ mais non identiquement égal à 1 sur A, la dualité entre A et A est définie par $\langle x, y\rangle = \xi(xy)$, $x \in A$, $y \in A$.

Lorsque la dualité entre A et lui-même est définie ainsi, l'orthogonal de $\mathcal{K}$ est $\mathcal{K}$ lui-même ([17]. Ch. IV, § 2, th. 3).

Enfin le groupe dual de A' est A' lui-même.

DEFINITION 10. Nous désignerons par η l'élément de A' tel que $(\theta, \eta) \in \mathcal{K}$. En d'autres termes si P' désigne l'ensemble des places p de P différentes de i, $\eta = (p(\theta))_{p \in P'}$.

Puisque θ est un nombre de Pisot, $|\theta|_p \leq 1$ pour tout $p \in P'$ et $|\theta|_p < 1$ pour toute place infinie de P'. Il en résulte aussitôt que l'ensemble $U \subset A'$ de toutes les sommes finies $\sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \eta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 est relativement compact dans A'. Ainsi Λ est un modèle. Mais il n'était pas nécessaire d'introduire les places finies pour le prouver. Nous allons maintenant montrer que Λ est un modèle assez régulier. Pour cela il suffira d'utiliser les simples remarques énoncées dans les lemmes ci-dessous et d'appliquer un résultat plus général, la proposition 10.

LEMME 1. Soit $x \in A'$. Supposons que $\langle x, \eta^k \rangle \to 1$ $(k \to +\infty)$. Alors $\sum_{k \geqslant 0} |1 - \langle x, \eta^k \rangle| < +\infty$.

En d'autres termes, soit $\langle x, \eta^k \rangle$ ne tend pas vers 1, soit $\langle x, \eta^k \rangle$ tend vers 1 très rapidement.

La preuve du lemme 1 est très simple. Soit $X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme minimal de θ. Alors, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\eta^{k+n} + a_1 \eta^{k+n-1} + \ldots + a_n \eta^k = 0. \tag{19.4}$$

Posons

$$\langle x, \eta^k \rangle = \exp 2\pi i \varphi_k, \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant \varphi_k < \tfrac{1}{2}, \quad k \geqslant 0. \tag{19.5}$$

Les égalités (19.4) deviennent les congruences

$$s_k = \varphi_{k+n} + a_1 \varphi_{k+n-1} + \ldots + a_n \varphi_n \equiv 0 \pmod 1). \tag{19.6}$$

Si $\varphi_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, l'entier rationnel s_k tend vers 0. Donc $s_k = 0$ pour $k \geqslant k_o$ et les relations de récurrence

$$\varphi_{k+n} + a_1 \varphi_{k+n-1} + \ldots + a_n \varphi_k = 0 \tag{19.7}$$

permettent de trouver n nombres réels ou complexes, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\varphi_k = \lambda_1 \sigma_1(\theta^k) + \ldots + \lambda_n \sigma_n(\theta^k) \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant k_o. \tag{19.8}$$

Les nombres réels $\sigma_1(\theta^k) = \theta^k$ ne tendent pas vers 0 tandis que $\sigma_j(\theta^k) \to 0$ $(k \to +\infty)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$. Puisque $\varphi_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, $\lambda_1 = 0$. Les relations (19.5) et (19.8) impliquent $\sum_{k \geqslant 0} |1 - \langle x, \eta^k \rangle| < +\infty$.

LEMME 2. Soit $\theta > 1$ un nombre de Pisot et s un nombre réel. Alors esp $2\pi i s \theta^k \to 1$ $(k \to +\infty)$ entraîne que s appartient au corps $\mathbb{Q}(\theta)$ de θ.

C'est classique ([12], p. 27, prop. 4).

Nous allons maintenant prouver sans peine que Λ est un modèle assez régulier. Il est amusant de raisonner dans le cadre général des groupes abéliens localement compacts et les notations de la proposition 14 seront celles de la définition 8 des modèles assez réguliers (§ 13).

PROPOSITION 14. Soit $(t_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels telle que

(19.9) $t_k \in i(D)$ pour tout $k \geqslant 0$

(19.10) si $(t_k , x_k) \in D$, l'ensemble U de toutes les sommes finies $\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k x_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1, est relativement compact dans G

(19.11) pour tout $\gamma \in \Gamma$, groupe dual de G, $\langle \gamma, x_k \rangle \to 1$ $(k \to +\infty)$ implique $\sum_{k\geqslant 0} |1 - \langle \gamma , x_k \rangle| < +\infty$; H est dénombrable et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\exp 2\pi i s t_k \to 1$ $(k \to +\infty)$ implique $s \in H$.

Alors l'ensemble $\Lambda \in \mathbb{R}$ de toutes les sommes finies $\sum_{k\geqslant 0} \varepsilon_k t_k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 est un modèle assez régulier.

Les propriétés (19.9) et (19.10) seraient, à elles seules insuffisantes comme le montre le contre exemple du § 15.

La proposition 14 et les lemmes 1 et 2 entrainent évidemment la proposition 13.

Pour démontrer la proposition 14, nous allons construire une mesure de probabilité ν portée par la fermeture K de U dans G. Les "morceaux" de ν seront les mesures μ_k de la définition 8 des modèles assez réguliers. La mesure ν est définie par le lemme suivant.

LEMME 3. Soient pour tout $k \geqslant 0$, σ_k la mesure donnant la masse $\frac{1}{2}$ à 0 et la masse $\frac{1}{2}$ à x_k et $\nu_k = \sigma_0 * \ldots * \sigma_k$. Alors (19.11) implique que ν_k tend vers une limite (faible) ν dont le support est exactement K.

Pour prouver le lemme 3, reprenons les notations de la proposition 12 du § 15. Soit τ_k la mesure donnant la masse $\frac{1}{2}$ à 0 et la masse $\frac{1}{2}$ à $y_k \in G/G_o$ ($k \geqslant 0$, $y_k = \pi(x_k)$). Posons $\rho_k = \tau_o * \ldots * \tau_k$. La suite $(\rho_k)_{k \geqslant 0}$ tend faiblement vers une mesure de probabilité ρ dont le support est exactement L. En effet, soit Ω l'espace compact $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$; la mesure de probabilité $d\omega$ sur Ω est le produit des mesures donnant les masses $\frac{1}{2}$ à 0 et $\frac{1}{2}$ à 1. On désigne par $T : \Omega \to G/G_o$ l'application continue transformant une suite $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 0}$ de 0 et de 1 en $\sum_{o}^{\infty} \varepsilon_k y_k$. Alors ρ n'est autre que l'image par T de la mesure $d\omega$.

Pour toute fonction continue $f : G \to \mathbb{C}$ à support compact, la fonction $g : G \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(x) = \int_{G_o} f(x + \xi)\,d\xi \tag{19.12}$$

est aussi continue, à support compact (G_o est compact) et constante sur les classes modulo G_o. Cette fonction g définit, par passage au quotient, une fonction continue, encore à support compact, $\tilde{g} : G/G_o \to \mathbb{C}$. On peut alors "relever" dans G la mesure ρ, de support $L \subset G/G_o$ en écrivant

$$\int_G f(x)dr(x) = \int_{G/G_o} \tilde{g}\,d\rho. \tag{19.13}$$

L'identité (19.13) s'étend immédiatement à toutes les fonctions continues et bornées $f : G \to \mathbb{C}$. En particulier les coefficients de Fourier de r sont donnés par

(19.14) $$\hat{r}(\gamma) = \hat{\rho}(\gamma) = \prod_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\langle\gamma, y_k\rangle\right) = \prod_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\langle\gamma, x_k\rangle\right)$$

lorsque $\gamma \in \Gamma_0$ et par

(19.15) $$\hat{r}(\gamma) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \notin \Gamma_0 .$$

Montrons que r est la limite faible des ν_k. On a

(19.16) $$\hat{\nu}_k(\gamma) = \prod_{0}^{k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\langle\gamma, x_j\rangle\right).$$

Si $\langle\gamma, x_j\rangle \to 1$ $(j \to +\infty)$, alors (19.11) entraîne que $\gamma \in \Gamma_0$ et $\hat{\nu}_k(\gamma)$ tend vers $\hat{r}(\gamma)$. Si, au contraire $\langle\gamma, x_j\rangle$ ne tend pas vers 1, $\hat{\nu}_k(\gamma)$ tend vers 0. La mesure r est bien la limite faible des ν_k $(k \to +\infty)$. Enfin (19.13) montre que le support de r est l'image réciproque par π du support L de ρ. Le support de r est donc K et le lemme 3 est prouvé.

