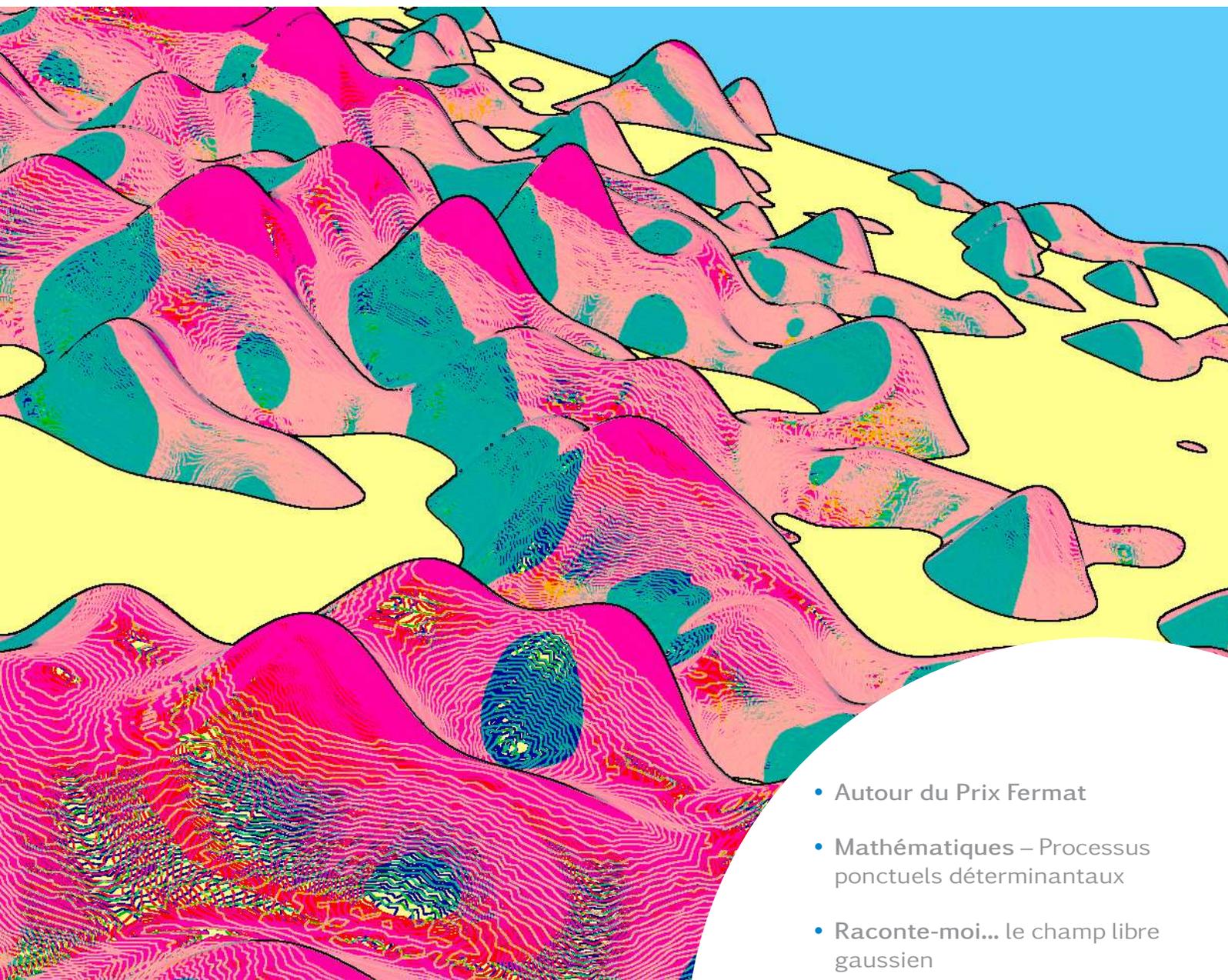


la Gazette

des Mathématiciens



- Autour du Prix Fermat
- Mathématiques – Processus ponctuels déterminantaux
- Raconte-moi... le champ libre gaussien
- Tribune libre – Quelle(s) application(s) pour le plan Torossian-Villani

Société
Mathématique
de France



Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Boris ADAMCZEWSKI

Institut Camille Jordan, Lyon
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Rédacteurs

Thomas ALAZARD

École Normale Supérieure de Paris-Saclay
thomas.alazard@cmla.ens-cachan.fr

Maxime BOURRIGAN

Lycée Saint-Genève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Sébastien GOUÉZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Fanny KASSEL

IHÉS
kassel@ihes.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. Cette image réalisée par Alejandro Rivera (Institut Fourier) est le graphe de la partie positive du champ libre gaussien sur le tore plat $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2)$ projeté sur la somme des espaces propres du laplacien de valeur propre plus petite que 500. Les textures et couleurs ajoutées sur le graphe sont purement décoratives. La fonction a été calculée avec C++ comme une somme de polynômes trigonométriques avec des poids aléatoires bien choisis, le graphe a été réalisé sur Python et les textures et couleurs ont été réalisées avec GIMP. (crédit : Alejandro RIVERA).

N° 157

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Le monde mathématique s'apprête à connaître de nouveau sa petite effervescence quadriennale. Sur un air de samba cette fois, car c'est Rio de Janeiro qui accueille le prochain congrès international. Qui sait, les lauréat(e)s de la médaille Fields fêteront peut-être leur succès au milieu des cariocas enjoués de Pedra do Sal. Toute médaille à malheureusement son revers. Peut-être s'agit-il ici d'une subtile facétie Möbiusienne, mais celui de la médaille Fields semble étrangement poindre sur l'inscription de son avers : *Transire suum pectus mundoque potiri*. Exercice délicat s'il en est, qui attend donc ces jeunes prodiges vers lesquels tous les regards seront désormais portés.

En attendant de découvrir la liste des heureux élus, la *Gazette* consacre un dossier à un autre prix prestigieux, le Prix Fermat 2017. Il a été récemment attribué à Simon Brendle et Nader Masmoudi pour leurs contributions respectives dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Quant aux jeunes pousses, elles sont également à l'honneur à travers le Prix Fermat Junior.

Mathématiques. Il faut bien l'avouer, l'escapade qui t'est proposée dans ce numéro est légèrement biaisée. Rien de bien étonnant puisqu'il est question, sous une forme ou une autre, de probabilités ! Au programme : initiation à l'interaction coulombienne sous la plume de Sylvia Serfaty, découverte des processus déterminantaux avec Adrien Hardy et Mylène Maïda, et enfin, Rémi Rhodes te racontera le champ libre gaussien. La couverture de cette *Gazette* est d'ailleurs une invitation à une rêverie estivale au cœur même du champ libre gaussien.

Diffusions des savoirs. S'il est difficile de prédire (mais le souhaites-tu vraiment ?) quel sera au juste le bilan de l'actuel président des États-Unis, ce dernier pourra toujours se targuer d'avoir enrichi notre champ lexical d'un nouvel anglicisme. Les *fake news* ne sont pas l'apanage des seuls politiciens mais touchent également les scientifiques, comme l'illustre par exemple la question du réchauffement climatique. La journée Sciences et Médias qui s'est déroulée à la BnF en janvier dernier avait justement pour thème :

comment lutter contre la désinformation scientifique ? Robert Farhi te propose un compte-rendu de cette journée.

Ce n'est pas un scoop, l'enseignement des mathématiques regorge d'innombrables défis. Parfois vertigineux. D'aucun serait tenté de dire, avec Baudelaire, que nul n'a sondé le fond de ces abîmes. Sache que la *Gazette* ne néglige pas ces questions importantes. Tout d'abord, elle relaie l'appel lancé par Fabrice Vanderbrouck et Stéphane Vinatier pour une plus grande implication des universitaires dans l'enseignement des mathématiques, à travers leur investissement dans les IREM. Ensuite, elle revient sur la Mission Mathématiques, plus connue sous le nom de rapport Torossian-Villani. La SMF a interrogé Cédric Villani afin qu'il donne à notre communauté un éclairage sur ce travail. Sa réponse fait l'objet d'une *Tribune Libre*.

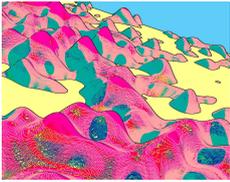
Tu trouveras dans la rubrique *Parité* un témoignage d'Anne Bertrand, celui d'une femme en classe préparatoire à l'orée des années soixante-dix. Ou quand l'ascenseur social semble en panne...

À l'heure du tout-numérique, la conservation sous forme papier des ouvrages et articles mathématiques, dont le nombre ne cesse évidemment de croître, est un enjeu important. Y répondre est précisément l'objectif de PC-Math, le plan de conservation partagé en mathématiques que te présente Claude Sabbah dans la rubrique *Information*. Un savant mélange entre La Bibliothèque de Babel et le cloud computing.

Enfin, un *Carnet* est dédié à Gilles Lachaud qui nous a quittés récemment. Je remercie très chaleureusement Caroline Ehrhardt et Pierre Loidreau pour leur investissement dans le comité de rédaction durant ses six dernières années et souhaite également la bienvenue aux nouveaux arrivants : Pauline Lafitte, Maxime Bourrigan et Christophe Eckès.

En te souhaitant une agréable lecture et un bel été,

Boris ADAMCZEWSKI



N° 157

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
RAPPORT MORAL	5
Rapport Moral	5
AUTOUR DU PRIX FERMAT	18
Le Prix Fermat 2017 et ses lauréats	18
The contributions of Simon Brendle – <i>M. STRUWE</i>	18
Les contributions de Nader Masmoudi – <i>F. BOYER</i>	21
Le Prix Fermat Junior 2017 et ses lauréats – <i>J. BELLIER-MILLÈS et J.-F. COULOMBEL</i>	27
MATHÉMATIQUES	29
Systèmes de points en interaction coulombienne – <i>S. SERFATY</i>	29
Processus ponctuels déterminantaux – <i>A. HARDY et M. MAÏDA</i>	38
DIFFUSION DES SAVOIRS	49
Comment lutter contre la désinformation scientifique? – <i>R. FARHI</i>	49
Pour un investissement plus massif des universitaires dans les IREM – <i>F. VANDEBROUCK et S. VINATIER</i>	55
PARITÉ	59
Témoignage – <i>A. BERTRAND</i>	59
RACONTE-MOI	63
... le champ libre gaussien – <i>R. RHODES</i>	63
TRIBUNE LIBRE	69
Quelle(s) application(s) pour le plan Torossian-Villani?	69
INFORMATION	72
Le plan de conservation partagée en mathématiques – <i>C. SABBAH</i>	72
CARNET	74
In memoriam Gilles Lachaud – <i>Y. AUBRY</i>	74
LIVRES	76

Mot du président

Chères et chers collègues,

Grâce à la confiance du conseil d'administration de la SMF, j'entame une troisième année à la présidence de la SMF. C'est le moment pour moi de remercier les personnes qui ont grandement contribué au fonctionnement de notre société savante. Gérald Bourgeois a accompagné la remise en état de la cellule de diffusion à Marseille : nous avons à présent un bâtiment comme neuf, des stocks bien organisés et des personnels motivés. Valérie Berthé a œuvré pendant deux ans, en coordination avec les comités de rédaction, pour améliorer le fonctionnement de la maison d'édition. Grâce à elle nous avons des perspectives intéressantes que nous tenterons d'atteindre au plus vite. G. Grancher a été indispensable dans le processus de refonte du système informatique, et V. Beffara a géré pour le mieux les activités grand public de la SMF. Je les remercie sincèrement pour leur engagement et leur forte implication, et aussi pour toutes les discussions et débats animés au sein du Bureau.

L'année qui vient sera elle aussi porteuse de changements à la SMF, notamment avec la finalisation de la refonte de notre système informatique et une réorganisation de la maison d'édition. L'ensemble des équipes de la SMF et du bureau est mobilisé sur ces sujets.

Nous continuerons également à être attentifs aux réformes de l'enseignement, qui ont eu ou auront nécessairement des conséquences sur notre quotidien (parcoursup, la mission maths, la formation initiale et continue des enseignants, le futur plan licence). Dans cette *Gazette*, vous trouverez un texte de Cédric Villani qui fait suite à des échanges que nous avons eus sur les mission maths et baccalauréat. Il nous faudra rester vigilants sur le devenir des agrégés-docteurs, toujours susceptible d'être entravé par des notes de service limitant leur possibilité de détachement.

Beaucoup de travail, donc, avec toujours la volonté des équipes de la SMF de servir au mieux la communauté et les mathématiques!

Je vous souhaite un bel été.

Le 1^{er} juillet 2018

Stéphane SEURET, président de la SMF

1. Affaires générales

1.1 – Situation générale

L'année qui vient de s'écouler a été très dense au sein de la SMF, qui poursuit sa transformation numérique et sa restructuration. Les principales activités de l'année ont été :

- la refonte du système informatique et du site web;
- les réflexions et évolutions de la maison d'édition SMF;
- le projet 2RCIRM et l'agrandissement du restaurant du CIRM;
- la forte implication de la SMF dans les réformes en cours sur l'enseignement des mathématiques.

L'objectif commun aux deux premiers points ci-dessus est la pérennisation dans le temps du fonctionnement de la SMF, à la fois au niveau matériel, fonctionnel et opérationnel.

Les sources majeures de financement de la SMF sont les adhésions et les publications. Le nombre d'adhésions reste stable en 2017, ce qui est une bonne nouvelle. Cependant, le monde de l'édition subit des transformations importantes (questions sur l'open access, la propriété intellectuelle, la confidentialité des données, baisse de la fréquentation des bibliothèques), ayant pour conséquence une baisse prévisible des revenus pour les prochaines années, à la fois pour nos publications électroniques et papier. Dans ce contexte, les principaux enjeux pour les années à venir sont de revoir le fonctionnement de la maison d'édition pour garantir sa régularité, d'assurer la bonne qualité technique de nos formats \LaTeX et de nos fichiers pdf, des logiciels éditoriaux que nous utilisons, ainsi que (là encore) de notre système informatique et nos serveurs, et d'étudier, en commun avec nos comités éditoriaux, comment susciter encore plus d'intérêt pour la soumission d'articles et livres et la lecture de nos revues.

Ce sont donc de beaux projets à la fois scien-

tifiques, techniques et opérationnels, qui permettront à la SMF de continuer à mener sa mission de soutien aux mathématiques et à la recherche, auprès de tous les publics : enseignants, enseignants-chercheurs, étudiant(e)s, médias, politiques, industriels, et bien sûr les passionné(e)s de mathématiques.

1.2 – Adhérents

Pour la première fois depuis plusieurs années, le nombre d'adhérents reste stable en 2017, sans diminuer (1831 en 2016 et 2017). Nous espérons que cela est une conséquence des nouvelles activités lancées ces dernières années, dont le but est de mettre en avant tout le travail fait pour la communauté par la SMF, et de créer des moments d'échange autour des mathématiques (congrès SMF, concours SMF junior, ...). Une décision importante prise l'an dernier a été de rendre l'adhésion gratuite pour les doctorantes et doctorants, pendant 3 ans, ceci afin de leur faciliter l'accès à la SMF. Nous pensons à travers ces gestes, et d'autres à venir, montrer l'attachement de la SMF au devenir et à l'intégration des jeunes dans la communauté mathématique, et fidéliser nos adhérents.

1.3 – Actions récentes

La SMF organise de nombreuses activités et événements pour la communauté. La plupart d'entre elles seront décrites un peu plus loin dans le paragraphe 1.4 et la Section « Grand Public » (journée des lauréats de l'Académie, congrès SMF 2018, concours SMF junior, Semaines CIRM-SMF). Mentionnons que le 2^e prix Marc Yor a été attribué à C. Garban en février 2018, alors que le 1^{er} prix Marc Yor (décerné à C. Bordenave) a été remis sous la coupole de l'Académie des sciences en novembre 2017, avec la présence des présidents de la SMAI et de la SMF. En plus de ces activités, de nouvelles initiatives ont été mises en place. Tout d'abord un congrès AMS-SMF aura lieu en 2021 à Grenoble, qui sera l'occasion d'échanger avec nos collègues américains

sur les mathématiques et beaucoup d'autres sujets. Le congrès SMF 2020 se déroulera à Nancy. Nous remercions nos collègues (comme ceux de Tours puis Lille) qui s'investissent dans l'organisation de tels événements, qui sont structurants pour la communauté et importants pour démontrer l'implication de la SMF sur l'enseignement, les métiers des mathématiques (à travers les tables rondes), et la vie de la recherche en général (avec des interventions des responsables de l'INSMI, de l'ERC...). Conjointement avec la SMAI et l'Académie des sciences, un prix Jean-Jacques Moreau récompensant une ou un collègue mathématicien travaillant dans l'optimisation ou/et les mathématiques de la décision va être mis en place à partir de l'année 2019.

1.4 – Activités avec d'autres sociétés savantes

La SMF continue d'échanger et de collaborer avec de nombreuses associations et sociétés savantes, notamment la SFDS, la SMAI, mais également avec la Société Française de Physique et la CFEM (voir la Section « Enseignement »). Cela se traduit tout d'abord par les prix Yor et Jean-Jacques Moreau décrits plus haut, remis avec la SMAI et l'Académie des sciences. La SMF a tenu un stand lors du Forum Emploi Maths en décembre 2017, et est maintenant partenaire de cet événement important. Lors de ce Forum est remis le prix AMIES, parrainé par la SFDS, la SMAI et la SMF : nous sommes heureux de participer à cette manifestation ainsi qu'à ce prix. Les sociétés savantes SFDS, SMAI, et SMF sont intervenues ensemble pour alerter le ministère sur la position délicate des agrégés-docteurs se voyant refuser une demande de disponibilité pour finir leur thèse, et pour dénoncer la situation en Turquie de nos collègues enseignants-chercheurs. Avec la CFEM et Femmes & mathématiques (et d'autres), nous avons interpellé directement le ministre sur le mécontentement de la communauté sur les réformes de l'enseignement. À chaque fois nous avons obtenu une réponse et nos interventions ont été suivies d'effet (la SMF a été reçue plusieurs fois par des cabinets ministériels). Deux initiatives, portées par la SFP, ont été également l'occasion de partager nos opinions et nos expériences avec des sociétés savantes non-mathématiques. Tout d'abord, une tribune est rédigée avec 30 autres associations à propos de la rénovation du Palais de la découverte (la SMF a d'ailleurs été reçue par les directeurs du Palais, à

leur demande, pour une présentation du projet de rénovation). Puis, une assemblée de sociétés savantes est en train de prendre forme, dont le but est de pouvoir peser sur la parole publique en défendant les enjeux de la recherche, en mettant en commun nos expériences et moyens d'action. Enfin, la SMF interagit également avec les sociétés savantes étrangères. En 2020, sur proposition de la SMF, le CIRM accueillera la réunion des présidents de sociétés savantes européennes. Et comme annoncé plus haut, un congrès AMS-SMF aura lieu en 2021. Nous sommes en discussion pour organiser des congrès joints avec d'autres pays européens.

1.5 – Refonte du système informatique et du site web

Cet important projet mobilise l'ensemble des personnels SMF et du Bureau depuis fin 2016. Il fait suite au constat de vétusté de notre système informatique et notre site web, qui même s'il fonctionne encore (grâce au travail extraordinaire de bénévoles, notamment M. Demazure, L. Koelblen qui ont permis à la SMF de fonctionner depuis près de 20 ans), n'offre pas de garantie de stabilité et de sécurité nécessaire. Cela est encore plus flagrant alors que l'Union européenne impose depuis mai 2018 de nombreuses règles sur la confidentialité et la sécurité des données et des échanges (données personnelles, paiement...). Depuis février 2017, nous travaillons avec l'entreprise SmartAgence sur cette refonte, qui induit de nombreux changements de fonctionnement à tous les niveaux. Ceux-ci, menés avec le Bureau et les personnels de la SMF, sont nécessaires pour que la SMF puisse envisager sereinement d'autres défis, comme la plus grande diffusion de ses publications. Le site sera effectivement mis en ligne lorsqu'il aura obtenu l'aval du Bureau et des personnels. Dorénavant, une maintenance régulière par des professionnels, absolument nécessaire, sera organisée pour que le nouveau système et le nouveau site soient à jour et restent techniquement pérennes. Mentionnons pour terminer que nous exploitons maintenant le logiciel OJS pour la revue des *Annales de l'ENS*. Si l'expérience est concluante, nous pourrions basculer l'ensemble de nos collections et revues sur ce logiciel gratuit, ce qui participe là encore de notre volonté de nous appuyer sur des logiciels stables pour notre infrastructure.

1.6 – Droits de l’homme

La SMF, en collaboration avec la SMAI et la SFDS, a poursuivi sa mobilisation pour soutenir les universitaires de Turquie. Suite à un courrier commun adressé en juillet 2017, exprimant leur profonde inquiétude et demandant l’amplification du programme Pause, les trois sociétés savantes ont été reçues au ministère de l’enseignement supérieur en août 2017 et janvier 2018. En 2017, le programme Pause a permis d’accueillir 98 chercheurs principalement turcs et syriens. Ce programme a été reconduit avec une dotation augmentée d’un million d’euros en 2018. Les signataires de la pétition *Academics for peace* sont toujours sous la menace de poursuites pour « propagande pour une organisation terroriste » : environ 200 d’entre eux ont été accusés et pour certains condamnés lors de procès individuels depuis décembre 2017. Les « universitaires pour la paix » viennent de recevoir le prix « Courage to Think Defender » 2018 attribué par *Scholars at Risk network*. Les sociétés savantes s’inquiètent également de la situation préoccupante des universitaires au Venezuela. La détérioration économique et sociale du pays les contraint à faire face à la pénurie ou à s’exiler.

1.7 – Parité

La SMF a poursuivi son observation vigilante de la représentation féminine dans les recrutements (tant dans les comités que parmi les candidat-e-s) et de la présence et l’image des mathématiciennes dans la communication médiatique, éditoriale, gouvernementale. La rubrique « Parité » de la GAZETTE a permis cette année encore l’expression de nombreuses analyses, points de vue, polémiques. Une réflexion a été menée pour promouvoir des règles de bonne conduite égalitaire dans la communauté (elle a débouché sur une charte parue début 2018). La SMF est restée en alerte sur les questions d’égalité femme-homme; elle travaille pour mieux diffuser cette préoccupation dans la communauté.

1.8 – Rencontres, colloques et concours SMF Junior

Congrès SMF 2018

Après le succès rencontré par sa première édition à Tours en juin 2016, le deuxième congrès de la Société Mathématique de France a eu lieu à Lille du

4 au 8 juin 2018. M. Maïda en a été la présidente du comité d’organisation et E. Breuillard, le président du conseil scientifique.

Comme pour la première édition, ce congrès avait pour objectif de regrouper les mathématiques françaises sur une semaine, des thèmes les plus fondamentaux aux aspects les plus appliqués, avec une attention particulière portée aux jeunes chercheurs. Une conférence grand public (donnée par V. Borrelli) destinée aux lycéens et aux étudiants de licence ou de master a eu lieu mardi 5 juin après-midi. Elle a été suivie de la remise des prix d’Alembert et Jacqueline Ferrand (voir section 5 page 11). Par ailleurs, tous les orateurs plénières ont été sollicités pour écrire un texte qui sera publié dans un volume de la série *Séminaires & Congrès*. Des représentants de l’INSMI, de l’ERC, du CIRM ainsi que Ch. Torossian pour le rapport de la *Mission mathématiques* sont intervenus durant cette semaine.

Session « États de la recherche »

Une session portant sur la mécanique statistique est prévue du 10 au 14 décembre 2018 à l’IHP. Les organisateurs sont C. Boutillier (UPMC), B. de Tilière (UPEC) et K. Raschel (Tours). Cette session comportera 4 mini-cours donnés par F. Caravenna (Milan), H. Duminil-Copin (IHÉS et Genève), P. Sousi (Cambridge) et V. Vargas (ÉNS), et une dizaine d’exposés.

Semaines CIRM-SMF

Rappelons qu’en 2016, la SMF avait porté l’initiative de soutenir financièrement à hauteur de 50% deux semaines de conférences au CIRM faisant une large place aux jeunes et comportant des mini-cours. Les deux premières semaines CIRM-SMF auront lieu en janvier et septembre 2019. Un nouvel appel d’offre a été lancé pour l’organisation de deux semaines de conférences en 2020.

Congrès AMS-SMF

Les premiers jalons ont été posés pour l’organisation d’un congrès AMS-SMF en France. Le projet d’une conférence ayant lieu du 5 au 9 juillet 2021 à Grenoble a été approuvé par les deux sociétés savantes.

Concours SMF junior

Après un premier concours réussi en juin 2017, un second concours de mathématiques s'adressant aux étudiants de niveau Licence ou Master aura lieu du 26 octobre au 4 novembre 2018. Le but de ce concours est non seulement de promouvoir la recherche en mathématiques, mais aussi d'offrir aux étudiants l'occasion d'un événement fédérateur et divertissant.

Les candidats doivent concourir par équipe de 3 (au plus) et résoudre les 10 problèmes qui leur seront soumis, en 10 jours, et portant sur les 10 domaines suivants : algèbre, analyse, combinatoire, géométrie, modélisation, probabilités, systèmes dynamiques, théorie de la mesure, théorie des nombres et cryptographie, topologie.

Pour cette deuxième édition, le comité d'organisation est constitué de J. Barral (président), N. Bédaride, R. Danchin, R. Marchand et F. Santambrogio. La remise des prix aura lieu le samedi 8 décembre 2018 après-midi, à l'IHP.

2. Gazette

Le renouvellement du comité de rédaction de la *Gazette* se poursuit, avec plusieurs changements importants effectués ou à venir. Le rédacteur en chef, B. Adamczewski, sera remplacé en janvier prochain par D. Gayet qui fait partie du comité de rédaction depuis plusieurs années et est d'ores et déjà associé à l'ensemble des décisions prises concernant cette publication. En 2018, les mandats de C. Ehrhardt, P. Loidreau et T. Alazard arrivent à leur terme. Pour les remplacer, l'équipe de rédaction a le plaisir d'accueillir P. Lafitte-Godillon, M. Bourrigan et C. Eckes.

Cette année le contenu de la *Gazette* a fait la part belle aux mathématiques les plus diverses (modélisation, géométrie, algèbre, arithmétique, analyse fonctionnelle, équations aux dérivées partielles...). Dans la rubrique « Diffusion des savoirs » on peut notamment signaler des articles consacrés à l'exposition *Esthétique* qui a eu lieu à l'IHP, à la maison des mathématiques et de l'informatique de Lyon, ou encore au concours SMF junior. La « Tribune libre » a été à nouveau régulièrement utilisée et la rubrique « Parité » a continué à jouer son rôle, à savoir, informer notre communauté des différentes actions menées autour de cette problématique importante. Les questions d'éthiques qui peuvent toucher les mathématiciens et mathéma-

ticiennes, d'une part, et l'IHÉS qui fête cette année son soixantième anniversaire, d'autre part, ont fait l'objet de deux grands dossiers. Un article est également venu saluer l'attribution du très prestigieux prix Abel à notre collègue Y. Meyer. Enfin, la rubrique « Carnet » a rendu hommage à plusieurs collègues disparus, dont M. Mirzakhani, J.-P. Kahane, et J.-L. Koszul. Sans oublier qu'un numéro spécial consacré à l'œuvre de J.-C. Yoccoz est paru en avril. Son édition a été confiée, avec succès, à S. Crovisier, P. Berger, P. Le Calvez et C. Matheus.

3. Conseil scientifique

Composition actuelle. Le Conseil scientifique a été renouvelé partiellement : il a vu l'arrivée de H. Esnault (géométrie algébrique, Berlin) et S. Grivaux (analyse fonctionnelle, Lille). Le fonctionnement du Conseil s'effectue principalement par email, et une réunion s'est tenue le 27 février à l'IHP, pour discuter de l'ensemble de ses activités et réfléchir aux critères qu'il utilise lors de ses décisions. Cette année la première moitié de cette réunion a eu lieu avec V. Berthé, responsable des publications de la SMF et les directeurs des comités de rédaction. Elle a permis de comparer les positionnements des politiques éditoriales des différentes revues. Le Conseil scientifique a apprécié l'implication et le dynamisme des comités de rédaction ; il les a incités à développer une stratégie internationale de sollicitation d'articles ou d'ouvrages, à internationaliser leur recrutement, et à développer une politique volontariste d'ouverture thématique.

4. Le pôle de Luminy

4.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro...).

La maison de la SMF travaille en étroite collaboration avec les secteurs des publications, des publicités et de la comptabilité.

Jusque fin janvier 2017, l'équipe était constituée de deux salariés, l'un à temps plein, l'autre à temps partiel : C. Munusami, responsable de l'équipe et la seconde salariée, M.-F. Koussémon en service complet depuis février 2018. Cette dernière présente la SMF aux nouveaux congressistes en début de semaine, tient un stand de vente des publications de

la SMF chaque mardi et jeudi et contribue enfin à une présentation de qualité de nos ouvrages dans l'enceinte du CIRM. Des améliorations ont été effectuées concernant le stand (situé à la sortie de l'auditorium du CIRM) : espace délimité dédié à la SMF avec affiches, tracts publicitaires et exposition des publications. Avec l'accord de P. Foulon, une présentation plus visible de la SMF dans les locaux du CIRM a aussi été réalisée. Il résulte de toutes ces actions une amélioration de notre diffusion sur le site du CIRM. En 2017, les ventes sur place se montent à 6000 euros, ce qui est comparable au chiffre de 2016.

En 2017, la maison de la SMF a réceptionné environ 6100 ouvrages. Rappelons que grâce à la réorganisation et au désherbage effectués en 2016, l'espace dédié au stockage des collections s'est substantiellement agrandi.

Une bonne nouvelle : l'expert de la MAIF s'est montré satisfait des travaux importants permettant la consolidation de l'assise du bâtiment de la cellule (micro-pieux...); la MAIF a donc donné son accord – le 6 octobre 2017 – pour que les travaux de finition et la remise en fonctionnement du monte-charge reliant les deux étages de la cellule soient réalisés. La réception des travaux a eu lieu sans problème le 2 février 2018.

Nous avons mis en place deux nouveaux panneaux d'affichage de publicité de la SMF, panneaux situés dans l'auditorium du CIRM et dans la salle de vente de la SMF.

Nous mettons à disposition du CIRM, pendant les travaux prévus en 2017-2018, une salle au rez-de-chaussée et un bureau au premier étage.

4.2 – CIRM 2017

Fréquentation

Concernant le nombre de visiteurs, le CIRM demeure le plus grand centre d'accueil de conférences en mathématiques dans le monde avec un total de 3780 participants en 2017 pour l'organisation de 50 semaines de rencontres. Ce chiffre est supérieur à celui de l'année passée (3406).

Le nombre total de participants provenant d'institutions étrangères est de 51%, en nette augmentation par rapport à l'année passée (44%). Sur ce total, le nombre de mathématiciennes au CIRM conti-

nué à augmenter pour atteindre 19,8% de participantes en 2017.

Le CIRM bénéficie du soutien renforcé (depuis 2012) de l'INSMI¹, d'une dotation du MESRI, de dotations des collectivités locales (Région et Ville) ainsi que de financements des laboratoires d'excellence CARMIN et ARCHIMEDE qui apportent un complément financier important et nécessaire lui permettant de concurrencer les meilleurs centres d'accueil internationaux (souvent avec des financements plus importants).

La Chaire Jean-Morlet (dont on rappelle que le salaire est financé par Aix-Marseille Université) continue d'attirer des leaders scientifiques du monde entier, proposant des programmes de grande qualité qui influent directement sur le nombre croissant de chercheurs étrangers visitant le CIRM. À noter que ce programme est également facteur d'attractivité pour les femmes en mathématiques puisque trois des cinq futurs bénéficiaires aujourd'hui sélectionnés (sélection à deux ans) seront des mathématiciennes.

Bilan des activités scientifiques

Sur un total de 50 semaines de rencontres organisées, le centre a accueilli :

- 39 conférences et écoles ;
- 7 petits groupes ;
- 21 recherches en binôme ;
- 11 semaines de sessions thématiques : CEMRACS (6 semaines) et mois thématique (5 semaines) ;
- 2 semestres de Chaire Jean-Morlet.

La Chaire Jean-Morlet.²

- Semestre 1 : janvier à juin 2017 - K. Khanin (université de Toronto) et S. Shlosman (CPT). Thème : KPZ Universality and Directed Polymers ;
- Semestre 2 : août 2017 à janvier 2018 - S. Akiyama (université de Tsukuba) et P. Arnoux (I2M). Thème : Tiling and Discrete Geometry ;
- La co-édition Springer - SMF « Jean-Morlet Series » qui permet la publication des travaux de recherche menés au CIRM par les différents porteurs de la Chaire a sorti son deuxième volume consacré à la théorie ergodique (semestre Hasselblatt-Troubetzkoy). Les deux bi-

1. Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions.

2. www.chairejeanmorlet.com

nômes des semestres de 2017 ont également prévu de sortir chacun un ouvrage.

- Le financement de la Chaire Jean-Morlet est complété de plus en plus souvent par des soutiens étrangers obtenus à la demande des porteurs en collaboration avec le CIRM (NSF, Clay Mathematical Institute ...). Le semestre Khanin-Schlosman a ainsi bénéficié d'un soutien record de 50 000 dollars de la NSF, dont une partie payée directement au CIRM en frais de séjours.

LabEx CARMIN. Ont été soutenus cette année :

- 2 écoles CIRM-IHP;
- 6 événements Chaire Jean-Morlet;
- 1 session thématique;
- 2 écoles;
- 12 rencontres jeunes chercheurs;
- la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (5 conférences filmées chaque semaine) compte aujourd'hui plus de 1000 vidéos dont plus de 300 indexées et chapitrées. Ces vidéos sont maintenant dotées de DOI et sont téléchargeables.

LabEx ARCHIMEDE.

- 13 rencontres labellisées au total et quelques soutiens supplémentaires au fil de l'eau pour les rencontres associées à la Chaire Jean-Morlet.

De nouveaux programmes en construction. Le CIRM va élargir son offre scientifique dans le cadre de son extension immobilière (programme pluriannuel Mathématiques, Mathématiques en Interactions, Semaines SMF et programme Interface). Le détail des appels d'offre est en ligne sur le site du CIRM. La réflexion cette année encore a principalement porté sur le développement du programme Interface - Formation de haut niveau en immersion pour les acteurs du monde économique. L'objectif est de 10 séances de 3 jours par an. Un comité de pilotage a été créé avec comme présidente M. Esteban (CEREMADE), comme Vice-président J.-P. Tual (Industrie-Gemalto) ainsi que des représentants des tutelles, des sociétés savantes, des labex et de quatre industriels.

Immobilier : projet 2R-CIRM

Le projet 2R-CIRM a été inscrit dans le CPER³ en juin 2015. La maîtrise d'ouvrage a été confiée au CNRS. Suite à un concours d'architectes lancé en décembre 2015, un projet a été retenu en juin 2016. Une phase transitoire de préparation au démarrage des travaux a débuté dès 2015 avec le déplacement de bureaux, une centralisation des services désormais dans la Bastide, le déplacement des archives à la Maison de la SMF, etc. Le permis de construire pour le projet a été déposé en mars et obtenu en août 2017. Les travaux ont débuté en avril 2018, pour une livraison prévue de la partie hôtelière du bâtiment au premier trimestre 2019 et de la partie académique au second trimestre 2019. Le bâtiment comprendra :

- une nouvelle salle de conférences de près de 100 places;
- une salle rénovée d'une trentaine de places;
- 17 chambres dont deux pour personnes à mobilité réduite et trois studios supplémentaires.

Le coût global (construction; prestations intellectuelles; études; aléas et frais divers) est chiffré à 3,27 M€ HT dont 1M€ financé par la SMF. Ce montant n'inclut pas tous les équipements.

Immobilier : projet Extension du Restaurant

La maîtrise d'ouvrage est portée par la SMF. Pour assurer la synergie complète des projets du CIRM, il a été décidé de confier la maîtrise d'œuvre au même cabinet d'architecture que pour le projet 2R-CIRM. Il s'agit du cabinet AWA (architecte J. Wafflart). Le permis a été déposé en juillet et obtenu en décembre 2017. Le budget prévisionnel global est pour la SMF de 996 k€ pour la construction. L'équipement et la cuisine provisoire sont financés par le prestataire/partenaire EUREST à hauteur de 377 k€.

Agenda d'Accessibilité Programmée

Le budget a pu être réduit de 340 k€ à 200 k€ grâce à la prise en compte globale de l'accessibilité dans les projets évoqués ci-dessus. Le projet a obtenu la validation de la Préfecture en février 2017.

3. Contrat de Plan État-Région.

De la préparation à la valorisation des événements scientifiques : une offre digitale riche et visible

- Tous les événements scientifiques ont leur propre mini-site dédié en français et en anglais.
- Cinq conférences par semaine sont filmées (dont une indexée). Le fonds ainsi constitué contient des exposés de recherche avec indexation par mots clés, des films et interviews grand public et des films thématiques. Plus de 1000 films sont ainsi mis en ligne sur la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (avec toutes les fonctionnalités d'une recherche documentaire de haut niveau sur une base de films catalogués et enrichis) et sur YouTube (qui enregistre une fréquentation impressionnante de près de 30 000 vues par semaine).
- Le succès des réseaux sociaux permet une diffusion des informations rapide et visible dans le monde entier.

Réunions, visites et échanges internationaux

- Participation à la session annuelle du consortium européen ERCOM⁴ en avril 2017 en Autriche.
- ERCOM soutient une politique d'échange de savoir et de savoir-faire inter-centres.
- Le CIRM répond à des appels d'offres pour des financements internationaux. Les demandes faites auprès de la Simons Foundation n'ont pas abouti pour le moment mais des financements récurrents sont obtenus auprès de la NSF et du Clay Mathematical Institute.