Pour montrer que Λ est assez régulier, nous désignerons par V un voisinage compact arbitraire d'un point quelconque du support K de la mesure $d\nu$. On peut alors trouver une fonction continue $a : G \to [0 , +\infty[$, nulle hors de V et telle que $\int_G a(x)\, d\nu(x) = 1$. Soit $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des mesures discrètes, portées par Λ et définies par

(19.17) $$\int f\, d\mu_k = 2^{-k-1} \sum a(\varepsilon_0 x_0 + \dots + \varepsilon_k x_k)\, f(\varepsilon_0 t_0 + \dots + \varepsilon_k t_k)$$

où $f : \Lambda \to \mathbb{C}$ est une fonction arbitraire et où $\sum$ signifie que l'on somme sur les 2^{k+1} suites $(\varepsilon_j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ de 0 ou de 1.

Avec les notations du lemme 3, $d\mu_k^*(x) = a(x)d\nu_k(x)$. D'après le lemme 3, $d\mu_k^*(x)$ tend étroitement vers $a(x)d\nu(x)$ et donc $\|\mu_k\| = \|\mu_k^*\| = \int_G a(x)d\nu_k(x) \to 1$ $(k \to +\infty)$. Il sera possible de normaliser les mesures positives μ_k, sans changer leurs autres propriétés, pour obtenir des mesures de probabilité.

Il reste à montrer que $I_k = \int \exp 2\pi ist\, d\mu_k(t) \to 0$ $(k \to +\infty)$ pour tout s

n'appartenant pas à H. Soit $\chi : j(D) \to \mathbf{T}$ l'homomorphisme défini par $\chi(t^*) = \exp 2\pi i s t$ si $(t, t^*) \in D$. On peut alors écrire

$$I_k = \int_G \chi(x) d\mu_k^*(x) = \int_G \chi(x) a(x) d\nu_k(x).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut former une somme trigonométrique finie $P : G \to \mathbb{C}$ dont les fréquences appartiennent à $q(\Delta)$ et qui, sur le compact K approche a à moins de $\varepsilon/2$; ceci tient simplement à ce que $q(\Delta)$ est dense dans Γ. Ecrivons

$$P(x) = \sum_{\alpha \in A} c(\alpha) \langle \alpha^*, x \rangle$$

où A est une partie finie de H et où, pour chaque $\alpha \in A$, $(\alpha, \alpha^*) \in \Delta$. Soient

$$J_k = \int_G \chi(x) P(x)\, d\nu_k(x) \qquad \text{et} \qquad J_k(\alpha) = \int_G \chi(x) \langle \alpha^*, x \rangle\, d\nu_k(x) \qquad (\alpha \in A).$$

Alors $| I_k - \sum_{\alpha \in A} c(\alpha) J_k(\alpha)| \leq \varepsilon/2$ pour tout $k \geq 1$. Posons $c = \sum_{\alpha \in A} |c(\alpha)|$; si nous montrons que chaque $J_k(\alpha)$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, nous saurons qu'il existe un k_o tel que $k \geq k_o$ entraîne $|J_k(\alpha)| \leq \varepsilon/(2c)$. Il en résultera que $|J_k| \leq \varepsilon/2$ et $|I_k| \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq k_o$.

Soit P_k $(k \geq 0)$ la mesure discrète portée par Λ et définie par (19.17) lorsqu'on y remplace la fonction a par 1. Puisque $P_k^* = \nu_k$, on peut récrire

$$J_k(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \exp 2\pi i(s+\alpha)t\, d P_k(t) = \prod_o^k \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \exp 2\pi i(s+\alpha)t_j\right).$$

Si s n'appartient pas à H, il en est de même de chaque $s + \alpha$ $(\alpha \in A)$; la condition (19.11) montre que $\exp 2\pi i(s+\alpha)t_k$ ne tend pas vers 1 et que $J_k(\alpha)$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Les propositions 13 et 14 sont démontrées.

Il devient alors intéressant de préciser le compact K. Soit R l'anneau

$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta + \ldots + \mathbb{Z}\theta^{n-1}$, F l'ensemble fini des places $p \in P$ telles que $|\theta|_p < 1$, P'' l'ensemble des places finies telles que $|\theta|_p = 1$. Toute place $p \in P$ est soit i, est soit dans F ou dans P''. Appelons A'' le produit topologique restreint de tous les $\mathcal{K}_p$, $p \in P''$, et N le produit $\prod_{p \in F} \mathcal{K}_p$. Soient ρ et σ les isomorphismes de $\mathcal{K}$ dans N et A'' définis par $\rho(t) = (p(t))_{p \in F}$ et $\sigma(t) = (p(t))_{p \in P''}$.

Nous désignerons par ζ l'élément $\rho(\theta)$ de l'anneau N, par $L \subset N$ l'ensemble compact de toutes les sommes $\sum_0^\infty \varepsilon_k \zeta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et, enfin, par G_o l'anneau compact qui est fermeture de $\sigma(R)$ dans A''.

Rappelons que pour tout $t \in i(\mathcal{K}) = \mathbb{Q}(\theta)$, nous désignerons par t^* l'élément de $N \times A'' = G$ tel que $(t, t^*) \in \mathcal{K}$ canoniquement plongé dans l'anneau des adèles $A = \mathbb{R} \times G$ de $\mathcal{K}$.

Avec ces notations on a

PROPOSITION 15. Soit $\theta > 1$ un nombre de Pisot et $U \in N \times A''$ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k (\theta^*)^k$ où $\varepsilon_k = 0$ ou 1. La fermeture K de U dans $N \times A'' = G$ est le produit $L \times G_o$.

Soit ω l'élément $\sigma(\theta) \in A''$. La preuve de la proposition 15 débute par le lemme

LEMME 4. On a $\omega G_o = G_o$.

Soient, en effet, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\mathcal{K}$ et Ω la fermeture de $\sigma(\mathcal{O})$ dans A''. Soit $m \geqslant 1$ un entier tel que $m\mathcal{O} \subset R$. On a donc $m\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(R) \subset G_o$ et, en passant à la fermeture, $m\Omega \subset G_o$. L'élément de ω de Ω est une unité et la multiplication par ω est un automorphisme de Ω. On a $\theta R \subset R$ et donc $\omega G_o \subset G_o$. Mais les sous-groupes G_o et ωG_o doivent avoir le même indice fini dans Ω. Il en résulte que $G_o = \omega G_o$.

Nous allons utiliser la proposition 12 pour obtenir la proposition 15. Le dual de $N \times A''$ est $N \times A''$ lui-même. Nous devons déterminer d'abord le groupe $\Gamma_o \subset N \times A''$ de tous les caractères $\gamma = (y, \gamma'')$, $y \in N$, $\gamma'' \in A''$, tels que $\langle \gamma, (\theta^*)^k \rangle = \langle y, \zeta^k \rangle \langle \gamma'', \omega^k \rangle \to 1$ $(k \to +\infty)$. Ensuite nous devons vérifier que la fermeture G_o de $\sigma(R)$ dans A'' est l'orthogonal de Γ_o. Alors nous saurons que K est stable modulo G_o. Mais il est clair que $K \subset L \times G_o$ et que la projection de K sur N est L. Ainsi $K = L \times G_o$ et la proposition 15 sera prouvée.

Revenons à la détermination du groupe Γ_o. Puisque $\zeta^k \to 0$ $(k \to +\infty)$, $\langle \gamma, (\theta^*)^k \rangle$ et $\langle \gamma'', \omega^k \rangle$ tendent simultanément vers 1 et y est arbitraire dans un élément $(y, \gamma'') \in \Gamma_o$; Γ_o est un produit $N \times \Gamma''_o$. Si $\gamma = (0, \gamma'') \in \Gamma_o$, $\gamma''(\Omega)$ est un sous-groupe fini de $\mathbf{T}$ de sorte que $\gamma''(\omega^k) \to 1$ $(k \to +\infty)$ implique $\gamma''(\omega^k) = 1$ pour $k \geqslant \ell$. Cela entraîne que $\gamma'' = 1$ sur $\sigma(\theta^\ell R) = \omega^\ell \sigma(R)$; γ'' vaut aussi 1 sur la fermeture de ce sous-groupe ; cette fermeture est G_o d'après le lemme 4. Ainsi G_o est l'orthogonal de Γ_o.

Nous allons donner au théorème 11 sa forme la plus générale. Mais quelques notations nouvelles nous seront nécessaires.

20. LE THEOREME 11 DANS LE CADRE DES MODELES ASSEZ REGULIERS. Soit $B(\mathbb{R})$ l'algèbre de Banach des transformées de Fourier $\hat{\mu}$ des mesu-

res de Radon complexes de masse totale finie. Le produit dans $B(\mathbb{R})$ est le produit ordinaire des fonctions continues bornées et

(20.1) $$\|\hat{\mu}\| = \|\mu\| = \text{masse totale de } \mu .$$

Pour toute partie fermée F de $\mathbb{R}$, soit I_F l'idéal de $B(\mathbb{R})$ composé de tous les éléments $\varphi \in B(\mathbb{R})$ nuls sur F et soit $B(F)$ l'algèbre quotient $B(\mathbb{R})/I_F$ munie de la norme quotient ; $B(F)$ peut aussi être interprétée comme l'algèbre des restrictions à F des éléments de $B(\mathbb{R})$.

Rappelons les notations du théorème 11. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble compact et $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un ensemble de nombres réels. Supposons que les translatés $\lambda + E$, $\lambda \in \Lambda$ soient deux à deux disjoints. Soit X l'espace vectoriel de toutes les sommes finies

(20.2) $$f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t$$

telles que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le spectre de f_λ soit contenu dans E. Soit $\mathcal{L} : X \to S_\Lambda$ l'opérateur défini par

(20.3) $$(\mathcal{L} f)(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(0) \exp 2\pi i \lambda t .$$

La norme de $f \in X$ est $\sup_{\mathbb{R}} |f| = \|f\|_\infty$.

Nous supposerons que, pour toute fonction continue $\varphi : \Lambda + E \to \mathbb{C}$ et toute constante positive C les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(20.4) $\varphi \in B(\Lambda + E)$ et la norme de φ dans $B(\Lambda + E)$ ne dépasse pas C

(20.5) $\left| \int \varphi \, d\mu \right| \leqslant C \|\hat{\mu}\|_\infty$ pour toute mesure complexe μ dont le support est une partie finie de Λ.

Nous dirons alors que $\Lambda + E$ a la propriété de Bochner (§ 24).

Avec ces notations, on peut énoncer le résultat suivant.

THEOREME 12. Soit Λ un modèle assez régulier défini par (G, D, U) et soit K la fermeture de U dans G. Supposons que $\Lambda + E$ ait la propriété de Bochner. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(20.6) l'opérateur $\mathscr{L}$ est continu

(20.7) il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in X$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|(\mathscr{L}f)(t) - f(t)| \leqslant C|t| \, \|f\|_\infty$$

(20.8) deux points distincts de $E \times K$ ne sont jamais congrus modulo D.

L'intérêt du théorème 12 est de ramener une propriété d'analyse fonctionnelle à une propriété géométrique (nous verrons au § 25 comment s'assurer de (20.8)).

21. LA PREUVE DE L'IMPLICATION (20.7) $\Rightarrow$ (20.8). Nous allons, plus précisément démontrer que si $\delta(E)$ est le diamètre de E et que si $0 < |s_0| < 1/\delta(E)$, la continuité de la forme linéaire $f \to (\mathscr{L}f)(s_0)$ définie sur X entraîne (20.8).

Supposons donc $f \to (\mathscr{L}f)(s_0)$ continue sur X. Une première conséquence est le lemme suivant.

LEMME 1. Soit $\xi : \Lambda + E \to \mathbf{T}$ définie par $\xi(\lambda + t) = \exp 2\pi i \lambda s_0$, $\lambda \in \Lambda$, $t \in E$. Alors $\xi \in B(\Lambda + E)$.

Soit en effet μ une mesure complexe dont le support est une partie finie de $\Lambda + E$. Posons $\hat{\mu}(-t) = f(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t$.

Alors $\int_{\mathbb{R}} \xi \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(0) \exp 2\pi i \lambda s_0 = (\mathscr{L}f)(s_0)$. L'hypothèse entraîne que $\left| \int_{\mathbb{R}} \xi \, d\mu \right| \leqslant C \, \|\hat{\mu}\|_\infty$ et la propriété de Bochner implique le lemme 1.

Soit $a > 0$ la norme de ξ dans $B(\Lambda + E)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une mesure de Radon complexe μ sur la droite réelle, une partie finie A de $\Lambda \times E$ et une somme trigonométrique $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

(21.1) $\hat{\mu} = \xi$ sur $\Lambda + E$

(21.2) $\|\mu\| \leqslant a(1+\varepsilon)$

(21.3) $Q(s) = \sum_{(\lambda,r) \in A} b(\lambda,r)\exp 2\pi i(\lambda + r)s$

(21.4) $\|Q\|_\infty \leqslant 1$

(21.5) $\left|\int \overline{Q}(s)d\mu(s)\right| \geqslant a(1-\varepsilon)$.

Les propriétés (21.1) et (21.2) résultent de la définition de la norme dans l'algèbre quotient $B(\Lambda + E)$ tandis que la propriété de Bochner rend possible le choix de Q ; $\overline{Q}(s)$ est le nombre conjugué de $Q(s)$.

Remarquons que

(21.6) $$\int \overline{Q}(s)d\mu(s) = \sum_{(\lambda,r) \in A} \overline{b}(\lambda,r)\exp 2\pi i\lambda s_o$$

et posons $b = \sum_{(\lambda,r) \in A} |b(\lambda,r)|$.

Comme au § 10, nous décomposons μ en la somme $\rho + \sigma$ d'une mesure atomique ρ portée par H et d'une mesure σ étrangère à H. Soit $F \subset H$ une partie finie assez grande pour que $\int_{H \setminus F} d|\rho| \leqslant \varepsilon/b$ et soit $W \subset G$ un voisinage de 0 assez petit pour que $\sup_{F^* \times W} |\langle \gamma, x\rangle - 1| \leqslant \varepsilon/b$ et $\sup_{x \in W} |\langle s_o, x\rangle - 1| \leqslant \varepsilon/b$.

Puisque Λ est un modèle assez régulier, on peut, pour tout $(\lambda,r) \in A$, trouver une suite $\mu_{k,\lambda}$ de mesures de probabilité telles que

(21.7) $\mu_{k,\lambda}$ soit, pour tout $k \geqslant 1$, portée par Λ

(21.8) $\mu_{k,\lambda}$ donne la masse $p_{k,t}(t)$ à $t \in \Lambda$

(21.9) $\mu^*_{k,\lambda}$ soit pour tout $k \geqslant 1$, portée par $\lambda^* + W$

(21.10) $\hat{\mu}_{k,\lambda}(s) \to 0 \quad (k \to +\infty)$ si $s \notin H$.

Définissons la suite Q_k, $k \geqslant 1$, de sommes trigonométriques par

(21.11) $$Q_k(s) = \sum_{(\lambda,r)\in A} b(\lambda\ ,\ r)\exp 2\pi irs\Big(\sum_{t\in\Lambda} p_{k,\lambda}(t)\exp 2\pi its\Big).$$

Les fréquences de Q_k appartiennent à $\Lambda + E$ et l'on a donc

(21.12) $$\int_{\mathbb{R}} \overline{Q}_k(s)d\mu(s) = \sum_{(\lambda,r)\in A} \overline{b}(\lambda\ ,r)\Big(\sum_{t\in\Lambda} p_{k,\lambda}(t)\exp 2\pi its_o\Big).$$

Nous allons montrer que cette suite Q_k possède les quatre propriétés suivantes

(21.13) pour tout $k \geqslant 1$ et tout $s \in F$, $|Q_k(s) - Q(s)| \leqslant \varepsilon$

(21.14) pour tout $k \geqslant 1$ et tout s réel $|Q_k(s)| \leqslant b$

(21.15) $Q_k(s) \to 0$ si $s \notin H \quad (k \to +\infty)$

(21.16) $$\Big|\int_{\mathbb{R}} \overline{Q}_k(s)d\mu(s) - \int_{\mathbb{R}} \overline{Q}(s)d\mu(s)\Big| \leqslant \varepsilon\, \|\mu\|.$$

Pour vérifier (21.13) écrivons

(21.17) $$|Q_k(s) - Q(s)| \leqslant \sum_{(\lambda,r)\in A} |b(\lambda\ ,r)|\, \Big|\exp 2\pi i\lambda s - \int \exp 2\pi its\ d\mu_{k,\lambda}(t)\Big|.$$

Si $s \in H$, $\exp 2\pi i\lambda s = \langle s^*\ ,\ \lambda^*\rangle$ et $\int_{\mathbb{R}} \exp 2\pi its\ d\mu_{k,\lambda}(t) =$
$\int_G \langle s^*\ ,\ x\rangle d\mu^*_{k,\lambda}(x) = \langle s^*\ ,\ \lambda^*\rangle \int_W \langle s^*, x\rangle d\mu^*_{k,\lambda}(x+\lambda^*)$. Pour tout $s \in F$, cette dernière intégrale ne diffère de 1 que d'au plus ε/b ce qui achève de prouver (21.13). Les propriétés (21.14) et (21.15) sont immédiates et la preuve de (21.16) est identique à celle de (21.13).