L'année a été une fois encore scientifiquement riche. Les projets 2R-CIRM et Extension Restaurant ouvrent de nouvelles perspectives très importantes pour l'élargissement de l'offre scientifique du CIRM à l'horizon fin 2018.

5. Secteur grand public

La SMF continue à avoir une activité intense dans ce secteur : cycles de conférences, événements, partenariats.

4. European Research Center on Mathematics.

Un texte, un mathématicien. Ce cycle de conférences, organisé en partenariat avec la Bibliothèque nationale de France et l'association *Animath* et destiné à un public de lycéens ainsi qu'au grand public, rencontre toujours un vif succès, avec le grand auditorium de la bibliothèque toujours attentif et bien rempli et des vidéos de qualité à visionner en différé. Une des quatre conférences prévues cette année a dû être reportée à l'année prochaine pour cause d'intempéries, mais nous avons eu trois excellents exposés de N. Bergeron, D. Perrin et Y. Le Cun.

Prix D'Alembert et Ferrand. Le prix D'Alembert récompense tous les deux ans une action de diffusion des mathématiques auprès du grand public ; la SMF a décidé cette année de lui adjoindre un second prix de même périodicité, le prix Jacqueline Ferrand, décerné à une opération de nature pédagogique. Chacun des deux prix est d'un montant de 2000 euros. Le prix D'Alembert 2018 a été décerné à Mickaël Launay pour l'ensemble de ses contributions à la popularisation des mathématiques. Le prix Jacqueline Ferrand 2018 a été décerné au projet collaboratif « M@ths en vie », porté par C. Cortay et C. Gilger.

Demi-journée grand public au congrès SMF 2018. Lors du second congrès de la SMF à Lille en 2018, le principe retenu en 2016 d'une demi-journée visant le grand public est maintenu : elle commencera par un exposé de V. Borrelli sur « trois sphères qui défient l'impossible », se continuera par la remise des prix D'Alembert et Ferrand, pour se terminer par une table ronde sur le thème de l'articulation entre lycée et université.

Des mathématiciens primés par l'Académie des sciences. Chaque année, la SMF et la SMAI organisent une ou deux journées d'exposés destinés à un large public, donnés par les lauréats récents de prix de mathématiques décernés par l'Académie des sciences. Les journées ont eu lieu en décembre 2017 à Grenoble, et la prochaine édition se tiendra à Rennes.

Participation à des manifestations. La SMF participe, comme les autres sociétés savantes (plus particulièrement la SMAI, la SFDS et la SIF), à diverses manifestations importantes à destination du grand public : salon Culture et Jeux Mathématiques, forum emploi-maths, journées sciences et médias.

6. Enseignement

Pour traiter ces questions, la SMF s'appuie sur les réflexions et les suggestions de la commission enseignement. La SMF est membre de la CFEM et participe à un groupe de travail qui réfléchit à l'enseignement des sciences au lycée de façon interdisciplinaire. Nous avons fait face, cette année, à une actualité très riche avec la *Mission mathématiques*, la réforme du baccalauréat, et la réforme de l'entrée dans l'enseignement supérieur.

6.1 – Commission Enseignement

La commission s'est réunie le 22 juin 2017 et le 12 janvier 2018. Entre les réunions, il y a eu beaucoup d'échanges par courriel.

- Renouvellement : les règles de composition de la Commission enseignement ont été votées en CA et sont affichées sur le site. La commission a été largement renouvelée : 11 départs et 6 arrivées.
- Pour la *Mission mathématiques* et la réforme du baccalauréat : participation à la rédaction des textes de la SMF.
- Pour l'entrée dans le supérieur : rédaction d'un texte sur les prérequis à l'entrée en licence, puis élaboration d'un questionnaire sur la mise en place de *Parcoursup*.
- Préparation de la table ronde sur l'enseignement au congrès de juin : choix du thème et des intervenants.
- Rédaction d'un texte pour comparer WIMS et UNISCIEL.
- Le questionnaire sur l'enseignement des mathématiques discrètes en licence a été affiné mais pas diffusé.

6.2 – La SMF membre de la CFEM.

La CFEM⁵ joue un rôle fédérateur de tous les acteurs de l'enseignement des mathématiques en France. Face aux réformes en cours, elle peut dégager les préoccupations communes de ses partenaires, leur donnant ainsi plus de poids.

5. Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques.

6. Société Informatique de France.

7. Société Française de Physique.

8. Union des Professeurs de Physique et de Chimie.

9. Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques.

10. Union des Professeurs des classes préparatoires aux grandes écoles Agronomiques.

11. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

12. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

6.3 – Le Groupe de travail Interdisciplinaire sur les Sciences [gis]

Le GIS est un groupe qui réunit plusieurs sociétés savantes et associations (SMF, SIF⁶, SFP⁷, UDPPC⁸, UPS⁹, UPA¹⁰, APMEP¹¹, IREM¹², CFEM relevant de plusieurs disciplines (mathématiques, physique-chimie, informatique, sciences de la vie et de la Terre) et plusieurs niveaux d'enseignement (supérieur et secondaire, lycée général et professionnel). Ils conduisent une réflexion sur les programmes en science au lycée dans le cadre de l'interdisciplinarité. Ce groupe a rédigé deux textes

- *Le Bagage scientifique pour tous* qui décrit ce que devrait être la formation scientifique de tous les bacheliers.
- *La formation des futurs scientifiques*, document en cours de finalisation.

Le GIS joue un rôle important dans la réforme du baccalauréat car il interagit avec le conseil supérieur des programmes (un de leur membre, D. Gratiast est aussi membre du CSP) et avec l'Académie des sciences qui s'appuie sur leurs travaux pour faire des recommandations au CSP. Il a aussi un rôle de cohésion qui permet d'avoir des réactions concertées. C'est par exemple dans le cadre du GIS que nous avons pu écrire très rapidement une lettre à J.-M. Blanquer, signée par 13 sociétés savantes et associations. Cette lettre a été suivie d'effet puisqu'une des revendications, qui concernait le module « humanités scientifiques et numériques » a été entendue.

6.4 – Mission mathématiques

La SMF a été consultée par la *Mission mathématiques* : S. Seuret et L. Nyssen ont été auditionnés pour la SMF en novembre 2017 et L. Nyssen a participé à une table croisée sur la formation des enseignants en décembre. Chaque fois, des textes préparatoires ont été rédigés et publiés sur le site web de la SMF. Ch. Torossian viendra parler de la *Mission mathématiques* pendant le congrès de Lille.

6.5 – Mission Bac

La SMF suit de près la réforme du baccalauréat. Son action se fait individuellement, ou en commun avec d'autres sociétés savantes ou associations, en particulier le GIS ou la CFEM. La SMF a été auditionnée en décembre 2017 par la Mission Baccalauréat de P. Mathiot.

Après la sortie du rapport Mathiot en janvier, et du projet de réforme Baccalauréat 2021 présenté en février 2018, la SMF a mené plusieurs actions :

- publication d'un document regroupant les réflexions et propositions du bureau et de la commission d'enseignement (disponible sur le site et envoyé à l'AEF),
- participation à l'élaboration d'un texte avec la CFEM sur la même question,
- signature d'une lettre ouverte à J.-M. Blanquer par 13 sociétés savantes et associations,
- signature d'un communiqué de presse à l'initiative de Femmes & Mathématiques,

à la suite desquelles S. Seuret et L. Nyssen ont été reçus au cabinet de J.-M. Blanquer pour échanger sur ces problématiques.

6.6 – Entrée dans l'enseignement supérieur

En septembre 2017, la SMF a rédigé un texte sur les prérequis en licence. En mars 2018, elle a conduit une enquête sur les projets des universités pour la mise en place de Parcoursup. Un deuxième volant de cette enquête, sur la mise en place effective, est prévu pour l'automne.

6.7 – Participation de la SMF à divers événements et réunions

- 29 septembre 2017 : réunion avec le directeur du jury de l'agrégation, organisée par la SMF et la SMAI. Elle a permis de recueillir des informations du directeur du jury, et d'échanger, entre les participants, sur les problèmes qu'ils rencontrent dans leurs universités avec en particulier un débat sur l'agrégation *Docteurs*. Suite à cette réunion, la SMF et la SMAI ont mené une enquête sur les effectifs dans les préparations à l'agrégation.
- Octobre 2017 : participation aux journées de l'APMEP. La réunion des sociétés savantes et associations a donné lieu à une première concertation sur la *Mission mathématiques* et la réforme du baccalauréat.

- Novembre 2017 : participation au salon de l'orientation de l'ONISEP, où la SMF a partagé un stand avec la SMAI, la SFDS, Femmes & Mathématiques
- 8 décembre 2017 : participation à la réunion organisée par le jury du CAPES de mathématiques.
- 21 mars 2018 : participation à la journée sur la transition lycée-université organisée par la CFEM.

7. Publications

La SMF gère 9 revues internationales et collections de livres. Elle prend en charge l'ensemble du processus de publication, depuis la soumission, l'édition d'épreuves, jusqu'à la diffusion dans le monde entier. La SMF développe également des politiques adaptées à la transformation numérique du monde des publications scientifiques. Rappelons que la SMF, maison d'édition indépendante, ne bénéficie d'aucun soutien financier récurrent de la part d'une institution ou d'une société privée pour cette activité.

Si la SMF porte de beaux projets éditoriaux et des revues reconnues internationalement, grâce à la qualité et au dynamisme de ses comités, des faiblesses structurelles se confirment dont l'analyse a conduit à la mise en place de changements dans son organisation, ainsi qu'à plusieurs chantiers de réflexion à court et moyen terme, menés en étroite concertation avec les comités éditoriaux et le Conseil scientifique.

7.1 – Production

De nouveau, des retards sur le traitement des textes sont à signaler, en particulier pour le *Bulletin*, les *Mémoires*, et *Astérisque*. L'analyse de ces retards a mis en évidence des causes de natures diverses qui ont conduit à une remise à plat sur plusieurs dossiers, à savoir, principalement, la composition, le flux des soumissions, et le secrétariat.

Citons ainsi le changement de classe \LaTeX pour le *Bulletin* qui a entraîné des difficultés à la composition. Nous sommes plus généralement en train de réfléchir à nos procédures de composition, dans le but de veiller à notre indépendance et à notre autonomie. Il s'agit d'un chantier prioritaire pour l'année à venir. À plus long terme, il s'agira de retravailler les divers styles des revues.

On observe que le flux des soumissions de monographies ne permet plus d'assurer la publication du nombre annuel de pages fixé pour certaines collections. Nous avons donc décidé de revenir, à partir de 2019, à la publication de 8 numéros par an pour *Astérisque* et de 4 numéros pour les *Mémoires*. Nous travaillons avec les responsables des deux comités de rédaction pour susciter plus de soumissions. La priorité est de pouvoir recréer un « backlog » nous permettant de travailler avec sérénité pour honorer les engagements pris par la SMF auprès de ses abonnés.

Enfin, des problèmes récurrents de traitement et suivi des dossiers sont constatés. La régularité de sortie des publications n'est donc pas acquise et la vigilance est maintenue face à cette priorité. Un travail autour des procédures (planification, calendriers de production, etc.) et d'analyse est conduit.

À noter que la SMF continue sa politique de diffusion et de présentation de ses publications, que ce soit à la cellule de diffusion à Marseille, mais aussi lors de divers stands, par exemple lors des séminaires Bourbaki, à la BNF, ou encore lors des ventes spéciales via le site internet de la SMF.

7.2 – Visibilité des revues et soumissions

L'amélioration du flux des soumissions et la sollicitation d'articles et de textes longs est un chantier prioritaire. Après discussion avec les comités éditoriaux, et à la demande de nombreux collègues, les *Mémoires* et *Astérisque* accepteront désormais des articles d'au moins 80 pages.

Plus généralement, la SMF travaille activement à la recherche de nouveaux textes, notamment pour les collections de livres. Une politique de sollicitation de projets éditoriaux est menée, en particulier en direction du CIRP et du centre Émile Borel (CEB) dans le cadre des trimestres thématiques de l'IHP. La collaboration autour de textes issus des lauréats des Chaires de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris se poursuit, avec l'ouvrage *Lectures on elliptic methods for hybrid inverse problems*, par G. S. Alpert et Y. Capdeboscq, *Cours spécialisés* 25.

Nous comptons sur la refonte du site web pour assurer une meilleure visibilité aux revues et collections de la SMF notamment à l'international (la SMF ne publie pas que des textes de Français et en français!). La SMF communiquera aussi autour des diverses possibilités de soumission d'articles longs dans ses collections en soulignant l'excellence du

travail d'arbitrage réalisé, en particulier, là encore, pour les textes longs.

7.3 – Annales scientifiques de l'École normale supérieure

Une réflexion autour de la base éditoriale et de la gestion des manuscrits a également commencé. Cette réflexion s'est déjà concrétisée pour les *Annales*. Le départ à la retraite, sans remplacement, de V. Le Dret qui assurait le secrétariat des *Annales* de l'ÉNS a conduit à confier à M.-F. Koussemon la gestion du secrétariat et de l'ensemble de la chaîne de production (corrections, composition, impression). Pour mener à bien cette mission, elle passe donc en CDI à temps plein en totalité assumé financièrement par la SMF.

Nous avons reçu l'aide de l'INSMI et du centre Mersenne pour pouvoir adapter la base éditoriale OJS aux besoins des *Annales*, en étroite collaboration avec P. Bernard (rédacteur en chef). Nous remercions vivement ces divers acteurs dont la réactivité a permis d'assurer la fluidité de la transition.

7.4 – Réimpressions et projets

Une campagne de réimpressions et rééditions de grands classiques épuisés de la SMF est menée avec succès. Citons ainsi : C. Voisin, *Symétrie miroir (Panoramas et Synthèses 2)*, et *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe (Cours Spécialisés 10)*, Y. André, *Une introduction aux motifs (Panoramas et Synthèses 17)*, D. Cerveau, É. Ghys, N. Sibony, J.-C. Yoccoz (avec la collaboration de M. Flexor) *Dynamique et géométrie complexes (Panoramas et Synthèses 8)*, Y. Meyer, *Trois problèmes sur les sommes trigonométriques (Astérisque 11)* et A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, O. Gabber *Faisceaux pervers (Astérisque 100)*. Nous remercions vivement A. Abbes et L. Illusie qui ont porté ce beau projet de réédition autour de *Faisceaux pervers*. Plusieurs modèles éditoriaux sont ainsi explorés (réédition ou réimpression) et des ventes spéciales sur le site web ont accompagné ces rééditions.

Nous sommes fiers d'annoncer une réédition enrichie des articles principaux d'Yves Meyer et la publication, après en avoir obtenu les droits d'exploitation, d'une version retravaillée par G. Maltsiniotis de *Pursuing Stacks*, d'A. Grothendieck.

7.5 – Autour de la politique numérique

La SMF continue d'adapter son modèle économique, dans le contexte de l'évolution de la publication scientifique vers un accès électronique. On observe toujours une légère baisse, régulière, du nombre total d'abonnements. On constate également un basculement des abonnements papier (en nette baisse) vers les abonnements électroniques (qui restent essentiellement stables en 2017). Les 360 premiers numéros d'*Astérisque* sont en cours de numérisation et seront accessibles gratuitement, nous espérons, avant la fin 2018. Le référencement des collections (attribution de DOI (digital object identifier)) se poursuit. L'ensemble des données du serveur de la SMF (principalement bibliographiques) a été sauvegardé sur une machine virtuelle mise à disposition par le GDS Mathrice qui devrait bientôt remplacer le serveur définitivement. Plusieurs chantiers sont en cours sur la politique de droits d'auteur et de copyright dans un contexte éthique, et sur une clarification de nos procédures concernant les abonnements électroniques.

7.6 – Comités et lignes éditoriales

De nombreux renouvellements simultanés dans les comités de rédaction ainsi que des renouvellements de responsables de rédaction ont eu lieu, ou sont à anticiper. Une demande de clarification concernant les lignes éditoriales et les attentes de la SMF est remontée via les responsables de revues, dans le respect, bien sûr, du principe d'indépendance scientifique des comités. Comment garder une trace vivace des décisions éditoriales dans le cas où un comité est massivement renouvelé? Quelles sont les attentes de la SMF en termes de fonctionnement et de collégialité des comités? Nous avons suscité diverses rencontres fructueuses de réflexion et discussion sous divers formats, entre responsables de comité, au sein de comités, avec le Conseil scientifique etc., afin de faire circuler idées et pratiques, et de favoriser le partage d'expériences. Un texte de vade-mecum à destination des comités détaillant les procédures et une formalisation de divers usages a été produit. La réflexion autour de la clarification des diverses lignes éditoriales se poursuit également, avec un travail autour d'une meilleure description des collections. La refonte du site web représente une excellente opportunité pour le faire.

Une équipe particulièrement dynamique et impliquée de responsables de collections est actuelle-

ment en place. La SMF remercie vivement les comités de rédaction actuels et passés pour la qualité, la rigueur de leur travail, et leur implication.

8. Rapport financier, année 2017

Pour l'année 2017, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de +3,7 k€. Pour comparaison, le bilan de 2016 était de -497 k€, ce bilan déficitaire étant dû à une dépense exceptionnelle de 600 k€ dans le cadre du projet 2R-CIRM visant à la restructuration et à la rénovation de l'Annexe. Cet engagement pour 2R-CIRM s'est poursuivi cette année avec un versement de 200 k€ au CNRS auquel la SMF s'était engagée.

En novembre 2017, la SMF a signé trois contrats de prêt pour un montant total de 1000 k€ et une durée de 7 ans, à rembourser sur les réserves du CIRM afin de financer les travaux du CIRM. Ces contrats se sont accompagnés de l'ouverture d'un compte à terme d'un montant de 500 k€ à fin de garantie.

Le total du chiffre d'affaires s'élève à 2098 k€ pour 2017 dont 494 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF. Pour comparaison, le résultat net était de -497 k€ en 2016 avec 1 964 k€ de chiffre d'affaires et 604 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF. Comme on le verra par la suite, une partie de la baisse du chiffre d'affaires s'explique par les retards de production; une part importante des produits constatés d'avance (53 k€) provient de produits de 2017 non servis.

Les paragraphes qui suivent sont destinés à présenter de manière plus détaillée les finances des activités de la SMF, puis celles des activités du CIRM de manière plus globale.

8.1 – La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

- assurer des services aux membres;
- produire et vendre des livres et des revues;
- communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 867 k€ (1 025 k€ en 2016) :

- les produits d'exploitation totalisent 863 k€ (1 019 k€ en 2016), avec un chiffre d'affaires de 494 k€ hors cotisations (contre 604 k€ en 2016),
- auxquels s'ajoutent 4 k€ de produit financier.

Le total des ventes est de 437 k€ (contre 530 k€ en 2016), le total des cotisations est de 83 k€ (contre 80 k€ en 2016) et le montant total des subventions est de 15 k€ (contre 19 k€ en 2016). Le total des charges est de 891 k€ (1000 k€ en 2016).

Dans le cadre d'une convention signée le 3 juillet 2016 entre le fonds de dotation de l'IHP et la SMF (membre fondateur du fonds), la SMF a accepté de gérer des fonds de soutien (170 k€) versés par des mécènes, fonds destinés à soutenir et financer des actions choisies par le soin du fonds. La SMF a retenu 3% des sommes versées pour compenser ses frais de gestion. Cette convention a été renouvelée en 2017 (gestion de 53 k€) et n'a pas vocation à se poursuivre.

La SMF présente un résultat négatif de 24,5 k€ en 2017, contre un résultat positif de 25 k€ en 2016. Cette différence s'explique par une baisse significative des ventes et des retards de production. Dans la suite, nous détaillons ces comptes poste par poste.

Produits d'exploitation et produits financiers

1. *Ventes de revues et de livres.* Le montant global est de 437 k€, contre 530 k€ en 2016. La baisse des ventes se confirme et en particulier la baisse du nombre d'abonnements, il y a là un motif de préoccupation. Les retards de publication posent également problème puisque les produits constatés d'avance s'élèvent à 332 k€ en 2017 (contre 221 k€ en 2016) dont 53 k€ proviennent du non service d'une partie des abonnements et des ventes de 2017.
2. *Cotisations.* Le montant global est de 83 k€, contre 80 k€ en 2016. Ce montant s'est légèrement amélioré par rapport à l'érosion constatée en 2016.
3. *Subventions.* La SMF a touché 14,5 k€ de subventions récurrentes de l'INSMI (15 k€ en 2016).
4. *Recettes diverses.* Le montant global est de 57,3 k€, contre 74 k€ en 2016; ces recettes proviennent de la facturation des frais de ports et de refacturations variées pour des actions avec des associations partenaires (sociétés savantes, Animath...).
5. *Transfert de charges.* Cela correspond au versement des salaires des personnels du CIRM détachés à la SMF et d'autres charges du CIRM. Le montant global est de 220 k€ (dont 10 k€ de remboursement de la MAIF pour des travaux dans la cellule de diffusion), contre 181 k€ en 2016.
6. *Produits financiers.* Ces produits correspondent à la rémunération des fonds placés. Le montant global est de 4 k€, le même qu'en 2016.

Charges d'exploitation

1. *Masse salariale.* Le montant des salaires et indemnités hors charges de l'ensemble du personnel (SMF +CIRM) est de 356 k€, contre 320 k€ en 2016. Il faut ajouter 147 k€ de charges (138 k€ en 2016). Cette augmentation s'explique en partie par le recrutement de Sylvain Faivre sur un CDD au CIRM.
2. *Frais de fabrication et composition.* Le montant global des dépenses de fabrication et composition des revues et collections est de 128 k€. Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 89 k€, contre 104 k€ en 2016. Les frais de composition sont de 39 k€, contre 37 k€ en 2016. Les retards de publication ont une influence sur ces montants puisqu'une partie des frais de fabrication et de composition seront comptabilisés en 2018.
3. *Honoraires, assurances, loyers.* Les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable s'élèvent à 17 k€, les frais d'assurances sont de 2,3 k€, et les loyers versés à l'IHP et à Luminy représentent 14,3 k€.
4. *Affranchissements et routage.* Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 65 k€, contre 91 k€ en 2016.
5. *Impôts et taxes.* Ce poste est de 18,3 k€, contre 14,8 k€ en 2016 dont 14,3 k€ correspondent à la taxe sur les salaires.
6. *Frais bancaires et téléphone.* Le montant global est de 5 k€, stable par rapport à 2015 et 2016.
7. *Achat de fournitures.* Il y a eu 8,2 k€ d'achats de fournitures contre 12 k€ en 2016.
8. *Vie de l'Association.* Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 22 k€, contre 16 k€ en 2016.
9. *Entretien, réparation, maintenance.* Le montant global est de 27 k€, contre 16 k€ 2016.

10. *Dépenses diverses*. Cette « ligne » inclut entre autres la sous-traitance générale (11 k€), la publicité (2,6 k€), la formation (0,5 k€).
11. *Amortissements sur immobilisations*. Cela correspond essentiellement à l'amortissement du matériel informatique. Le montant global est de 14,3 k€, contre 15 k€ en 2016.
12. *Provisions diverses*. Le montant total est de 1,5 k€, contre 4,5 k€ en 2016,, ce qui correspond à des factures impayées.
13. *gestion du stock et des encours*. La variation de stock s'élève à +35 k€ en 2017 contre -128 k€ en 2016. Cette différence s'explique par la réorganisation des stocks effectuée en 2016.

8.2 – Le CIRM

Depuis 2000, le CIRM est une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du CNRS-INSMI et de la SMF. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité CNRS et la SMF : par l'intermédiaire du CNRS, le CIRM apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques, par ailleurs le CIRM confie à la SMF l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2017 du CIRM est excédentaire de 28 k€ en 2017, il était déficitaire de 522 k€ en 2016. La SMF continue son engagement dans le projet 2R-CIRM, qui vise à la restructuration et à la rénovation de l'Annexe (bâtiment CNRS dont la SMF assure la gestion hôtelière) avec un versement de 200 k€ au CNRS en complément des 600 k€ déjà engagés par la SMF en 2016. Pour ce projet, qui est inscrit au Contrat État-Région, est prévu un budget total de 3,27 M€ dont 1 M€ financé par la SMF. L'engagement du CIRM dans le projet a été voté au bureau de la SMF le 3 octobre 2014. D'autre part, le CIRM a prévu d'investir 619 k€ pour l'extension du restaurant (livraison prévue en 2018 avec une maîtrise d'ouvrage portée par la SMF). Enfin, en novembre

2017, la SMF a signé trois contrats de prêt pour un montant total de 1000 k€ et une durée de 7 ans. Ces contrats se sont accompagnés de l'ouverture d'un compte à terme d'un montant de 500 k€ à fin de garantie. Il est à noter que le résultat du CIRM reste positif malgré les 200 k€ de dépenses exceptionnels du projet 2R-CIRM et que la SMF confirme sa volonté de réinvestir les marges faites sur la gestion hôtelière du CIRM dans la rénovation et l'extension des bâtiments.

Les produits d'exploitation s'élèvent à 2098 k€ en 2017 (contre 1 782 k€ en 2016), auxquels il faut rajouter 2,6 k€ de produits financiers (5,4 k€ en 2016) et 163 k€ de « produits exceptionnels » (180 k€ en 2016). Ces produits dits exceptionnels, correspondent à l'étalement des subventions d'investissement perçues lors de précédents travaux et investissements au CIRM.

Les produits comprennent à la fois des ressources propres 1 603 k€ de chiffre d'affaires (1 372 k€ en 2016) ainsi que des subventions de différents organismes (MENESR, Aix-Marseille Université, Conseil Régional, Ville de Marseille) s'élevant à 488 k€ (405 k€ en 2016). Les montant du chiffre d'affaires et des subventions de 2017 confirment la hausse déjà constatée en 2015 et 2016.

Les charges d'exploitation s'élèvent à 2 035 k€ en 2017 contre 1 890 k€ en 2016.

8.3 – Conclusion

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat positif de 3,7 k€, contre un résultat négatif de 497 k€ en 2016. La SMF est quant à elle, déficitaire de -25 k€ et le CIRM excédentaire de 28 k€. L'investissement dans le projet 2R-CIRM se poursuit avec une dépense de 200 k€ en 2017. Il est à noter que les retards de production de la SMF impactent les comptes de manière significative puisque dans les produits constatés d'avance il y a cette année 53 k€ qui proviennent du non service d'une partie des abonnements et ventes de 2017.

Ce rapport moral se veut le bilan de l'ensemble des activités au sein de la SMF depuis un an. Le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles y ont contribué, nous les remercions tous : membres du Bureau, du Conseil d'administration et du Conseil scientifique de la SMF, directeurs et membres des comités de rédaction, ainsi que tous ceux qui interviennent, ponctuellement ou plus régulièrement, et qui offrent leurs compétences sans compter leur temps avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par B. Adamczewski, V. Beffara, V. Berthé, H. Biermé, G. Bourgeois, R. Danchin, D. Dos Santos, P. Foulon, S. Jaffard, L. Nyssen, S. Seuret, avec l'aide de S. Albin, N. Christiaën, C. Munusami et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture attentive (de ce rapport mais aussi des épreuves de la Gazette et autres textes tout au long de l'année).



Le Prix Fermat 2017 et ses lauréats

Le « Prix Fermat 2017 » de recherche en mathématiques a été attribué conjointement à Simon Brendle (Columbia University) et Nader Masmoudi (New York University at Abu Dhabi & Courant Institute of Mathematical Sciences), respectivement pour :

- ses nombreux et profonds résultats en analyse géométrique, faisant intervenir des équations aux dérivées partielles de types elliptique, parabolique et hyperbolique, en particulier pour sa preuve élégante de la conjecture de Lawson, sa caractérisation des solutions soliton des flots de Ricci et de courbure moyenne en dimension 3 ainsi que pour ses contributions remarquables, en collaboration avec Gerhard Huisken, à l'analyse du flot de courbure moyenne des surfaces convexes en moyenne dans les variétés de dimension 3 ;
- ses travaux remarquables de profondeur et de créativité en analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires et en particulier pour ses contributions récentes à la résolution rigoureuse et complète de problèmes de stabilité hydrodynamique soulevés dès la fin du XIX^e siècle par les pères fondateurs de la mécanique des fluides moderne.

Rappelons que le Prix Fermat récompense des mathématicien(-ne)s de moins de 45 ans ayant apporté des contributions majeures dans l'un des domaines où s'est illustré Pierre de Fermat : le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles, la géométrie analytique, les probabilités et la théorie des nombres. Les récipiendaires du Prix s'engagent à publier un article de synthèse dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*¹, exposant à un public de mathématiciens professionnels, mais pas forcément spécialistes du sujet, ce qu'apportent les résultats de la recherche récompensée. Le Prix Fermat est organisé tous les deux ans par l'Institut de Mathématiques de Toulouse² et financé par la Région Occitanie Pyrénées-Méditerranée³, avec le soutien de l'université Paul Sabatier⁴.

Rendez-vous pour le prochain Prix Fermat, qui sera décerné fin 2019. Plus d'informations, concernant notamment l'ouverture et les critères d'éligibilité des candidatures, seront disponibles sur <https://www.math.univ-toulouse.fr/>, rubrique Prix Fermat.

Les deux textes ci-après de Michael Struwe et Franck Boyer décrivent plus précisément les contributions des deux lauréats.

The contributions of Simon Brendle

• M. Struwe

The field of Geometric Analysis has a long tradition of beautiful results and challenging questions. We can trace its beginning to the 1762 minimal surface equation of Lagrange; rewritten as an equation

of second order by Meusnier, it is perhaps the oldest nonlinear partial differential equation known. In 1936, Jesse Douglas' solution of the Plateau problem for minimal surfaces was recognized with

1. <http://afst.cedram.org/>
2. <https://www.math.univ-toulouse.fr/>
3. <https://www.laregion.fr/>
4. <http://www.univ-tlse3.fr/>

one of the first two Fields medals. In 2001, Perelman's proof of the Poincaré conjecture by means of the Ricci flow, completing a strategy laid out by Hamilton, for some time made the field of Geometric Analysis the focus of attention of the mathematical world.

In the same year 2001, still at the age of 19, Simon Brendle graduated from Tübingen University. It seems only natural that his thesis topic derived from Geometric Analysis. But it was not at all obvious and all the more impressive that in the surge of activity in Geometric Analysis after Perelman's work he was soon to become the driving force and leader in some of the most spectacular more recent developments in the field. In view of Simon Brendle's wide-sweeping interests, tracing all of his achievements seems impossible. Therefore here we limit ourselves to a review of only some of the most visible highlights of his work so far.

1. Conformal geometry

The Yamabe theorem asserts that, similar to the uniformization theorem for closed surfaces, any closed manifold (M, g) of dimension $m \geq 3$ carries a conformal metric of constant scalar curvature. After Yamabe's first unsuccessful attempt, in 1976 a proof for a large class of manifolds was achieved by Aubin, and in 1984 Schoen was able to find an argument, based on the positive mass theorem, miraculously covering exactly the cases left open by Aubin. In the course of his work, moreover, Schoen was led to conjecture that, unless the manifold (M, g) is conformal to the sphere, the space of *all* solutions of the Yamabe equation is compact in the C^2 -topology, and he was able to verify this conjecture in the case when (M, g) is locally conformally flat. Based on a strategy proposed by Schoen, the conjecture later was shown to hold true in low dimensions by work of Li-Zhu and Druet, and, finally, in 2007, for dimensions $n \leq 24$ by Khuri-Marques-Schoen. Around the same time, against all expectations, in [3], Simon Brendle gave an ingenious construction of smooth manifolds (M, g) of dimension $n \geq 52$ for which compactness fails even for solutions with bounded Yamabe energy. In a sequel [1], jointly with F. Marques he extended this construction to dimensions $n \geq 25$, which then is the optimal result.

2. Yamabe flow

Originally proposed by Hamilton and Yau as an alternative approach to the Yamabe theorem, the question whether the heat flow for the Yamabe energy would always converge to a constant scalar curvature metric was a longstanding open problem. In 1994 convergence of the flow on a locally conformally flat manifold had been shown by Ye with the help of the Schoen-Yau developing map and an argument based on Alexandrov reflection and the maximum principle, which however, crucially uses the symmetries of the sphere. For a general manifold of dimension $3 \leq n \leq 5$, Schwetlick and I in 2003 were able to show that the positive mass theorem of general relativity yields convergence of the flow, however, only for initial data with energy so small that possible divergence of the flow could be characterized by the degeneration of the flow to at most one "bubble". Prompted by our work, in a remarkable display of technical power, Simon Brendle through a combination of the positive mass theorem with the interaction analysis of Bahri-Coron for multiple "bubbles" and the Lojasiewicz-Simon inequality in [4] was able to remove this restriction entirely, proving unconditional convergence of the flow first in dimensions $3 \leq n \leq 5$, and then in [5] also for a large class of closed manifolds of dimension $n \geq 6$, including, in particular, all spin manifolds.

3. Differentiable sphere theorem

In [11] Simon Brendle and Rick Schoen show that every closed and simply connected Riemannian manifold (M, g) whose sectional curvatures are pointwise strictly quarter pinched is diffeomorphic to the sphere with its standard structure. This result very significantly improves the previous results of Berger and Klingenberg from the early 1960's stating that a simply connected Riemannian manifold whose sectional curvatures all lie in the interval $]1, 4]$ is homeomorphic to S^n and settles one of the major open problems in classical differential geometry since the 1950's. The proof given by Brendle and Schoen uses Hamilton's Ricci flow and is based on the discovery and ingenious use of new curvature conditions, derived from the notion of "positive isotropic curvature" introduced by Micallef-Moore in 1988. While the observation that positive isotropic curvature is preserved under the Ricci flow was made independently by H. Nguyen, Brendle and Schoen show that if the sectional curva-

tures of (M, g) are pointwise quarter pinched, then also $(M, g) \times \mathbb{R}^2$ has non-negative isotropic curvature, and they demonstrate that this condition is preserved and, in fact, improved under the flow, from which the result follows. Aside from the proof of the Poincaré and Geometrization conjectures completed by Perelman, this contribution by Simon Brendle and Rick Schoen is the most spectacular application of Hamilton's Ricci flow to date, and a milestone in the history of Geometric Analysis. In a companion paper in Acta [12], Brendle and Schoen have also been able to characterize all manifolds whose sectional curvatures are pointwise weakly quarter pinched.

4. Minimal surfaces, Lawson conjecture

In [6], Simon Brendle gives an astounding and beautiful proof of the conjecture that up to isometries the Clifford torus $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\sqrt{2} \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ is the only minimal torus Σ embedded in \mathbb{S}^3 . Brendle's proof is based on a highly original and clever use of the maximum principle in the analysis of the quantity

$$\sup_{x, y \in \Sigma, x \neq y} \frac{\sqrt{2} |\nu(x) \cdot y|}{|A(x)| |1 - x \cdot y|},$$

where A is the second fundamental form and where ν is the unit normal of Σ , viewed as a hypersurface in \mathbb{S}^3 . Note that for any given $x \in \Sigma$ and for any $y \in \Sigma$ close to x , the quantity $\nu(x) \cdot y$ approximately equals the second fundamental form of Σ at x in direction $y - x$, and $|1 - x \cdot y| = \frac{1}{2}|x - y|^2$ gives the correct normalization.

The technique of applying the maximum principle to global quantities depending on a pair of points as in the quotient above was introduced by Gerhard Huisken in his new proof of Grayson's theorem on curve shortening flow and was developed further by Ben Andrews in the context of mean curvature flow of strictly mean-convex surfaces. Brendle's use of the maximum principle in his proof of the Lawson conjecture is a surprising, highly original extension of these ideas.

The current focus of Brendle's work, however, lies on geometric flows, notably the mean curvature flow for which he has obtained sharp new bounds with deep consequences, and the higher-

dimensional Ricci flow. In amazing progression he is producing results of the highest quality that rapidly advance the field.

5. Mean curvature flow

Another deep application of the 2-point maximum principle underlies Brendle's [2] proof of the sharp bound $\rho \leq (1 + \delta)H + C(\delta)$ for any $\delta > 0$ for the inscribed radius ρ of mean convex hypersurfaces (with mean curvature $H > 0$) evolving under mean curvature flow. This bound is the basis for Brendle's recent extension [10], jointly with Gerhard Huisken, of the work of Huisken-Sinestrari on mean curvature flow with surgery of mean convex hypersurfaces in ambient \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, to the "physical" case when $n = 3$, which for a number of years had defied all attempts.

6. Ricci flow

For the further analysis of the Ricci flow after Perelman a precise understanding of the curvature conditions which are preserved by the Ricci flow and of the possible singularity models and soliton solutions is needed. One such result is Brendle's proof [9] of the uniqueness of Bryant soliton, a rigidity result conjectured by Perelman. In [7] Brendle presents a new curvature condition which is preserved by the Ricci flow in higher dimensions. As a result, for such manifolds a higher dimensional version of Hamilton's neck-like curvature pinching estimate and Perelman's "Canonical Neighborhood Theorem" is obtained, allowing Brendle to extend the flow beyond singularities by a surgery procedure in the spirit of Hamilton and Perelman. As a corollary, he obtains a classification of all diffeomorphism types of such manifolds in terms of a connected sum decomposition. In very recent work [8], again using curvature pinching estimates, now coupled with a new structure theory for ancient solutions, Brendle also establishes such a Canonical Neighborhood Theorem for the Ricci flow with initial data with positive isotropic curvature in dimension $n \geq 12$. Adapting Perelman's surgery procedure to this situation, as a corollary he obtains a topological classification of all compact manifolds with positive isotropic curvature which do not contain non-trivial incompressible space forms.