On peut alors écrire

$$\Big|\int \overline{Q}(s)d\mu(s)\Big| \geqslant a(1 - \varepsilon) \geqslant \|\mu\|(1 - 2\varepsilon)$$

grâce aux choix de μ et de Q. L'inégalité (21.16) entraine

(21.18) $$\left|\int \bar{Q}_k(s)d\mu(s)\right| \geqslant \|\mu\|(1-3\varepsilon).$$

Cependant

(21.19) $$\int \bar{Q}_k(s)d\mu(s) = \int_F \bar{Q}_k(s)d\rho(s) + \int_{H\setminus F} \bar{Q}_k(s)d\rho(s)$$
$$+ \int \bar{Q}_k(s)d\sigma(s) = A_k + B_k + C_k.$$

Sur F, $|Q_k - Q| \leqslant \varepsilon$ entraîne $|Q_k| \leqslant 1+\varepsilon$; on a donc $|A_k| \leqslant (1+\varepsilon)\|\rho\|$. Par ailleurs $|B_k| \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon\|\mu\|$ comme le montrent (21.14) et la définition de F. Enfin le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $C_k \to 0$ $(k \to +\infty)$. Ainsi, à la limite

(21.20) $$(1-3\varepsilon)\|\mu\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\rho\| + \varepsilon\|\mu\|$$

qui implique, si $\varepsilon > 0$ est assez petit

(21.21) $$\|\mu\| \leqslant (1+6\varepsilon)\|\rho\| \quad \text{et} \quad \|\sigma\| \leqslant 6\varepsilon\|\rho\| \leqslant 6\varepsilon(1+\varepsilon)a.$$

On ne peut passer à la limite dans (21.21) car μ, ρ et σ dépendent de $\varepsilon > 0$.

Nous avons cependant montré que pour tout $\eta > 0$, on peut trouver une fonction H-presque périodique $f = \hat{\rho}$ telle que

(21.22) $$\sup_{\Lambda+E} |f - \xi| \leqslant \eta .$$

Il en résulte facilement que deux points distincts de $E \times K$ ne sont jamais congrus modulo D.

Soit, en effet, D' le groupe des couples $(t, -t^*)$ où $t \in i(D)$; il est équivalent de dire que deux points distincts de $E \times K$ ne sont jamais congrus modulo D ou modulo D'. C'est cette dernière assertion que nous allons prouver.

Définissons une fonction continue et D'-périodique $g : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{C}$ par

(21.23) $$g(t\ ,\ x) = \int_H \overline{\langle s^* , x\rangle \exp 2\pi i t s}\ d\rho(s).$$

Il est clair que $g(t\ ,\lambda^*) = \hat{\rho}(\lambda + t)$ pour tout $\lambda \in i(D)$ et $t \in \mathbb{R}$ et l'inégalité (21.22) peut donc être récrite

(21.24) $$| g(t\ ,\lambda^*) - \langle s_o^* , \lambda^*\rangle | \leqslant \eta \qquad (t \in E,\ \lambda \in \Lambda).$$

Puisque Λ^* est dense dans K, la continuité de g et (21.24) impliquent

(21.25) $$\sup_{E \times K} | g(t\ ,\ x) - \langle s_o^* , x\rangle | \leqslant \eta.$$

Supposons que $(t_1 , x_1) - (t_2 , x_2) \in D'$ et que $t_j \in E$, $x_j \in K$ si $j = 1, 2$. L'inégalité (21.25) et la périodicité de g entraînent

(21.26) $$|\langle s_o^* , x_1\rangle - \langle s_o^* , x_2\rangle| \leqslant 2\eta.$$

Cette fois on peut faire tendre $\eta > 0$ vers 0 pour obtenir $\langle s_o^* , x_1\rangle = \langle s_o^* , x_2\rangle$. Si $u = t_1 - t_2$, u appartient à $i(D)$ et $u^* = x_2 - x_1$ ce qui conduit à $\langle s_o^* , u^*\rangle = \exp 2\pi s_o u = 1$. Soit $\delta(E)$ le diamètre de E ; si $0 < |s_o| < \frac{1}{\delta(E)}$, il est impossible d'avoir $s_o u \in \mathbb{Z}$ sans avoir $s_o u = 0$. Donc $u = u^* = 0$, $t_1 = t_2$ et $x_1 = x_2$. Ce qu'il fallait démontrer.

22. LA PREUVE DE L'IMPLICATION (20.8) $\Rightarrow$ (20.6). Si (20.8) est vérifiée, montrons l'existence d'une constante $C > 0$ et d'un compact E' dont l'intérieur contient E tels que les deux propriétés suivantes soient satisfaites

(22.1) les différents translatés $\lambda + E'$, $\lambda \in \Lambda$, de E' sont deux à deux disjoints

(22.2) pour tout $s_o \in H$, il y a une mesure de Radon complexe μ dont la norme ne dépasse pas C et telle que $\hat{\mu}(\lambda + t) = \exp 2\pi i \lambda s_o$ pour $\lambda \in \Lambda$, $t \in E'$.

S'il en est ainsi, pour tout $f \in X$, la relation $(Lf)(s_o) = \int_{\mathbb{R}} f(-s) d\mu(s)$ et

(22.2) entraînent (20.6).

Pour construire μ, nous ferons encore de l'analyse harmonique dans $\mathbb{R} \times G$. Soit Y le compact $E \times (-K)$. Deux points distincts de Y ne sont jamais congrus modulo D ; en d'autres termes, 0 est le seul point commun à $Y - Y$ et à D. Puisque D est discret, il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R} \times G$ tel que $Y + W$ partage encore cette propriété. Soit $\alpha : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}$ une fonction "très régulière", c'est-à-dire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times G)$ ([10], § 7), égale à 1 sur un voisinage de Y et à 0 hors de $Y + W$. Pour tout $(s_o , s_o^*) \in \Delta$, posons $\beta(t,x) = \langle s_o^*, x\rangle \alpha(t,x)$. La fonction β, nulle hors de $Y + W$ a pour transformée de Fourier $\hat{\beta}(s , \gamma) = \hat{\alpha}(s , \gamma - s_o^*)$.

Enfin l'on pose

$$h(t , x) = \sum_{d \in D} \beta[t - i(d) , x - j(d)] . \tag{22.3}$$

Alors h, restreinte à $Y + W$ coïncide avec β. C'est-à-dire que $h(t,x) = \langle s_o^*, x\rangle$ au voisinage de Y. D'autre part, h est une fonction D-périodique dont la série de Fourier est

$$h(t,x) = \sum_{s \in H} c(s) \exp 2\pi i t s \overline{\langle s^*, x\rangle} \tag{22.4}$$

avec $c(s) = \hat{\alpha}(s , s_o^* - s^*)$ de sorte que, grâce à la décroissance rapide de $\hat{\alpha}$, $\sum_{s \in H} |c(s)| \leqslant C$ où C ne dépend pas de s_o.

La restriction g de la fonction h à $\mathbb{R} \times \{0\}$ se présente donc comme la transformée de Fourier d'une mesure atomique, μ, portée par H, dont la norme ne dépasse pas C. Soit E' un ensemble compact, dont l'intérieur contient E et tel que $\alpha = 1$ sur $E' \times (-K)$. Montrons que

(22.5) $$g(\lambda + r) = \exp -2\pi i \lambda s_o , \quad \lambda \in \Lambda , \quad r \in E'$$

ce qui achèvera de prouver (22.1).

On a $(\lambda + r , 0) - (r , -\lambda^*) \in D$ de sorte que $h(\lambda + r , 0) = h(r , -\lambda^*) =$ $\langle s_o^* , -\lambda^* \rangle = \exp -2\pi i \lambda s_o$.

23. LA PREUVE DE L'APPLICATION (20.6) $\Rightarrow$ (20.7). Elle est très simple. En premier lieu la continuité de l'opérateur $\mathscr{L}$ entraîne que pour tout $f \in X$,

(23.1) $$\sup_{\mathbb{R}^2} \Big| \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) \exp 2\pi i \lambda y \Big| \leqslant C \| f \|_\infty \quad ;$$

on le vérifie en remarquant que X est invariant par translation. Fixons $y = t_o$ et posons $g(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t_o$. La formule des accroissements finis donne

(23.2) $$| g(t_o) - g(0) | \leqslant | t_o | \sup_{\mathbb{R}} | g'(t) | .$$

Mais $g'(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f'_\lambda(t) \exp 2\pi i \lambda t_o$ et le spectre de la fonction g est contenu dans le compact $E \subset [-\ell , \ell]$, $\ell \geqslant 0$. L'inégalité de Bernstein implique $\| g' \|_\infty \leqslant \ell \| g \|_\infty \leqslant C \ell \| f \|_\infty$. L'inégalité (23.2) fournit alors (20.7).

24. LA PROPRIETE DE BOCHNER. Rappelons en la définition

DEFINITION 11. Soit $S \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé de nombres réels et $B(S)$ l'algèbre des restrictions à S des transformées de Fourier-Stieltjes des mesures de Radon complexes bornées. Alors nous dirons que $B(S)$ a la propriété de Bochner si, pour toute fonction continue $\varphi : S \to \mathbb{C}$ et toute constante positive C, les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(24.1) $\varphi \in B(S)$ et sa norme n'y dépasse pas C

(24.2) $\left|\int \varphi\, d\mu\right| \leqslant C \|\hat{\mu}\|_\infty$ pour toute mesure complexe μ dont la support est une partie finie de S.

Nous allons donner une condition suffisante (théorème 13) pour qu'il en soit ainsi. Cette condition s'appliquera à l'ensemble $\Lambda + E$ défini au § 17 lorsque θ est un nombre de Pisot. Les théorèmes 12 et 13 permettront au § 25 de terminer la preuve du théorème 11.

THEOREME 13. Soit $Z \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$, Ω le groupe compact dual de Z lorsque ce dernier est muni de la topologie discrète et $h : \mathbb{R} \to \Omega$ l'injection continue d'image dense duale de l'injection canonique de Z dans $\mathbb{R}$.

Supposons qu'un ensemble fermé S de nombres réels ait la propriété suivante : pour tout $t \in S$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite μ_k, $k \geqslant 1$, de mesures de probabilité discrètes portées par Z et par $S \cap [t-\varepsilon\ , t+\varepsilon]$ et telles que, pour tout $\omega \in \Omega$ n'appartenant pas à $h(\mathbb{R})$, $\hat{\mu}_k(\omega) \to 0$ $(k \to +\infty)$.

Alors S a la propriété de Bochner.

Nous suivons Y. Katznelson (communication orale) pour la preuve de ce résultat.

Les transformées de Fourier $\hat{\mu}$ des mesures μ dont les supports sont les parties finies de Z peuvent être définies de deux façons différentes. En premier lieu $Z \subset \mathbb{R}$ et $\hat{\mu}$ est une somme trigonométrique $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. En second lieu Z est regardé comme un groupe discret et alors $\hat{\mu}$ devient une somme trigonométrique $Q : \Omega \to \mathbb{C}$. Le lien entre P et Q est donné par

(24.3) $$Q(h(s)) = P(s) \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\sup_{\Omega} |Q(\omega)| = \sup_{\mathbb{R}} |P| = \|\hat{\mu}\|_\infty \tag{24.4}$$

et l'on désignera par Y l'espace vectoriel des sommes trigonométriques Q sur Ω normées par (24.4) et associées à des mesures μ portées par $S \cap Z$.

Nous avons seulement à prouver que (24.2) implique (24.1) car l'implication inverse est évidente. Soit donc $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant (24.2) et soit $0 < a = \sup \left| \int \varphi \, d\mu \right|$ lorsque μ est une mesure dont le support est une partie finie de $S \cap Z$ et telle que $\|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant 1$.

C'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une mesure

$$d\nu(t) = \sum_{s \in S} b_s \delta(t - s) \tag{24.5}$$

portée par une partie finie de $S \cap Z$ telle que $\|\hat{\nu}\|_\infty \leqslant 1$ et que

$$\left| \int \varphi \, d\nu \right| \geqslant a - \varepsilon . \tag{24.6}$$

Soit $b = \sum_{s \in S} |b_s|$. L'hypothèse du théorème 13 permet, pour tout $\alpha > 0$, de remplacer chaque masse ponctuelle $\delta(t-s)$ figurant dans (24.5) par une mesure de probabilité $d\mu_{k,s}$ portée par $[s-\alpha, s+\alpha] \cap S$ et par Z. Posons, pour tout $k \geqslant 1$,

$$d\nu_k(t) = \sum_{s \in S} b_s \, d\mu_{k,s}(t) \;; \tag{24.7}$$

ν_k est portée par Z et $\hat{\nu}_k(\omega) \to 0$ $(k \to +\infty)$ pour tout ω n'appartenant pas à $h(\mathbb{R})$.

Puisque la fonction φ est continue, il est possible de trouver $\alpha > 0$ assez petit pour que (24.6) devienne, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\left| \int \varphi \, d\nu_k \right| \geqslant a - 2\varepsilon . \tag{24.8}$$

Nous allons maintenant définir une mesure de Radon complexe $d\rho$ sur Ω.

Soit $\ell : Y \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par

$$\ell(\hat{\mu}) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu \tag{24.9}$$

pour toute mesure μ dont le support est une partie finie de $S \cap Z$. La norme de ℓ est a et le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger ℓ en une forme linéaire de même norme définie sur $C(\Omega)$. Il existe donc une mesure ρ de norme a telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu = \int_{\Omega} \hat{\mu} \, d\rho \, . \tag{24.10}$$

Le sous-groupe $B = h(\mathbb{R})$ de Ω est la réunion des compacts $B_m = h([-m,m])$; B est un borélien de Ω et l'on peut décomposer ρ en la somme $\sigma + \tau$ d'une mesure portée par B et d'une mesure étrangère à B. On peut récrire (24.10) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu = \int_{B} \hat{\mu} \, d\sigma + \int_{B^C} \hat{\mu} \, d\tau. \tag{24.11}$$

Choisissons m assez grand pour que la masse de σ sur le complémentaire de B_m ne dépasse pas ε / b et alors choisissons α assez petit pour que les transformées de Fourier de ϑ et ϑ_k différent, sur B_m, d'au plus ε. Avec cette valeur de m, on a pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_{\Omega} \hat{\vartheta}_k \, d\rho = \int_{B_m} \hat{\vartheta}_k \, d\sigma + \int_{B_m^C} \hat{\vartheta}_k \, d\sigma + \int_{B^C} \hat{\vartheta}_k \, d\tau = \alpha_k + \beta_k + \gamma_k \, . \tag{24.12}$$

Sur B_m, $|\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}_k| \leqslant \varepsilon$ implique $|\hat{\vartheta}_k| \leqslant 1 + \varepsilon$ et $|\alpha_k| \leqslant (1+\varepsilon)\|\sigma\|$. Par ailleurs $\|\hat{\vartheta}_k\| \leqslant \|\vartheta_k\| \leqslant b$ implique $|\beta_k| \leqslant \varepsilon$ grâce au choix de B_m. Enfin le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $\gamma_k \to 0$ $(k \to +\infty)$. Alors (24.8) et (24.12) deviennent $a - 2\varepsilon \leqslant (1+\varepsilon)\|\sigma\| + \varepsilon$; laissant ε tendre vers 0, il vient $a = \|\sigma\| + \|\tau\| \leqslant \|\sigma\|$ et $\tau = 0$. La mesure σ est l'image, par h, d'une mesure de Radon λ portée par $\mathbb{R}$. La relation (24.10) devient $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mu} \, d\lambda$ pour toute mesure μ portée par $S \cap Z$. Puisque $S \cap Z$ est dense dans S, on a bien $\varphi = \hat{\lambda}$ et la norme de φ, dans $B(S)$, ne dépasse pas $\| \lambda \| = \| \sigma \| = a \leqslant C$. Le théorème est prouvé.