References

- [1] S. Brendle and F. Marques. “Blow-up phenomena for the Yamabe PDE II”. *preprint* (2007).
- [2] S. Brendle. “A sharp bound for the inscribed radius under mean curvature flow”. *Inventiones mathematicae* **202**, no.1 (2015), pp. 217–237.
- [3] S. Brendle. “Blow-up phenomena for the Yamabe equation”. *Journal of the American Mathematical Society* **21**, no.4 (2008), pp. 951–979.
- [4] S. Brendle et al. “Convergence of the Yamabe flow for arbitrary initial energy”. *Journal of Differential Geometry* **69**, no.2 (2005), pp. 217–278.
- [5] S. Brendle. “Convergence of the Yamabe flow in dimension 6 and higher”. *Inventiones mathematicae* **170**, no.3 (2007), pp. 541–576.
- [6] S. Brendle. “Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture”. *arXiv preprint arXiv:1203.6597* (2012).
- [7] S. Brendle. “Ricci flow with surgery in higher dimensions”. *Ann. of Math. (2)* **187**, no.1 (2018), pp. 263–299. issn: 0003-486X. doi: 10.4007/annals.2018.187.1.6. url: <https://doi.org/10.4007/annals.2018.187.1.6>.
- [8] S. Brendle. “Ricci flow with surgery on manifolds with positive isotropic curvature”. *arXiv:1711.05167* ().
- [9] S. Brendle. “Rotational symmetry of self-similar solutions to the Ricci flow”. *Inventiones mathematicae* **194**, no.3 (2013), pp. 731–764.
- [10] S. Brendle and G. Huisken. “Mean curvature flow with surgery of mean convex surfaces in \mathbb{R}^3 ”. *Inventiones mathematicae* **203**, no.2 (2016), pp. 615–654.
- [11] S. Brendle and R. Schoen. “Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms”. *Journal of the American Mathematical Society* **22**, no.1 (2009), pp. 287–307.
- [12] S. Brendle and R. M. Schoen. “Classification of manifolds with weakly $1/4$ -pinched curvatures”. *Acta mathematica* **200**, no.1 (2008), pp. 1–13.



Michael Struwe

ETH Zurich

Michael Struwe est professeur. Ses recherches portent notamment sur le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles non-linéaires issues de problèmes de géométrie différentielle.

Les contributions de Nader Masmoudi

• F. BOYER

Rendre compte avec fidélité et en quelques lignes de l'ensemble des travaux scientifiques de Nader Masmoudi qui lui ont valu l'attribution du prix Fermat 2017 est un défi certainement impossible à relever.

En une vingtaine d'années de carrière, N. Masmoudi a écrit ou co-écrit une grosse centaine d'articles (beaucoup d'entre eux dépassant allègrement les 50 pages) publiés dans les toutes meilleures revues. En dehors de l'aspect quantitatif dont chacun sait qu'il ne mesure que faiblement l'impact d'un chercheur sur sa discipline, il me semble fon-

damental de relever que chacune de ses contributions a apporté à la fois des résultats importants et qui font aujourd'hui référence mais aussi des méthodes mathématiques nouvelles qui ont parfois montré leur efficacité dans une large variété de contextes. J'ajoute que N. Masmoudi et ses co-auteurs attachent manifestement un très grand soin à la rédaction des articles ce qui rend accessibles des tours de force techniques qui auraient pu être tout à fait indigestes sans cet effort de pédagogie et de mise en perspective.

1. Introduction

Le thème principal des recherches menées par N. Masmoudi est l'analyse des équations aux dérivées partielles d'évolution non linéaires notamment issues de modèles de la mécanique des fluides. Ce thème se décline selon de nombreuses directions dans l'œuvre de N. Masmoudi : écoulements de fluides complexes (non-newtoniens), passage de modèles cinétiques aux modèles fluides, limites incompressibles, couches limites, ondes de surface, comportement en temps long et stabilité, homogénéisation...

Pour donner une idée un peu plus précise de l'impact de ces travaux je vais principalement esquisser ici la description des résultats récents qu'il a obtenus concernant des problèmes de stabilité asymptotique en mécanique des fluides dont l'étude a été initiée par les pères fondateurs de la mécanique des fluides théorique. Les équations considérées (en dimension $d = 2$ ou $d = 3$) sont données sous forme adimensionnelle par

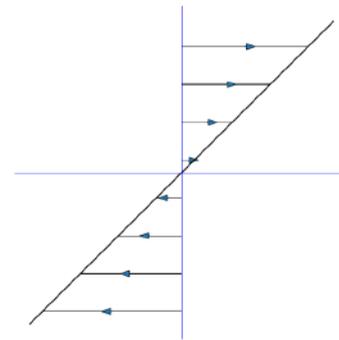
$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \varepsilon \Delta u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ces équations régissent l'évolution du champ de vitesse d'un fluide $u : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ et du champ de pression associé $p : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto p(t, x) \in \mathbb{R}$. Le paramètre $\varepsilon \geq 0$ dans ce système correspond à la viscosité du fluide et joue un rôle majeur dans la physique du problème et dans les propriétés qualitatives des solutions. Deux régimes assez différents peuvent être ainsi distingués.

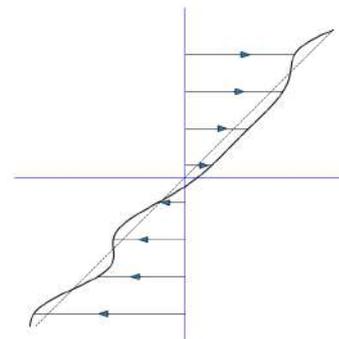
- Pour $\varepsilon = 0$, on parle des équations d'Euler ; elles sont par nature conservatives et réversibles et ne contiennent donc pas, *a priori*, de termes d'amortissement susceptibles de faire décroître des perturbations initiales de la solution au cours du temps.
- Si $\varepsilon > 0$ on parle des équations de Navier-Stokes ; elles sont irréversibles et contiennent un *petit* terme de dissipation qui devrait aider à établir des propriétés de stabilité plus facilement. Au moins formellement, on s'attend à retrouver pour ε petit un comportement des solutions proche de celui des solutions des équations d'Euler mais comme le petit paramètre apparaît devant le terme d'ordre le plus élevé, il s'agit d'un problème de perturbations singulières qui peut être délicat : la nature même des équations change quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On s'intéressera aux solutions périodiques dans les variables x_1 et x_3 (si $d = 3 \dots$), la variable x_2 parcourant \mathbb{R} . Dans cette géométrie, une solution stationnaire particulière de ces équations (appelée écoulement de Couette) correspond à un écoulement de cisaillement ; elle est donnée par la formule $U(x) = x_2 e_1$, $p(x) = 0$. Autrement dit c'est une configuration dans laquelle le fluide s'écoule uniquement dans la direction e_1 portée par la coordonnée x_1 et selon un profil linéaire en x_2 ; à noter que, pour $\varepsilon = 0$, les profils non linéaires sont également des solutions exactes des équations (voir figure 1). La question de la stabilité (éventuellement asymptotique) de cette solution quand on perturbe la donnée initiale a fait l'objet de nombreuses études à la fois théoriques et expérimentales depuis fort longtemps [9, 8] et s'est avérée être beaucoup plus délicate que ce que l'on pourrait penser au premier abord.

FIGURE 1 – Écoulements de cisaillement 2D



(a) L'écoulement de Couette



(b) Un écoulement de cisaillement quelconque

2. Un problème modèle

Pour un système d'équations différentielles ordinaires de la forme $y' + Ay = 0$, le fait que toutes les valeurs propres de la matrice A aient une partie réelle positive ou nulle ne suffit pas à assurer la stabilité du système au voisinage de l'équilibre (en particulier si certaines d'entre elles sont imaginaires pures). Ce sera le cas si la matrice A est normale mais si elle ne l'est pas et qu'il existe des blocs de Jordan non triviaux pour des valeurs propres imaginaires pures alors des instabilités peuvent se développer de façon polynomiale en temps. C'est donc un phénomène plus difficile à capter qu'une instabilité spectrale classique qui se développe de façon exponentielle.

Si maintenant on considère une EDP d'évolution linéaire (i.e. un système dynamique linéaire en dimension infinie), la faiblesse de l'analyse spectrale subsiste et s'y ajoute un second aspect qui est l'importance du **choix des topologies** dans lesquelles on analyse le problème.

Prenons un exemple très simple avec l'équation de cisaillement 2D basique¹ donnée par

$$\partial_t f + U \cdot \nabla f = \partial_t f + x_2 \partial_{x_1} f = 0, \quad f(0, x) = f_0(x), \quad (2)$$

avec les mêmes conditions de périodicité en x_1 que précédemment et on suppose que la donnée initiale f_0 est bornée et à support compact pour fixer les idées. La solution de ce problème se calcule aisément par la formule

$$f(t, x_1, x_2) = f_0(x_1 - tx_2, x_2), \quad \forall t, x_1, x_2.$$

Il apparaît clairement que, pour tout x_2 fixé, la moyenne en x_1 de la solution, notée $\bar{f}(t, x_2)$ ne dépend pas de t . Cette composante de la solution est donc préservée au cours du temps. On suppose donc dans la suite que la moyenne en x_1 de la donnée initiale $\bar{f}_0(x_2)$ est nulle. On observe également que toutes les normes L^p , $1 \leq p \leq +\infty$ de cette solution sont conservées au cours du temps. Ainsi, pour les topologies fortes des L^p on a stabilité de la solution nulle au sens de Lyapounov.

D'autre part, en variables de Fourier $(k, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, on trouve

$$\hat{f}(t, k, \eta) = \hat{f}_0(k, \eta + kt).$$

Ainsi, on voit que $\hat{f}(t, k, \eta)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ pour tout $k \neq 0$, uniformément sur tout compact en

η . Comme on a supposé que $\bar{f}_0 = 0$, c'est-à-dire que $\hat{f}_0(0, \eta) = 0$ pour tout η , on vient de montrer que $f(t, \cdot)$ converge faiblement vers 0 dans L^2 quand $t \rightarrow \infty$. On peut même vérifier qu'on a convergence forte vers 0 dans l'espace de Sobolev de faible régularité H^{-1} avec une estimation du type

$$\|f(t, \cdot)\|_{H^{-1}} \leq \frac{C}{1+t} \|f_0\|_{H^1}.$$

Sur cette même formule en Fourier, on peut également voir que, pour t grand on a

$$\|\partial_{x_2} f(t, \cdot)\|_{L^2} \approx t \|\partial_{x_1} f_0\|_{L^2},$$

et donc, sauf si f_0 est nulle, on a $f(t, \cdot)$ qui explose en temps long dans l'espace de Sobolev H^1 .

En résumé, même sur un système aussi simple que le problème (2), la stabilité spectrale n'est pas très informative et selon la topologie choisie, on observe ou l'instabilité, ou la stabilité, ou même la stabilité asymptotique de la solution nulle (à partir de données initiales à moyenne en x_1 nulles).

3. Stabilité du flot de Couette

Découvrons maintenant en quoi toute une série de contributions récentes de N. Masmoudi et ses collaborateurs sur ce sujet ont permis une compréhension très complète de ces phénomènes de stabilité de l'écoulement de Couette pour les modèles non linéaires décrits plus haut.

Équations d'Euler en 2D. Pour $\varepsilon=0$ et $d=2$, les solutions de l'équation (1) ont une propriété agréable : la quantité (scalaire) $\omega = \text{rot } u = \partial_{x_2} u_1 - \partial_{x_1} u_2$, appelée **vorticité**, vérifie une équation de transport

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0,$$

et la vitesse u peut-être exprimée grâce à une loi linéaire en fonction de ω . Pour cela il suffit de calculer la fonction de courant ψ puis la vitesse u par les formules

$$\Delta \psi = \omega, \quad u = \nabla^\perp \psi = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \psi \\ \partial_{x_1} \psi \end{pmatrix}.$$

Pour étudier la stabilité de l'écoulement de Couette U (dont la vorticité vaut 1) dans ce modèle, on peut commencer par étudier l'équation linéarisée, obtenue formellement en écrivant $u = U + \tilde{u}$,

1. Mais néanmoins pertinente pour comprendre les modèles de mécanique des fluides qui vont suivre car ce n'est rien d'autre qu'un transport passif par l'écoulement de Couette U .

$\omega = 1 + \tilde{\omega}$ et en négligeant les termes non linéaires dans les équations. On trouve

$$\partial_t \tilde{u} + x_2 \partial_{x_1} \tilde{u} + \tilde{u}_2 e_1 + \nabla p = 0,$$

ou, de façon équivalente, dans la formulation en vorticité

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\omega} + x_2 \partial_{x_1} \tilde{\omega} = 0, \\ \Delta \tilde{\psi} = \tilde{\omega}, \quad \tilde{u} = \nabla^\perp \tilde{\psi}. \end{cases}$$

L'équation vérifiée par $\tilde{\omega}$ dans ce dernier système est exactement le problème modèle (2) que nous avons étudié précédemment. Il reste donc à comprendre ce que les résultats décrits plus haut impliquent sur le champ de vitesse \tilde{u} . Pour cela on exprime la fonction de courant $\tilde{\psi}$ dans les variables $z_1 = x_1 - tx_2$ et $z_2 = x_2$, on la note alors $\tilde{\phi}$. Une analyse de Fourier dans ces nouvelles variables donne la formule

$$\widehat{\tilde{\phi}}(k, \eta) = \frac{-\widehat{\tilde{\omega}}_0(k, \eta)}{k^2 + |\eta - tk|^2}.$$

Celle-ci montre que pour $k \neq 0$ (i.e.   part pour les moyennes en x_1 des solutions), les coefficients de Fourier de $\tilde{\phi}$ commencent par croître jusqu'à un temps critique η/k (le facteur d'amplification est alors de l'ordre de η^2/k^2 si η est grand devant k) puis finissent par tendre vers 0 en temps long. On a même une estimation quantitative de ce gain (qui nécessite de la régularité sur $\tilde{\omega}_0$). On peut alors revenir aux variables initiales puis à la perturbation de vitesse \tilde{u} . Tous calculs faits cela donne la convergence suivante, pour s assez grand

$$\|\tilde{u}(t, \cdot) - \bar{u}_{0,1}(x_2)e_1\|_{L^2} \leq \frac{C}{1+t} \|\tilde{\omega}_0\|_{H^s},$$

où $\bar{u}_{0,1}$ est la moyenne en x_1 de la première composante de la perturbation initiale. Il y a donc une forme de *dissipation cachée* dans ces équations pourtant non dissipatives. Il est important de noter que \tilde{u} ne converge pas vers 0 mais vers un profil de cisaillement possiblement non linéaire en x_2 .

Les équations considérées étant réversibles, on peut montrer que ce résultat de retour vers un équilibre pour les perturbations d'un écoulement de Couette impliquent en fait un résultat de non stabilité (  la Lyapounov) pour ces équations : pour tout $\delta > 0$ il existe une perturbation initiale de U de taille δ dans L^2 telle que la solution associée des équations d'Euler linéarisées soit de taille 1 dans L^2 au bout d'un certain temps. Ceci n'est pas contradictoire avec le retour vers l'équilibre asymptotique

mais confirme l'existence de comportements transitoires subtils.

On voit donc que, dès l'étude du système linéarisé, des phénomènes de stabilité/instabilité non triviaux apparaissent et on imagine bien que la situation non linéaire est bien plus complexe à analyser, notamment car il faut assurer que la phase de croissance transitoire des perturbations (avant leur retour à l'équilibre) ne soit pas trop amplifiée à cause des non linéarités de l'équation. Par ailleurs, la nouvelle variable d'intérêt $x_1 - tx_2$ doit maintenant être adaptée à l'écoulement considéré inconnu.

Le très joli résultat obtenu par Bedrossian et Masmoudi dans [4] peut s'écrire, dans une version simplifiée, de la façon suivante.

Théorème 1. *Pour deux espaces fonctionnels bien choisis² B et B' avec $B \subset B'$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute vitesse initiale u_0 proche de l'écoulement de Couette U (et dont la vorticité associée est notée ω_0) au sens suivant*

$$\|u_0 - U\|_{L^2} + \|\omega_0 - 1\|_B \leq \delta,$$

alors il existe un profil limite $x_2 \mapsto u_\infty(x_2) \in \mathbb{R}$, une vorticité limite $(x_1, x_2) \mapsto \omega_\infty(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, et un historique de profil $(t, x_2) \mapsto v(t, x_2) \in \mathbb{R}$ tels que la solution associée des équations complètes d'Euler 2D satisfait à

$$\begin{cases} \|\omega(t, x_1 + tv(t, x_2), x_2) - \omega_\infty(x_1, x_2)\|_{B'} \leq C \frac{\delta^2}{1+t}, \\ \|u(t, x_1, x_2) - u_\infty(x_2)e_1\|_{L^2} \\ + \|v(t, x_2) - u_\infty(x_2)\|_{B'} \leq C \frac{\delta}{1+t}. \end{cases}$$

Autrement dit, la solution des équations d'Euler converge en temps long vers un profil de type Couette qui est proche du profil linéaire (mais pas nécessairement égal) et dont la forme précise dépend de façon complexe de toute la dynamique de la solution.

Il y a donc également un effet de dissipation cachée dans les équations d'Euler 2D non linéaires et il aura fallu près d'un siècle pour que la justification complète et rigoureuse de ce phénomène soit donnée par N. Masmoudi et ses co-auteurs.

Il est remarquable que les techniques mises en œuvre dans ce travail ont également permis à Bedrossian, Masmoudi et Mouhot [5] de porter un regard nouveau et précisé sur l'effet d'amortissement Landau en physique des plasmas étudié dans [7].

2. Ce sont des classes de Gevrey.

Équations de Navier-Stokes en 2D. On peut maintenant s'intéresser, toujours en dimension 2, à la stabilité de l'écoulement de Couette dans les équations de Navier-Stokes (la viscosité ε dans (1) est maintenant petite mais strictement positive). *A priori* la question semble plus simple car la viscosité va naturellement participer à la relaxation vers l'équilibre de la solution en temps long. Toute la problématique revient à obtenir des estimations uniformes en ε sur des intervalles de temps aussi long que possibles.

Plus précisément, on pourrait s'attendre à des effets visqueux qui apparaissent en des temps caractéristiques de l'ordre de ε^{-1} . Néanmoins, en regardant le problème modèle

$$\partial_t f + x_2 \partial_{x_1} f = \varepsilon \Delta f, \quad f(0, \cdot) = f_0,$$

on peut observer que l'effet du cisaillement se combine avec le terme de viscosité et que cela produit une dissipation bien plus rapide (en dehors des modes indépendants de x_1). En effet, si on reprend le calcul en variable de Fourier ci-dessus on obtient

$$\hat{f}(t, k, \eta) = \hat{f}_0(k, \eta + kt) \exp\left(-\varepsilon \int_0^t [k^2 + |\eta - k\tau + kt|^2] d\tau\right)$$

et ainsi tous les modes $k \neq 0$ sont dissipés en norme L^2 avec un taux en $e^{-c\varepsilon t^3}$ et les effets visqueux apparaissent donc bien plus tôt, autour du temps caractéristique $\varepsilon^{-1/3}$. Les modes $k = 0$ ne bénéficient pas des effets de cisaillement et sont donc seulement dissipés à un taux algébrique en εt .

Pour comprendre comment ces effets et les phénomènes d'amplification transitoire de certaines composantes de la solution influencent la dynamique non linéaire, il y a un travail technique très important pour contrôler les interactions non linéaires qui pourraient empêcher la stabilité recherchée. Cela nécessite des méthodes d'analyse harmonique très fines et encore une fois l'utilisation de classes de Gevrey pour tenir compte des pertes de régularité inhérentes à ces interactions.

Le résultat obtenu par Bedrossian, Masmoudi et Vicol dans [6] s'exprime à peu près de la façon suivante.

Théorème 2. *Pour tout $\alpha \geq 1$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute donnée initiale vérifiant*

$$\|u_0 - U\|_{L^2} + \|\omega_0 - 1\|_B \leq \delta,$$

il existe un historique de profil $(t, x_2) \mapsto v(t, x_2) \in \mathbb{R}$ tel que la solution des équations de Navier-Stokes

2D associée satisfait à

$$\begin{cases} \|\bar{\omega}(t, x_2)\|_{B'} + \|\bar{u}_1(t, x_2) - x_2\|_{L^2} \leq \frac{C\delta}{1 + |\varepsilon t|^{1/4}}, \\ \|\omega(t, x_1 + tv(t, x_2), x_2) - \bar{\omega}(t, x_2)\|_{B'} \\ + \|u(t, x_1, x_2) - \bar{u}_1(t, x_2)e_1\|_{L^2} \leq \frac{C\delta}{1 + |\varepsilon t^3|^\alpha}. \end{cases}$$

Ce théorème dit donc que toute perturbation suffisamment petite de l'écoulement de Couette va retourner asymptotiquement vers celui-ci en temps long selon deux mécanismes : les variations en x_1 de la solution vont essentiellement bénéficier de la dissipation rapide sur un temps de l'ordre de $\varepsilon^{-1/3}$ discutée ci-dessus (même si le caractère exponentiel est remplacé par une décroissance algébrique aussi rapide que souhaité), alors que les moyennes en x_1 sont seulement dissipées par la dissipation parabolique usuelle sur des temps caractéristiques en ε^{-1} . Contrairement aux équations d'Euler, le profil de cisaillement limite est nécessairement le profil linéaire, à cause des termes de dissipation dans la variable x_2 . Il est à noter que ce résultat est valable pour des tailles de perturbations initiales indépendantes de la viscosité ε .

Même si ce résultat ressemble beaucoup à son pendant pour les équations d'Euler, il faut noter que la définition du changement de coordonnées adapté $(t, x_2) \mapsto v(t, x_2)$ est plus délicate car il incorpore des effets visqueux.

Les équations de Navier-Stokes 3D. Le cas tridimensionnel est bien plus délicat que le cas 2D pour plusieurs raisons. L'une d'entre elles est liée à la relativement faible rigidité de la contrainte de divergence nulle du champ de vitesse en 3D. Ainsi, on a vu en 2D (et c'est encore essentiellement vrai en 3D) que l'effet du cisaillement (dans la direction x_1) a pour effet de rendre les solutions essentiellement indépendantes de x_1 quand t devient grand. La condition de divergence nulle donnait alors

$$\partial_{x_2} u_2 = -\partial_{x_1} u_1 \rightarrow 0,$$

et comme $\partial_{x_1} u_2$ tend aussi vers 0, on trouve que u_2 converge vers une constante nécessairement nulle pour des raisons d'intégrabilité. En conséquence, en dimension 2, on déduit assez aisément de façon formelle que le champ de vitesse va converger vers un champ de la forme d'un cisaillement $u_\infty(x_2)e_1$.

Dans le cas de la dimension 3, cet argument ne tient plus car si on admet que les variations en x_1 des solutions continuent à tendre vers 0 en temps

long, alors la condition de divergence nulle donne seulement que

$$\partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3 = -\partial_{x_1} u_1 \rightarrow 0.$$

De cette information on ne déduit plus que u_2 et u_3 tendent vers 0 sans utiliser d'autres arguments. Ce manque de rigidité se manifeste aussi par le fait qu'il existe un grand nombre de solutions des équations de Navier-Stokes 3D indépendantes de x_1 mais qui ne soient pas des profils de cisaillement. Ces solutions particulières jouent un rôle très important dans l'analyse du problème.

Une autre façon de comprendre ces difficultés inhérentes à la dimension 3 consiste à écrire l'équation à laquelle satisfait la vorticité $\omega = \text{rot } u$ (qui est maintenant un champ vectoriel) et qui s'écrit

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) u + \varepsilon \Delta \omega.$$

Si on linéarise autour de l'écoulement de Couette, comme nous l'avons fait plus haut, cette équation devient

$$\partial_t \tilde{\omega} + x_2 \partial_{x_1} \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_2 e_1 + \varepsilon \Delta \tilde{\omega}.$$

La composante $\tilde{\omega}_3$ vérifie une équation similaire à celle de la vorticité pour le cas 2D, mais les deux autres composantes en revanche satisfont à un système **couplé** plus complexe (qui n'est pas associé à un opérateur « normal », c'est-à-dire commutant avec son adjoint) qui s'écrit

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} + x_2 \partial_{x_1} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \Delta \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix}.$$

On comprend alors que pour $t \leq \varepsilon^{-1}$, c'est-à-dire avant que les effets de la diffusion ne se ressentent,

la composante $\tilde{\omega}_1$ va croître linéairement en temps du fait de la présence du terme $\tilde{\omega}_2$ dans le second membre. Pour ε petit, on peut donc s'attendre à une croissance d'un facteur ε^{-1} de la perturbation $\tilde{\omega}$ qui risque d'avoir des effets très importants dans le modèle complet non linéaire. On s'attend donc à ce que, contrairement au cas 2D, la taille du bassin de stabilité de l'écoulement de Couette dépende de la viscosité ε .

Tous ces petits calculs simples illustrent le fait que l'étude de la stabilité de l'écoulement de Couette en 3D pour ε petit est une affaire d'un niveau de difficulté encore plus important que les précédents cas évoqués. C'est donc un tour de force que Bedrossian, Germain et Masmoudi ont réussi sur ce sujet dans une série de travaux [1, 2, 3]. Ils ont ainsi décrit précisément la taille, en fonction de ε , des perturbations de l'écoulement de Couette pour lesquelles la solution reste à distance bornée de cet écoulement puis finit par retourner vers un profil de cisaillement en temps long. Ils ont également étudié le comportement des solutions pour des perturbations à peine plus grandes que cette taille critique en montrant qu'elles existent au moins jusqu'au temps $\varepsilon^{-2/3}$ et que, selon toute vraisemblance, un phénomène d'instabilité secondaire a toutes les chances de se produire après ce temps critique. Il est remarquable de noter que les seuils critiques identifiés pour cette (in-)stabilité dépendent encore une fois de la topologie utilisée pour mesurer les solutions et les résultats sont de fait différents si on s'intéresse aux perturbations petites en norme Sobolev ou en norme Gevrey.

Références

- [1] J. BEDROSSIAN, P. GERMAIN et N. MASMOUDI. « Dynamics near the subcritical transition of the 3D Couette flow I: Below threshold case » (2015). arXiv 1506.03720.
- [2] J. BEDROSSIAN, P. GERMAIN et N. MASMOUDI. « Dynamics near the subcritical transition of the 3D Couette flow II: Above threshold case » (2015). arXiv 1506.03721.
- [3] J. BEDROSSIAN, P. GERMAIN et N. MASMOUDI. « On the stability threshold for the 3D Couette flow in Sobolev regularity ». *Ann. of Math. (2)* **185**, n° 2 (2017), p. 541–608. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2017.185.2.4. URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.2.4>.
- [4] J. BEDROSSIAN et N. MASMOUDI. « Inviscid damping and the asymptotic stability of planar shear flows in the 2D Euler equations ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **122** (2015), p. 195–300. ISSN : 0073-8301. DOI : 10.1007/s10240-015-0070-4. URL : <https://doi.org/10.1007/s10240-015-0070-4>.
- [5] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI et C. MOUHOT. « Landau damping: paraproducts and Gevrey regularity ». *Ann. PDE* **2**, n° 1 (2016), Art. 4, 71. ISSN : 2199-2576. DOI : 10.1007/s40818-016-0008-2. URL : <https://doi.org/10.1007/s40818-016-0008-2>.

- [6] J. BEDROSSIAN, N. MASMOUDI et V. VICOL. « Enhanced dissipation and inviscid damping in the inviscid limit of the Navier-Stokes equations near the two dimensional Couette flow ». *Arch. Ration. Mech. Anal.* **219**, n° 3 (2016), p. 1087–1159. ISSN : 0003-9527. DOI : 10.1007/s00205-015-0917-3. URL : <https://doi.org/10.1007/s00205-015-0917-3>.
- [7] C. MOUHOT et C. VILLANI. « On Landau damping ». *Acta Math.* **207**, n° 1 (2011), p. 29–201. ISSN : 0001-5962. DOI : 10.1007/s11511-011-0068-9. URL : <https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9>.
- [8] W. M. ORR. « The Stability or Instability of the Steady Motions of a Perfect Liquid and of a Viscous Liquid. Part I: A Perfect Liquid ». *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* **27** (1907), p. 9–68. ISSN : 00358975. URL : <http://www.jstor.org/stable/20490590>.
- [9] W. THOMSON. « Stability of fluid motion - Rectilineal motion of viscous fluid between two parallel planes ». *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **24**, n° 147 (1887), p. 188–196. DOI : 10.1080/14786448708628078. eprint : <https://doi.org/10.1080/14786448708628078>. URL : <https://doi.org/10.1080/14786448708628078>.



Franck BOYER

Université Toulouse III Paul Sabatier

Franck Boyer est professeur et membre de l'Institut Universitaire de France. Ses recherches portent sur la modélisation en mécanique des fluides et sur l'analyse numérique et le contrôle des EDP.

Le Prix Fermat Junior 2017 et ses lauréats

- J. BELLIER-MILLÈS
- J.-F. COULOMBEL

Le Prix Fermat Junior 2017 a été attribué conjointement à Charlie Hérent (étudiant à l'ÉNS Rennes) et au trio Corentin Lunel, Hugo Fages et Quentin Rembert (étudiants, respectivement, à l'ÉNS Lyon, l'École polytechnique et Télécom SudParis), respectivement pour leurs contributions :

- les morphismes et les plongements entre groupes de permutations,
- étude d'un invariant des nœuds alternés couplée à une implémentation informatique.

Les deux contributions primées, qui sont décrites ci-après, seront publiées prochainement dans la revue *Quadrature*¹.

Rappelons que le Prix Fermat Junior récompense un travail en mathématiques effectué par un(e) (ou des) étudiant(e)(s) dans les lycées et universités français. La contribution primée doit être accessible aux étudiants ayant un niveau de Licence en mathématiques. Le Prix Fermat Junior est organisé tous les deux ans par l'Institut de mathématiques de Toulouse et financé par l'université Paul Sabatier.

1. <http://www.quadrature.info/>

La cérémonie officielle de remise des Prix Fermat s'est déroulée le lundi 14 mai 2018 à Toulouse, Hôtel de Région Occitanie Pyrénées-Méditerranée. Un exposé grand public y a été donné par Josselin Garnier (École polytechnique).

1. La contribution de Charlie Hérent

Le travail de Charlie Hérent apporte des réponses nouvelles en théorie des groupes et plus spécifiquement à l'étude des morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_m$ entre groupes symétriques. Lorsque l'entier m est strictement plus petit que l'entier n , on comprend bien ces morphismes en remarquant que le noyau d'un morphisme de groupes est un sous-groupe distingué et en utilisant le fait que les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_n sont peu nombreux. Le cas $m = n$ se traite en étudiant les automorphismes intérieurs de \mathfrak{S}_n et l'étude des plongements $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_m$ lorsque $n < m$ apporte des infor-

mations sur le nombre de sous-groupes isomorphes à \mathfrak{S}_n dans \mathfrak{S}_m . Charlie Hérent s'intéresse au dénombrement des morphismes et des plongements de groupes $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_m$ dans le cas $n \leq m$.

Lorsque $G = \langle a \rangle$ est un groupe monogène, un morphisme de groupes $G \rightarrow H$ est caractérisé par l'image de a . Inversement, étant donné un élément $b \in H$, on peut définir un morphisme de groupes $G \rightarrow H$ en envoyant a sur b si et seulement si l'ordre de b divise l'ordre de a . De la même façon, si $\{g_1, \dots, g_n\}$ est un système de générateurs du groupe G , il est possible de décrire un morphisme de groupes $G \rightarrow H$ en ne décrivant que l'image des générateurs g_i parmi des éléments de H vérifiant toutes les relations satisfaites par les g_i .

Charlie Hérent utilise cette idée pour calculer le nombre exact de sous-groupes de \mathfrak{S}_n isomorphes à \mathfrak{S}_3 , \mathfrak{A}_4 ou encore au groupe de Klein. Il donne aussi des encadrements du nombre de morphismes ou du nombre de plongements de \mathfrak{S}_n dans \mathfrak{S}_m à l'aide des nombres correspondants pour les morphismes ou les plongements de \mathfrak{S}_2 ou \mathfrak{S}_3 dans \mathfrak{S}_m .

2. La contribution de Corentin Lunel, Hugo Fages et Quentin Rembert

L'équipe formée de Corentin Lunel, Hugo Fages et Quentin Rembert a travaillé sur la théorie des nœuds et elle a développé et programmé un nouvel algorithme calculant un invariant sur les nœuds alternés. Les nœuds sont des courbes fermées de l'espace et on s'intéresse à leur étude à déformation près. Une manière de les modéliser est de les

projeter dans le plan. On fait alors apparaître des points multiples (doubles si la projection est bien choisie) pour lesquels il faut garder l'information du brin qui passe au-dessus de l'autre si l'on ne veut pas perdre de l'information.

On associe à une projection un mot de Gauss : on numérote les croisements puis on parcourt le nœud en notant les croisements traversés. Bien entendu, ce mot dépend de plusieurs paramètres et il convient donc d'identifier les différents mots obtenus à partir d'un même nœud. Un nœud est dit *alterné* lorsqu'il admet une projection pour laquelle les croisements sont alternés : en dessous, au-dessus, en dessous, au-dessus... lorsqu'on le parcourt. Une conjecture de Tait, qui est maintenant un théorème, assure que le mot de Gauss permet de définir un invariant de nœuds alternés.

On associe alors au mot de Gauss un graphe qui est un invariant du nœud alterné assez fin. En se limitant aux cardinaux des différentes composantes connexes de ce graphe, le trio lauréat obtient un invariant moins fin mais plus facilement calculable. Il présente alors une jolie implémentation en python qui propose des fonctions pour générer aléatoirement des nœuds ou des entrelacs, des fonctions d'affichage permettant de comprendre l'invariant et, bien entendu, une fonction qui compare les invariants de deux nœuds.

Rendez-vous pour le prochain Prix Fermat Junior qui sera décerné fin 2019. Plus d'informations, concernant notamment l'ouverture et les critères d'éligibilité des candidatures, seront disponibles sur <https://www.math.univ-toulouse.fr/>, rubrique Prix Fermat.



Joan BELLIER-MILLÈS

joan.milles@math.univ-toulouse.fr

Joan Bellier-Millès est maître de conférences à l'université Toulouse III Paul Sabatier. Ses recherches portent sur les interactions entre l'algèbre homologique et la géométrie.



Jean-François COULOMBEL

Jean-Francois.coulombel@math.univ-toulouse.fr

Jean-François Coulombel est directeur de recherche CNRS à l'Institut de mathématiques de Toulouse. Ses recherches portent sur les équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et leurs discrétisations.



Systèmes de points en interaction coulombienne

• S. SERFATY

Les grands systèmes de points en interaction coulombienne apparaissent dans de nombreux modèles de physique de la matière condensée, en mécanique classique et quantique et en théorie de l'approximation, et donnent lieu à une variété de questions mathématiques appartenant au domaine du calcul des variations, des EDP et des probabilités. On passera en revue les motivations de ces questions, puis les résultats de « champ moyen » qui permettent de dériver des modèles effectifs pour de tels systèmes à l'échelle macroscopique. On expliquera ensuite comment on peut aller à l'ordre suivant pour obtenir de l'information à l'échelle microscopique, ce qui permet par exemple d'observer dans le cadre de la mécanique statistique l'effet de la température et d'aboutir à des questions de cristallisation.

1. Cadre général

Le physicien Charles-Augustin de Coulomb, au XVIII^e siècle a été le premier à postuler que des particules chargées interagissent en exerçant les unes sur les autres une force proportionnelle au carré de l'inverse de leur distance, de la même manière que la force gravitationnelle postulée par Newton. On veut ici s'intéresser à de grands systèmes de points (ou particules) interagissant par de telles forces, avec, outre la mécanique classique, de nombreuses motivations que l'on détaillera ci-dessous.

Plus précisément, la force étant la dérivée de l'énergie, on considère N particules d'énergie donnée par

$$\mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} g(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^N V(x_i). \tag{1}$$

Ici les points x_i appartiennent à l'espace \mathbb{R}^d , il est également intéressant de considérer des points sur

des variétés. Le noyau d'interaction $g(x)$ est

$$g(x) = -\ln|x|, \quad \text{en dimension } d = 2, \tag{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{|x|^{d-2}}, \quad \text{en dimension } d \geq 3. \tag{3}$$

À une constante multiplicative près, c'est bien le noyau de Coulomb en dimension $d \geq 2$, c.-à-d. la solution fondamentale du laplacien, qui résout

$$-\Delta g = c_d \delta_0 \tag{4}$$

où δ_0 est la masse de Dirac à l'origine et c_d est une constante explicite qui ne dépend que de la dimension. Il est aussi intéressant de considérer le cas unidimensionnel logarithmique

$$g(x) = -\ln|x|, \quad \text{en dimension } d = 1, \tag{5}$$

qui n'est pas coulombien, et les noyaux d'interactions de Riesz, de la forme

$$g(x) = \frac{1}{|x|^s} \quad s > 0. \tag{6}$$

Le cas coulombien unidimensionnel de noyau $-|x|$ est également intéressant mais bien étudié.

On a en outre inclus un champ extérieur ou potentiel confinant V , supposé assez régulier et tendant vers l'infini assez vite à l'infini. À cause du facteur N devant V , l'énergie de confinement totale est du même ordre que l'énergie d'interaction, ce qui confine les points dans un sous-domaine de \mathbb{R}^d de taille finie.