Application. Soit $\theta > 2$ un nombre de Pisot, Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \theta^k$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1 et E l'ensemble compact de toutes les sommes infinies $\sum_1^{\infty} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1. Alors $S = \Lambda + E$ possède la propriété de Bochner.

Soient $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme minimal de θ, R l'anneau $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta + \ldots + \mathbb{Z}\theta^{n-1}$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $R_k = \theta^{-k} R$. Alors R_k est une suite croissante de sous-groupes de $\mathbb{R}$ dont la réunion est désignée par Z. Tout élément $t \in Z$ peut être écrit, d'une infinité de façons, comme une somme finie

$$t = \sum_{k \geqslant 0} m_k \theta^{-k} \quad \text{où} \quad m_k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad m_k = 0 \quad \text{si} \quad k \quad \text{est assez grand.}$$

Il est facile de montrer que le groupe dual Ω de Z est le sous-groupe de $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ composé de toutes les suites $\omega = (\varphi_k)_{k \geqslant 0}$ telles que

$$\varphi_k \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \varphi_k + a_1 \varphi_{k+1} + \ldots + a_n \varphi_{k+n} \equiv 0 \pmod 1 \quad \text{pour tout} \quad k \geqslant 0.$$

Soient $t \in \Lambda + E$, $\varepsilon > 0$, $s = \sum_{k \geqslant -m} \varepsilon_k \theta^k$ ($\varepsilon_k = 0$ ou 1) une somme finie telle que $|t - s| \leqslant \varepsilon/2$ et $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ deux entiers tels que $p \geqslant m$ et que $\sum_{p+1}^{\infty} \theta^{-k} \leqslant \varepsilon/2$. Appelons $\mu_{p,q}$ la mesure donnant la masse 2^{-q} à chacune des sommes $\sum_{p+1}^{p+q} \varepsilon_k \theta^{-k}$, $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

On vérifie sans peine que $\lim_{q \to +\infty} \hat{\mu}_{p,q}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ qui n'est dans $h(\mathbb{R})$, ([12], p. 231).

25. LA PREUVE DU THEOREME 11 (suite et fin). Nous avons montré au § 19 que si $\theta > 2$ est un nombre de Pisot, Λ est un modèle assez régulier. Nous venons de voir que, dans les mêmes conditions, $S = \Lambda + E$ possède la propriété de Bochner. Le théorème 12 peut être utilisé. Il nous suffit donc de vérifier l'équivalence des deux propriétés.

(25.1) deux points distincts de $E \times K$ sont congrus modulo D et

(25.2) il y a un entier $j \geqslant 0$, $j+1$ entiers $\varepsilon_o, \ldots, \varepsilon_j$ valant -1, 0 et 1 et n (n est le degré de θ sur $\mathbb{Q}$) entiers rationnels $q_o, \ldots, q_{n-1}$ non tous nuls tels que

$$\varepsilon_o + \varepsilon_1\theta + \ldots + \varepsilon_j\theta^j = (1 - \theta^{j+1})(q_o + q_1\theta + \ldots + q_{n-1}\theta^{n-1}).$$

Montrons d'abord que (25.1) implique (25.2). Nous utiliserons essentiellement la proposition 16 ci-dessous dont voici les notations. Soient $\mathcal{K}$ une extension de $\mathbb{Q}$ de degré fini n, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers algèbriques de $\mathcal{K}$, P l'ensemble des places p sur $\mathcal{K}$, I l'ensemble des places infinies, J l'ensemble des places finies et pour tout $p \in P$, $\mathcal{K}_p$ le complété correspondant de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{O}_p$ la fermeture de $p(\mathcal{O})$ dans $\mathcal{K}_p$. Soient $\mathcal{O}_J = \prod_{p \in J} \mathcal{O}_p$, A_J le produit semi-direct $\prod_{p \in J} \mathcal{K}_p$, $\mathcal{O}_I$ l'anneau des $(p(t))_{p \in I}$, $t \in \mathcal{O}$, et $\beta : \mathcal{K} \to A_J$ l'injection canonique définie par $\beta(t) = (p(t))_{p \in J}$, $t \in \mathcal{K}$. On définit de même A_I et $\alpha : \mathcal{K} \to A_I$.

Un ordre R de $\mathcal{O}$ est un sous-anneau de $\mathcal{O}$ contenant une base de $\mathcal{K}$ sur $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, un ordre R de $\mathcal{O}$ est un sous-anneau R de $\mathcal{O}$ tel que le groupe quotient $\mathcal{O}/R$ soit fini.

PROPOSITION 16. Pour tout ordre R de $\mathcal{O}$, soit R_J la fermeture de

$\beta(R)$ dans $\mathcal{O}_J$. Alors $R = \beta^{-1}(R_J)$ et la correspondance $R \to R_J$ est une bijection de l'ensemble des ordres R de $\mathcal{O}$ sur l'ensemble des sous-anneaux compacts et ouverts de $\mathcal{O}_J$.

Pour démontrer la proposition 16, nous désignerons par $A = A_I \times A_J$ l'anneau des adèles de $\mathcal{K}$ et par $\xi : A \to \mathbb{T}$ un caractère non trivial égal à 1 sur $\mathcal{K}$ (considéré comme plongé dans A). Alors $\xi = \xi_I \xi_J$ où $\xi_I : A_I \to \mathbb{T}$ et $\xi_J : A_j \to \mathbb{T}$ sont deux caractères. Les sous-groupes $m\mathcal{O}_J$ constituent un système fondamental de voisinages de 0 dans A_J ; il existe donc un entier m tel que $\xi_J = 1$ sur $m\mathcal{O}_J$. Puisque $\xi_I \xi_J = 1$ sur $\mathcal{K}$, $\xi_I = 1$ sur le sous-groupe discret $m\mathcal{O}_I$ de $A_I = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$. Soient $a_1, \ldots, a_{r+s}$ des nombres réels ou complexes tels que pour tout $\underline{\underline{x}} \in A_I$,

$$\xi_I(\underline{\underline{x}}) = \exp 2\pi i(a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r + 2\,\mathcal{R}e(a_{r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{r+s}x_{r+s})) ,$$

$\mathcal{R}e$ désignant la partie réelle.

Nous définirons a_j pour $r+s+1 \leqslant j \leqslant r+2s = n$ par $a_j = \bar{a}_{j-s}$. Puisque $\xi_I = 1$ sur $m\mathcal{O}_I$, on a $\sum_1^n a_j \sigma_j(t) \in \mathbb{Q}$ pour tout $t \in \mathcal{K}$. On peut donc trouver un $a \in \mathcal{K}$ tel que $a_j = \sigma_j(a)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Si a était nul, ξ_I serait identiquement égal à 1. Donc ξ_J serait égal à 1 sur la projection de $\mathcal{K}$ sur A_J ; mais cette projection est dense dans A_J. Donc ξ_J serait identiquement 1 et il en serait de même de ξ, cas que nous avons écarté.

On a donc $a \neq 0$ et pour tout $t \in \mathcal{K}$, $\xi_I[\alpha(t)] = \exp 2\pi i \operatorname{Tr}(at)$, Tr désignant la trace.