Le noyau de Coulomb et l'opérateur de Laplace sont bien évidemment très importants en physique puisque les interactions fondamentales de la nature sont coulombiennes, on passera plus loin en revue les raisons d'étudier ce genre de système.

On peut s'intéresser à plusieurs types de problèmes, tous dans la limite N tendant vers l'infini :

1. décrire les minimiseurs et éventuellement les points critiques de (1);
2. comprendre les états typiques de systèmes d'énergie \mathcal{H}_N et température inverse $\beta > 0$, décrits par la mesure de Gibbs

$$d\mathbb{P}_{N,\beta}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\beta \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N. \quad (7)$$

Ici $\mathbb{P}_{N,\beta}$ est la densité de probabilité d'observer le système dans la configuration (x_1, \dots, x_N) si la température est $1/\beta$. La constante $Z_{N,\beta}$ s'appelle la « fonction de partition » du système, c'est la constante de normalisation qui fait de $\mathbb{P}_{N,\beta}$ une probabilité¹ c.-à-d.

$$Z_{N,\beta} = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} e^{-\beta \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N; \quad (8)$$

3. comprendre les équations d'évolution associées à (1), telles que le flot gradient de \mathcal{H}_N donné par le système d'équations différentielles couplées

$$\dot{x}_i = -\frac{1}{N} \nabla_i \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N), \quad (9)$$

la dynamique conservative donnée par un système de la forme

$$\dot{x}_i = \frac{1}{N} \mathbb{J} \nabla_i \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) \quad (10)$$

où \mathbb{J} est une matrice antisymétrique, ou bien la dynamique hamiltonienne donnée par l'équation de Newton

$$\ddot{x}_i = -\frac{1}{N} \nabla_i \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N); \quad (11)$$

1. On ne sait pas calculer explicitement (8) sauf dans le cas particulier de (5) pour des V spécifiques, ce qui correspond aux intégrales de Selberg (cf. [3]).

et on peut également s'intéresser aux mêmes dynamiques avec un terme de bruit ajouté.

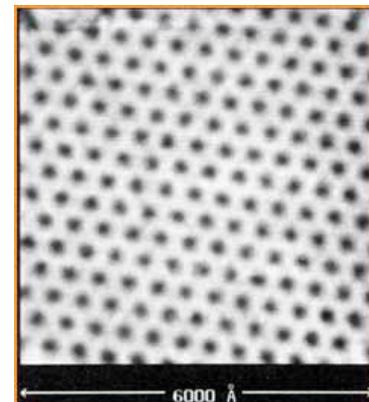
D'un point de vue mathématique, ces questions touchent à l'analyse (EDP, calcul des variations, théorie de l'approximation), aux probabilités, à la physique mathématique, et même à la géométrie (quand on considère par exemple de tels systèmes sur des variétés). Certaines des questions de cristallisation auxquelles elles mènent recourent aussi la théorie des nombres, comme on le verra.

2. Motivations

Les motivations pour l'étude de ces questions sont très nombreuses et variées. On peut citer principalement :

1. Les supraconducteurs, superfluides et condensats de Bose-Einstein où l'on observe des tourbillons ou vortex quantifiés, qui se comportent mathématiquement comme des particules en interaction coulombienne bidimensionnelle. Dans ces systèmes, les vortex se repoussent donc logarithmiquement, ce qui est contrebalancé par un effet de confinement du champ magnétique ou de la rotation, et on observe, ainsi que prédit par Abrikosov, qu'ils forment des réseaux triangulaires parfaits, appelés réseaux d'Abrikosov, voir Fig. 1 (pour plus d'images voir www.fys.uio.no/super/vortex/).

FIGURE 1 – Tourbillons de vortex (en noir) formant des réseaux d'Abrikosov. H. F. Hess et al. *Bell Labs Phys. Rev. Lett.* 62, 214 (1989)



Ces systèmes sont en fait décrits par une énergie (l'énergie de Ginzburg-Landau) et les EDP associées, mais on peut montrer rigoureusement (ceci a été démarré par l'étude de Bethuel-Brezis-Hélein) et poursuivi jusqu'à [11] (voir aussi [12]) que l'analyse des vortex se ramène aux problèmes discrets décrits ci-dessus, dans le cas (2).

Une autre motivation est l'analyse des vortex dans les fluides classiques, telle qu'initée par Onsager, voir [8], ou la physique des plasmas.

2. Les points de Fekete en théorie de l'approximation : points optimisants pour l'interpolation numérique, ils sont définis comme maximisant

$$\prod_{i \neq j} |x_i - x_j|$$

ou de manière équivalente minimisant

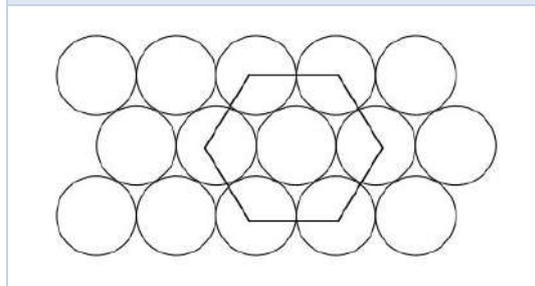
$$-\sum_{i \neq j} \ln |x_i - x_j|.$$

On les étudie souvent sur la sphère ou d'autres variétés. En théorie de l'approximation [10], on s'intéresse aussi à la minimisation de l'énergie de Riesz

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^s} \quad (12)$$

pour tous les s . On peut montrer que lorsque s tend vers 0, les minimiseurs de cette énergie convergent vers ceux de l'énergie logarithmique, tandis que lorsque s tend vers l'infini ils tendent vers les minimiseurs du problème d'empilement optimal de sphères (dont la solution en dimension 2 est connue depuis Fejes Tóth pour être aussi le réseau triangulaire, ainsi que représenté figure 2).

FIGURE 2 – Solution du problème d'empilement maximal de sphères en dimension 2



Il a été démontré par Hales que la solution en dimension 3 du même problème d'empilement

est le réseau FCC (cubique à faces centrées), c'était une conjecture de Kepler. En dimension plus grande la solution n'est connue qu'en dimensions 8 et 24 grâce à une remarquable récente percée due à Viazovska (voir la présentation dans [2] et la revue [16]). En grande dimension, où le problème est important pour les codes correcteurs d'erreur, on s'attend à ce que la solution ne soit pas un réseau.

3. Mécanique statistique et quantique : l'ensemble donné par (7) dans les cas coulombiens s'appelle en physique un *gaz de Coulomb* ou *plasma à une composante* et c'est un ensemble classique en mécanique statistique et considéré comme difficile à analyser à cause de la longue portée de l'interaction. L'étude du gaz de Coulomb bidimensionnel, comme celle du log gaz unidimensionnel sont aussi motivées par l'analyse de nombreuses fonctions d'onde quantiques (effet Hall quantique fractionnaire, fermions libres dans un champ magnétique...) et celle de divers modèles aléatoires, sur ces aspects voir [3]. La variante du cas Coulomb bidimensionnel avec des charges positives et négatives qui coexistent est intéressante pour des modèles de physique théorique (modèle XY, sine-Gordon) qui présentent une transition de Kosterlitz-Thouless, voir [17].
4. Les matrices aléatoires (voir [3]) : dans les cas particuliers (5) et (2), la mesure de Gibbs (7) correspond dans certains cas à la loi des valeurs propres pour certains ensembles bien connus :
- la loi des valeurs propres complexes d'une matrice $N \times N$ à coefficients gaussiens iid est (7) avec (2), $\beta = 2$, et $V(x) = |x|^2$. C'est l'ensemble de Ginibre.
 - la loi des valeurs propres réelles d'une matrice hermitienne $N \times N$ à coefficients gaussiens iid est (7) avec (5), $\beta = 2$ et $V(x) = x^2/2$. C'est l'ensemble GUE (gaussien unitaire). La loi des valeurs propres réelles d'une matrice symétrique $N \times N$ à coefficients gaussiens iid est (7) avec (5), $\beta = 1$ et $V(x) = x^2/2$. C'est l'ensemble GOE (gaussien orthogonal).
5. La géométrie complexe fournit d'autres exemples de motivations, voir par exemple les travaux de Robert Berman et co-auteurs.

3. La limite de champ moyen et le comportement macroscopique

3.1 – Questions

La première question naturelle est de comprendre la limite quand N tend vers l'infini de la mesure empirique définie comme

$$\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \quad (13)$$

pour les configurations de points qui minimisent (1), les points critiques, les solutions des problèmes d'évolution ci-dessus, ou bien les configurations typiques sous (7), afin de dériver des équations effectives ou des modèles réduits qui décrivent le comportement (champ) moyen des particules. Le terme champ moyen se réfère au fait que du point de vue physique, chaque particule subit l'effet du champ collectif (moyen) $g * \mu_N$ généré par les autres particules. La convergence au sens du champ moyen est aussi équivalente en un sens à la « propagation du chaos moléculaire », voir [4]. D'un point de vue de mécanique statistique, on cherche aussi à comprendre la dépendance du comportement en la température, et les éventuelles transitions de phase associées.

3.2 – La mesure d'équilibre

L'énergie (1) peut se réécrire comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) &= N^2 \left(\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta} g(x-y) d\mu_N(x) d\mu_N(y) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu_N(x) \right) \quad (14) \end{aligned}$$

où Δ désigne la diagonale de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Il est alors naturel de considérer la version « continue » de l'énergie

$$\mathcal{I}_V(\mu) := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g(x-y) d\mu(x) d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) d\mu(x).$$

Il est bien connu en théorie du potentiel que \mathcal{I}_V admet un unique minimiseur parmi les mesures de probabilités, appelé *mesure d'équilibre*, notée μ_V et caractérisée par le fait qu'il existe une constante c pour laquelle

$$\begin{cases} h^{\mu_V} + V \geq c & \text{sur } \mathbb{R}^d \\ h^{\mu_V} + V = c & \text{sur le support de } \mu_V \end{cases} \quad (15)$$

où

$$h^{\mu_V}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) d\mu_V(y) \quad (16)$$

est le potentiel (électrique) engendré par μ_V . Ceci est vrai pour les interactions coulombiennes et de Riesz, mais même pour des noyaux très généraux. Dans le cas coulombien, la mesure d'équilibre peut s'interpréter à l'aide d'un problème de l'obstacle (dans le cas Riesz d'un problème de l'obstacle fractionnaire), voir [12, Chap. 2]. Un exemple est celui de l'interaction coulombienne (en dimension quelconque) avec potentiel de confinement $V = c|x|^2$: on peut alors vérifier que la mesure d'équilibre est alors toujours (un multiple de) la fonction indicatrice d'une boule. Dans le contexte de l'ensemble de Ginibre en matrices aléatoires, cela s'appelle la « loi du cercle ». Un autre exemple important est celui de l'interaction logarithmique en dimension 1 avec un potentiel V quadratique, la mesure d'équilibre est une mesure de densité $\sqrt{x^2 - a^2} \mathbf{1}_{|x| < a}$, appelé « loi du demi-cercle » (de Wigner), c'est elle qui intervient pour les ensembles GOE et GUE en matrices aléatoires.

\mathcal{I}_V est bien la « limite de champ moyen » de l'énergie \mathcal{H}_N , et on peut montrer sans trop de difficulté que pour les minimiseurs de \mathcal{H}_N , la mesure empirique converge vers μ_V , et $\frac{1}{N^2} \min \mathcal{H}_N$ converge vers $\mathcal{I}_V(\mu_V)$.

On peut comprendre $\nabla(h^\mu + V)$ comme la force moyenne sentie par la distribution de densité μ . Au vu de (15) elle est donc nulle pour les minimiseurs. Plus généralement, on s'attend à ce que les points critiques de \mathcal{H}_N aient une distribution empirique limite satisfaisant à

$$\nabla(h^\mu + V)\mu = 0. \quad (17)$$

Pour les situations dynamiques de (3), la limite formelle de (9) ou (10) est

$$\partial_t \mu = \operatorname{div}(\nabla(h^\mu + V)\mu) \quad (18)$$

ou

$$\partial_t \mu = \operatorname{div}(\mathbb{J}\nabla(h^\mu + V)\mu) \quad (19)$$

avec de nouveau $h^\mu = g * \mu$. Dans le cas (2), (19) avec $V = 0$ est également bien connue comme l'équation d'Euler en forme vorticité.

Le problème pour prouver rigoureusement la convergence vers des solutions de ces équations (dont le caractère bien posé demande lui aussi à être démontré) est le passage à la limite dans les

produits du type $\nabla h^\mu \mu$ qui sont non linéaires et a priori mal définis dans l'espace d'énergie. Dans le cas (2), on peut s'en sortir à l'aide de la reformulation de ces termes introduite par Delort dans le cadre de la mécanique des fluides, mais cela ne fonctionne pas en dimension plus grande.

Jusqu'ici, tous les résultats de convergence étaient limités aux singularités sous-coulombiennes $s < d - 2$ ou à la dimension 1. Grâce à une méthode d'énergie modulée développée dans [14] pour la limite de champ moyen des équations de Ginzburg-Landau, reposant sur la stabilité des solutions des équations limites relativement à la « norme de Coulomb » (ou de Riesz)

$$\|\mu\|^2 = \iint g(x-y) d\mu(x) d\mu(y),$$

le cas Coulombien ou Riesz plus singulier peut maintenant être traité :

Théorème 1 ([13]). *Pour les évolutions (9) et (10), pour tout d , tout $d-2 \leq s < d$ dans (6), ou (5) ou (2), la mesure empirique converge quand N tend vers l'infini vers la solution de (18) ou (19), sous condition que celle-ci soit assez régulière et que l'énergie de la donnée initiale converge vers celle de sa limite.*

Ce résultat était précédé par celui de Duerinckx en dimension 1 et 2 pour $s < 1$.

En ce qui concerne (11) l'équation limite est formellement l'équation de Vlasov-Poisson

$$\partial_t \rho + v \cdot \nabla_x \rho + \nabla(h^\mu + V) \cdot \nabla_v \rho = 0 \quad (20)$$

où $\rho(t, x, v)$ est la densité de particules au temps t et position x de vitesse v , et $\mu(t, x) = \int \rho(t, x, v) dv$ est la densité de particules. Malgré des progrès récents, on ne sait pas prouver la convergence de (11) vers (20), dans les cas où l'interaction est coulombienne ou plus singulière. À ce sujet, on peut consulter les revues [5, 4].

3.3 – Avec température : mécanique statistique

Considérons maintenant (8) et le problème (2). Il est connu que même avec température, le comportement du système reste régi par la mesure d'équilibre. Ceci peut s'exprimer comme un principe de grandes déviations, qui dit essentiellement que si E est un sous-ensemble de l'espace des mesures de probabilité, après avoir identifié les configura-

tions (x_1, \dots, x_N) dans $(\mathbb{R}^d)^N$ et leur mesure empirique, on a

$$\mathbb{P}_{N,\beta}(E) \approx e^{-\beta N^2 (\min_E \mathcal{F}_V - \min \mathcal{F}_V)}, \quad (21)$$

ce qui implique, au vu de l'unicité du minimiseur μ_V de \mathcal{F}_V , que les configurations dont la mesure empirique ne converge pas vers μ_V ont une très petite probabilité. Par exemple, dans le cas des matrices du GOE ou GUE où la mesure d'équilibre est la loi du demi-cercle, on déduit comme application un corollaire d'un résultat de Ben Arous et Guionnet : la probabilité pour une matrice du GOE ou GUE d'être définie positive (donc d'avoir toutes ses valeurs propres positives, ce qui est incompatible avec la loi du demi-cercle qui est symétrique par rapport à 0) décroît comme e^{-cN^2} .

La température ne modifie donc pas, à cet ordre, le comportement champ moyen du système (ce qui n'est pas le cas si on remplace β par β/N : on a alors une mesure d'équilibre modifiée, qui s'étale avec la température, minimisant $\beta \mathcal{F}_V(\mu) + \int \mu \ln \mu$).

4. Au-delà du champ moyen

Pour observer par exemple l'effet de la température (voir figure 3) il est donc aussi intéressant d'aller au-delà de la limite champ moyen : en développant l'énergie \mathcal{H}_N à l'ordre suivant, on a en même temps accès à des informations sur le comportement *microscopique* typique des configurations. Notons que l'échelle microscopique, distance typique attendue entre plus proches voisins, est $N^{-1/d}$.

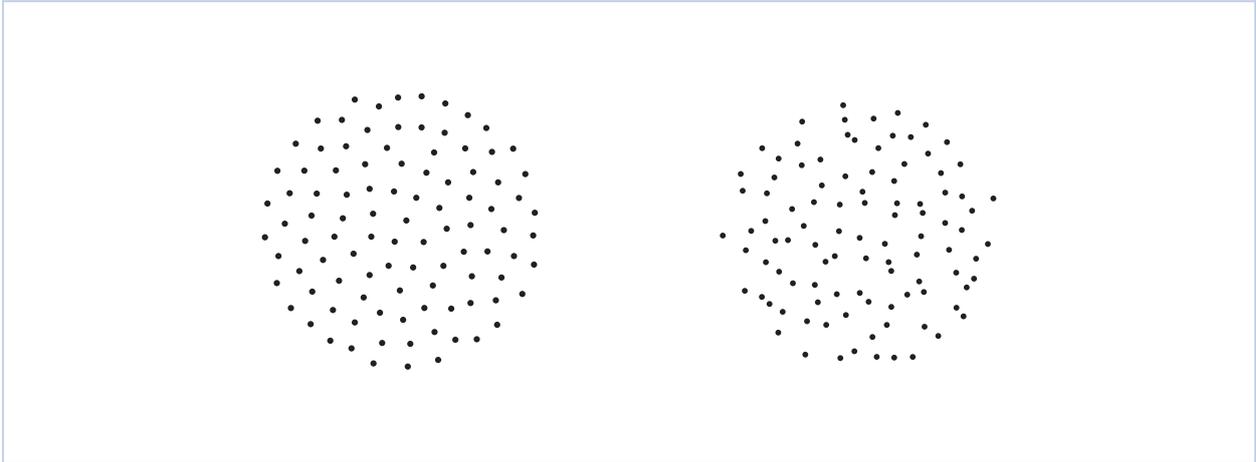
4.1 – Rigidité et fluctuations gaussiennes

Pour des minimiseurs de \mathcal{H}_N ou des configurations typiques sous la loi (7), puisqu'on sait déjà que $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V$ est petit, on sait par exemple que la *discrétance* sur des boules $B_r(x)$, définie par

$$D(x, r) := \int_{B_r(x)} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N d\mu_V$$

est $o(r^d N)$ pour $r > 0$ fixé. On se demande alors si on peut raffiner cette estimation, et si elle reste vraie aux échelles mésoscopiques, c.-à-d. pour des r d'ordre $N^{-\alpha}$ avec $\alpha < 1/d$, et à toute température. Cela correspondrait à un résultat de *rigidité*. On arrive en effet à prouver de tels résultats pour les

FIGURE 3 – Cas (2) avec $N = 100$ et $V(x) = |x|^2$, pour $\beta = 400$ (gauche) et $\beta = 5$ (droite)



minimiseurs de l'énergie. Pour les configurations avec température, dans le cas Coulomb bidimensionnel, on peut montrer une forme un peu différente d'un tel résultat : il est vrai quand on intègre $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V$ non pas sur une boule mais contre une fonction-test assez régulière. On arrive même à un résultat plus précis puisqu'on peut montrer que ces quantités convergent vers des gaussiennes de moyenne et variance explicites :

Théorème 2 ([6]). *Dans le cas (2), supposons que $V \in C^4$ et que μ_V a un support connexe de bord régulier, noté Σ . Soit $f \in C_c^3(\Sigma)$, alors*

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) - N \int_{\Sigma} f d\mu_V$$

converge en loi vers une gaussienne de

$$\text{moyenne} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \Delta f \ln \Delta V$$

$$\text{variance} = \frac{1}{2\pi\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f|^2.$$

Ce résultat peut se localiser à des fonctions-test f supportées à des échelles $N^{-\alpha}$, $\alpha < \frac{1}{2}$. Il est également vrai pour des minimiseurs de l'énergie, prenant formellement $\beta = \infty$.

Pour une idée de la preuve, on renvoie aux notes de cours [15].

Ce résultat peut être interprété en termes de convergence vers un *champ libre gaussien*, une sorte d'analogie multidimensionnel du mouvement brownien. Notons qu'un résultat semblable a été obtenu dans Bauerschmidt-Bourgade-Nikula-Yau, et

qu'il était précédemment connu pour $\beta = 2$ et dans le cas logarithmique unidimensionnel pour tout β .

Si f est assez régulière, les fluctuations associées sont donc d'ordre 1, ce qui est bien plus petit que ce à quoi on pourrait s'attendre, par exemple en comparant au Théorème Central Limite standard ou une somme de variables indépendantes est plutôt d'ordre \sqrt{N} . Ce résultat indique donc une forte dépendance et rigidité des configurations de points. Le montrer en dimension plus grande où pour des interactions plus générales reste une question ouverte.

4.2 – Ordre suivant dans l'énergie

Comme on l'a indiqué ci-dessus, l'approche que nous employons (initiée avec Étienne Sandier, et poursuivie avec Nicolas Rougerie, Mircea Petrache, et Thomas Leblé) consiste à étudier l'ordre suivant dans l'énergie en développant autour de la mesure $N\mu_V$ qui en est formellement le minimiseur. Développant et utilisant la caractérisation (15), les termes « d'ordre 1 » en $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V$ disparaissent et on se retrouve avec

$$\mathcal{H}_N(x_1, \dots, x_N) = N^2 \mathcal{F}_V(\mu_V) + F_N^{\mu_V}(x_1, \dots, x_N) \quad (22)$$

où

$$\begin{aligned} F_N^{\mu_V}(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta^c} g(x-y) d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V \right)(x) \\ &\quad d\left(\sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - N\mu_V \right)(y), \quad (23) \end{aligned}$$

Δ désignant la diagonale de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. C'est un développement à l'ordre suivant de \mathcal{H}_N valable pour toute configuration.

L'énergie d'ordre suivant $F_N^{\mu_V}$ est l'énergie coulombienne totale du système formé des N charges ponctuelles positives aux x_i et de la mesure négative $-N\mu_V$, qui a la même masse. Le but est ensuite de définir une limite quand N tend vers l'infini de cette énergie, qui sera donc l'énergie coulombienne totale (par unité de volume) d'un système infini de charges positives et d'une charge négative, disons uniforme. Un tel système s'appelle en physique un *jellium*. La définition précise de cette énergie limite est un peu complexe, mais elle utilise de manière cruciale la nature coulombienne de l'interaction : en effet, puisque g est le noyau du laplacien, on observe que si $h^\mu = g * \mu$ est le potentiel électrostatique engendré par une distribution de charges μ (d'intégrale nulle), alors h^μ résout l'équation de Poisson

$$-\Delta h^\mu = c_d \mu$$

qui est une EDP elliptique et locale, et de plus on peut écrire

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g(x-y) d\mu(x) d\mu(y) \\ = -\frac{1}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} h^\mu \Delta h^\mu = \frac{1}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla h^\mu|^2 \end{aligned}$$

à l'aide de la formule de Gauss-Green. Autrement dit on peut réécrire l'énergie d'interaction (qui fait intervenir une intégrale double) sous forme d'une intégrale simple d'une fonction locale du potentiel électrostatique (ou coulombien) engendré par cette distribution, lui-même solution d'une équation locale. Dans le cas Riesz, ces manipulations peuvent être remplacées par des manipulations similaires, utilisant que g est le noyau d'un opérateur elliptique sous forme divergence, qui reste local.

À l'aide de cette observation, on parvient à définir une énergie de volume infini pour une configuration de points infinie \mathcal{C} neutralisée par une charge uniforme (disons -1), via les solutions de

$$-\Delta H = c_d \left(\sum_{p \in \mathcal{C}} \delta_p - 1 \right).$$

On appelle cette énergie $\mathbb{W}(\mathcal{C})$. On peut en donner une forme explicite dans le cas où la configuration de points \mathcal{C} est périodique par rapport à un

réseau Λ : s'il y a M points a_i sur la cellule fondamentale et si \mathbb{T} est le tore \mathbb{R}^d/Λ , on a (à constantes près)

$$\mathbb{W}(\mathcal{C}) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq M} G_{\mathbb{T}}(a_i, a_j)$$

où $G_{\mathbb{T}}$ est la fonction de Green du tore.

On peut montrer que \mathbb{W} peut bien être dérivé comme la limite (en un certain sens) de la fonctionnelle $F_N^{\mu_V}$ de (22). Il s'ensuit à la fois un développement à l'ordre suivant du minimum de l'énergie \mathcal{H}_N , et le fait que les minimiseurs de \mathcal{H}_N doivent converger (après dilatation, presque partout relativement à l'origine de dilatation choisie) vers un minimiseur de \mathbb{W} (voir par exemple [12]).

On est donc amené à tenter de déterminer les minimiseurs de \mathbb{W} . Ce problème est hélas très difficile, sauf en dimension 1 où on peut montrer que le minimum de \mathbb{W} est atteint pour le réseau régulier \mathbb{Z} . À partir de la dimension 2, la question est ouverte, et le seul résultat positif est

Théorème 3. *L'unique minimiseur de \mathbb{W} parmi les réseaux de volume 1 en dimension 2 est le réseau triangulaire.*

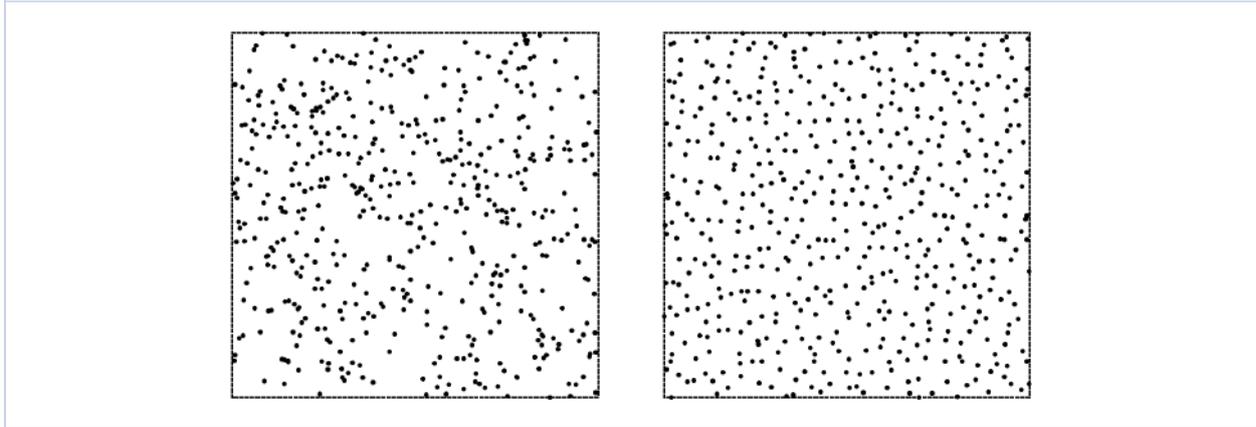
Ici le réseau triangulaire signifie $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}e^{i\pi/3}$, correctement dilaté, c.-à-d. exactement ce qu'on appelle le réseau d'Abrikosov en supraconductivité. Ce résultat partiel est en fait équivalent à un résultat de théorie des nombres connu depuis les années 50 sur la minimisation de la fonction zeta d'Epstein (voir [9] et références). Cela correspond à la minimisation de la hauteur d'un tore plat en géométrie d'Arakelov.

Comme ce réseau triangulaire s'observe expérimentalement dans les supraconducteurs, et qu'on a prouvé [11] que la minimisation de l'énergie de Ginzburg-Landau des supraconducteurs se ramène à celle de \mathbb{W} , il est naturel de conjecturer que le réseau triangulaire est un minimiseur global de l'énergie.

Le réseau triangulaire doit en principe selon une conjecture de Cohn-Kumar être un minimiseur universel en dimension 2 (c.-à-d. minimiser une large classe d'énergies d'interaction). Un rôle analogue est joué en dimensions 8 et 24 par les réseaux E_8 et Leech, respectivement, qui sont les solutions du problème d'empilement optimal résolu très récemment [2]. Dans ces dimensions, la preuve de la minimalité universelle est proche.

En dimension $d \geq 3$, la minimisation de \mathbb{W} même parmi les réseaux est un problème ouvert (sauf en dimension 8 et 24). De la même manière, on peut

FIGURE 4 – Simulation du processus de Poisson d'intensité 1 (gauche), et du processus de Ginibre (droite)



imaginer que ce minimum relatif est un minimum global, mais on s'attend à ce que ce ne soit vrai qu'en basse dimension : en dimension $d \geq 9$, les simulations indiquent clairement que les minimiseurs ne sont pas des réseaux.

Ces questions font partie de la classe plus générale des questions de cristallisation, pour lesquelles on a très peu de résultats positifs dès que la dimension est supérieure ou égale à 2, voir la revue [1].

4.3 – Avec température

Pour observer des effets de température intéressants, et aussi pour les applications en matrices aléatoires, il faut poser $\beta_N = \beta N^{\frac{2}{d}-1}$. Comme on l'a vu, le comportement macroscopique (ou « champ moyen ») du système ne dépend pas de la température, il est donné par la mesure d'équilibre. On démontre que le comportement microscopique dépend de la température et est régi par la somme pondérée de l'énergie \mathbb{W} du paragraphe précédent, et d'une entropie relative. Pour formuler le résultat, il faut dilater les configurations par $N^{-1/d}$ comme au paragraphe précédent, et parler du processus ponctuel limite P^x obtenu en moyennant près de chaque point x . Un processus ponctuel est ici une loi sur les configurations de points infinies. Par exemple le processus de Ginibre est obtenu en prenant la limite N tend vers l'infini (après dilatation) de l'ensemble de Ginibre, le processus de Poisson Π d'intensité 1 correspond à des points jetés indépendamment les uns des autres, de sorte que la probabilité d'avoir $N(B)$ points dans un ensemble B

est

$$\mathbb{P}(N(B) = n) = \frac{|B|^n}{n!} e^{-|B|}.$$

On définit alors une entropie relative dite « spécifique » notée $\text{ent}[\cdot|\Pi]$ par rapport au processus de Poisson, qu'on peut voir comme mesurant combien le processus P est proche du processus de Poisson.

Pour tout $\beta > 0$, on définit la fonctionnelle \mathcal{F}_β

$$\mathcal{F}_\beta(P) := \int_{\Sigma} \frac{\beta}{2} \mathbb{W}(P^x) + \text{ent}[P^x|\Pi] dx, \quad (24)$$

où $P = \int_{\Sigma} P^x dx$. On peut alors formuler un résultat de grandes déviations.

Théorème 4 ([7]). *Pour tous les cas (5), (2) et (3) avec $d - 2 \leq s < d$, sous des hypothèses de régularité sur V et μ_V , pour tout $\beta > 0$ on a un Principe de Grandes Déviations à vitesse N avec fonction de taux $\mathcal{F}_\beta - \inf \mathcal{F}_\beta$, dans le sens où*

$$\mathbb{P}_{N,\beta}(P_N \simeq P) \simeq e^{-N(\mathcal{F}_\beta(P) - \inf \mathcal{F}_\beta)}.$$

De la sorte, la mesure de Gibbs $\mathbb{P}_{N,\beta}$ se concentre sur les processus ponctuels qui minimisent \mathcal{F}_β . Cette minimisation résulte d'une compétition entre énergie et entropie. Quand β tend vers 0, l'entropie domine et on montre ainsi que les processus limites convergent vers des processus de Poisson. Quand β tend vers l'infini, \mathbb{W} domine, ce qui force heuristiquement les configurations à être plus « ordonnées » et à converger vers des minimiseurs de \mathbb{W} . Entre les deux on a des situations intermédiaires, et un problème ouvert est de savoir s'il y a un β critique correspondant à une cristallisation, ou transition de phase liquide-solide, qui est conjecturée pour le cas (2) dans certains articles de physique. En

dimension 1 en revanche, on peut conclure à un vrai résultat de cristallisation quand la température tend vers 0, grâce au fait qu'on sait identifier les minimiseurs de \mathbb{W} .

Une conséquence de ce résultat est de fournir une interprétation variationnelle pour les quelques processus limites connus : le processus dit « sine- β », limite dans le cas (5) unidimensionnel, et le processus dit de Ginibre ; ils doivent minimiser $\beta\mathbb{W} + \text{ent}$.

On aimerait obtenir davantage d'informations

sur les processus ponctuels limites, notamment le comportement et la décroissance des « fonctions de corrélation à deux points », qui éclaireraient sur l'existence de transitions de phase et la cristallisation, malheureusement ce théorème ne semble pas exploitable dans ce sens.

Comme on l'a vu, nombre de questions restent ouvertes, notamment celles de la cristallisation, l'identification des minimiseurs et du minimum de \mathbb{W} et de \mathcal{F}_β , la généralisation du Théorème 2 à la dimension $d \geq 3$ et aux interactions de Riesz, et même à des interactions plus générales.

Références

- [1] X. BLANC et M. LEWIN. « The Crystallization Conjecture: A Review ». *EMS Surveys in Mathematical Sciences* 2, n° 2 (2015), p. 255–306.
- [2] H. COHN. « A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing ». *Notices of the American Mathematical Society* 64, n° 2 (2017), p. 102–115.
- [3] P. J. FORRESTER. *Log-gases and random matrices (LMS-34)*. Princeton University Press, 2010.
- [4] F. GOLSE. « On the Dynamics of Large Particle Systems in the Mean Field Limit Macroscopic and Large Scale Phenomena: Coarse Graining, Mean Field Limits and Ergodicity ». *Lect. Notes Appl. Math. Mech.* 3 (2016), p. 1–144.
- [5] P.-E. JABIN. « A review of the mean field limits for Vlasov equations ». *Kinetic & Related Models* 7, n° 4 (2014), p. 661–711.
- [6] T. LEBLÉ et S. SERFATY. « Fluctuations of two dimensional Coulomb gases ». *Geometric and Functional Analysis* 28, n° 2 (2018), p. 443–508.
- [7] T. LEBLÉ et S. SERFATY. « Large deviation principle for empirical fields of Log and Riesz gases ». *Inventiones mathematicae* 210, n° 3 (2017), p. 645–757.
- [8] C. MARCHIORO et M. PULVIRENTI. « Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids ». *Applied Mathematical Sciences* 96 (1994).
- [9] H. L. MONTGOMERY. « Minimal theta functions ». *Glasgow Math. J* 30, n° 1 (1988), p. 75–85.
- [10] E. B. SAFF et A. B. KUIJLAARS. « Distributing many points on a sphere ». *The mathematical intelligencer* 19, n° 1 (1997), p. 5–11.
- [11] E. SANDIER et S. SERFATY. « From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems ». *Communications in Mathematical Physics* 313, n° 3 (2012), p. 635–743.
- [12] S. SERFATY. « Coulomb gases and Ginzburg-Landau vortices ». *Zurich Lecture Notes in Mathematics*, n° 70 (2015).
- [13] S. SERFATY. « Mean field limits for Coulomb Flows, à paraître » ().
- [14] S. SERFATY. « Mean field limits of the Gross-Pitaevskii and parabolic Ginzburg-Landau equations ». *Journal of the American Mathematical Society* 30, n° 3 (2017), p. 713–768.
- [15] S. SERFATY. « Microscopic description of Log and Coulomb gases ». *arXiv preprint arXiv:1709.04089* (2017).
- [16] N. SLOANE. « The Sphere Packing Problem ». *Proceedings Internat. Congress Math. Berlin III* (1998), p. 387–396.
- [17] T. SPENCER. « Scaling, the free field and statistical mechanics in The Legacy of Norbert Wiener: A Centennial Symposium ». In : *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. Vol. 60. American Mathematical Society. 1997, p. 373–390.



Sylvia SERFATY

Sylvia Serfaty est professeur au Courant Institute de l'université de New York, spécialiste d'analyse des Équations aux Dérivées Partielles et de physique mathématique. (Photo : Stephan Falke)

Processus ponctuels déterminantaux

- A. HARDY
- M. MAÏDA

Si vous demandez à un enfant de 5 ans de dessiner des points *au hasard* dans un disque, il produira probablement une figure comme celle-ci, qui ressemble plus à la figure de gauche ci-dessous qu'à la figure de droite.

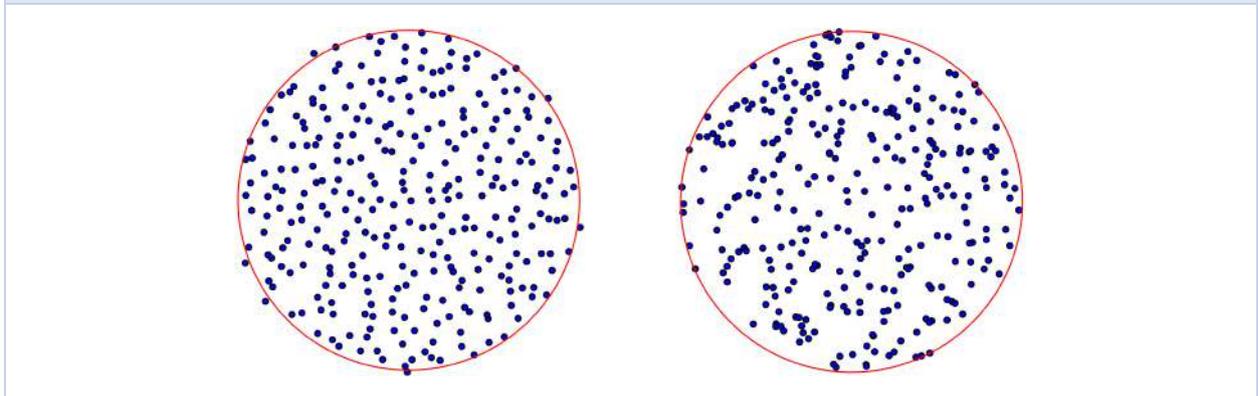


Pourtant, la figure de droite est une réalisation d'un processus ponctuel¹ qui incarne de façon naturelle la notion de hasard en mathématiques : un processus de Poisson homogène, bien connu des probabilistes, constitué de points choisis de manière uniforme dans le disque et *indépendamment* les uns des autres. Rien n'empêche donc d'avoir plusieurs points très proches, ce que le cerveau humain non averti aura tendance à éviter pour de mystérieuses raisons.

La figure de gauche, elle, représente les valeurs propres dans le plan complexe d'une matrice à entrées indépendantes gaussiennes complexes², dite *matrice de Ginibre*. Il semblerait que les enfants de 5 ans³ trouvent plus intuitif la notion de hasard portée par ce type de configurations structurées que ce que les processus de Poisson ont à raconter.

On va discuter ici de cette structure sous-jacente, qui est un cas particulier d'une classe de processus ponctuels manifestant des propriétés assez singulières : les *processus ponctuels déterminantaux*, ci-après dénommés DPP⁴.

FIGURE 1 – À gauche, spectre d'une matrice de Ginibre; à droite, tirages indépendants de points uniformément répartis dans le disque



1. Dans tout l'article, la notion de processus ponctuel fait référence à un processus spatial, c'est-à-dire des configurations de points (i.e. sous-ensembles localement finis) aléatoires dans l'espace; on emploie ainsi couramment dans ce contexte le mot *processus* même s'il n'y a pas de notion de temps.

2. Une gaussienne complexe est une variable aléatoire complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont deux variables gaussiennes réelles indépendantes.

3. Étude portée sur un échantillon de 3 participants, sans méthode des quotas.

4. Pour *determinantal point processes*.

Ce qui suit ne sera ni une introduction formelle ni un recensement exhaustif de ce vaste sujet mais plutôt un florilège de quelques DPP que nous trouvons particulièrement séduisants, piochés dans des domaines des mathématiques a priori éloignés⁵. Le lecteur qui cherche une présentation plus approfondie pourra consulter des références devenues classiques comme [5, 6, 11, 10].

Avant de commencer, pour satisfaire autant les amoureux des applications pratiques que les collectionneurs de gemmes mathématiques, imaginez-vous taper la requête « jaguar » dans un moteur de recherche. Dans les premières réponses, vous ne voulez pas obtenir 10 articles sur des voitures de sport, mais aussi un article sur l'animal au pelage tacheté, un sur le film de Francis Veber et peut-être un sur une équipe de football américain. Si on veut balayer large, il faut introduire dans les algorithmes utilisés une forme de répulsion entre les items proches : si un article a été sélectionné, les articles très proches ont moins de chance de l'être. On verra à la fin de cet article que les DPP ont déjà excité la curiosité des *machine learners* en offrant des solutions implémentables à ce type de problématiques, entre autres.

1. Mon premier DPP : le processus des retenues

Considérons le processus suivant, qui vous rappellera peut-être l'odeur de l'école primaire : on prend une colonne de chiffres et on les additionne au fur et à mesure en partant du haut. À chaque étape, on note à droite le chiffre des unités obtenu, on inscrit un point s'il y a une retenue, et on continue.

3	3	
+ 6	= 9	
+ 5	= 4	•
+ 4	= 8	
+ 4	= 2	•
+ 3	= 5	
+ 3	= 8	
+ 7	= 5	•

Si la colonne contient des chiffres aléatoires indépendants et identiquement distribués (iid) suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0, 9 \rrbracket := \{0, \dots, 9\}$, comment

est distribué le processus des points associés aux retenues ?

Comme une colonne de chiffres iid uniformes sur $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ donne, après additions successives, une colonne de chiffres des unités également iid uniformes sur $\llbracket 0, 9 \rrbracket$, il est équivalent de considérer le processus ponctuel des descentes suivant, étudié en plus grande généralité par [3] : on se donne une colonne de $n+1$ chiffres S_0, S_1, \dots, S_n iid uniformes sur $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ et, à chaque ligne, on marque un point à droite si le chiffre qui s'y trouve est strictement inférieur à celui de la ligne au-dessus. Plus précisément, en posant

$$X_i := \mathbf{1}_{\{S_i < S_{i-1}\}} \in \{0, 1\},$$

le processus ponctuel des descentes est donné par les configurations aléatoires

$$D_n := \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_i = 1\}.$$

Par exemple, on obtient $D_7 = \{2, 4, 7\}$ dans l'exemple suivant :

i	S_i	X_i
0	3	
1	9	0
2	4	• 1
3	8	0
4	2	• 1
5	5	0
6	8	0
7	5	• 1

Le calcul simple

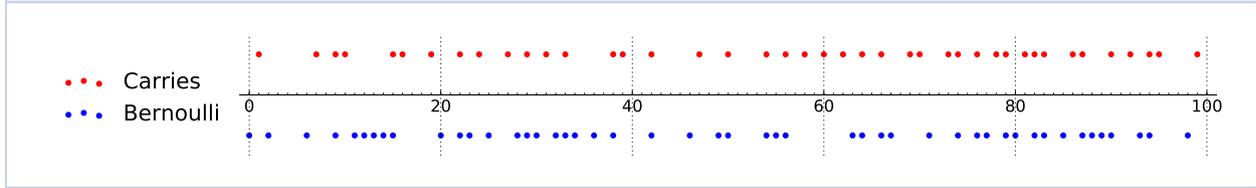
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{i\} \subset D_n) &= \mathbb{P}(X_i = 1) \\ &= \mathbb{P}(S_i < S_{i-1}) = \frac{1}{10^2} \binom{10}{2} = \frac{9}{20} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

montre que, comme on pouvait s'y attendre, à chaque ligne on a un peu moins d'une chance sur deux d'avoir une descente/retenu. Aussi, la suite X_1, \dots, X_n est une suite de variables aléatoires de Bernoulli⁶ de paramètre $9/20$ mais elles ne sont pas indépendantes. Intuitivement, si on a une retenue à une ligne donnée, le chiffre sur cette ligne a tendance à être petit et on a moins de chance d'en avoir une à la suivante. Sur la figure 2, on compare une réalisation du processus D_{100} avec une configuration aléatoire $B_{100} = \{i \in \llbracket 1, 100 \rrbracket : Y_i = 1\}$ où Y_1, \dots, Y_{100} sont des variables de Bernoulli iid de même paramètre $9/20$.

5. Quelques mentions honorables pour les DPP que nous n'avons pas cités : étant donné un graphe, le processus des arêtes d'un arbre couvrant tiré uniformément est un DPP ; les bouquets de marches aléatoires non-intersectantes sur un graphe biparti forment, à temps fixé, un DPP ; les zéros de la fonction analytique gaussienne hyperbolique forment un DPP ; etc.

6. C'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 9/20$.

FIGURE 2 – En haut, processus ponctuel des retenues (carries); en bas, variables de Bernoulli iid de même paramètre $p = 9/20$



On voit bien apparaître une propriété d'association négative ou de répulsion entre les descentes adjacentes, analogue discret et unidimensionnel de ce que l'on observait sur la figure 1 à gauche. Le calcul suivant confirme que deux descentes adjacentes sont négativement corrélées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{i, i+1\} \subset D_n) &= \mathbb{P}(X_i = 1 \text{ et } X_{i+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(S_{i+1} < S_i < S_{i-1}) \\ &= \frac{1}{10^3} \binom{10}{3} = \frac{3}{25} \\ &< \left(\frac{9}{20}\right)^2 \\ &= \mathbb{P}(\{i\} \subset D_n) \mathbb{P}(\{i+1\} \subset D_n). \end{aligned}$$

En revanche, si $|i - j| > 1$, l'indépendance des variables S_i donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{i, j\} \subset D_n) &= \mathbb{P}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1) \\ &= \mathbb{P}(S_i < S_{i-1}) \mathbb{P}(S_j < S_{j-1}) = \left(\frac{9}{20}\right)^2; \end{aligned}$$

on dira que le processus est de portée 1.

Ensuite pour décrire complètement la loi du processus ponctuel des descentes, il suffit de déterminer $\mathbb{P}(A \subset D_n)$ pour tout sous-ensemble A de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Si A est de cardinal k , on parle de *fonction de corrélation à k points*, que l'on note $\rho_k(A)$. Nous avons déjà déterminé la fonction de corrélation à un point, $\rho_1(\{i\}) = 9/20$ pour tout i , ainsi que la fonction de corrélation à deux points : pour tous $i \neq j$,

$$\rho_2(\{i, j\}) = \begin{cases} \left(\frac{9}{20}\right)^2 & \text{si } |i - j| > 1, \\ \frac{3}{25} & \text{si } |i - j| = 1. \end{cases}$$

Pour traiter le cas $k \geq 3$, si A est une suite consécutive de k nombres de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\rho_k(A) = \frac{1}{10^{k+1}} \binom{10}{k+1}$. Sinon on peut écrire $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 à distance au moins 2 et de cardinaux respectifs k_1 et k_2 , de sorte que $\rho_k(A) = \rho_{k_1}(A_1) \rho_{k_2}(A_2)$, car le processus est de portée 1. En travaillant un peu plus, on peut vérifier que cette collection de fonctions de corrélation est encodée par une fonction

à deux variables $K : \llbracket 1, n \rrbracket^2 \rightarrow \mathbb{R}$ au sens où, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $s_1, \dots, s_k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts deux à deux, on a :

$$\rho_k(\{s_1, \dots, s_k\}) = \det \left[K(s_i, s_j) \right]_{1 \leq i, j \leq k}.$$

On dit donc que le processus ponctuel D_n est *déterminantal (DPP) de noyau K* . Dans [3], Borodin et al. donnent une expression relativement explicite du noyau :

$$K(i, j) := \kappa(j - i) \text{ où } \sum_{m \in \mathbb{Z}} \kappa(m) z^m = \frac{1}{1 - (1 - z)10}.$$

Plus généralement, ils montrent que tout processus ponctuel sur un segment de \mathbb{Z} de portée 1 est déterminantal. Ils étudient également les descentes d'une permutation aléatoire : on dit qu'une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ a une descente en i si $\sigma(i - 1) > \sigma(i)$. Si on choisit σ uniformément dans le groupe symétrique, le processus des descentes est déterminantal de noyau

$$K_{\text{per}}(i, j) := \kappa_{\text{per}}(j - i) \text{ où } \sum_{m \in \mathbb{Z}} \kappa_{\text{per}}(m) z^m = \frac{1}{1 - e^z}.$$

Notons que nous rencontrerons plus loin d'autres DPP intéressants en lien avec des permutations aléatoires.

2. DPP et matrices aléatoires

Si l'étude mathématique des DPP a commencé dans les années 70 avec la thèse d'Odile Macchi, inspirée par le formalisme des fermions en mécanique quantique, c'est leur apparition en théorie des matrices aléatoires qui a largement popularisé les DPP. Nous présentons maintenant quelques résultats faisant apparaître le caractère déterminantal de l'ensemble des valeurs propres de certains modèles matriciels. Pour tous les résultats évoqués dans ce paragraphe, on renvoie par exemple à la monographie [1].

Un premier exemple est celui des valeurs propres de matrices unitaires tirées « uniformément ». Plus précisément, pour $n \geq 1$, on équipe le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C}) := \{U \in M_n(\mathbb{C}) : UU^* = I_n\}$ de son unique mesure de probabilité ν_n invariante par multiplication à droite et à gauche, c'est-à-dire sa mesure de Haar normalisée. On obtient ainsi une variable aléatoire V à valeurs dans $U_n(\mathbb{C})$ en spécifiant que $\mathbb{P}(V \in A) = \nu_n(A)$ pour tout borélien $A \subset U_n(\mathbb{C})$. Nous nous intéressons alors à la loi jointe des n valeurs propres (aléatoires) de V . L'idée est d'effectuer le changement de variables qui, à une matrice unitaire, associe ses valeurs et vecteurs propres⁷, et puis d'intégrer sur les vecteurs propres. Ainsi, si on note $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ les valeurs propres de la matrice aléatoire V , un calcul de jacobien classique dans les groupes de Lie attribué à Weyl montre que les phases $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in [-\pi, \pi]^n$ ont pour loi de probabilité :

$$d\mathbb{P}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{n!} \prod_{j < k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 \prod_{j=1}^n \frac{d\theta_j}{2\pi}. \quad (1)$$

En remarquant que le terme d'interaction entre les valeurs propres est le carré d'un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$d\mathbb{P}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{n!} \det \left[K_{U_n(\mathbb{C})}(s_i, s_j) \right]_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{j=1}^n \frac{d\theta_j}{2\pi} \quad (2)$$

où l'on a introduit le noyau

$$K_{U_n(\mathbb{C})}(x, y) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}, \quad \varphi_k(x) := \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Remarquons que $K_{U_n(\mathbb{C})}(x, y)$ est le noyau de l'opérateur de projection sur le sous-espace de $L^2(-\pi, \pi)$ des polynômes trigonométriques de degré au plus $n - 1$. Pour prendre en compte le caractère continu des angles propres on définit la version « infinitésimale » de la fonction de corrélation à k points introduite pour les processus des retenues : pour tout $k \geq 1$ et $s_1, \dots, s_k \in [-\pi, \pi]$ distincts deux à deux,

$$\rho_k(s_1, \dots, s_k) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^k} \mathbb{P}(\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \cap [s_j, s_j + \epsilon] \neq \emptyset).$$

7. Cette fonction n'est pas un difféomorphisme bien défini. On s'y ramène en réduisant l'espace de départ aux matrices ayant des valeurs propres simples (son complémentaire étant de mesure nulle pour ν_n), et l'espace d'arrivée en ordonnant les valeurs propres et en quotientant de manière à supprimer la liberté du choix des vecteurs propres.

8. La variance d'une variable aléatoire complexe Z est définie par $\text{Var}(Z) := \mathbb{E}|Z|^2 - |\mathbb{E}(Z)|^2$.

Autrement dit, pour toute fonction test $\varphi : [-\pi, \pi]^k \rightarrow \mathbb{C}$ raisonnable, on a

$$\int_{[-\pi, \pi]^k} \varphi(s) \rho_k(s) ds = \int \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \varphi(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_k}) d\mathbb{P}(\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (3)$$

Grâce à l'invariance par permutation de $d\mathbb{P}(\theta_1, \dots, \theta_n)$, on voit que

$$\begin{aligned} \rho_k(s_1, \dots, s_k) &= \frac{n!}{(n-k)!} \int_{[-\pi, \pi]^{n-k}} d\mathbb{P}(s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n) \\ &= \frac{1}{(n-k)!} \\ &\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{n-k}} \det \left[K_{U_n(\mathbb{C})}(s_i, s_j) \right]_{1 \leq i, j \leq n} \prod_{j=k+1}^n \frac{ds_j}{2\pi} \\ &= \det \left[K_{U_n(\mathbb{C})}(s_i, s_j) \right]_{1 \leq i, j \leq k}, \end{aligned} \quad (4)$$

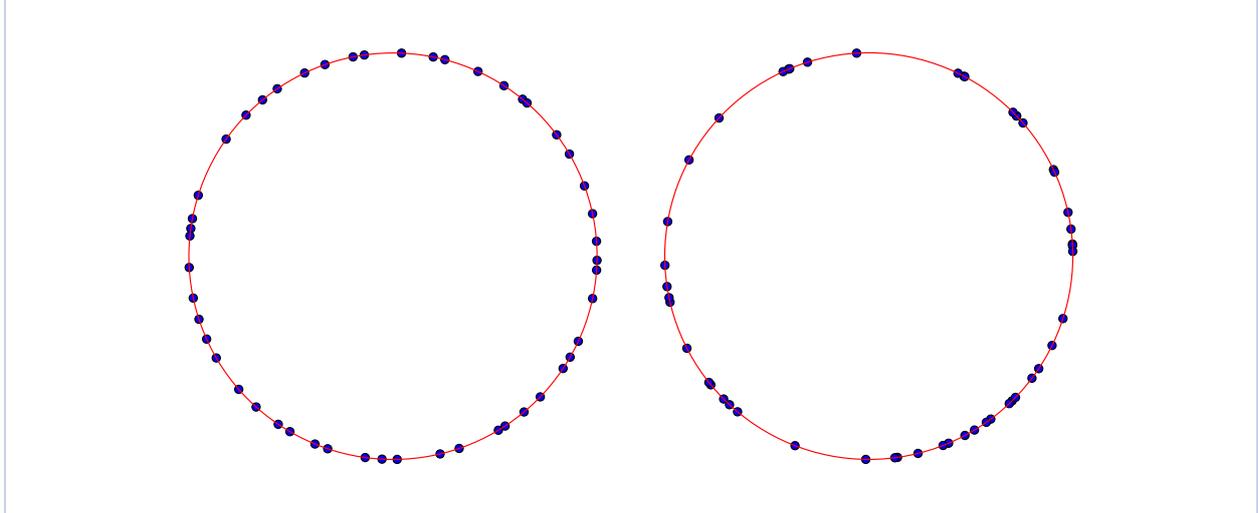
où la dernière identité vient en développant le déterminant sous l'intégrale et en utilisant que $K_{U_n(\mathbb{C})}(x, y)$ est le noyau d'un opérateur de projection :

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_{U_n(\mathbb{C})}(s_i, s) K_{U_n(\mathbb{C})}(s, s_j) \frac{ds}{2\pi} = K_{U_n(\mathbb{C})}(s_i, s_j).$$

Ainsi, le processus ponctuel des angles propres $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ est déterminantal. Comparons visuellement une réalisation de ce processus à des variables iid uniformes sur le cercle unité : comme dans le cas des descentes, on observe une répartition plus régulière que dans le cas indépendant. Les angles propres sont bien répartis et il y a peu de variabilité alors que dans le cas uniforme, on retrouve des paquets de points qui peuvent être sensiblement différents d'une réalisation à l'autre. Cette répulsion se lit aussi dans le terme d'interaction de (1). Elle induit des comportements surprenants pour le probabiliste non averti. À titre d'exemple, la variance⁸ d'une somme de n angles propres est bien plus petite que celle de n angles iid. En effet, si η_1, \dots, η_n sont iid uniformément distribués sur $[-\pi, \pi]$, alors on a :

$$\text{Var} \left[\sum_{j=1}^n e^{i\eta_j} \right] = \sum_{j=1}^n \text{Var} \left[e^{i\eta_j} \right] = n.$$

FIGURE 3 – À gauche, spectre d'une réalisation de V ; à droite, tirages indépendants de points uniformément sur le cercle unité



D'un autre côté, pour les angles propres on calcule, en utilisant (4) avec $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\sum_{j=1}^n e^{i\theta_j} \right] &= \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ix}|^2 K_{U_n(\mathbb{C})}(x, x) dx \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-y)} |K_{U_n(\mathbb{C})}(x, y)|^2 dx dy \\ &= n - \sum_{k, \ell=0}^{n-1} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-y)(1+k-\ell)} dx dy \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour que la somme de n nombres complexes aléatoires de module 1 ait une variance unité, et ce indépendamment de n , il faut que de nombreuses compensations s'opèrent, et cela force les réalisations des valeurs propres à ne pas trop s'éloigner d'une configuration équi-espacée sur le cercle unité. Cela confirme l'impression visuelle de la figure 3.

Une question naturelle est d'étudier les espacements entre ces angles propres asymptotiquement quand $n \rightarrow \infty$, après un zoom adéquat. En effet, comme il y a n angles propres bien répartis sur $[-\pi, \pi]$, le processus ponctuel $\{\frac{n}{2\pi}\theta_1, \dots, \frac{n}{2\pi}\theta_n\}$ est un sous-ensemble de $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$ dont l'écartement typique entre deux points consécutifs est d'ordre

un. Par changement de variables, c'est un DPP de noyau⁹ :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{U_n(\mathbb{C})}(x, y) &:= e^{-i\frac{n-1}{2}(x-y)} \frac{2\pi}{n} K_{U_n(\mathbb{C})} \left(\frac{2\pi x}{n}, \frac{2\pi y}{n} \right) \\ &= \frac{\sin \pi(x-y)}{n \sin \left(\frac{\pi}{n}(x-y) \right)}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi la convergence locale uniforme,

$$\tilde{K}_{U_n(\mathbb{C})}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_{\sin}(x, y) := \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$$

où par convention $K_{\sin}(x, x) := 1$. En termes probabilistes, quand $n \rightarrow \infty$ le DPP des angles propres normalisés $\frac{n}{2\pi}\theta_1, \dots, \frac{n}{2\pi}\theta_n$ des matrices unitaires aléatoires distribuées selon la mesure de Haar de $U_n(\mathbb{C})$ converge, au sens de la convergence uniforme locale de toutes les fonctions de corrélation, vers un processus ponctuel limite qui est le DPP associé au noyau sinus $K_{\sin}(x, y)$: pour tout $k \geq 1$ et toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ raisonnable,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k} \varphi \left(\frac{n}{2\pi}\theta_{i_1}, \dots, \frac{n}{2\pi}\theta_{i_k} \right) \right] \\ = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(s) \det \left[K_{\sin}(s_i, s_j) \right]_{i,j=1}^k ds. \quad (5) \end{aligned}$$

De plus, K_{\sin} , vu comme un opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$, est la projection sur les fonctions dont la transformée de Fourier est à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ce dernier

9. On s'est permis de rajouter discrètement le terme $e^{-i\frac{n-1}{2}(x-y)}$ car modifier un noyau $K(x, y)$ en $K(x, y) \frac{f(x)}{f(y)}$ où f ne s'annule pas ne change pas les déterminants associés aux fonctions de corrélation ; ces deux noyaux engendrent donc le même DPP.

DPP génère presque sûrement des configurations infinies sur \mathbb{R} .

L'une des idées maîtresses de la théorie des matrices aléatoires, qui apparaît déjà dans les travaux des pionniers comme Dyson et Wigner, est celle que le comportement local des valeurs propres présente un caractère universel, au contraire de leur comportement global. Pour illustrer ce phénomène penchons-nous dans un premier temps sur un autre modèle populaire de matrices aléatoires : le Gaussian Unitary Ensemble (GUE). Il s'agit cette fois de munir l'espace des matrices hermitiennes $H_n(\mathbb{C}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : M^* = M\}$ d'une mesure gaussienne. Plus précisément, l'isomorphisme $H_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ induit une mesure de Lebesgue dM ainsi qu'une norme euclidienne $\|M\| = \text{Tr}(M^2)^{1/2}$ sur $H_n(\mathbb{C})$, et on considère alors la mesure gaussienne $g_n(dM)$ de densité proportionnelle à $e^{-\frac{n}{2}\|M\|^2}$. Un changement de variable et un calcul de jacobien similaire à celui des matrices unitaires montre que la loi jointe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de la matrice aléatoire de loi $g_n(dM)$ est alors donnée par :

$$d\mathbb{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \frac{1}{Z_n} \prod_{j < k} |\lambda_j - \lambda_k|^2 \prod_{j=1}^n e^{-\frac{n}{2}\lambda_j^2} d\lambda_j,$$

où $Z_n > 0$ est une constante de normalisation explicite¹⁰. Après quelques manipulations on obtient que l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est un DPP sur \mathbb{R} de noyau :

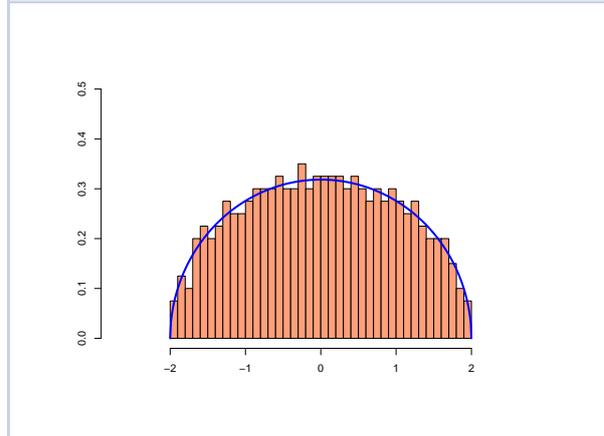
$$K_{H_n(\mathbb{C})}(x, y) := \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_k^n(x) \Psi_k^n(y)$$

où, pour tout $n \geq 1$, $(\Psi_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ donnée par des fonctions de Hermite renormalisées¹¹. Là encore on a affaire à un noyau de projection sur un sous-espace de dimension finie de $L^2(\mathbb{R})$, celui des fonctions de la forme $P(x)e^{-nx^2/4}$ avec P un polynôme de degré au plus $n - 1$. Quand $n \rightarrow \infty$, comme illustré dans la figure 4 les valeurs propres se concentrent sur le compact $[-2, 2]$ avec une densité $\rho(x) := \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{[-2, 2]}(x)$, appelée *loi du demi-cercle*.

10. C'est un ratio de produits de fonctions Gamma, que l'on obtient comme cas limite de la formule intégrale de Selberg.

11. Si $H_k(x) := (-1)^k e^{x^2/2} (\frac{d}{dx})^k (e^{-x^2/2})$ est le k -ième polynôme de Hermite, alors on prend $\Psi_k^n(x) := c_k^n H_k(\sqrt{n}x) e^{-nx^2/4}$ avec $c_k^n := \int_{\mathbb{R}} H_k(\sqrt{n}x)^2 e^{-nx^2/2} dx$.

FIGURE 4 – Histogramme des valeurs propres d'une réalisation du GUE de taille 300 et loi du demi-cercle



Maintenant, si on zoome d'un facteur n autour d'un point x_0 de $] - 2, 2[$, on peut montrer que le comportement local des valeurs propres autour de ce point est encore régi par le noyau sinus K_{sin} . Plus précisément, on a la convergence locale uniforme,

$$\frac{1}{\rho(x_0)n} K_{H_n(\mathbb{C})} \left(x_0 + \frac{x}{\rho(x_0)n}, x_0 + \frac{y}{\rho(x_0)n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_{\text{sin}}(x, y).$$

Notez que la limite ne dépend pas de x_0 . La preuve de cette convergence est un peu plus délicate que dans le cas des matrices unitaires et requiert une analyse fine du comportement asymptotique des fonctions de Hermite.

D'un autre côté, si on s'intéresse aux points du bord du demi-cercle, on voit apparaître après une remise à l'échelle différente un autre noyau universel appelé *noyau d'Airy*,

$$K_{\text{Airy}}(x, y) := \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}'(x)\text{Ai}(y)}{x - y}.$$

Ici $\text{Ai}(x)$ est la fonction d'Airy, qui satisfait $\text{Ai}''(x) = x\text{Ai}(x)$ et qui apparaît dans l'étude optique des arcs-en-ciel. Par exemple, au point 2 (l'analyse en -2 est la même),

$$K_{H_n(\mathbb{C})}^{\text{bord}}(x, y) := \frac{1}{n^{2/3}} K_{H_n(\mathbb{C})} \left(2 + \frac{x}{n^{2/3}}, 2 + \frac{y}{n^{2/3}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_{\text{Airy}}(x, y).$$

Avec du travail, on montre que cette convergence a lieu au sens de la convergence des opérateurs de classe trace sur $L^2(s, \infty)$ pour tout $s > 0$, et on en déduit les fluctuations de la plus grande valeur propre autour du bord droit. En effet, on peut exprimer la fonction de répartition de la plus grande particule d'un DPP sur \mathbb{R} en termes d'un déterminant de Fredholm, ici

$$\mathbb{P}\left(n^{2/3}\left(\max_{j=1}^n \lambda_j - 2\right) \leq s\right) = \det(I - K_{H_n(\mathbb{C})}^{\text{bord}})_{L^2(s, \infty)},$$

qui est continu pour cette topologie, et on obtient donc, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(n^{2/3}\left(\max_{j=1}^n \lambda_j - 2\right) \leq s\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_2(s) := \det(I - K_{\text{Airy}})_{L^2(s, \infty)}.$$

La loi de probabilité associée à la fonction de répartition F_2 est connue sous le nom de *loi de Tracy-Widom*. Ces derniers ont établi une formule explicite de $F_2(s)$ en terme de la solution de Hastings-McLeod de l'équation de Painlevé II. C'est aussi la loi de la plus grande particule du DPP associée au *noyau d'Airy*. On va retrouver cette loi un peu plus loin en dehors du cadre des matrices aléatoires.

Suite à de nombreux travaux qu'il serait impossible de tous rappeler ici, il a été constaté que les noyaux sinus et d'Airy sont omniprésents dans la description du comportement local des valeurs propres d'un grand nombre de modèles de matrices aléatoires, en lien ou non avec les DPP. On parle ainsi de *phénomène d'universalité* en matrices aléatoires. Il est surprenant de constater que ces deux DPP universels apparaissent également en dehors du cadre des matrices aléatoires; nous présentons maintenant trois faits d'armes particulièrement marquants.

3. Polynômes orthogonaux et noyau sinus

D'abord, présentons l'élégante approche de [9] pour les DPP liés à des familles de polynômes orthogonaux. On considère une mesure borélienne μ positive supportée dans $[-1, 1]$ telle que $L^2(\mu)$ contient tous les polynômes. On peut définir alors une famille orthonormée de polynômes $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $L^2(\mu)$ de coefficients dominants γ_k positifs. On note $w(x)$ la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue, de sorte que $\mu(dx) = w(x)dx + \mu_s$ avec μ_s singulière par rapport à

la mesure de Lebesgue. On introduit alors le noyau de Christoffel-Darboux, bien connu en théorie de l'approximation :

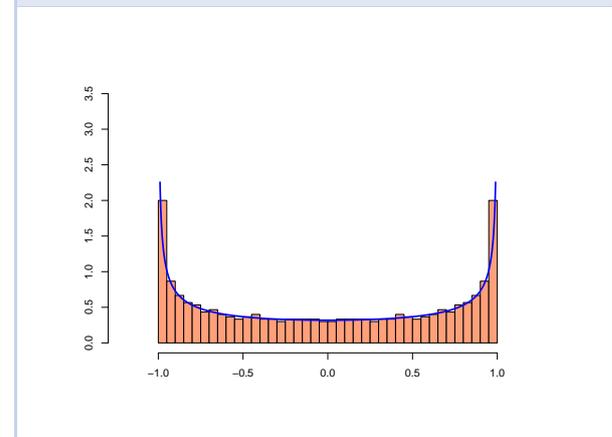
$$K_n^{(\mu)}(x, y) = \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(y).$$

Le DPP associé à ce noyau engendre presque sûrement des configurations de n points dans $[-1, 1]$. On suppose que μ est une mesure *régulière* de $[-1, 1]$, au sens où $\gamma_k^{1/k}$ converge vers 2 quand $k \rightarrow \infty$. C'est le cas par exemple pour les familles classiques, comme les polynômes de Legendre, Tchebychev, et plus généralement Jacobi. C'est aussi le cas dès que $w(x) > 0$ presque partout sur $[-1, 1]$. Lubinsky montre alors le résultat suivant : pour tout x_0 de $] - 1, 1[$ tel que μ est absolument continue sur un voisinage de x_0 , et de densité w continue et strictement positive en x_0 , on a la convergence locale uniforme

$$\frac{1}{n\rho(x_0)} K_n^{(\mu)}\left(x_0 + \frac{x}{n\rho(x_0)}, x_0 + \frac{y}{n\rho(x_0)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K_{\sin}(x, y)$$

où cette fois $\rho(x) := 1/(\pi\sqrt{1-x^2})$. Notons que sous l'hypothèse plus forte que $\mu(dx) = w(x)dx$ avec w positive et continue sur $[-1, 1]$, alors on a une convergence globale des points du DPP associé à $K_n^{(\mu)}$ vers la loi de l'arcsinus de densité $\rho(x)$, comme illustré dans la figure 5. La preuve de ce résultat, étonnamment courte par rapport aux standards de ce domaine des mathématiques, utilise de l'analyse élémentaire de façon très astucieuse pour offrir une méthode de comparaison robuste entre des noyaux associés à différentes mesures.

FIGURE 5 – Histogramme d'un DPP de taille 300 associé au noyau de Christoffel-Darboux et loi de l'arcsinus



4. Fonction zêta de Riemann et noyau sinus

Ensuite, nous rendons compte d'une apparition inattendue du DPP de noyau sinus en théorie analytique des nombres. Pour un nombre complexe s de partie réelle $\Re(s) > 1$, la fonction zêta de Riemann est définie par

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ nombre premier}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Cette fonction admet une extension méromorphe à \mathbb{C} , qui possède des zéros « triviaux » en les entiers pairs négatifs : $-2, -4, -6, \dots$. Les autres zéros sont localisés dans la bande $0 \leq \Re(s) \leq 1$. La célèbre conjecture de Riemann dit que ces zéros sont tous de partie réelle égale à $1/2$. Sous l'hypothèse de Riemann, on peut donc écrire ces zéros sous la forme $1/2 \pm it_j$ avec $0 < t_1 < t_2 < \dots$ en vertu de la symétrie $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$. Un résultat classique donne alors, quand $n \rightarrow \infty$,

$$N_n := \#\{j \geq 1 : t_j \leq n\} \sim \frac{n}{2\pi} \ln \frac{n}{2\pi},$$

ce qui nous amène à poser

$$w_j := \frac{t_j}{2\pi} \ln \frac{t_j}{2\pi},$$

si bien que $\#\{j \geq 1 : w_j \leq n\} \sim n$ quand $n \rightarrow \infty$; on s'attend à ce que l'espacement typique entre les w_j consécutifs soit d'ordre un. Pour mieux comprendre les espacements entre ces zéros renormalisés, au moins asymptotiquement, on peut s'inspirer des processus ponctuels et considérer l'analogie des fonctions de corrélation (3) :

$$R_k^{(n)}(\varphi) := \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_k \leq n} \varphi(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}),$$

pour $k \geq 1$ et des fonctions $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ raisonnables. Rudnick et Sarnak obtiennent alors, sous d'assez fortes hypothèses sur φ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_k^{(n)}(\varphi) = \int_{s_1 + \dots + s_k = 0} \varphi(s) \det \left[K_{\sin}(s_j, s_l) \right]_{j,l=1}^k ds,$$

un résultat qui s'apparente à (5). Ainsi, asymptotiquement, les espacements entre les zéros renormalisés se comportent comme une réalisation typique du DPP de noyau sinus. La restriction du domaine d'intégration à l'hyperplan $s_1 + \dots + s_k = 0$ est liée

au fait que $R_k^{(n)}(\varphi)$ ne doit dépendre que des espacements entre les w_j . Dans le cas des corrélations par paires, on a par exemple pour $\varphi(x, y) = f(x - y)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq j \neq \ell \leq n} f(w_j - w_\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(1 - \left(\frac{\sin \pi y}{\pi y} \right)^2 \right) dy.$$

Ce cas particulier a été démontré par Montgomery dans les années 70, pour des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est C^∞ et à support dans $[-1, 1]$. La conjecture de Montgomery, toujours ouverte, affirme que le résultat doit être vrai sans restriction de support. L'histoire raconte qu'en 1972, Montgomery, alors encore étudiant et déjà auteur du résultat ci-dessus, rencontre au thé de l'après-midi à Princeton le physicien Dyson. Celui-ci, spécialiste de matrices aléatoires, reconnaît immédiatement dans le résultat de Montgomery le fameux noyau sinus.

5. Permutations aléatoires et noyau d'Airy

Nous terminons par une rencontre surprenante avec la loi de Tracy-Widom dans l'étude des permutations aléatoires. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation de $[[1, n]]$, on dit que $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_k)$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ est une sous-suite croissante de σ .