Nous sommes en mesure de prouver que $R = \beta^{-1}(R_J)$. Soit $t_o \in \mathcal{O}$ tel que

$t_o \notin R$ et soit $\chi : \mathcal{O} \to \mathbf{T}$ un caractère tel que $\chi(t_o) \neq 1$ tandis que $\chi = 1$ sur R. Soit m un entier tel que $m\mathcal{O} \subset R$. On peut, grâce à l'isomorphisme entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_I$ transporter χ en $\chi_I : \mathcal{O}_I \to \mathbf{T}$. Prolongeons χ_I en un caractère, encore noté $\chi_I : A_I \to \mathbf{T}$. Alors il existe une suite $(b_1, \ldots, b_{r+s})$ de nombres réels ou complexes telle que

$$\chi_I(\underline{x}) = \exp 2\pi i \left[b_1 x_1 + \ldots + b_r x_r + 2\,\mathcal{R}e(b_{r+1} x_{r+1} + \ldots + b_{r+s} x_{r+s}) \right] .$$

Comme ci-dessus nous montrons l'existence d'un $b \in \mathcal{K}$ tel que $b_j = \sigma_j(b)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r+s$. Il en résulte que pour tout $t \in \mathcal{O}$, $\chi(t) = \exp 2\pi i \operatorname{Tr}(bt)$. Posons $c = b/a \in \mathcal{K}$. Alors pour $t \in \mathcal{O}$, $\chi(t) = \xi_I[\alpha(ct)] = \xi_J[-\beta(ct)]$. Désignons par $\chi_J : A_J \to \mathbf{T}$ la caractère continu défini par $\chi_J(y) = \xi_J[-\beta(c)y]$. Alors pour tout $t \in \mathcal{O}$, $\chi(t) = \chi_J(\beta(t))$. Donc $\chi_J = 1$ sur $\beta(R)$ et aussi sur la fermeture R_J de $\beta(R)$ dans $\mathcal{O}_J$. Puisque $\chi(t_o) \neq 1$, $\chi_J[\beta(t_o)]$ est aussi différent de 1 et $\beta(t_o)$ n'appartient pas à R_J. Donc $R = \beta^{-1}(R_J)$.

Nous utiliserons maintenant les notations du § 19.

Si deux points distincts de $E \times K$ sont congrus modulo D il existe un $d \in D$, $d \neq O$ tel que $\lambda = i(d) \in E - E$ tandis que $j(d) \in K - K$. Le compact $K - K \subset A'$ est l'ensemble produit $(L - L) \times G_o$ où $L' = L - L \subset \prod_{p \in F} \mathcal{K}_p$ est l'ensemble des sommes $\sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k \zeta^k$, $\varepsilon_k = -1$, 0 ou 1.

La proposition 16 appliquée à $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta + \ldots + \mathbb{Z}\theta^{n-1}$ montre que $\lambda \in R$. Plus précisément, pour tout entier $k \geqslant 1$, on peut écrire $0 \neq \lambda = \varepsilon_o + \varepsilon_1\theta + \ldots$ $\ldots + \varepsilon_k\theta^k + \theta^k\lambda_k$ où $j(\lambda_k) \in K - K$ et $\varepsilon_j = -1$, 0 ou 1 pour $0 \leqslant j \leqslant k$. On vérifie immédiatement que $\lambda_k \in E - E$ et que tous les conjugués de $\lambda_k \in R$ sont uniformément bornés. Donc λ_k appartient à un ensemble fini $A \subset R$. Pour tout $k \geqslant 0$, on a $\lambda_k = \varepsilon_{k+1} + \theta\lambda_{k+1}$ où $j(\lambda_{k+1}) \in K-K$. Comme la suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ n'est peut être pas unique, nous conviendrons, pour tout $k \geqslant 0$, d'appeler η_{k+1} le plus grand des trois nombres $x = -1$, 0 ou 1 tel que $\lambda_k = x + \theta t$ où $j(t) \in K-K$. En partant de $\lambda_o = \lambda$, cette fois la suite des η_k, $k \geqslant 0$, est parfaitement définie. De plus la donnée de λ_k détermine parfaitement λ_{k+1} ; $\lambda_{k+1} = T(\lambda_k)$ où $T : A \to A$ est bien définie. Il s'en suit que la suite des λ_k est périodique à partir d'un certain rang.

Pour aucune valeur de k, λ_k n'est nul. Sinon λ appartiendrait à la fois à $\Lambda - \Lambda$ et à $E - E$ dont l'intersection, pour $\theta > 2$ est réduite à 0. La périodicité de la suite des λ_k, $k \geqslant 0$, montre que, pour un certain $j \geqslant 0$, on peut trouver des entiers $\alpha_o, \ldots, \alpha_j$ pris dans -1, 0 ou 1 tels que

$$\lambda_k = \alpha_o + \alpha_1\theta + \ldots + \alpha_j\theta^j + \theta^{j+1}\lambda_k \,.$$

On a bien une relation (25.2).

Réciproquement, supposons que l'on ait une relation $\lambda = \alpha_o + \alpha_1\theta + \ldots + \alpha_j\theta^j + \theta^{j+1}\lambda$ où $0 \neq \lambda \in R$ et où les α_k sont pris dans -1, 0 ou 1. Par itération, on obtient $\lambda = \alpha_o + \ldots + \alpha_j\theta^j + \ldots + \theta^{kj+k+1}\lambda$. En laissant tendre k vers $+\infty$, on en déduit aussitôt que $j(\lambda) \in K-K$ et en extrayant λ du second membre, on montre de même que $\lambda \in E-E$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREVICH, Z. I. et SHAFAREVICH, I. R. Number theory. Academic Press, 1966.

[2] CASSELS, J. W. S. An introduction to diophantine approximation. Cambridge University Press, 1957.

[3] COIFMAN, R. et WEISS, G. Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 242.

[4] CORDUNEANU, C. Almost periodic functions. Interscience Publishers, 22, 1968.

[5] DE LEEUW, K. et KATZNELSON, Y. On certain homomorphisms of quotients of group algebras. Israël J. Math., 2, 1964, 120-126.

[6] KAHANE, J.-P. et SALEM, R. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963.

[7] KAHANE, J.-P. Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires. Ann. Scient. E.N.S., 3ème série, 79 (1962), 93-150.

[8] KAHANE, J.-P. Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 7 (1957), 292-315.

[9] LEVINSON, N. Gap and density theorems. A. M. S. Coll. Publ., vol. XXVI, 1940.

[10] MEYER, Y. Adèles et séries trigonométriques spéciales. A paraitre aux Annals of Mathematics.

[11] MEYER, Y. Séries trigonométriques spéciales et corps quadratiques. Studia Math., XLIV, 1972, 321-333.

[12] MEYER, Y. Algebraic numbers and harmonic analysis. North Holland Publ. Co. 1972.

[13] RIESZ, F. et NAGY, B. Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest, 1953.

[14] RUDIN, W. Fourier analysis on groups. Interscience Publishers, 12 (1967).

[15] SCHREIBER, J.-P. Approximations diophantiennes et problèmes additifs dans les groupes abéliens localement compacts. Orsay, 1972.

[16] SERRE, J.-P. Cours d'arithmétique. P.U.F. "le Mathématicien", 1970.

[17] WEIL, A. Basic number theory. Berlin, Springer-Verlag, 1967.

[18] ZYGMUND, A. Trigonometric series. 2nd ed., vols I and II. Cambridge Univ. Press, 1968.

POSTFACE

Ce petit livre a été écrit il y a quarante quatre ans. Que peut-on en dire aujourd'hui ? Le problème de la synthèse spectrale qui semblait si important il y a un demi-siècle ne l'est plus aujourd'hui. Le dernier chapitre de ce livre n'a donc pas laissé de trace. Les résultats du premier chapitre ont été complétés par Alain Haraux dans [2] et par Vilmos Komornik dans [14], [15]. Une application à un problème posé par J.-L. Lions en théorie du contrôle est donnée dans [9]. Le second chapitre a ouvert plusieurs voies de recherche. Tout d'abord, un an après la parution de ce livre, Roger Penrose, en utilisant seulement deux losanges, construisait un splendide pavage du plan, invariant par rotation de $2\pi/5$. Ensuite, en 1981, Nicolaas Govert de Bruijn démontrait que les sommets du pavage de Penrose forment un « ensemble modèle » au sens de la définition 6, page 35, de ce livre. Enfin, en 1982, le chimiste Dan Shechtman réussissait à créer des alliages métalliques dont l'image de diffraction présente la symétrie d'ordre cinq des pavages de Penrose. Ces nouvelles structures cristallines ont reçu le nom de « quasi-cristaux ». D. Shechtman obtint le prix Nobel de chimie en 2011 pour cette découverte. Mes « ensembles modèles » sont donc : (i) les sommets des pavages de Penrose et (ii) existent dans la nature. En outre les nombres de Pisot ou de Salem gouvernent l'auto-similarité des quasi-cristaux, comme il est prouvé dans [8]. M. Duneau, D. Gratias, A. Katz et R. V. Moody ont explicité tous ces liens entre chimie et mathématiques. On pourra se reporter à [1], [3], [5], [6], [7], [13] et [14].