On note $\ell(\sigma)$ la plus grande longueur d'une sous-suite croissante; on a donc $1 \leq \ell(\sigma) \leq n$. Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

alors $\ell(\sigma) = 4$ et elle est atteinte en la sous-suite croissante 5, 6, 7, 8 (mais également en 2, 6, 7, 9). Si maintenant σ_n est une permutation aléatoire tirée uniformément sur le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , l'étude du comportement asymptotique de $\ell(\sigma_n)$ quand n est grand est connu sous le nom de *problème d'Ulam*. Après des travaux de Hammersley, Vershik, Kerov, Logan et Schepp, il a été obtenu que

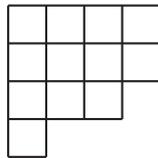
$$\mathbb{E}[\ell(\sigma_n)] \sim 2\sqrt{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Une avancée fondamentale a été réalisée par [2] en obtenant les fluctuations de $\ell(\sigma_n)$ autour de sa valeur moyenne : pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(n^{-1/6}(\ell(\sigma_n) - 2\sqrt{n}) \leq s) = F_2(s).$$

Autrement dit, la variable aléatoire $n^{-1/6}(\ell(\sigma_n) - 2\sqrt{n})$ converge en loi vers la distribution de Tracy-Widom

quand $n \rightarrow \infty$. Pour comprendre le caractère déterminantal du problème, nous ne présentons pas la preuve originelle de [2] mais plutôt celle de [4]. Leur analyse repose sur la correspondance de Robinson-Schensted (RS), bien connue en théorie des représentations du groupe symétrique, qui associe à une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une paire de tableaux d'Young de même forme. Plus précisément, une partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ d'un entier n , c'est-à-dire une suite décroissante d'entiers positifs de somme n , est encodée par un *diagramme de Ferrers* de n cases avec λ_i cases sur la i -ième ligne. Par exemple la partition $(4, 4, 3, 1)$ de $n = 12$ est encodée par le diagramme :



Étant donné un diagramme de Ferrers λ avec n cases, on appelle *tableau de Young* de forme λ un remplissage de ses cases par les entiers de 1 à n de façon strictement croissante le long des lignes et des colonnes. La correspondance RS associe à une permutation σ deux tableaux de Young de même forme. On place successivement les entiers $\sigma(1), \sigma(2), \dots$ dans le premier tableau en commençant par la première ligne avec le principe suivant : chaque nouvel élément $\sigma(j)$ s'insère sur la première ligne. Si $\sigma(j)$ est le plus grand entier de la ligne, on le rajoute dans une nouvelle case à droite. Sinon il prend la place du plus petit entier qui lui est supérieur. Ce dernier est alors rétrogradé à la ligne suivante, où les mêmes règles lui sont appliquées. Le second tableau mémorise l'ordre dans lequel les cases ont été créées. Ainsi, pour

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 1 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

la correspondance RS donne les étapes successives :

5	3	2	26	16	167	1679	1479	1478
	5	3	3	2	2	2	26	269
		5	5	3	3	3	3	3
				5	5	5	5	5
<hr/>								
1	1	1	14	14	146	1467	1467	1467
	2	2	2	2	2	2	28	289
		3	3	3	3	3	3	3
				5	5	5	5	5

On utilise alors deux propriétés clefs. D'abord, $\ell(\sigma) = \lambda_1$, la longueur de la première ligne des tableaux obtenus par la correspondance RS. Ensuite, si on applique la correspondance RS à la permutation uniforme σ_n , alors la probabilité que la forme des tableaux obtenus soit la partition λ de n est égale à $PL_n(\lambda) := \frac{1}{n!} \dim(\lambda)^2$. Ici $\dim(\lambda)$ est le nombre de tableaux de Young de forme λ ; c'est aussi la dimension de la représentation irréductible de \mathfrak{S}_n indexée par la partition λ . Cette loi de probabilité PL_n sur les diagrammes de Ferrers à n cases est la *mesure de Plancherel*. On considère maintenant \mathbb{P}^θ le *mélange poissonnien* de paramètre $\theta > 0$ des mesures de Plancherel, qui génère des diagrammes de Ferrers de taille aléatoire : on tire aléatoirement un entier N de loi de Poisson de paramètre θ , puis on tire un diagramme de Ferrers à N cases suivant la mesure de Plancherel PL_N . Ainsi, si on note $|\lambda| := \lambda_1 + \dots + \lambda_\ell$ le nombre de cases d'un diagramme de Ferrers λ , la probabilité sous \mathbb{P}^θ d'obtenir un diagramme λ est :

$$\mathbb{P}^\theta(\lambda) := e^{-\theta} \theta^{|\lambda|} \left(\frac{\dim(\lambda)}{|\lambda|!} \right)^2.$$

Cette poissonnisation est motivée par le fait suivant : si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ a pour distribution \mathbb{P}^θ alors la configuration aléatoire $x_i := \lambda_i - i$ est un DPP sur \mathbb{Z} . Son noyau $K^\theta(x, y)$ peut être écrit sous la forme d'une double intégrale sur des contours complexes, adaptée à l'analyse asymptotique (méthode du point col). En l'occurrence, [4] ont montré que

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{1/6} K^\theta(2\sqrt{\theta} + x\theta^{1/6}, 2\sqrt{\theta} + y\theta^{1/6}) = K_{\text{Airy}}(x, y).$$

La convergence de

$$n^{-1/6}(\ell(\sigma_n) - 2\sqrt{n}) = n^{-1/6}(\lambda_1 - 2\sqrt{n})$$

vers la loi de Tracy-Widom citée plus haut en est une conséquence car, sous \mathbb{P}^θ , le nombre de cases d'un tableau se concentre autour de θ quand $\theta \rightarrow \infty$ (procédé de dépoissonnisation); en d'autres termes, pour θ entier et grand les distributions \mathbb{P}^θ et PL_θ génèrent des diagrammes similaires en un sens qui peut être quantifié.

6. Utilisation des DPP en apprentissage automatique

Pour clore le petit voyage que nous vous avons proposé dans le vaste paysage des DPP, revenons un peu sur l'exemple des jaguars de l'introduction

en esquissant quelques traits de l'utilisation des DPP dans des contextes d'apprentissage automatique. Le message principal est que lorsqu'on veut modéliser des situations impliquant de la répulsion, de la diversité, des corrélations négatives entre des objets, les DPP fournissent des modèles efficaces, simples à manipuler et à simuler. On renverra le lecteur désireux d'approfondir le sujet à [7] par exemple.

Dans la plupart de ces applications, on cherche à sélectionner un sous-ensemble (aléatoire) d'objets dans une base de données, c'est-à-dire dans un ensemble discret \mathcal{E} de cardinal n éventuellement très grand; typiquement des images ou des textes. On considère alors une classe de DPP qui génèrent des configurations $\Xi \subset \mathcal{E}$ de cardinal aléatoire. Dans ce contexte, on attribue au i -ième élément de \mathcal{E} un vecteur $B_i \in \mathbb{R}^d$, où la dimension d est fixée par l'utilisateur. Par exemple B_i peut encoder les pixels de la i -ième image et d va dépendre de la résolution choisie. On considère alors la matrice semi-définie positive $L := B^t B$ où B est la matrice $d \times n$ de colonnes B_i . On prend ensuite $K := L(L + I)^{-1}$ comme noyau d'un DPP $\Xi \subset \mathcal{E}$. Ainsi, pour tout $A \subset \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}(A \subset \Xi) = \det(K_A) := \det[K_{ij}]_{i,j \in A},$$

avec la convention $\det(K_\emptyset) := 1$. En termes de la matrice L , on a

$$\mathbb{P}(\Xi = A) = \frac{\det(L_A)}{\det(L + I)}.$$

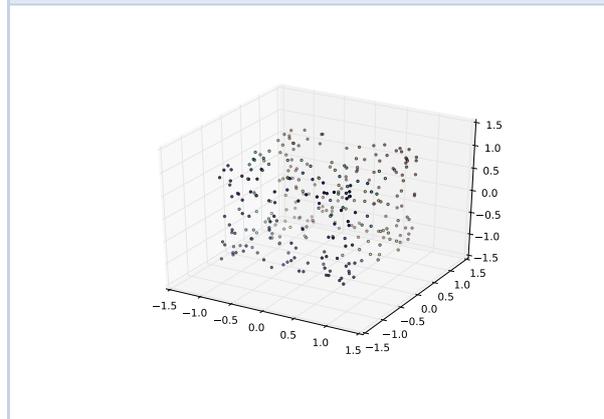
On voit alors que $\mathbb{P}(\Xi = A)$ est égale, à une constante de normalisation près, au volume carré du paralléloèdre généré par les colonnes B_i de B avec $i \in A$. Ainsi, si $B_i = q_i \varphi_i$ avec $q_i \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi_i \in \mathbb{R}^d$ avec $\|\varphi_i\| = 1$, alors q_i s'interprète comme une mesure de l'importance du i -ième objet de \mathcal{E} tandis que $S_{ij} := \varphi_i^t \varphi_j \in [-1, 1]$ représente une mesure de la similarité entre le i -ième et le j -ième objet. Plus précisément, $\mathbb{P}(\Xi = A)$ est proportionnelle à $\prod_{i \in A} q_i^2 \det(S_A)$. En pratique, il faut étiqueter chaque objet de \mathcal{E} avec son attribut (q_i, φ_i) , par exemple à la façon dont PageRank assigne un niveau d'importance à chaque page web, et puis calculer les matrices L et K associées. Une réalisation du DPP de noyau K fournira alors un sous-ensemble de \mathcal{E} présentant de la diversité au sens de la matrice S . Par exemple, si \mathcal{E} est l'ensemble des images

correspondant au mot clef « jaguar » sur internet, et qu'on a au préalable étiqueté chacun de ses éléments avec des attributs (q_i, φ_i) , une réalisation du DPP Ξ fournira un sous-ensemble d'images diversifié.

On peut aussi se restreindre à une famille paramétrée de noyaux K_θ et estimer θ à l'aide des méthodes usuelles en statistiques à partir de données d'entraînement. Dans [7], Kulesza et al. développent ainsi l'exemple des résumés automatiques de textes, où l'on dispose de nombreux textes sur un même sujet (par exemple des articles de presse sur un fil d'actualités) et l'on veut en extraire un résumé, c'est-à-dire un petit nombre de phrases contenant le plus d'information possible.

L'aspect séduisant de ces modèles vient surtout du fait qu'ils sont facilement implémentables de façon exacte : on peut répondre à la plupart des questions d'inférence les concernant en temps polynomial, essentiellement en multipliant, inversant, diagonalisant ou calculant des déterminants de matrices de taille n , au prix de $\mathcal{O}(n^3)$ opérations élémentaires. En particulier, on dispose d'algorithmes exacts pour simuler un DPP à ce coût-là.

FIGURE 6 – Simulation d'un DPP associé à des polynômes orthogonaux multivariés sur le cube



L'utilisation de DPP en apprentissage automatique, mais aussi en statistiques spatiales [8] ou en intégration numérique, n'en est qu'à ses balbutiements et semble séduire de plus en plus d'utilisateurs des mathématiques.

Références

- [1] G. W. ANDERSON, A. GUIONNET et O. ZEITOUNI. *An introduction to random matrices*. 118. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010, p. xiv+492. ISBN : 978-0-521-19452-5.
- [2] J. BAIK, P. DEIFT et K. JOHANSSON. « On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations ». *Journal of the American Mathematical Society* 12, n° 4 (1999), p. 1119–1178.
- [3] A. BORODIN, P. DIACONIS et J. FULMAN. « On adding a list of numbers (and other one-dependent determinantal processes) ». *Bulletin of the American Mathematical Society* 47, n° 4 (2010), p. 639–670.
- [4] A. BORODIN, A. OKOUNKOV et G. OLSHANSKI. « Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups ». *Journal of the American Mathematical Society* 13, n° 3 (2000), p. 481–515.
- [5] J. B. HOUGH et al. « Determinantal processes and independence ». *Probability surveys* 3 (2006), p. 206–229.
- [6] K. JOHANSSON. « Random matrices and determinantal processes ». In : *Mathematical statistical physics*. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, p. 1–55. DOI : 10.1016/S0924-8099(06)80038-7. URL : [https://doi.org/10.1016/S0924-8099\(06\)80038-7](https://doi.org/10.1016/S0924-8099(06)80038-7).
- [7] A. KULESZA, B. TASKAR et al. « Determinantal point processes for machine learning ». *Foundations and Trends® in Machine Learning* 5, n° 2–3 (2012), p. 123–286.
- [8] F. LAVANCIER, J. MØLLER et E. RUBAK. « Determinantal point process models and statistical inference ». *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 77, n° 4 (2015), p. 853–877.
- [9] D. S. LUBINSKY. « A new approach to universality limits involving orthogonal polynomials ». *Annals of Mathematics* (2009), p. 915–939.
- [10] R. LYONS. « Determinantal probability measures ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 98, n° 1 (2003), p. 167–212.
- [11] A. SOSHIKOV. « Determinantal random point fields ». *Russian Mathematical Surveys* 55, n° 5 (2000), p. 923–975.

**Adrien HARDY**

Université de Lille, France
adrien.hardy@math.univ-lille1.fr

Adrien Hardy est maître de conférences à l'université de Lille. Sa recherche porte sur des modèles aléatoires de la physique mathématique et ses applications.

**Mylène MAÏDA**

Université de Lille, France
mylene.maida@math.univ-lille1.fr

Mylène Maïda est enseignante-chercheuse à l'université de Lille au sein du laboratoire Paul Painlevé. Elle s'intéresse à différents modèles probabilistes pour des systèmes de particules fortement corrélées, comme par exemple les valeurs propres de matrices aléatoires, les processus ponctuels déterminantaux ou les gaz de Coulomb.

Merci à Raphaël, Rosalie et Elvire pour leurs simulations innocentes, de même que Rémi Bardenet et Guillaume Gautier. Nous tenons à remercier Sophie Grivaux pour sa relecture attentive d'une première version du texte et pour sa patience.



Comment lutter contre la désinformation scientifique ?

Nous proposons ici un compte-rendu de la journée organisée le 11 janvier 2018 à la Bibliothèque nationale de France par l'Association des Journalistes Scientifiques de la Presse d'Information (AJSPI), la Bibliothèque nationale de France (BNF), la Société Chimique de France (SCF), la Société Française de Physique (SFP), la Société Française de Statistique (SFDs), la Société Informatique de France (SIF), la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et la Société Mathématique de France (SMF).

• R. FARHI

La précédente édition de Sciences et Médias, en 2016, s'était interrogée sur les moyens à mettre en place pour parler de science aux jeunes. Dans une logique de continuité, l'édition 2018¹ était orientée sur la question de l'information scientifique dans les médias et son utilisation. En effet, ces dernières années, l'essor des nouvelles technologies d'information et de communication a fortement modifié notre façon de nous informer et de nous approprier l'information. Elle est devenue instantanée et prend des formes très diverses. Au sein de cette variété, de nombreux travers laissent place à la surinterprétation voire à la diffusion de « fausses vérités ».

À l'heure où l'exécutif français se propose de légiférer sur ces « fausses informations » et où celles-ci sont sans cesse dénoncées par la Présidence américaine (« fake news »), le sujet abordé lors de cette quatrième journée « Sciences et Médias » ne pouvait être plus actuel. Les sciences ont, depuis très longtemps, fait l'objet de désinformations ou, pour le moins, de doutes de la part de l'opinion publique. Un récent sondage de l'IFOP², commenté en ouverture de la journée par Daniel Hennequin, président de la commission Culture Scientifique de la SFP, montre que 9% d'un échantillon représentatif de la population est prête à adhérer à la thèse selon laquelle la Terre serait plate et non pas ronde.

De gauche à droite : Daniel Fiévet, Gary Dagnorn, Jean-Marc Bonmatin



Mais c'est le réchauffement climatique qui a fait l'objet, ces dernières années, de la campagne de désinformation la plus intense et la plus médiatisée. Comme le souligne, dans sa conférence introductive, Valérie Masson-Delmotte, co-présidente du groupe de travail I (« éléments scientifiques ») du GIEC (Groupe d'Experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat), dès les années 2009-2010,

1. Site des journées « Sciences et Médias » : <http://sciencesetmedia.org/index.php>. Vidéos en ligne des interventions de la journée : <https://www.youtube.com/channel/UCFTd8PVVJvw51SyQmdCM7xA>

2. <https://www.ifop.com/publication/enquete-sur-le-complotisme/>

les opposants à la thèse du réchauffement climatique n'ont eu de cesse de manipuler le doute quant à la réalité de l'origine anthropique du réchauffement. Le doute est inhérent à la démarche scientifique, et il est alors très facile de l'utiliser comme argument premier de la négation des faits. Le changement climatique demande une vision d'ensemble et un certain recul. Contrairement à une idée fortement ancrée dans l'esprit du public, il est disjoint des prévisions météorologiques. Malheureusement, le fil des médias ne donne qu'une vision parcellaire de certains éléments, met en lumière des faits extraits de leur contexte, comme le serait un détail d'une toile impressionniste. Il est facile aux « marchands de doute » de profiter de la complexité de la problématique pour dénigrer les outils et modèles climatologiques, et par voie de conséquence la responsabilité humaine du réchauffement climatique.

En outre, la participation au débat, non seulement de scientifiques, mais aussi de politiques, d'entreprises, d'ONG, tous animés de convictions intimes différentes, ne permet pas au public de se faire une idée précise et objective de la situation. L'information très rapidement diffusée, et de façon plus accessible à chacun, par l'intermédiaire des blogs et réseaux sociaux, supplante les articles scientifiques et donne l'illusion au public, notamment jeune, de comprendre la totalité des faits. C'est ainsi que la différence entre les publications scientifiques et les opinions émises par des pseudo-experts n'est plus perçue. Le doute sur la qualité des articles scientifiques est renforcé par la présence croissante de journaux prédateurs, et la communication est souvent biaisée, y compris par les grandes publications scientifiques à la recherche de scoops.

Face à cette situation, la réponse de la communauté scientifique française doit être plus adaptée et structurée. Contrairement à ce qu'il se passe dans les pays anglo-saxons, l'information objective et scientifique pour lutter contre la désinformation est déficiente en France. Il faut informer le grand public par une vulgarisation bien faite, par une éducation sur ce que sont la démarche scientifique et le rôle des véritables experts, et par un accès facilité aux données scientifiques. Il n'existe pas, non plus, de coordination ni de préparation du monde scientifique face à une éventuelle campagne massive de désinformation. Enfin, un effort doit être conduit dans le secteur de l'éducation : les élèves du primaire et du collège ne sont pas assez sensibilisés à ce qu'est la démarche scientifique, et leurs enseignants, notamment ceux du primaire, doivent être

rassurés et armés pour répondre aux questionnements scientifiques des élèves et aux tentatives de désinformation.

La table ronde qui suivait, animée par Daniel Fiévet (France Inter, « La Tête au Carré »), maître de cérémonie de la journée, avait pour thème « Comment choisit-on les experts scientifiques ? » et rassemblait donc des responsables de médias. Audrey Mikaëlian, journaliste de télévision, insiste sur la nécessaire compétence des experts, mais aussi et surtout sur leurs capacités à s'exprimer clairement et à se mettre à la portée du public. Avant d'aborder, par exemple, comment la sélection des reproducteurs bovins, puis le génie génétique, ont permis à l'homme de « fabriquer » des vaches parfaitement adaptées à la production et la consommation intensives, il est nécessaire que le public sache qu'une vache se traite deux fois par jour ! Le service de presse du CNRS, dont Julien Guillaume est responsable, a constitué une base d'experts dans tous les domaines, et en particulier les Sciences Humaines et Sociales, qui font l'objet du plus grand nombre de demandes, qui permet ainsi de répondre aux sollicitations, quelquefois très urgentes, des médias, en fournissant plusieurs noms sur un thème donné. Mickaëlle Bensoussan, rédactrice en chef de « Ça m'intéresse », interroge très souvent, surtout dans des domaines polémiques (tels que la santé), plusieurs experts susceptibles de donner des éclairages différents d'une même problématique. Prendre partie reviendrait en effet à occulter un ou plusieurs aspects d'une question. L'apparition récurrente des mêmes chercheurs dans les médias relève de mécanismes très simples : ce sont ceux qui sont les plus disponibles et les plus intéressés à communiquer qui réagissent le plus vite et répondent au téléphone ! Les journalistes s'échangent les bases de données, et font souvent appel aux chercheurs avec qui le partage a été le plus fructueux dans des expériences précédentes. Les trois intervenants de la table ronde ont évoqué les réticences de certains scientifiques à répondre à leurs sollicitations. Ceux-ci ont très souvent peur de voir leurs propos déformés, et pensent, à tort, qu'une intervention dans les médias ne leur rapporterait rien. Enfin, les femmes semblent plus réservées pour répondre aux sollicitations des médias. Elles demandent souvent à réfléchir, ce qui de fait les exclut compte tenu de l'immédiateté de certains moyens de diffusion. La conclusion de cette table ronde aura été unanime : il n'y a pas assez de journalistes scientifiques !

Nicolas Chevassus-au-Louis, journaliste à Mediapart, a démontré, dans sa conférence, les mécanismes de la désinformation, qui s'appuient sur le négationnisme (au sens large de négation des faits), la théorie du complot, et l'ignorance. La première étape consiste à instiller le doute : « Tu ne trouves pas ça bizarre, toi? », et à chercher « à qui profite le crime » (« Cui prodest »). Les points clefs de la théorie du complot des attentats du 11 septembre peuvent être rapprochés des thèses négationnistes produites par Robert Faurisson³, ou, dans une bien moindre mesure, de l'ouvrage publié par Claude Allègre en 2010 (« L'imposture climatique »). La seconde étape est de proposer des versions alternatives, puis, troisième étape, de les faire défendre par des scientifiques de renom ou des témoins « dignes de foi », tels qu'un ancien rescapé des camps d'extermination (argument d'autorité). Y participent également des revues d'apparence scientifique, mais qui ne résistent pas à l'analyse de véritables experts du domaine. On peut citer des exemples, comme le « Journal of Historical Review », qui véhicule des thèses négationnistes, ou le « Journal of 9/11 studies », mais aussi des revues prédatrices. C'est ainsi qu'on peut trouver, dans « The Open Chemical Physics Journal », un article démontrant la présence de traces d'explosifs dans les restes des tours jumelles du World Trade Center. Il est donc malheureusement toujours possible de trouver des scientifiques ou des revues spécialisées vecteurs de la négation et de la désinformation.

Dans un monde où les journalistes perdent peu à peu le contrôle de la diffusion des informations et où elles sont toutes mises sur un même pied d'égalité par le biais des réseaux sociaux et de l'Internet (Google, Facebook...), il devient de plus en plus nécessaire de redonner la parole aux scientifiques, et de fournir au public une information digne de foi, vérifiée et contrôlée par une expertise rigoureuse. C'est ce que fait Emmanuel Vincent, avec son initiative « Climate Feedback »⁴. Elle repose sur un réseau international de scientifiques qui trient les faits et les séparent de la fiction dans le domaine du changement climatique, afin de permettre au lecteur de savoir quelle information est crédible. Ces spécialistes sont mis à contribution, sur la base du volontariat, pour juger, commenter, et noter, dans l'ensemble des médias, les publications dans le domaine de la climatologie et du changement climatique. Les principaux biais relevés sont

le « cherry-picking », qui consiste à extraire un petit fait ou une donnée secondaire pour la mettre en avant, les conflits d'intérêt (notamment dans les domaines médicaux et pharmaceutiques), les raisons religieuses, économiques ou politiques qui conduisent à produire de la désinformation, la notoriété mal placée des intervenants dans le débat, la construction de blogs véhiculant de fausses informations sans contrôle de l'hébergeur. Il est très facile d'instiller le doute dans l'esprit du lecteur, mais ô combien plus difficile de lutter contre la désinformation. Les moyens à mobiliser sont considérables.

L'intervention de scientifiques compétents et pédagogues dans les médias est primordiale pour lutter contre la désinformation. Encore faut-il que ces scientifiques y soient préparés. Ce sujet faisait l'objet d'une table ronde à laquelle participaient Cécile Michaut, journaliste scientifique et formatrice en « media training », Audrey Mikaëlian, et Roberto Vargiolu, ingénieur de recherche au CNRS et vulgarisateur scientifique. Il n'est pas donné à tous les scientifiques, fussent-ils compétents, d'expliquer ce qu'est le boson de Higgs en 20 secondes... Dans toute intervention, comme dit plus haut, il faut considérer qu'on s'adresse à un public dont on ne connaît pas le niveau. Il faut donc expliquer pourquoi c'est intéressant, raconter une histoire, simplifier le vocabulaire, ne pas utiliser de mots à double sens (comme le mot « modèle » qui possède pour le grand public un sens très différent de celui que lui donne le scientifique), ne jamais entrer dans les détails, partir de très bas pour conduire le lecteur ou l'auditeur le plus haut possible. Les surfaces doivent se compter en terrains de football, les volumes en piscines ou dés à coudre!! Savoir quel message faire passer et comment le faire s'apprend. Une intervention dans les médias est une discussion entre un journaliste et un chercheur, et l'entretien est avant tout un partage, reposant sur une générosité commune en direction du public. Le journaliste doit, de son côté, rester ouvert, savoir quitter le chemin qu'il s'était tracé lorsque nécessaire, et ne pas trop préparer son entretien. Il n'est en aucun cas le porte-parole du scientifique. Lorsque le chercheur ne s'estime pas compétent ni suffisamment sûr de lui, il doit savoir décliner la proposition d'entretien. À l'inverse, lorsqu'il l'accepte, il doit admettre de n'avoir aucun contrôle de ce qui sera écrit ou diffusé. Il n'aura jamais que le contrôle de ce qu'il aura dit. Il n'existe en effet aucun droit de relecture, et il appartient

3. Le Monde, 29 décembre 1978 : « Le "problème des chambres à gaz" ou la rumeur d'Auschwitz ».

4. <https://climatefeedback.org>

au seul journaliste de ne pas trahir les mots ou le message prononcés par le scientifique.

L'après-midi débutait sur une troisième table ronde consacrée aux médias numériques. Elle rassemblait Pierre Kerner (Café des Sciences), Florence Porcel, youtubeuse (« La Folle Histoire de l'Univers »), et Didier Pourquy, directeur de rédaction de « The Conversation France ». Ces médias, de natures différentes, sont cependant tous confrontés au problème du contrôle de l'information. Un blog, tel que celui du Café des Sciences, permet toujours la publication d'un correctif lorsqu'une erreur est découverte. La participation active de scientifiques travaillant en réseau permet un travail rigoureux de vérification de l'information. Tel n'est pas le cas des vidéos publiées sur YouTube, dont le contenu n'est évidemment pas vérifié par l'hébergeur. Le contrôle de l'information n'appartient alors qu'à l'auteur de la vidéo. Florence Porcel s'appuie sur une collaboration avec des scientifiques, qui lui permet de vérifier l'information qu'elle diffuse, et mentionne toujours, au bas de ses vidéos, les sources utilisées. « The Conversation France » rédige, en français, une NewsLetter et des articles destinés à la presse écrite, dans tous les domaines, y compris scientifiques. Les auteurs des articles sont des chercheurs et des universitaires. La vérification de l'information est d'autant plus cruciale que le rythme de parution est soutenu, mais le travail en réseau permet de répondre à cette nécessité. On peut déplorer la publication d'articles, de revues, de vidéos, de blogs aux titres racoleurs dont le sérieux peut être mis en doute et ne peut être évalué qu'en allant vérifier le contenu scientifique et les sources. On pourrait, certes, envisager la création de « labels de qualité » de l'information, mais qui risqueraient de s'avérer à double tranchant. Quel que soit le média, il va de soi que tous ses contributeurs doivent être attentifs à la véracité de l'information diffusée. Mais dans le cas des médias numériques, dont l'interactivité est la caractéristique première, la confiance réciproque, la transparence, la discussion et le travail en réseau sont les conditions premières d'une bonne qualité de l'information. Le choix des experts, sur la base de leur domaine de recherche, est aussi une garantie.

La neutralité du Net a fait récemment l'objet de nombreux débats, principalement aux États-Unis. Mais, pour le grand public, l'objectivité de l'information obtenue sur Internet fait déjà partie du passé. Alors qu'une recherche réalisée à l'aide d'un moteur, tel que Google, par exemple, faisait apparaître au-

trefois un classement de l'information en fonction de la popularité de la référence, il n'en est plus de même aujourd'hui. Les algorithmes utilisés par les moteurs de recherche retournent une information ciblée de façon individuelle, en fonction de l'historique des requêtes de l'internaute et de son profil. Cette nouvelle personnalisation, qui repose sur des considérations essentiellement publicitaires et commerciales, conduit, nous dit Francesca Musiani (Institut des Sciences de la Communication, CNRS), à une propagande individualisée qui n'est ni plus ni moins qu'un biais de l'information : on assiste ainsi à un enfermement idéologique de l'internaute, qui ne trouve, comme réponses à ses requêtes, que des informations qui confortent ses convictions. Les rumeurs sont ainsi propagées, puis industrialisées, car générant des revenus. Dans ce contexte, on ne sait plus différencier le vrai du faux, ni qui est à l'origine d'une « fake news ». Cette privatisation de la gouvernance est une véritable menace à la liberté d'expression, mais est aussi source de désinformation. Comment lutter contre cette tendance ? La réponse n'est pas simple. Il faudrait modifier les algorithmes de recommandation (cf. infra), créer des entraves aux revenus publicitaires, censurer les profils, faire œuvre de pédagogie auprès du grand public. Cette démarche ne peut être que concertée et impulsée par les différentes parties prenantes elles-mêmes.

Francesca Musiani



« Si l'on sait exactement ce qu'on va faire, à quoi bon le faire ? ». C'est par cette citation que Gilles Dowek, chercheur à INRIA, sème le doute sur la véracité de l'information, au-delà de la seule information scientifique. Cette citation, attribuée à Picasso, ne se trouve que dans les « Conversations avec Christian Zervos », publiées en 1935 dans les

Cahiers d'Art. Picasso faisait exclusivement référence à son approche de la peinture, selon laquelle l'artiste ne doit jamais connaître d'avance le résultat d'une œuvre commencée. Cette citation a cependant été abondamment utilisée dans d'autres contextes. Pire encore, la phrase, attribuée à Voltaire, « Je ne suis pas d'accord avec ce que vous dites, mais je me battrai jusqu'à la mort pour que vous ayez le droit de le dire » a été écrite par Evelyn Beatrice Hall, dans un ouvrage publié en 1906, pour résumer sa pensée, mais n'a jamais été écrite par le philosophe. Et pourtant, cette phrase apocryphe est le plus souvent attribuée à Voltaire lui-même. Ces deux exemples montrent combien l'information peut être biaisée ou même créée de toutes pièces. C'est certes sur Internet et la toile qu'il est possible de trouver le plus souvent de fausses informations, mais les médias classiques n'échappent pas à la règle, comme le montrent les deux citations précédentes. Au-delà de la coupable désinformation, la manipulation des faits est un véritable péché, bien plus grave. L'exemple cité par Gilles Dowek illustre parfaitement cette technique : les défenseurs de la chasteté nient l'efficacité du préservatif masculin, puisque c'est dans les pays d'Afrique, où les États-Unis envoient le plus de préservatifs, que l'épidémie de sida fait le plus de ravages ! Il n'existe malheureusement pas d'algorithme permettant de vérifier la véracité des faits ou des informations. On pourrait en imaginer un permettant de détecter une logique défaillante, comme dans le cas précédent, mais il n'existe pas encore. La seule façon, aujourd'hui, de détecter une fausse information est d'analyser les arguments avancés. On trouve encore malheureusement trop souvent des arguments du type « Tout le monde dit » ou, pire, « Il y a un expert qui dit ». Il faut bien insister sur le fait que la vérité scientifique n'est pas une opinion.

Jean-Marc Bonmatin, du Centre de Biophysique Moléculaire du CNRS, se trouve au cœur du débat sur les néonicotinoïdes. Ces substances couvrent à elles seules 40% des besoins français en pesticides. Elles agissent sur le système nerveux central des insectes, provoquant la paralysie et la mort. Le débat oppose les apiculteurs d'une part, et les agriculteurs et industriels de l'agrochimie d'autre part, sur la responsabilité de ces substances dans la mortalité observée des abeilles. Outre les questions déontologiques et relatives à la biodiversité, les montants évoqués par les parties prenantes sont considérables. Le marché des néonicotinoïdes est évalué à 2,5 milliards d'euros. Mais dans le même temps, la pollinisation est créatrice de 153 milliards d'euros.

Dans ce contexte, les faits alternatifs (« fake news »), que Jean-Marc Bonmatin appelle des contre-faits, sont légion. Un journal canadien, « Le Devoir », ti-trait par exemple, en septembre 2017 : « L'utilisation des néonicotinoïdes ne tue pas les abeilles ». Une lecture rigoureuse montre cependant que cet article relève plus d'une opinion que d'une analyse rigoureuse. De la même façon, une rumeur s'est répandue selon laquelle un rapport de l'Union européenne évaluait à 4,7 milliards d'euros les pertes liées à un éventuel abandon des néonicotinoïdes. Or, ce rapport n'a jamais existé ! Enfin, Jean-Marc Bonmatin a dû corriger, en argumentant à de nombreuses reprises, l'article sur les néonicotinoïdes dans Wikipédia qui, rappelle-t-il, constitue la source première d'information scientifique de 90% de la population jeune. Comment le chercheur doit-il se positionner sur un sujet aussi brûlant et lourd de conséquences ? En premier lieu, il doit analyser les faits et les travaux, leurs sources, et mettre au jour les éventuels conflits d'intérêts. Il faut rappeler que les grands groupes industriels ont mis en place des stratégies visant à instaurer le doute (tabac, amiante, énergie fossile...) et qu'ils financent de nombreux projets de recherche, voire des experts... Dans un second temps, il doit communiquer avec rigueur et clarté (y compris dans Wikipédia !), en argumentant face aux contre-vérités. Enfin, son devoir est d'alimenter le débat contradictoire par des faits scientifiques solides et de s'impliquer dans l'expertise.

Le dernier intervenant de la journée était Gary Dagorn, journaliste aux « Décodeurs » du journal *Le Monde*. Compte tenu de l'ingérence de la science dans les débats de société actuels, tels que les vaccins, le cancer, sa part dans les analyses fournies par les Décodeurs est passée à 4%, en augmentation significative au cours de ces dernières années. Le partage des informations via les réseaux sociaux constitue une véritable caisse de résonance à la désinformation : plus les informations sont grosses et peu crédibles, et plus elles sont cependant partagées. Il convient donc de remonter à la source. *Le Monde* travaille par exemple avec Facebook pour pouvoir mieux appréhender sa démarche et lutter contre l'apparition des fausses informations. Enfin, un gros travail de pédagogie est nécessaire en direction du public. Le « Décodex », qui permet de vérifier si la source de l'information (page Web ou site Internet) est plutôt fiable ou non, est, de ce point de vue, un outil efficace mis à la disposition des lecteurs. Mais Gary Dagorn se pose tout de même la question de savoir si, dans un tel contexte,

« décoder » des contre-vérités ne produit pas l'effet inverse, à savoir celui de les amplifier. . .

Patricia Pineau, rédactrice en chef de « L'Actualité Chimique », appelée à faire une synthèse de la journée, a conclu sur une note d'optimisme, en remarquant que l'assistance était plutôt jeune, et que la nouvelle génération n'hésitait pas à s'impliquer dans la diffusion de la vérité scientifique et dans la lutte contre la désinformation.

Conclusion

S'il est très facile de créer de la désinformation et des rumeurs, puis de les véhiculer, il est beaucoup plus difficile de les démentir. Il faut tout d'abord travailler à la source. Les médias peuvent jouer un rôle crucial dans la lutte contre les fausses informations, et beaucoup d'entre eux le font déjà. Plus récemment, le 19 janvier 2018, Mark Zuckerberg, CEO de Facebook, a déclaré sur sa page vouloir faire de 2018 l'année de la lutte contre les contenus problématiques. Pour y parvenir sans pour autant être accusé de censure, il serait demandé aux utilisateurs leur avis sur leurs sources et la confiance qu'ils leur accordent. Les algorithmes seraient modifiés en conséquence pour tenir compte de ces

retours et hiérarchiser les sources d'information. L'outil Décodex, évoqué plus haut, œuvre dans le même sens, et un partenariat entre Facebook et plusieurs médias français⁵, existe depuis février 2017. Il est tout aussi important d'éduquer le public à faire la différence entre le vrai et le faux, à faire le tri des informations glanées sur le Net et les réseaux sociaux, bref, à différencier l'information du savoir. Encore faut-il pour cela que le référencement des sites et des informations ne soit pas soumis à des biais, d'origine publicitaire ou autre. Enfin, le rôle des chercheurs et universitaires dans cette lutte est triple. Tout d'abord, l'analyse des sources et de la qualité, de la véracité de l'information, et la détection d'éventuels conflits d'intérêts. Ensuite, contribuer à l'information, en s'impliquant auprès des médias, à la condition d'être à la fois compétent dans le domaine et de tenir un langage clair et accessible au grand public. Enfin, construire des réseaux, à l'instar de ce qui existe dans les pays anglo-saxons, afin de coordonner leurs réponses et faire face à une éventuelle campagne de désinformation massive. La tâche est donc difficile, mais pas impossible. Comme le dit Patricia Pineau dans ses mots de conclusion de la journée, la nouvelle génération est sensible à cette problématique, et il convient de rester optimiste!



Robert FARHI

Robert Farhi a été enseignant-chercheur au laboratoire des sciences des procédés et des matériaux (UPR 3407, CNRS et université Paris 13), professeur et directeur du laboratoire de physique de la matière condensée à l'université de Picardie Jules Verne, et détaché auprès des services scientifiques des ambassades de France au Japon, en Australie et en Chine. Il est membre de la commission culture scientifique de la Société Française de Physique.

5. Agence France Presse (AFP), BFM-TV, France Télévisions, France Médias Monde, L'Express, Le Monde, Libération et 20 Minutes.

Pour un investissement plus massif des universitaires dans les IREM

• F. VANDEBROUCK
• S. VINATIER

1. Présentation des IREM

Lieux de réflexion, de partage et de discussion sur l'enseignement des mathématiques depuis la fin des années soixante et la réforme des « maths modernes », les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques cultivent sans dévier la même recette originelle : mélanger les regards d'enseignants de différents niveaux et établissements pour produire les nouveaux outils de l'enseignement des mathématiques, avec l'originalité que tous les participants¹ contribuent sur un pied d'égalité à cette production, de façon collégiale, chacun avec ses compétences propres. Les enseignants se retrouvent ainsi acteurs de leur propre formation et de l'évolution de leurs pratiques, ainsi que de celles de leurs collègues via les nombreuses formes de diffusion des résultats de ces travaux : stages de formation continue, interventions dans la formation initiale, publications dans les revues², ouvrages, brochures, ressources disponibles en ligne, jeux, etc.

Cette recherche très appliquée³ est menée le plus souvent par un groupe de quelques personnes sur une durée de quelques années, ponctuée de quelques réunions chaque année⁴, sur le thème qu'elles ont choisi ensemble, comme par exemple :

- les contenus disciplinaires, notamment ceux qui surgissent soudainement dans les programmes : par exemple probabilités et statistiques il y a quelques années, algorithmique et programmation plus récemment ;
- les méthodes pédagogiques : différenciation, remédiation, situations-problèmes, pédagogie inversée, etc. ;
- les pratiques innovantes : évaluation, compé-

- tences, activités ludiques, pluridisciplinaires... dont bien sûr l'utilisation des TIC (calculatrices, tableurs, tablettes, logiciels de géométrie, tableaux blancs interactifs, vidéo, etc.) ;
- la liaison entre différents niveaux : école-collège, collège-lycée, lycée-université ;
- l'introduction d'une perspective historique ou épistémologique dans l'enseignement des mathématiques ;
- la diffusion de la culture mathématique : rallyes, conférences, expositions, etc. ;

et bien d'autres thèmes encore, la diversité des travaux des groupes IREM semble presque infinie !