Mais les problèmes concernant les estimations locales des fonctions presque-périodiques ont, eux aussi, trouvé une seconde vie grâce aux travaux de A. Olevskii et A. Ulanovskii. Le second chapitre de ce livre est consacré à la question suivante. Étant donné un ensemble discret $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, existe-t-il un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$ « associé » à Λ? Cela signifie qu'il existe une constante C telle que l'on ait

$$\|f\|_\infty \le C \sup_{x\in K} \big|f(x)\big| \tag{1}$$

pour toute fonction presque-périodique (au sens de Bohr)

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\exp(2\pi\, i\lambda\cdot x) \tag{2}$$

dont les fréquences appartiennent à Λ; on écrira alors $f \in \mathcal{C}_\Lambda$ et, f étant continue, on a $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$. Si (1) a lieu, Λ est uniformément discret, mais cette condition est loin d'être suffisante.

En dimension 1, en supposant que K est un intervalle et que Λ est un « modèle assez régulier », le théorème 9 du chapitre II permet de calculer la borne inférieure des longueurs des intervalles associés à Λ. Voir également [6].

Le même problème se pose pour la norme L^2. On veut alors savoir si

$$\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2\Big)^{1/2} \le C\Big(\int_K \big|f(x)\big|^2 \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \tag{3}$$

est vérifiée pour toute fonction $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\exp(2\pi i\lambda\cdot x)$. Cela entraîne que Λ est uniformément discret. Le membre de gauche de (3) est alors une norme équivalente à

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_{K+y}\big|f(x)\big|^2\mathrm{d}x\Big)^{1/2}. \tag{4}$$

On peut enfin remplacer 2 par p et chercher les couples (Λ, K) tels que, pour toute $f\in\mathcal{C}_\Lambda$, on ait

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_{K+y}|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\le C\Big(\int_K|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}. \tag{5}$$

Les propriétés précédentes ne peuvent avoir lieu que si la mesure de K est « suffisamment grande ». Que se passe-t-il si K est « petit » ? Étant donné un ensemble discret $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ et un ensemble compact $K\subset\mathbb{R}^n$, le premier problème est de savoir si toute fonction continue sur K est la restriction à K d'une fonction $f\in\mathcal{C}_\Lambda$. On peut aussi poser la même question en norme L^2 en demandant s'il existe une constante C telle que toute fonction $f\in L^2(K)$ soit la restriction à K d'une d'une fonction presque-périodique généralisée $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\exp(2\pi i\lambda\cdot x)$ dont les fréquences appartiennent à Λ et telle que l'on ait

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|c(\lambda)|^2\le C\int_K|f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

A. Olevskii et A. Ulanovskii ont profondément renouvelé l'étude de ces problèmes en introduisant la notion de « universal sampling set » et de « universal interpolation set » [12].

Définition 1. — Soit $p\in[1,\infty]$ et $d\ge 0$. L'ensemble discret $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ est un « universal interpolation set » pour la norme L^p si Λ a une densité uniforme d et si pour tout ensemble compact K, intégrable au sens de Riemann, et de mesure de Lebesgue supérieure à d, il existe une constante C telle que (5) ait lieu pour toute $f\in\mathcal{C}_\Lambda$.

Un réseau Λ ne peut avoir cette propriété. Un quasi-cristal simple est un ensemble universel d'interpolation quelque soit l'exposant $p\in[1,\infty]$. Ceci est prouvé dans [5] pour $p=\infty$ et dans [10] pour le cas général. Un quasi-cristal simple est un ensemble modèle (Définition 6, page 35) pour lequel $G=\mathbb{R}$ et U est un intervalle. Mais un quasi-cristal général n'est pas nécessairement un « universal interpolation set ».

Définition 2. — Soit $p\in[1,\infty)$. L'ensemble discret $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ est un ensemble d'échantillonnage universel pour la norme L^p si Λ a une densité uniforme d et si pour tout ensemble compact K de mesure de Lebesgue inférieure à d il existe une constante C telle que toute fonction $f\in L^p(K)$ soit la restriction à K d'une fonction g presque-périodique généralisée, dont les fréquences appartiennent à Λ, et vérifiant

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\Big(\int_{K+y}\big|f(x)\big|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\le C\Big(\int_K\big|f(x)\big|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}. \tag{6}$$

Un réseau Λ ne peut avoir cette propriété. Un quasi-cristal simple est un ensemble universel d'échantillonnage. Ceci est prouvé dans [4] pour $p = 2$ et dans [9] pour le cas général.

Cette direction de recherche a des applications intéressantes à la théorie de l'échantillonnage irrégulier en traitement du signal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Baake and R. V. Moody (Eds.), *Directions in Mathematical Quasicrystals*. American Mathematical Society, CRM Monograph Series (2001).

[2] A. Haraux, *Propriété d'oscillation des solutions de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet au bord*. Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, 1984–1985.

[3] J. C. Lagarias. *Meyer's concept of quasi-crystal and quasi-regular sets*. Communications in Mathematical Physics **179** (2) (1996), pp. 365–376.

[4] B. Matei and Y. Meyer, *Simple quasi-crystals are sets of stable sampling*. Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010), pp. 947–964.

[5] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*. North-Holland, Amsterdam, (1972).

[6] Y. Meyer, *Adèles et séries trigonométriques spéciales*. Annals of Mathematics **97** (1973), pp. 171–186.

[7] Y. Meyer, *Quasi-crystals, Almost periodic patterns, mean-periodic functions, and irregular sampling*. Afr. Diaspora J. Math. **13**, No 1 (2012), pp. 1–45.

[8] Y. Meyer, *Quasi-crystals, Diophantine Approximation and Algebraic Numbers (1972)*, pp. 3–16 in « Beyond Quasi-crystals » F. Axel, D. Gratias (eds.). Les Éditions de Physique, Springer (1995).

[9] Y. Meyer, *Étude d'un modèle mathématique issu du contrôle des structures spatiales déformables*, pp. 234–242 in « Nonlinear partial differential equations and their applications », Collège de France Seminar, Vol. VII (1985). H. Brezis and J.-L. Lions eds. Pitnam.

[9] Y. Meyer, *Onsager Lecture*. Trondheim, February 2018.

[10] R. V. Moody, *Meyer sets and their duals*, pp. 403–441 in « The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order (Waterloo, ON, 1995) », NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences **489**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[11] A. Olevskii and A. Ulanovskii, *Universal sampling of band-limited signals*. Comptes Rendus Mathématique **342** (2006), p. 927–931.

[12] M. Senechal, *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge University Press, 1995.

[13] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias et J. W. Cahn, *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*. Phys. Rev. Lett. **53**, No 20 (1984), pp. 1951–1953.

[14] V. Komornik, *On the vibrations of solid balls*. Acta Math. Hungar **54**, No 3–4 (1989), pp. 309–317.

[15] V. Komornik, *On the vibrations of a spherical membrane*. Houston J. Math. **16**, No. 2 (1990), pp. 187–193.

Les fonctions presque périodiques ont été définies et étudiées par le mathématicien danois Harald Bohr. La motivation de Bohr était la théorie des nombres et l'étude des séries de Dirichlet. Un polynôme trigonométrique en une variable réelle x est une somme finie

$$S(x) = \sum_{1}^{N} c_k \exp(2\pi i \lambda_k x)$$

où les fréquences λ_k sont des nombres réels arbitraires et où les coefficients c_k sont des nombres réels ou complexes. Une fonction presque périodique au sens de Bohr est la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite S_m de polynômes trigonométriques. Cette définition amène à calculer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x)| = \|S\|_\infty$ ce qui est souvent difficile. Définissons $T(\epsilon) > 0$ comme la borne inférieure de l'ensemble des $|x|$ tels que $|S(x)| \geq (1-\epsilon)\|S\|_\infty$. Estimer $T(\epsilon)$ quand $\epsilon \to 0$ dépend des propriétés arithmétiques de l'ensemble des fréquences λ_k. Ce petit livre est consacré à ces questions qui sont illustrées sur trois exemples.