2. Moyens financiers... et moyens humains

Des moyens sont évidemment nécessaires pour faire fonctionner ces groupes. À l'interface de l'enseignement primaire et secondaire et de l'enseignement supérieur, les IREM ont naturellement de nombreux partenaires. Localement d'abord : bien implantés dans le paysage de la formation continue des enseignants de mathématiques de leur académie, les IREM reçoivent en général des heures de vacances de la part du rectorat.

Au niveau national ensuite : organisés en réseau⁵ pour permettre l'échange et le renforcement des pratiques et leur donner une plus grande visibilité et une diffusion maximale, les IREM bénéficient du soutien institutionnel de la Direction Générale de l'Enseignement Scolaire (DGESCO), au sein du Ministère de l'Éducation nationale, là encore sous forme d'heures pour rétribuer les animateurs qui s'investissent dans les « Actions à Priorité Natio-

1. Appelés « animateurs » dans le jargon iremique.

2. Notamment celles des IREM : la revue généraliste *Repères IREM* et les deux revues spécialisées *Petit x* et *Grand N*.

3. Ou « recherche-action ».

4. Typiquement 5 ou 6 demi-journées par an sur 2, 3 ou 4 ans.

5. Appelé ADIREM, pour « Assemblée des Directeurs d'IREM », et constitué en Groupement d'intérêt scientifique depuis 2014.

nale » du réseau : responsables de commissions inter IREM⁶, organisateurs de colloques, groupes locaux travaillant sur des thèmes d'innovation pédagogique sélectionnés par le réseau et la DGESCO.

La Direction Générale de l'Enseignement Supérieur et de l'Innovation Pédagogique (DGESIP) soutient également le réseau par le biais d'une dotation budgétaire. Tous ces moyens sont évidemment dépendants des rapports d'activités des IREM et du réseau présentés chaque année.

Logo du réseau des IREM; www.univ-irem.fr



Du côté des universités, au sein desquelles les IREM sont inclus d'une façon ou d'une autre (en général service commun ou rattachés à une composante), ils bénéficient d'un soutien plus ou moins marqué selon les cas : depuis la loi d'autonomie des universités, rien ne garantit plus à l'échelle nationale les moyens qui leur sont alloués, que ce soit en terme d'heures d'enseignement pour les animateurs universitaires, de personnels administratifs mis à disposition, de primes de direction, de budget de fonctionnement, de locaux; en conséquence les situations sont très variées.

Il en va de même de l'engagement des universitaires dans les activités des groupes. Des facteurs locaux comme la quantité d'heures de service disponibles pour le rétribuer peuvent expliquer ces variations. On peut espérer que les relations développées avec différents partenaires dont la CDUS⁷ permettront à terme de les améliorer. Concentrons-nous ici sur les facteurs globaux qui peuvent intervenir dans le sous-investissement constaté en de nombreux endroits. Le plus évident est la grande variété des tâches, toutes éventuellement très prenantes, entre lesquelles les

enseignants-chercheurs ont à répartir leur temps de travail; gratifiés essentiellement pour leurs résultats en recherche ou parfois pour leur investissement dans les tâches administratives, déjà très sollicités par des services d'enseignement conséquents, ils ne sont pas incités à se consacrer à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques et à la formation continue des enseignants. Ajoutons que même ceux qui connaissent un peu l'IREM ne voient pas toujours spontanément ce qu'ils pourraient apporter aux enseignants du secondaire (voire du primaire) d'un groupe IREM, ni ce qu'ils pourraient en recevoir en retour.

Entre une structure institutionnelle qui n'encourage pas ou très peu l'implication dans les IREM et des individus qui n'y voient pas clairement leur place, on peut comprendre que certains IREM manquent d'animateurs universitaires! Et pourtant comment ne pas souhaiter que la richesse des thèmes des travaux des IREM profite aux universités...

3. De bonnes raisons de réinvestir les groupes IREM

Nous développons quelques arguments pour tenter de convaincre les universitaires d'investir plus massivement les IREM. Notons tout d'abord que la formation initiale et continue des enseignants est partie intégrante de leurs missions : le Décret n° 84-431 du 6 juin 1984⁸ dispose en effet que les enseignants-chercheurs « concourent à la formation des maîtres et à la formation tout au long de la vie ». Cette mission est plus que jamais d'actualité en mathématiques :

- la participation à un groupe IREM permet de participer à la formation continue des enseignants et donc d'influencer l'enseignement que reçoivent les étudiants futurs;
- elle peut également enrichir l'apport aux futurs enseignants des collègues qui interviennent en formation initiale au sein des masters MEEF : mieux informés des problèmes rencontrés sur le terrain, ils sont plus à même d'adapter leur enseignement aux besoins professionnels futurs de leurs étudiants;

6. Douze CII à l'heure actuelle, dont 10 sont thématiques et regroupent des animateurs de groupes travaillant sur des thèmes proches; une CII est consacrée à la revue du réseau *Repères IREM* et une autre à *Publimath*, la base de données bibliographiques commune avec l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

7. Conférence des Doyens d'UFR Sciences

8. Fixant les dispositions statutaires communes applicables aux enseignants-chercheurs et portant statut particulier du corps des professeurs des universités et du corps des maîtres de conférences (version consolidée au 11 décembre 2013).

- les difficultés actuelles dans le recrutement des enseignants de mathématiques induisent une baisse du niveau disciplinaire moyen des nouveaux recrutés; l'action des groupes IREM peut être un levier pour tenter de remédier à ce phénomène.

Au-delà des textes officiels, les universitaires ont largement intérêt à s'investir dans cette mission. Un point important est que la participation à un groupe IREM, lieu de rencontre et d'échange entre enseignants de différents niveaux, favorise la continuité secondaire-supérieur au bénéfice des étudiants entrant à l'université :

- les enseignants du secondaire sont désireux de développer des échanges avec leurs collègues du supérieur pour obtenir plus d'informations sur les cursus universitaires et les attendus en termes de savoirs et de compétences, afin d'adapter à la fois leur enseignement et les conseils d'orientation qu'ils prodiguent à leurs élèves;
- en sens inverse, il est extrêmement utile à un enseignant de licence de connaître la dernière mouture des programmes du lycée et leur mise en pratique dans les classes, pour à son tour savoir ce qu'il peut attendre des étudiants nouvellement bacheliers.

Les bénéfices dépassent ceux d'une simple mise au point sur ce qui est connu d'un côté, attendu de l'autre. Il s'agit véritablement de construire une communauté unie d'enseignants de mathématiques, travaillant collectivement à l'amélioration de l'enseignement de la discipline et construisant une vision commune des objectifs et des moyens. De fait les compétences de chacun sont utilement mises à profit dans la construction de nouvelles pratiques et de nouvelles ressources :

- les enseignants du secondaire sont souvent demandeurs de l'appui d'un enseignant-chercheur pour bénéficier de ses compétences disciplinaires, de son expertise de la méthodologie de la recherche ou simplement de son regard extérieur afin de les aider à prendre du recul par rapport à leur travail, de leur poser des questions qui permettront d'avancer, de les amener vers des références bibliographiques...;
- en retour, les universitaires bénéficient de l'expérience de terrain des collègues du secondaire, qui mènent éventuellement des expériences d'enseignement au sein de leur classe et en partagent les résultats; qui font part

également des évolutions en cours dans les pratiques d'enseignement (évaluation, compétences, remédiation...) que les universitaires pourront être amenés à expérimenter avec leurs étudiants;

- tous bénéficient des nombreuses ressources disponibles dans les IREM, ancrées sur les problématiques des professeurs de terrain, que ce soit dans les rayons spécifiques des bibliothèques IREM ou au contact des animateurs qu'ils rencontrent.

Dans cet échange où tout le monde est gagnant, la crainte éventuelle des universitaires de n'avoir rien à apporter aux collègues du secondaire ou du primaire s'évanouit très vite dans la plupart des cas! De plus le fait de participer à la réflexion sur l'enseignement n'est évidemment pas sans effet sur sa propre façon d'enseigner : on devient plus sensible aux difficultés que rencontrent les étudiants et on est mieux outillé pour tenter d'en comprendre les causes et d'y trouver des remèdes; on analyse de façon plus poussée les objectifs en terme d'apprentissage d'un module et comment évaluer si les étudiants les ont atteints. Finalement on retire plus de satisfaction de l'activité d'enseignement, à la hauteur de ce qu'on a investi en terme de réflexion sur sa propre pratique.

La participation aux activités de l'IREM est une ouverture qui peut se révéler très positive :

- participer à un groupe IREM permet d'élargir ses horizons en termes de thèmes de réflexion et de nouveaux collaborateurs, voire simplement de personnes rencontrées; les animateurs IREM sont le plus souvent des enseignants passionnés, parfois même passionnants;
- loin de le détourner de ses propres objectifs de recherche, ces séances de travail collaboratif peuvent offrir à l'enseignant-chercheur une double respiration, par rapport à son propre travail et par rapport à ses pratiques d'enseignement, lui permettant de prendre du recul sur ces deux aspects de son travail;
- les questions qui se posent pour l'enseignement des notions mathématiques les plus élémentaires sont parfois l'écho de la nature complexe des concepts mis en œuvre; aborder celle-ci par le biais de l'enseignement peut aider à mieux la cerner et la comprendre.

Ajoutons pour être complets que les IREM sont généralement très investis dans la diffusion de la culture mathématique et scientifique et que parti-

ciper à leurs actions permet de développer l'attractivité des études scientifiques, des laboratoires de recherche et de l'université en général.

4. Perspectives

Alors qu'on fêtera en 2018-19 le cinquanteaire de la création des premiers IREM, le réseau connaît une nouvelle dynamique. Tout d'abord plusieurs facteurs incitent à chercher de nouvelles solutions pour l'enseignement des mathématiques, notamment le manque d'appétance des élèves pour les études mathématiques ou scientifiques, alors que les besoins de diplômés sont grands dans ces disciplines, ainsi que les mauvais résultats des élèves français aux tests internationaux en mathématiques. La mission Torossian-Villani, nommée par le Ministre de l'Éducation nationale pour proposer des pistes de réforme de l'enseignement des mathématiques, a souligné l'importance du rôle des IREM sur ces questions. Déjà auparavant, dans le cadre de la « Stratégie mathématiques » mise en place par la Ministre précédente, les IREM avaient contribué à la production de ressources communes⁹ avec l'inspection générale et la DGESCO. Enfin des colloques du réseau des IREM apparaissent au Plan national de Formation pour la 3^e année consécutive.

En parallèle, la place de plus en plus grande qui est faite d'une part à l'informatique (algorithmique et programmation) et d'autre part aux liens entre les disciplines dans les programmes de l'école et du collège, peut-être bientôt du lycée, incite le réseau à s'ouvrir vers les autres disciplines scientifiques, en particulier vers l'informatique. Il est soutenu dans cette direction par la DGESCO, qui a alloué au réseau des heures supplémentaires pour rétribuer les

enseignants d'autres disciplines qui s'investissent dans des groupes IREM, éventuellement sur des thématiques propres à leurs disciplines. Le modèle « horizontal » de formation continue des IREM tend donc à s'étendre aux autres disciplines scientifiques. Signalons qu'à Toulouse l'IREM a laissé place à un Institut de Recherche sur l'Enseignement des Sciences depuis déjà quelques années, lequel a vu naître des groupes dans d'autres disciplines, qui travaillent et échangent avec les groupes mathématiques à la satisfaction de tous.

L'informatique est en avance dans ce processus avec la présence dans de nombreux IREM de groupes travaillant sur cette discipline, notamment parce que son enseignement est en bonne partie dévolu aux enseignants de mathématiques dans le secondaire. Des universitaires de la Société Informatique de France se sont rapprochés de l'ADIREM pour proposer de faire bénéficier la recherche sur l'enseignement de l'informatique de leur expertise et leur recul disciplinaire, et une nouvelle commission inter IREM très dynamique, la C3i, s'est formée en 2017 avec de nombreux projets à mener.

Cette dynamique d'extension des IREM, qui reste encore limitée à ce stade, n'empêche pas que les mathématiques restent au cœur des activités des IREM et de l'IREM de Toulouse, tout d'abord pour des raisons historiques (elles ont de l'avance!) et ensuite peut-être parce qu'elles assureront le lien entre les différentes sciences qui y développeront des activités. Il est donc doublement important que les mathématiciens universitaires rejoignent les IREM, à la fois pour s'inscrire dans cette dynamique et pour que la place des mathématiques reste centrale dans les instituts lorsqu'ils évolueront vers des IRES.



Fabrice VANDEBROUCK

Université Paris Diderot
fabrice.vandebrouck@univ-paris-diderot.fr

Fabrice Vandebrouck est professeur à l'université Paris Diderot à l'UFR de mathématiques. Il est membre du laboratoire de didactique André Revuz, et a été président de l'ADIREM de 2013 à 2016.



Stéphane VINATIER

Université de Limoges
stephane.vinatier@unilim.fr

Stéphane Vinatier est maître de conférences HDR à l'université de Limoges au sein de l'institut XLIM (UMR CNRS 7252), directeur de l'IREM de Limoges depuis novembre 2011 et président de l'ADIREM depuis janvier 2017.

9. <http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html>



Témoignage

• A. BERTRAND

Vous avez pu lire dans la *Gazette* n° 144 d'avril 2015 la synthèse d'un intéressant article : « La noblesse scientifique, naturalisation des aspirations en classes préparatoires aux grandes écoles »¹. Comment le tri scolaire effectué par le concours sciences (dures) de l'École normale supérieure de Paris s'accompagne-t-il d'un vigoureux tri social, assorti d'un encore plus vigoureux tri de genre ? C'est la question qu'aborde cet article dont le but est de comprendre une partie des raisons de cette situation. L'objet de l'étude concerne en particulier la situation des filles, qui paraît assez catastrophique : aucune femme cette année sur la liste principale du concours sciences de l'ingénieur, aucune sur les 28 classés du concours informatique, une seule femme admise pour le concours mathématiques... et 17% d'admissibles à l'École polytechnique. La faible présence des filles en mathématiques et informatique est très préoccupante. Je suis aussi très impressionnée par le très faible pourcentage de lauréats issus de milieux « ouvriers et employés » : 3% à l'Éns Paris et 1% à Polytechnique, contre 11% dans la population étudiante. Par ailleurs 83% des lauréats ont un père de catégorie socio-professionnelle supérieure ou enseignant (30% dans la population) et deux tiers des normaliens et trois polytechniciens sur quatre viennent des grands lycées parisiens.

Cela ne ressemble pas à la situation que j'ai connue (ou cru connaître) et je trouve cela effarant (pour les filles j'étais déjà au courant)! Il est difficile de comparer la situation des filles à l'orée des années 70 à la situation actuelle, Polytechnique n'acceptait pas de femmes, et l'École normale supérieure de jeunes filles (Sèvres et Fontenay) ont été supprimées en 1986. Ce que l'on peut étudier, c'est l'effet de cette décision sur les recrutements universitaires, plutôt négatifs et parfaitement prévi-

sibles (je sais ce qu'il en est, j'émerge à la 25ème section). Et sûrement Arnaud Pierrel vous dirait que ce qui va suivre manque de fond statistique et sociologique. Mais que je vous raconte, malgré tout, mes impressions à propos du changement de société en cours.

J'ai l'impression qu'aujourd'hui domine l'idée que « hors des prépas point de salut ». Je peux vous dire que dans les années soixante ce n'était pas du tout le cas ; on pensait les prépas destinées à des jeunes un peu étranges. Dans une bonne classe de « math élem », trois élèves allaient en maths sup, pas beaucoup plus (et un en prépa HEC). Mon grand frère a refusé d'y aller, déclarant qu'il n'était pas question qu'il suive un enseignement reposant sur des principes aussi stupides, mais qu'il s'inscrirait tout de même et qu'il irait au lycée jusqu'à ce que la faculté reprenne les cours après la session de septembre, histoire de se chauffer avant la rentrée. J'étais moins à cheval sur les grands principes ; je voulais trouver un poste d'assistante à l'université et comme j'étais une fille, mieux valait mettre toutes les chances de mon côté. Ça ne paraissait pas du tout du tout féminin comme choix professionnel ; je me perdais en conjectures sur le fait que devenir infirmière était très bien vu pour les filles mais les maths... les maths... Que je vous présente la profession d'infirmière à l'époque : 48 heures par semaine à l'hôpital et un dimanche sur sept de libre, les six autres à l'hôpital. Les jeunes assistants faisaient six heures de T.D. par semaine, très, très peu de tâches administratives, des activités de recherche très exigeantes intellectuellement mais qu'ils organisaient très librement, et énormément de corrections de copies. Je trouvais donc très imprudent de se conformer aux usages établis... Mon choix hérétique effectué, je n'avais plus besoin de faire de

1. Marianne Blanchard, Sophie Orange, Arnaud Pierrel, <https://www.cair?info/revue-actes-de-la-recherche-en-sciences-sociales-2017-5.htm>. Les éditions de la rue d'Ulm ont publié un ouvrage des mêmes auteurs détaillant l'enquête effectuée par eux et vous pouvez le trouver en accès libre et gratuit sur le lien <http://www.cepremap.fr/depot/opus/OPUS42.pdf>.

crise de rébellion adolescente, j'étais déjà complètement en dehors des clous. Heureusement pour moi, ma famille trouvait que c'était une très bonne idée et que j'allais forcément y arriver; ça change beaucoup les choses.

Je me suis donc retrouvée au lycée Pierre de Fermat à Toulouse. La situation des filles était un peu bizarre : on était clairement dans un lycée de garçons, on ne pouvait pas aller à la cantine, on n'avait pas accès à l'étude de midi et on était privées de l'entraide entre élèves. Et puis il y avait le bizutage; rien à voir avec les histoires sinistres qui traînent par ici et là, mais quelle plaie... en plus ils voulaient « taxer les bizuts » et donc me voler mon argent de poche – l'année suivante j'ai compris qu'ils faisaient une caisse de secours pour les dépenses liées aux oraux (plus une bonne bouffe, mais bon...). Ils nous auraient dit qu'ils voulaient faire la quête, on aurait trouvé ça tout à fait naturel, au lieu de quoi on leur en voulait à mort! Tout cela me fait penser au collègue à l'étage au-dessous qui a travaillé sur les chantiers entre l'écrit et l'oral du bac pour payer le trajet jusqu'à la capitale de son pays où se passait l'oral.

Beaucoup de filles venaient de lycées de filles, ce qui leur conférait un avantage : comme le professorat était l'une des seules carrières ouvertes aux femmes diplômées, nous avions de meilleurs professeurs que les garçons; celles qui venaient de petites villes sortaient de lycées de garçons. Nombre de filles pensaient préparer les concours de l'enseignement, mais sans penser qu'elles pouvaient entrer dans une des Écoles normales supérieures, je crois que cela les bloquait un peu (faut y croire si on veut y arriver), elles visaient plutôt un concours de pré-recrutement de professeurs qu'on pouvait passer en maths sup ou maths spé : les IPES. Quelques-unes visaient tout de même les écoles d'ingénieurs. Je suppose que la possibilité de passer le concours de Polytechnique à partir de 1972 a entraîné beaucoup plus de filles à envisager une carrière d'ingénieur. Dans le tas il y en avait qui ne passaient que les écoles toulousaines, leurs familles ne leur auraient pas permis d'entrer dans une école lointaine. Là, j'ai l'impression d'entendre Simone de Beauvoir. Il est vrai que nous étions d'une grande moralité à l'époque, il n'était par exemple pas question de porter des pantalons au lycée. Donc on avait froid tout l'hiver. La première chose que j'ai faite ensuite a été d'acheter un pantalon. Rouge.

Du côté des professeurs, la situation était contrastée, certains étaient tout à fait normaux, d'autres carrément misogynes. Moi j'ai eu de la chance, mon professeur de maths sup était une femme (seule femme sur les 18 professeurs de math-physique); c'est elle qui avait eu mon frère pendant un mois, elle me surveillait comme le lait sur le feu, de peur que je ne quitte la classe, jusqu'à ce que ma mère lui explique que je n'avais pas l'intention de partir. Dans la classe à côté, le professeur de mathématiques était très désagréable avec les filles, ce qui est très déstabilisant quand on se retrouve dans une classe où l'on doit cravacher; les filles (il y en avait quatre ou cinq par classe de quarante cinq élèves) n'avaient guère de moyen de défense contre ce traitement inapproprié qui paraissait apparemment normal aux élèves garçons; je crois que beaucoup de filles en ont souffert. Je suis allée dans la classe qui serait MP étoile aujourd'hui; le professeur était un ami de mon père et il m'aimait bien. Il a fini par expliquer à ma mère : « Anne, elle rédige comme un pied, elle écrit comme un cochon mais elle a des idées ». Par la suite j'ai fait la connaissance de son fils qui m'a appris que j'avais été une de ses élèves préférées; dans ces classes on avait plus de travail qu'il n'est raisonnable, et c'est certainement un très grand avantage que de se sentir soutenu. Il y avait une certaine forme d'estime réciproque et de proximité entre professeurs et élèves. En revanche une chose me frappe : au fil des années beaucoup d'élèves de cette classe se sont dirigés vers une carrière universitaire, et ils auraient dû remarquer que les filles y tenaient le haut du pavé, et faisaient réellement jeu égal avec eux : à titre d'exemple, dans la « meilleure » des quatre maths sup et dans l'une des maths spé MP*, une fille a eu le prix d'excellence; j'ai d'ailleurs entendu une fois un garçon dire, en parlant de Christiane Cocozza qu'il ne connaissait pas : « elle a la réputation d'être très forte ». Ils sont donc plus ou moins au courant que cette merveilleuse protestation de Florence Montreynaud : « les femmes bénéficient d'une présomption d'incompétence » n'a pas de fondement sérieux. Mais je ne crois pas qu'ils aient considéré les femmes comme de véritables collègues.

Les élèves venaient beaucoup plus qu'aujourd'hui de milieux modestes; dans la classe de MP* où nous étions 36, le nombre d'enfants de famille CSP supérieure ne dépassait pas six ou sept : deux des filles sur les trois que nous étions (c'est la troisième qui a eu le prix d'excellence), Rémi qui a dû

payer le champagne le jour du premier essai du Concorde (papa était au volant), Gilbert dont le père était professeur de grec, un fils de gynécologue et petit-fils de général. Il y avait deux boursiers tunisiens, un portugais dont le statut social m'échappe et dont le problème était d'obtenir une attestation que son gouvernement réglerait les frais d'écologie de l'École polytechnique en cas de succès. Pour les tunisiens la question ne se posait pas et ils sont allés à Polytechnique tous les deux. Les autres élèves n'étaient pas bien fortunés, il y avait le fils du gendarme de Pamiers qui voulait devenir chirurgien mais avait choisi la filière la moins chère, l'internat au lycée (puis Sup Aéro), le fils d'une veuve institutrice à Cazères sur Garonne, l'élève qui s'était échappé de Supélec et qui est revenu à la Toussaint pour finir à la rue d'Ulm, le fils du berger du Larzac dont Polytechnique n'a pas voulu, trop maigrichon bien qu'il eût réussi le concours, deux garçons qui me semblaient avoir un sérieux défaut de langue, mais c'était juste l'accent catalan et le proviseur a dû monter au créneau pour sauver la peau de l'un d'eux qui avait eu un 2 éliminatoire en anglais, toujours à Polytechnique expliquant que dans son collège campagnard seul l'espagnol était enseigné... Il y avait aussi l'élève qui n'a pas pu se présenter parce qu'il était trop myope, et quand on voit les photos de promo on se demande ce qu'à Polytechnique ils ont contre les lunettes. À ce propos Michel Cosnard a rendu un rapport sur Polytechnique soulignant que si l'école a fait des efforts pour les personnels handicapés, du côté des élèves il y a beaucoup de progrès à faire, c'est la première fois que je vois quelqu'un d'autre que moi choqué par cette situation, bravo Michel. À l'époque si vous aviez eu un cancer ou une maladie chronique la fonction publique ne voulait pas de vous, c'est ce que j'ai vu sur le questionnaire de santé en passant l'examen médical pour les écoles normales supérieures et ça, ça s'est amélioré depuis.

La classe où j'étais préparait surtout Polytechnique et il y rentrait plusieurs élèves chaque année, un peu moins dans les écoles normales supérieures; bien sûr l'idée courait que partir à Paris pouvait augmenter vos chances, mais cela n'apparaissait pas comme une obligation, trois quarts des polytechniciens et deux tiers des normaliens ne venant pas des lycées parisiens. La nature des programmes a aussi changé : le programme de deuxième année reprenait entièrement celui de première année, en maths sup un polynôme c'était $a + bx + \dots$, en maths spé c'était une suite finie sur un corps et j'aimais

bien cette méthode. Il y a peu, l'évaluation des enseignements demandait aux étudiants de « dénoncer » les redondances dans les programmes; j'ai demandé à mes collègues si ce qu'ils avaient bien compris, ils l'avaient appris en une seule fois : ils ont tous éclaté de rire.

Une chose qui me semble avoir aussi changé, au moins dans certaines classes, ce sont les méthodes de travail. Nous avions très peu de livres de problèmes et d'exercices, il y avait les vieux Rivaud, c'est à peu près tout, et les problèmes et exercices ronéotypes par le professeur; il y avait aussi le cours de Cagnac et Ramis, et les Joyal Provost en physique; une fois à l'Éns, le fils de Provost, Ariel, a fait paraître des livres d'exercices de chimie avec Provost en gros et Ariel en tout petit, et cela nous faisait beaucoup rire. Nous apprenions notre cours... à l'endroit et à l'envers comme chez Rabelais; plus récemment j'ai parfois eu l'impression que bien des élèves des classes préparatoires voyaient passer leur cours à toute allure et n'en retenaient finalement pas grand chose; d'autres se disent « j'apprends les théorèmes et ensuite je fais des exercices, juste des exercices, les démonstrations du cours basta! ». Lorsqu'une de mes amies enseignante a pris une maths spé, les élèves ont dit : on ne veut pas de cours, on veut juste les énoncés des résultats et faire « tous les exercices ». Réponse : « vous aurez un cours et vous aurez intérêt à le travailler, et que ça saute ». Il faut dire qu'elle était déjà un peu remontée, après qu'un collègue eut osé lui dire, à elle, agrégée, normalienne et titulaire d'une thèse : « tu as eu une spé parce que tu as couché avec l'inspecteur général ». D'autant que l'IG c'était Jean Moussa, quelle hypothèse absurde! Mais à la fin de l'année ils ont découvert qu'ils réussissaient mieux aux concours; je ne serais pas aussi jusqu'au-boutiste que mon ex-voisin de bureau préféré, qui m'a raconté qu'en maths sup il ne faisait des exercices qu'en colle, le reste du temps il travaillait son cours; à la fin de l'année de maths sup il est entré à l'ENSET après avoir échoué à l'oral de la rue d'Ulm. S'il n'a pas insisté en maths spé, c'est que « la nourriture était vraiment trop mauvaise » – ça devait être très peu mangeable en effet parce qu'ayant été élevé dans une ferme, il ne pouvait pas être très difficile! Il était passé par l'école normale primaire, son frère aîné trop grande gueule n'avait pas été autorisé à continuer, du coup lui s'était tenu à carreau et il avait été envoyé en classes prépa. Je pense que dans un autre contexte de promotion sociale, lui se serait probablement débrouillé, mais

mon berger du Larzac sans son instituteur pour l'expédier au lycée, et le fils du gendarme et tous les autres, que deviendraient-ils aujourd'hui ?

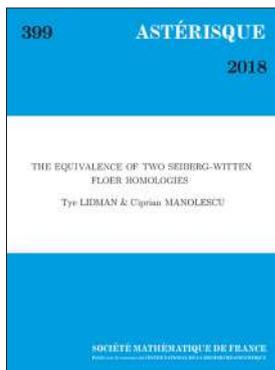
Bien sûr, la composition de la population gé-

nérale a changé, il y a plus de cadres et moins d'ouvriers (trente pour cent tout de même) mais il est clair que comme le disait Bernard Gostiaux « les classes dominantes s'approprient les filières d'étude prometteuses ».

Anne BERTRAND

Anne Bertrand est professeur émérite à l'université de Poitiers; elle travaille en Théorie ergodique et théorie des nombres.

Astérisque - dernières parutions



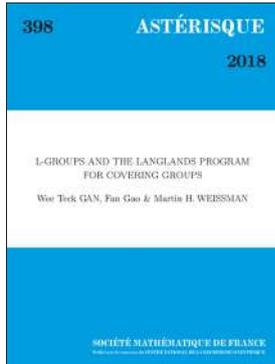
Vol. 399

The Equivalence of Two Seiberg-Witten Floer Homologies

T. LIDMAN, C. MANOLESCU

ISBN 978-2-85629-883-1
2018 - 220 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 45 € - Members: 32 €

We show that monopole Floer homology (as defined by Kronheimer and Mrowka) is isomorphic to the S^1 -equivariant homology of the Seiberg-Witten Floer spectrum constructed by the second author.



Vol. 398

L-Groups and the Langlands Program for Covering Groups

W. T. GAN, F. GAO, M. H. WEISSMAN

ISBN 978-2-85629-881-7
2018 - 286 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 50 € - Members: 35 €

This volume proposes an extension of the Langlands program to covers of quasi-split groups, where covers are those that arise from central extensions of reductive groups by \mathbb{Z} . By constructing an L-group for any such cover, one may conjecture a parameterization of genuine irreducible representations by Langlands parameters. Two constructions of the L-group are given, and related to each other in a final note. The proposed local Langlands conjecture for covers (LLCC) is proven for covers of split tori, spherical representations in the p-adic case, and discrete series for double-covers of real semisimple groups. The introduction of the L-group allows one to define partial L-functions and functoriality, including base change, for representations of covering groups.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





... .. le champ libre gaussien

• R. RHODES

1. Définition du champ libre gaussien

Une marche aléatoire sur \mathbb{R}^d consiste à se déplacer dans cet espace en faisant un saut à chaque unité de temps, ces sauts étant statistiquement identiques et indépendants les uns des autres et de moyenne statistique nulle (de façon à ne pas induire de comportement balistique). La raison pour laquelle le mouvement brownien occupe de nos jours une place prépondérante dans le monde des probabilités est qu'il décrit la limite d'échelle¹ de toutes ces marches aléatoires, sous la condition que la loi des sauts possède des moments d'ordre 2. Ce résultat fut prouvé par Donsker (1951) ce qui vaut parfois au mouvement brownien le qualificatif de trajectoire aléatoire canonique ou naturelle sur \mathbb{R}^d . Cette notion de trajectoire aléatoire se traduit dans la représentation en intégrale de chemin à la Feynman du mouvement brownien $(B_t; t \geq 0)$ telle que présentée dans les manuels de physique

$$\mathbb{E}[F(B_s; s \geq 0)] = \frac{1}{Z} \int_{\Sigma} F(\sigma) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\infty |\dot{\sigma}_r|^2 dr} D\sigma \quad (1)$$

où Z est une constante de normalisation (de sorte que la masse totale soit égale à 1), la variable d'intégration σ vit dans un certain espace fonctionnel $\Sigma = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \sigma_0 = 0\}$ et $D\sigma$ est une « mesure de Lebesgue » formelle (une telle mesure n'existe pas rigoureusement!) sur l'espace des trajectoires Σ . Cette intégrale définit une mesure gaussienne, via son évaluation sur les fonctionnelles F^2 .

On peut alors se demander quelle serait la généralisation en dimension supérieure et en quels sens cette généralisation serait la limite d'échelle non

triviale d'une famille considérable de modèles de mécanique statistique. Au vu de (1), la suggestion la plus naturelle serait de se pencher sur l'intégrale fonctionnelle

$$\nu(F) = \int_{\Sigma} F(\phi) \exp\left(-\frac{1}{4\pi} \int_D |\partial\phi(x)|^2 dx\right) D\phi \quad (2)$$

où D est un domaine de \mathbb{R}^d , l'espace fonctionnel Σ (de type Sobolev) sera constitué d'applications $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec des conditions au bord que nous supposons nulles sur ∂D^3 . Essayons de voir comment quelques heuristiques menées sur cette intégrale peuvent nous amener à une compréhension d'un objet appelé champ libre gaussien (GFF⁴). La définition formelle de la mesure $D\phi$ dans (2) correspond à la forme volume de la métrique L^2 sur les fonctions, ce qui peut s'énoncer plus simplement de la façon suivante : si l'on choisit une base orthonormée $(e_n)_n$ de $L^2(D)$ et que l'on décompose la variable d'intégration ϕ sur cette base

$$\phi = \sum_n \phi_n e_n \quad (3)$$

alors la mesure $D\phi$ s'interprète comme le produit des mesures de Lebesgue (à un facteur $\frac{1}{2\pi}$ près) sur chaque composante ϕ_n , i.e.

$$D\phi = \prod_n \frac{d\phi_n}{2\pi}.$$

Si l'on sait donner sens à la mesure ν définie par (2), la loi du GFF est la mesure de probabilité obtenue en renormalisant cette mesure par sa masse totale. Autrement dit, le GFF est une « fonction aléatoire gaussienne » sur D , nulle sur ∂D .

Il est possible à partir de (2) de mener un calcul formel pour aboutir à une définition rigoureuse du

1. C'est-à-dire « dé-zoomer » le temps et l'espace de façon à observer un phénomène macroscopique non trivial.
 2. On choisira dans ce texte de voir les mesures comme des formes linéaires positives sur des espaces fonctionnels.
 3. Cette situation correspond au GFF avec condition au bord de Dirichlet. D'autres conditions au bord peuvent être considérées mais nous nous restreindrons à cette situation pour notre présentation du GFF.
 4. En abrégé, pour l'anglais Gaussian Free Field.

GFF. Choisissons une base orthonormée $(e_n)_n$ de $L^2(D)$ formée de fonctions propres du Laplacien Δ sur D avec conditions au bord de Dirichlet et valeurs propres associées strictement positives $(\lambda_n)_n$, i.e. pour tout n

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \text{et} \quad e_n = 0 \text{ sur } \partial D.$$

Si l'on injecte dans (2) la décomposition (3) suivant cette base, on obtient

$$\nu(F) = \int_{\mathbb{R}^N} F\left(\sum_n \phi_n e_n\right) \exp\left(-\frac{1}{4\pi} \sum_n \lambda_n |\phi_n|^2\right) \prod_n \frac{d\phi_n}{2\pi}. \quad (4)$$

La masse de cette mesure s'obtient pour $F = 1$ et vaut formellement $(\det(-\Delta))^{-1/2}$ avec $\det(-\Delta) = \prod_n \lambda_n$. Ce produit diverge grossièrement par la loi de Weyl mais D. Ray & I. Singer ont pu donner sens à ce déterminant par des méthodes de ζ -régularisation⁵. En divisant alors la mesure ν par cette masse, on obtient une description de la loi du GFF en tant que série aléatoire

$$\sqrt{2\pi} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} e_n \quad (5)$$

où les $(\alpha_n)_n$ sont des variables aléatoires gaussiennes réelles, indépendantes centrées et réduites. La fonction de covariance coïncide alors avec la fonction de Green G du Laplacien avec conditions au bord de Dirichlet

$$\mathbb{E}[\phi(x)\phi(y)] = 2\pi \sum_n \frac{e_n(x)e_n(y)}{\lambda_n} = 2\pi G(x, y).$$

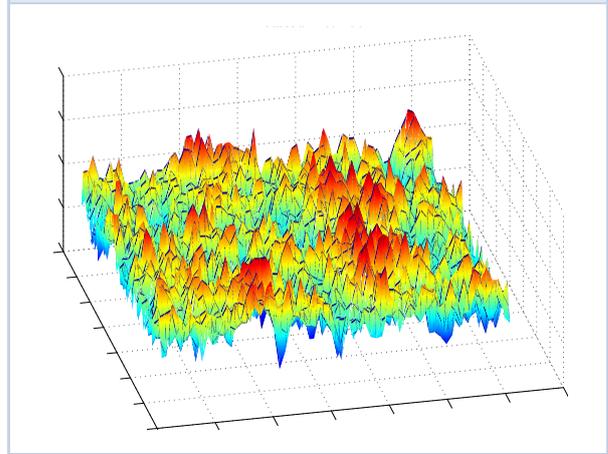
En particulier, hormis le cas $d = 1$ où le GFF correspond au mouvement brownien⁶, la série (5) ne converge pas presque sûrement dans $L^2(D)$ mais plutôt dans un espace de distribution. Pour $d \geq 2$, le GFF est donc trop irrégulier pour exister véritablement en tant que fonction (aléatoire).

5. Méthode consistant à donner un sens à ce déterminant par des arguments de prolongement analytique du même type que pour la fonction ζ en théorie des nombres.

6. Ou pont brownien selon la nature de D et des conditions au bord.

7. Schramm-Loewner Evolution.

FIGURE 1 – Simulation du GFF en dimension 2



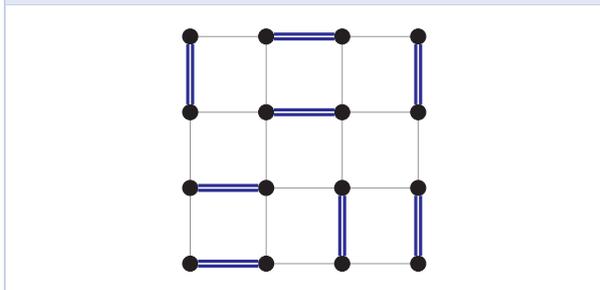
La dimension 2 joue un rôle particulier pour le GFF dû à l'invariance conforme du produit scalaire de Dirichlet $\int_D |\partial\phi(x)|^2 dx$ apparaissant dans (2), qui se transmet au GFF lui-même : si ψ est un biholomorphisme d'un domaine D sur un autre domaine D' alors on a l'égalité en loi $\phi_D = \phi_{D'} \circ \psi$ où $\phi_D, \phi_{D'}$ sont des GFF respectivement sur D et D' . Cette propriété fait que le GFF occupe une place importante en théorie conforme des champs. Il peut servir dans la description des fluctuations de modèles de physique statistique $2d$ à leur point critique, ceux-ci étant conjecturalement invariants conformes, ou se relie naturellement à d'autres objets invariants conformes : par exemple, l'existence de couplages entre le GFF et le SLE⁷ [12, 4], une courbe fractale aléatoire décrivant notamment les interfaces dans certains modèles de physique statistique.

2. Fluctuations dans les modèles de physique statistique

Le GFF est le candidat naturel pour formuler des théorèmes de type central limite adaptés à des surfaces aléatoires.

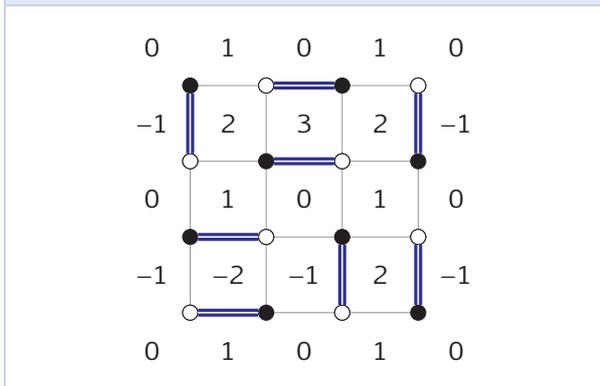
Considérons par exemple le modèle de dimères sur \mathbb{Z}^2 . Soit $\mathbb{Z}_{m,n}$ une sous-boîte de \mathbb{Z}^2 de taille $m \times n$. Une configuration de dimères sur $\mathbb{Z}_{m,n}$ est un recouvrement des sites de cette boîte par des dominos, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes tel que chaque site de la boîte est l'extrémité d'une seule arête, voir figure 2.

FIGURE 2 – Un pavage de $\mathbb{Z}_{4,4}$ par des dominos



W. Thurston associa une fonction de hauteur h à de telles configurations de dominos en attribuant une valeur à chaque face de la grille de la façon suivante (s'aider de la figure 3) : tout d'abord on colorie alternativement chaque site de la grille en blanc et noir. Puis on fixe arbitrairement une face à 0 (coin bas gauche sur la figure 3). Lorsque la valeur d'une face est connue, on assigne alors une valeur aux faces voisines en augmentant de 1 si le chemin (orienté) qui nous mène à cette face voit un site noir à sa droite ou en diminuant de 1 si le site à sa droite est blanc. Il est interdit de franchir un domino⁸.

FIGURE 3 – Fonction de hauteur



Le nombre de recouvrements en dominos de $\mathbb{Z}_{m,n}$ a été calculé indépendamment par Kasteleyn et Temperley & Fisher : c'est

$$\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left| 2 \cos \frac{\pi j}{m+1} + 2i \cos \frac{\pi k}{n+1} \right|^{1/2}.$$

On peut ainsi choisir aléatoirement un tel recouvrement de manière uniforme parmi tous les recouvrements possibles. Les fonctions de hauteur associées forment alors une famille de fonctions aléatoires dont on aimerait déterminer la limite d'échelle. Pour ce faire, considérons par exemple le carré $C := [0, 1]^2$ de \mathbb{R}^2 et son approximation \mathbb{Z}_ϵ

par le réseau à l'échelle ϵ , c'est-à-dire $\mathbb{Z}_\epsilon := C \cap \epsilon \mathbb{Z}^2$. R. Kenyon montra que si l'on tire uniformément au hasard une configuration de dimères sur \mathbb{Z}_ϵ alors l'espérance $\mathbb{E}[h_\epsilon]$ de la famille de fonctions de hauteur converge quand $\epsilon \rightarrow 0$ vers une fonction harmonique sur le carré C avec certaines conditions au bord. Il montra également [9] que les fluctuations $h_\epsilon - \mathbb{E}[h_\epsilon]$ convergent en loi⁹ vers un GFF sur C . Ce théorème est en fait valide pour tous les domaines assez réguliers du plan.

Le GFF joue aussi un rôle prépondérant dans l'étude des gaz de Coulomb $2d$. C'est une configuration aléatoire de N points du plan \mathbb{R}^2 . Les particules interagissent entre elles via le potentiel de Coulomb (interaction logarithmique) et sont individuellement confinées par un potentiel V . Ce gaz est donc une variable aléatoire $X := (X_1, \dots, X_N) \in (\mathbb{R}^2)^N$ ayant pour loi de probabilité

$$d\mathbb{P}_{N,\beta}(X) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} \exp(-\beta H_N(x_1, \dots, x_N)) \prod_{i=1}^N dx_i$$

où $Z_{N,\beta}$ est une constante de normalisation, $\beta > 0$ est l'inverse de la température du système. L'énergie d'une configuration est donnée par

$$H_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} -\ln|x_i - x_j| + \sum_{i=1}^N NV(x_i).$$

L'étude asymptotique $N \rightarrow \infty$ de la mesure empirique

$$\nu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i}$$

permet de déterminer la répartition spatiale des particules. Sous certaines conditions, il est prouvé que cette mesure converge vers une mesure limite ν_∞ à support compact Σ et admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue dont on a même une expression explicite

$$\nu_\infty(dx) = \frac{1}{4\pi} \Delta V(x) \mathbf{1}_\Sigma(x) dx,$$

ce qui nous donne une idée de la forme asymptotique formée par les particules. L'ordre suivant de précision est de déterminer quelles sont les fluctuations autour de cette forme limite. Ce sujet est l'objet de travaux très récents [1, 10] où il est établi que, si Δ représente le Laplacien, $N\Delta^{-1}(\nu_N - N\nu_\infty)$ converge vers un GFF avec certaines conditions aux bords (différentes du cas Dirichlet détaillé précédemment).

8. L'existence d'une telle fonction n'est pas complètement évidente mais se démontre.

9. Sans normalisation! C'est le côté surprenant du théorème si l'on se rappelle que la fonction de hauteur est à valeurs entières.

3. GFF et théories de champs

Mais le rôle du GFF va au-delà de la simple étude des fluctuations dans les modèles de physique statistique. Ces modèles sont dans la plupart des cas directement reliés ou décrits dans une certaine limite d'échelle par des théories quantiques de champs euclidiennes, où le GFF joue souvent un rôle prépondérant. En quelques mots, disons que l'interprétation à la Feynman de la mécanique quantique a permis de ramener le problème de la construction de théories quantiques de champs à la construction d'intégrales fonctionnelles du type (2) comprenant un terme $V(\phi)$ supplémentaire :

$$\int_D (|\partial\phi(x)|^2 + V(\phi(x))) dx,$$

l'expression exacte de $V(\phi)$ dépendant du modèle physique considéré (on pourra par exemple consulter [11] à ce sujet).

Pour dire les choses simplement, la plupart des théories de champs connues sont construites à partir du GFF de la même manière que l'on construit des variables aléatoires à densité sur \mathbb{R} à partir de la mesure de Lebesgue. La différence notable est que la mesure obtenue peut ne pas être absolument continue par rapport à la loi du GFF ! Ce phénomène est dû à la théorie de la renormalisation.

Reprenons l'exemple du gaz de Coulomb où l'on suppose dorénavant que le gaz est formé d'un nombre égal de particules chargées positivement et négativement, interagissant avec une interaction coulombienne de façon répulsive si les particules ont même charge et attractive sinon. Une transformation du système permet de relier ce modèle de gaz à une théorie des champs de sine-Gordon. C'est une intégrale fonctionnelle au même titre que (2) mais avec un terme d'interaction supplémentaire dans le potentiel

$$\int_{\Sigma} \exp\left(-\frac{1}{4\pi} \int_D (|\partial\phi(x)|^2 + \mu \cos(b\phi(x))) dx\right) D\phi. \quad (6)$$

Pour construire ce type d'intégrales fonctionnelles, le point de départ est la mesure gaussienne du GFF (2) à laquelle on a envie d'adjoindre une densité de Radon-Nikodym faisant intervenir le terme d'interaction $\int_D \cos(b\phi(x)) dx$. Le premier problème est la construction de ce terme : comment définir le cosinus d'une distribution ? La méthode usuelle consiste à régulariser le GFF ϕ , par exemple à l'aide de convolutions dont l'échelle de régularisation,

appelons-la ϵ , tendra vers 0. En effet, une fois régularisé le GFF devient une fonction continue dont il est possible de prendre le cosinus. La grande complexité de l'intégrale (6) est que de nombreux termes divergents apparaissent quand $\epsilon \rightarrow 0$. La théorie de la renormalisation vise à contrôler ces termes. En particulier, ce modèle possède une infinité de points critiques (selon les valeurs de b) de sorte que les mesures obtenues dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et après renormalisation des termes divergents dans chaque phase séparant les différents points critiques ne sont pas absolument continues par rapport à la mesure du GFF, sauf dans la phase la plus triviale (on pourra consulter [2] par exemple).

Un autre exemple fameux est l'interaction dite ϕ^4

$$\int_{\Sigma} \exp\left(-\frac{1}{4\pi} \int_D (|\partial\phi(x)|^2 + \mu\phi^2(x) + \lambda\phi^4(x)) dx\right) D\phi,$$

où D est un ouvert de \mathbb{R}^d . Pour $d = 4$, cette théorie de champs est utilisée dans le modèle standard pour représenter le champ de Higgs. Pour définir cette intégrale il faut là encore utiliser la théorie de la renormalisation. Mais la difficulté augmente fortement avec la dimension, ceci étant dû au fait que la singularité dans la fonction de covariance du GFF (donc la fonction de Green) augmente avec la dimension. Pour $d = 2$ le problème est abordable [13] et le champ limite est non trivial et absolument continu par rapport au GFF. Pour $d = 3$ ou $d = 4$, renormaliser cette intégrale fut l'une des grandes aventures de la théorie constructive des champs. Pour $d = 3$ la limite est non triviale et non absolument continue [6]. Quant à $d = 4$, le statut de la limite n'est pas encore totalement éclairci mais la limite est conjecturée triviale, c'est-à-dire correspond à la loi du GFF [5].

4. Modèles de gravité quantique 2-dimensionnels

Le groupe de symétries d'une théorie de champs joue un rôle important dans son étude. En dimension 2, le groupe de transformations conformes locales a une structure particulièrement riche, et les théories de champs possédant ce groupe de symétries (connues sous le nom de théories conformes de champs) ont donc des structures algébriques rigides qui en font généralement des systèmes intégrables, c'est-à-dire possédant une solution exacte. Il existe un potentiel particulier pour lequel l'inva-

riance conforme de l'intégrale fonctionnelle associée est manifeste, c'est l'interaction exponentielle. Ce type de potentiel émergea dans le cadre d'une des grandes questions de la physique théorique, qui consiste à quantifier la gravité en quatre dimensions (1 pour le temps et 3 pour l'espace). Ce problème peut se ramener à construire des géométries aléatoires sur une variété fixée M . Si l'on s'autorise à transformer la variable temporelle en variable d'espace¹⁰, cette géométrie est décrite par une métrique riemannienne. Il n'est donc pas surprenant que le problème consiste à construire une intégrale

$$\int_{\Sigma} e^{-S(g)} Dg \quad (7)$$

où Σ est l'espace formé des métriques riemanniennes g sur M , Dg une sorte de mesure de Lebesgue¹¹ sur Σ et S est l'action de Einstein-Hilbert, i.e. une fonctionnelle définie sur les métriques $g \in \Sigma$ faisant intervenir des quantités géométriques liées à g telles que son volume ou sa courbure moyenne. Ce problème est non résolu en dimension 4 mais présente des simplifications en dimension 2 (en raison notamment de la trivialité de la fonctionnelle de Einstein-Hilbert en $2d$) qui le rendent abordable, et lui ont donc valu de recevoir un grand intérêt dans ce dernier cas. Évidemment, la définition de la mesure Dg , tout comme $D\phi$ intervenant dans la définition du GFF, soulève des difficultés en tant que mesure sur un espace de dimension infinie mais ce n'est plus le principal problème. Son interprétation formelle suggère que c'est un objet intrinsèquement non linéaire donc bien plus complexe que la mesure $D\phi$. Pour construire cette mesure, l'une des approches suggérées par les physiciens fut de discrétiser le problème en triangulant la surface M .

FIGURE 4 – Triangulation à topologie sphérique



C'est un procédé standard en géométrie qui consiste à coller des triangles équilatéraux le long de leurs arêtes pour produire une surface ayant la même topologie que M (voir figure 4) et munie d'un atlas holomorphe. On peut alors plonger cette surface de façon conforme sur M . L'avantage de cette procédure est que l'ensemble des triangulations à N faces (à homéomorphisme préservant les angles près) est un ensemble fini. On peut donc tirer une telle triangulation au hasard en munissant cet ensemble de la mesure de probabilité uniforme, ce qui nous donne une géométrie aléatoire sur M qui est censée représenter une approximation de Dg . La question est alors de déterminer la limite d'échelle de cette loi quand N devient arbitrairement grand de façon à obtenir une définition rigoureuse de Dg . Les physiciens ont conjecturé que cette limite d'échelle est décrite par la théorie conforme des champs de Liouville. C'est une intégrale fonctionnelle de la forme

$$\int_{\Theta} e^{-S_L(\phi)} D\phi \quad (8)$$

avec

$$S_L(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_M (|d\phi|_{\hat{g}}^2 + QR_{\hat{g}}\phi + \mu e^{\gamma\phi}) dv_{\hat{g}}, \quad (9)$$

où \hat{g} est une métrique riemannienne fixée sur M , $R_{\hat{g}}$ sa courbure de Ricci et $v_{\hat{g}}$ sa forme volume. Θ est un espace fonctionnel constitué d'applications $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ et est équipé de la métrique L^2 , induisant formellement une forme volume $D\phi$ qui s'interprète de la même façon que celle apparaissant pour le GFF. Cette intégrale fonctionnelle possède 3 paramètres $\gamma \in [0, 2]$, Q et $\mu > 0$ mais seul γ est pertinent car Q s'exprime en fonction de γ et la théorie possède un scaling par rapport à μ . La partie quadratique apparaissant dans (8) correspond au GFF sur la variété M dans la métrique \hat{g} , ce qui fait encore une fois du GFF la pierre angulaire de la construction de cette intégrale : cette théorie a une longue histoire en physique théorique mais fut construite mathématiquement très récemment [3]. À noter que la fonctionnelle de Liouville (9) joue un rôle important en géométrie car ses minimiseurs fournissent des métriques conformes à \hat{g} à courbure constante, qui sont donc les configurations les plus probables pour la mesure définie par (8).

Pour la situation présentée ci-dessus (7), que l'on nomme *gravité pure*, $\gamma = \sqrt{8/3}$ mais d'autres

10. Cette transformation est connue sous le nom de rotation de Wick et peut se justifier dans certains cas.

11. En fait, la forme volume de la métrique L^2 sur Σ .

valeurs de γ peuvent être obtenues si l'on change un peu notre modèle et que l'on fait interagir la gravité avec des champs de matière à symétries conformes. Par exemple, en couplant la gravité à un autre GFF indépendant, on obtient la valeur $\gamma = 2$, ce qui correspond à une théorie des cordes bosoniques non critiques [7]. La convergence des triangulations aléatoires vers la théorie de Liouville dans

le cadre de la gravité pure reste un problème ouvert malgré des avancées significatives [8]. À noter également que la théorie de Liouville a récemment connu un vif regain d'intérêt en physique théorique car elle a été notamment reliée aux théories de jauge $4d$, lien connu sous le nom de conjecture AGT.

Références

- [1] R. BAUERSCHMIDT et al. *The two-dimensional Coulomb plasma: quasi-free approximation and central limit theorem*. 2016. eprint : [arXiv:1609.08582](https://arxiv.org/abs/1609.08582).
- [2] G. BENFATTO, G. GALLAVOTTI et F. NICOLÒ. « On the massive sine-Gordon equation in the first few regions of collapse ». *Comm. Math. Phys.* **83**, n° 3 (1982), p. 387–410. ISSN : 0010-3616. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103920869>.
- [3] F. DAVID et al. « Liouville quantum gravity on the Riemann sphere ». *Comm. Math. Phys.* **342**, n° 3 (2016), p. 869–907. ISSN : 0010-3616. DOI : 10.1007/s00220-016-2572-4. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-016-2572-4>.
- [4] J. DUBÉDAT. « SLE and the free field: partition functions and couplings ». *J. Amer. Math. Soc.* **22**, n° 4 (2009), p. 995–1054. ISSN : 0894-0347. DOI : 10.1090/S0894-0347-09-00636-5. URL : <http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-09-00636-5>.
- [5] K. GAWEDZKI et A. KUPIAINEN. « Massless lattice ϕ_4^4 theory: rigorous control of a renormalizable asymptotically free model ». *Comm. Math. Phys.* **99**, n° 2 (1985), p. 197–252. ISSN : 0010-3616. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103942678>.
- [6] J. GLIMM et A. JAFFE. *Quantum physics. Second. A functional integral point of view*. Springer-Verlag, New York, 1987, p. xxii+535. ISBN : 0-387-96476-2. DOI : 10.1007/978-1-4612-4728-9. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4728-9>.
- [7] C. GUILLARMOU, R. RHODES et V. VARGAS. *Polyakov's formulation of 2d bosonic string theory*. 2016. eprint : [arXiv : 1607.08467](https://arxiv.org/abs/1607.08467).
- [8] E. GWYNNNE, J. MILLER et S. SHEFFIELD. *The Tutte embedding of the mated-CRT map converges to Liouville quantum gravity*. 2017. eprint : [arXiv : 1705.11161](https://arxiv.org/abs/1705.11161).
- [9] R. KENYON. « Dominos and the Gaussian free field ». *Ann. Probab.* **29**, n° 3 (2001), p. 1128–1137. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/aop/1015345599. URL : <http://dx.doi.org/10.1214/aop/1015345599>.
- [10] T. LEBLÉ et S. SERFATY. *Fluctuations of Two-Dimensional Coulomb Gases*. 2016. eprint : [arXiv : 1609.08088](https://arxiv.org/abs/1609.08088).
- [11] M. LEWIN, P. T. NAM et N. ROUGERIE. *Derivation of nonlinear Gibbs measures from many-body quantum mechanics*. 2014. eprint : [arXiv : 1410.0335](https://arxiv.org/abs/1410.0335).
- [12] O. SCHRAMM et S. SHEFFIELD. « Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field ». *Acta Math.* **202**, n° 1 (2009), p. 21–137. ISSN : 0001-5962. DOI : 10.1007/s11511-009-0034-y. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s11511-009-0034-y>.
- [13] B. SIMON. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974, p. xx+392.



Rémi RHODES

LAMA, université Paris-Est Marne La Vallée, 77454 Marne La Vallée Cedex 2, France
remi.rhodes@u-pem.fr
<http://perso-math.univ-mlv.fr/users/rhodes.remi/>

Rémi Rhodes est professeur à l'université Paris-Est Marne La Vallée. Ses travaux portent sur les probabilités, le chaos multiplicatif, la théorie quantique des champs et les interactions entre ces trois domaines.



Quelle(s) application(s) pour le plan Torossian-Villani ?

La Mission Mathématiques menée par Cédric Villani et Charles Torossian a permis de faire un bilan sans concession de la formation des élèves français en mathématiques. Le rapport Torossian-Villani, publié en février 2018, décrit un projet ambitieux de réformes, qui pourrait enrayer la baisse très inquiétante du niveau national en mathématiques. Les 21 mesures proposées (accompagnées d'une cinquantaine de recommandations) nécessiteront, si elles sont effectivement mises en place, des changements considérables à différents niveaux : elles influenceront les méthodes, les approches, les manuels d'enseignement, mais aussi la formation initiale et continue des enseignants. L'implication et la collaboration de tous les collègues (aux niveaux primaire, secondaire, supérieur et universitaire) est absolument nécessaire pour la réussite d'un tel chantier, fondamental pour l'avenir de nos formations et le devenir de toutes et tous les étudiants ; les mathématiques sont en effet indispensables, encore plus dans un monde submergé par les questions autour du numérique.

La SMF a interrogé Cédric Villani pour qu'il donne un éclairage sur ce travail (en lien avec le rapport sur l'intelligence artificielle notamment), et un retour d'expérience après cette large consultation de tous les acteurs de la communauté. Beaucoup de sociétés savantes, d'associations s'interrogent sur les moyens (humains, financiers) qui seront apportés pour que ces mesures puissent être appliquées. Le suivi de ces mesures pose également question : trop de réformes ont été mises en place sans que leurs effets soient évalués ou mesurés. Nous savons également qu'une majorité d'entre nous est déjà submergée de projets, et que l'implication des universitaires dans les questions d'enseignement pré-baccalauréat n'est pas vraiment reconnue. Il nous semblait donc important que Cédric Villani s'adresse à la communauté universitaire, qui devra jouer un rôle dans ce nouveau plan de formation.

La réponse de C. Villani

« Chers collègues,

D'octobre 2017 à février 2018 j'ai travaillé avec Charles Torossian sur l'enseignement mathématique en France. La mission nous avait été confiée par le ministre de l'Éducation nationale, Jean-Michel Blanquer, alarmé, entre autres, par les piètres résultats des élèves français aux évaluations internationales. Au moment où le ministre m'a approché, j'étais déjà aux prises avec un autre rapport parlementaire, d'une grande complexité... Si j'ai accepté de charger encore davantage la barque avec cette nouvelle mission, c'est, entre autres, parce que nos échanges m'avaient convaincu de sa détermination à agir et de son excellente perception des enjeux de l'enseignement mathématique au XXI^e siècle : tout cela me donnait espoir d'une action qui pourrait être suivie de vrais effets, contrairement à ce que j'avais déjà connu avec plusieurs autres gouvernements.

Pour assurer la qualité du rapport, Charles et moi avons réuni une équipe aux compétences variées, réalisé des auditions en quantité, ainsi que plusieurs visites de terrain. Nos conclusions insistaient tout particulièrement sur la formation initiale et continue des enseignants, sur les délicats équilibres que doit respecter un cours de mathématique, et sur les compléments périscolaires qui peuvent l'enrichir de façon déterminante ; au passage, nous insistions sur la nécessité de mettre en place (enfin!) un vrai enseignement d'informatique. Nos conclusions étaient résumées dans un ensemble ambitieux de 21 propositions¹.

Malgré toutes les chausse-trappes du sujet, le rapport a été placé sous le signe du consensus, bien plus que je ne l'espérais. Il y avait d'abord le consensus des personnes auditionnées, dont les analyses et recommandations se recoupaient très largement. Au sein de la communauté mathématique, les cri-

1. http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

tiques ont été rares, et quand elles étaient de bonne foi elles reposaient principalement sur des malentendus, que je me suis efforcé de dissiper². Mais il y avait aussi le consensus au sein de la classe politique, depuis mes collègues députés qui ont participé à des ateliers sur le sujet, jusqu'au ministre qui a annoncé publiquement, lors d'un échange très applaudi à l'Assemblée nationale, qu'il reprenait à son compte la totalité des 21 propositions.

Ajoutons à cela un excellent consensus international qui se dessine, au vu des réactions de nombreux collègues étrangers qui m'ont contacté, très motivés, pour utiliser ce rapport en vue de lancer un débat ou des actions dans leurs pays respectifs – Italie, Argentine, Cameroun, Russie... Des traductions en anglais et en espagnol ont été organisées; et de Douala à Saint-Petersbourg, j'ai entendu le même refrain de la part de certains des meilleurs mathématiciens de leurs pays respectifs : "Tu sais, les problèmes que vous décrivez dans le rapport, nous avons les mêmes ici! Il faut absolument que nous collaborions pour les résoudre ensemble!"

Bon ou mauvais, un rapport ne vaut rien s'il n'est suivi d'effet; mais il n'est pas absurde de prendre d'abord le temps du consensus avant de se lancer, surtout quand la mise en œuvre s'annonce pleine de pièges. Cela est encore plus vrai dans le contexte actuel de l'éducation nationale, au vu des chamboulements majeurs qui ont été annoncés par le ministre. Quoiqu'il en soit, on peut maintenant considérer le consensus comme acquis, et le temps de l'action est venu. C'est précisément cette phase qui est en train de commencer avec la nomination de Charles Torossian au poste de coordinateur de la stratégie mathématique nationale³.

Mais, si les conditions initiales se présentent bien, le succès devra se gagner de haute lutte, et concerne toute notre communauté – aussi bien en mathématique qu'en informatique. J'aimerais insister sur plusieurs aspects des évolutions qui s'annoncent.

Premièrement, les changements annoncés sont massifs. L'introduction d'un cours d'informatique, qui a vocation à commencer en mode débranché dès le Cours préparatoire, est une évolution majeure attendue depuis longtemps. La mise en place du cours de culture scientifique et numérique est un défi non moins considérable, et unique en son genre : tout ou presque y est à inventer. L'abandon du système des filières demandera à notre système

une adaptation inédite depuis plusieurs décennies, et la constitution de toute une déclinaison de programmes mathématiques. La combinaison de ces trois facteurs fera sans doute de notre discipline celle qui aura le plus besoin de révision, que ce soit au niveau des programmes, des systèmes de formation, ou des interfaces avec les autres disciplines.

Au passage, si l'on souhaite apprécier l'évolution des volumes horaires de mathématique (et de science), on ne peut négliger ces évolutions! Des élèves qui actuellement sont logés à la même enseigne en filière S, demain suivront des cours variés : culture mathématique, mathématique spécialisée, mathématique experte, mathématique de soutien, informatique... Avec ces cours mieux ciblés, on peut espérer une efficacité très accrue, et la possibilité de dépasser enfin l'hypocrisie de la situation actuelle où certains élèves s'ennuient et d'autres souffrent le martyre, où certains suivent un cours de mathématique par passion et d'autres font semblant de s'y intéresser pour améliorer leurs chances d'être recrutés dans une formation pourtant non scientifique. La nouvelle organisation qui s'annonce a bien été pensée pour répondre aux défis actuels, et en particulier la très délicate équation que pose l'enseignement mathématique, destiné à transmettre aussi bien les connaissances techniques et spécialisées qui seront utiles aux scientifiques, que le fonds culturel et inspirant qui devra nourrir les réflexions des citoyens.

On me dira que ces transformations nécessitent de l'argent et on aura bien raison; pour autant, il ne faudra pas s'attendre à ce que cet argent soit mis sur la table en préliminaire facile. J'ai observé avec stupeur, tout au long de cette année politique, l'intensité de la compétition budgétaire entre tous les acteurs de la vie publique - pas un ministère, pas une collectivité locale, pas un secteur qui ne soit en tension financière. Dans ce contexte, il faudra se battre pour le financement. Mais c'est une bataille que nous remporterons avec un ministre convaincu, des relais actifs, un programme de travail déterminé, et, last but not least, une communauté impliquée.

Et ce sera mon dernier commentaire : le rôle de la communauté tout entière dans la remise à flot de notre enseignement mathématique. Pour ma part, j'ai accepté de reprendre du service auprès du Ministère, cette fois pour aider le Conseil supérieur des programmes à apprécier l'équilibre

2. <https://www.youtube.com/watch?v=2xMJbmfLH5A>

3. http://smf.emath.fr/sites/smf.emath.fr/files/mission_2.pdf

des disciplines scientifiques au lycée – mission périlleuse, dans laquelle vos conseils seront d’ailleurs précieux. Mais l’enseignement mathématique est un sujet qui concerne tout le monde universitaire ! Certains de nos collègues y ont investi des efforts considérables : ils restent minoritaires, et l’élargissement du cercle est indispensable. L’implication du monde universitaire dans la formation des enseignants reste très en-deçà des besoins ; les ESPE sont mal connectées avec le reste du monde universitaire ; les IREM affichent des disparités confondantes qui suscitent la méfiance ; le monde périscolaire, malgré sa qualité, souffre d’une pénurie de moyens et de ressources humaines. Tout cela demandera à être amélioré, voire transformé de l’intérieur. Et si nos universités et agences de recherche ne se mettent pas à valoriser réellement l’implication des collègues dans le secteur de l’éducation, cette implication restera, pour les institutions, un simple moyen de s’offrir une bonne conscience à peu de frais, et pour ces collègues engagés, une source de frustration. Il est grand temps de l’affirmer haut et fort : nous avons besoin que nos universitaires s’impliquent dans l’éducation nationale, et que cela soit reconnu !

Rectorats, universités, chefs d’établissement, enseignants-chercheurs, formateurs... Un programme ambitieux demandera des efforts à tout le monde ; des efforts importants, voire colossaux à l’échelle du système. Est-ce que l’enjeu en vaut vraiment la peine, dans un contexte difficile ? Je n’ai aucun doute à ce sujet. D’abord parce que notre éducation est dans un état de désarroi immense, comme l’ont bien montré certaines auditions presque désespérantes. Mais aussi parce que l’éducation est un sujet de très long terme (où l’échelle de temps est donnée par la durée de carrière d’un enseignant),

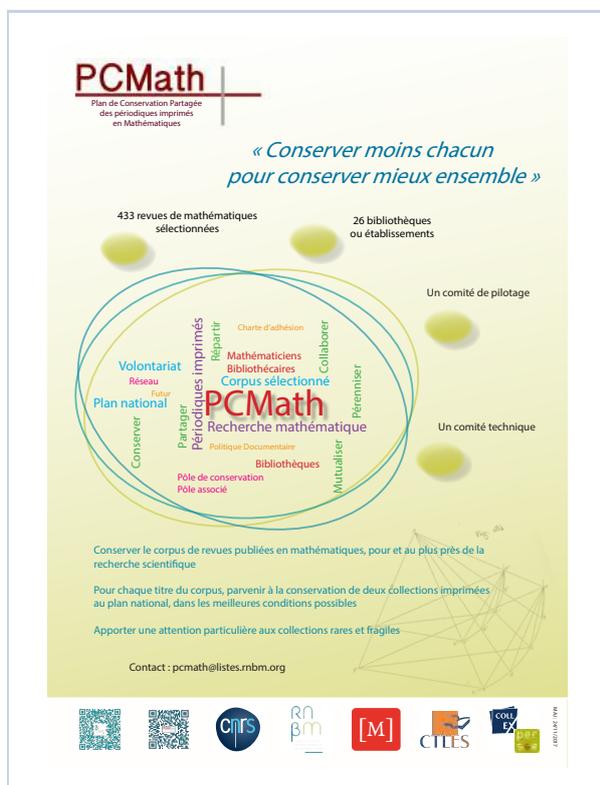
qui nécessite une action sans le moindre retard. Scientifiques, nous avons bien des fois, à juste titre, interpellé le politique sur la nécessité de ne pas rester piégé dans les décisions de court terme et de penser à la science comme à une activité qui transforme la société sur le long terme ; mais souvenons-nous que l’éducation est une activité qui transforme la science sur le long terme. Est-il d’ailleurs un sujet plus important pour l’avenir de la nation ? Si Henri Poincaré lui-même y a consacré des efforts importants, c’est que la cause en vaut la peine !

Il y a un autre argument à agir maintenant, c’est l’opportunité. Le ministère s’annonce stable, déterminé à piloter et à surveiller l’évolution du système ; voilà bien longtemps qu’un ministre de l’Éducation nationale n’a pas été dans une position aussi forte, et avec une aussi bonne cote de confiance. Ajoutez à cela que vous avez en la personne de votre serviteur un relais idéal à l’Assemblée nationale, que plusieurs postes clés dans l’architecture politique française sont actuellement occupés par des mathématiciens, et que l’opinion publique est dans un état d’esprit favorable. Notre rapport fournit un contexte opportun, et a été bien couvert par la sphère médiatique, rendant l’action légitime aux yeux des citoyens. Tous ces éléments font qu’il ne se présentera pas d’occasion aussi favorable durant le reste du quinquennat, et peut-être bien au-delà. Si nous réussissons, tous dans nos rôles respectifs, à être à la hauteur du défi, nous pouvons nourrir tous les espoirs. Et nous retrouver dans 10 ans pour dire “Nous l’avons fait !” »

Cédric Villani, mathématicien, Professeur de l’université Claude Bernard Lyon 1, Député de l’Essonne

Le plan de conservation partagée en mathématiques

• C. SABBAH



Outil de politique scientifique et documentaire, le plan de conservation partagée en mathématiques (PCMATH) coordonne, au niveau national, la conservation d'un corpus de périodiques défini par la communauté des mathématiciens, pour qui, plus encore que pour d'autres scientifiques, la préservation des résultats précédemment obtenus est primordiale.¹

Dans le contexte d'une accélération des désabonnements dans des bibliothèques aux budgets contraints, et celui du passage au tout-électronique, l'exigence d'organiser la préservation de ce corpus

scientifique s'est imposée rapidement. L'objectif premier est de garantir la conservation et l'accessibilité, sur le long terme et pour toute la communauté, de l'ensemble des revues imprimées considérées comme le corpus indispensable à la recherche. Il s'agit aussi de permettre aux bibliothèques de se défaire de certains titres de manière concertée, et ainsi gagner de la place. La mutualisation de la conservation de ce corpus, au niveau national, devrait permettre à l'avenir une gestion plus détendue des abonnements/désabonnements dans chaque bibliothèque tout en garantissant aux chercheurs un accès rapide aux ressources imprimées.

Le principe est simple : pour chaque titre du corpus sélectionné, la préservation (en France) de deux collections complètes en bon état est confiée à un ou plusieurs *pôles de conservation*, qui s'engagent à les conserver dans les meilleures conditions et à ne pas les supprimer de leur catalogue sans concertation préalable, mais aussi à en assurer la diffusion auprès des chercheurs. Pour compléter, le cas échéant, ces collections *labellisées*, les pôles de conservation font appel aux *pôles associés*. Toute bibliothèque qui possède une collection sur l'un des titres du corpus peut donc participer au PCMATH, au niveau qui convient à sa politique documentaire. Elle signe alors une charte d'adhésion. Pour chaque titre, elle peut choisir de s'engager selon deux modalités : pôle de conservation ou pôle associé... ou ne pas s'engager du tout.

Le PCMATH est animé, depuis 2012, par le Réseau national des bibliothèques de mathématiques (RNBM). C'est un des premiers plans de conservation partagée thématiques nationaux dans le domaine des sciences fondamentales. Il en existe maintenant d'autres (physique, etc.). Ils entrent dans le cadre d'une politique nationale de conservation. Il

1. Cet article est une adaptation d'un article paru dans la revue *Arabesques*, revue trimestrielle de l'ABES, signé par Julie Janody (RNBM) et le comité de pilotage PCMATH.

existe aussi des plans de conservation partagée régionaux, en général non thématiques. Les partenaires des plans nationaux sont l'ABES (agence bibliographique de l'enseignement supérieur) qui gère le catalogue SUDOC (Système Universitaire de Documentation) et le CTLES (Centre technique du livre de l'enseignement supérieur) qui assure la conservation de documents (sur quelques centaines de kilomètres linéaires), et gère plusieurs plans de conservation partagée. Le RNBM utilise son système propre de catalogage (catalogue fusionné des périodiques de mathématiques), et l'un des enjeux du PCMATH est aussi l'interopérabilité de celui-ci avec les outils nationaux de l'ABES.

La sélection du corpus du PCMATH s'est effectuée en plusieurs temps. En premier lieu, l'ensemble des titres reliés aux mathématiques, disponibles dans les bibliothèques universitaires, a été extrait du catalogue fusionné, avec notamment les diverses localisations. Ceci représente près d'un millier de titres.

Un comité de six mathématiciens (D. Cerveau, L. Clozel, F. Hélein, C. Sabbah, N. Schappacher, Ph. Thieullen) a établi une première sélection sur cette liste, en extrayant les titres importants à conserver, ainsi que des titres aux frontières des mathématiques, selon plusieurs critères (contenu, comités éditoriaux, renommée, bon référencement dans les bases de données). Bien entendu, des avis extérieurs ont été demandés pour couvrir autant que possible toutes les thématiques. Il a été décidé de limiter le corpus, dans un premier temps, aux titres vivants et strictement mathématiques. Il en est ressorti une liste de près de 450 titres.

Une première phase de test sur une petite sélection de ces titres (80) a permis de mettre en place le fonctionnement du PCMATH : positionnement des bibliothèques sur les titres, localisation des collections labellisées, et mise en place des procédures de complétion des collections (transferts d'une bibliothèque à une autre). À la suite de cette phase, le RNBM a déposé une demande de financement sur un projet Collex (Collections d'excellence²) 2016-2018, dont l'obtention a permis le démarrage de la deuxième phase, à savoir le traitement complémentaire des 316 titres restants.

Pour la troisième phase, qui va bientôt débiter, une sélection dans la liste restante, enrichie d'environ une centaine de titres nouveaux depuis 2010, a été effectuée par un comité modifié (B. Bidégaray-Fesquet, Th. Bouche, F. Hélein, J. Merker, Ch. Mourougane, C. Sabbah, N. Schappacher, Ph. Thieullen), et une liste de 380 titres a été sélectionnée. Certaines revues aux interfaces, parfois très importantes, seront analysées ultérieurement au regard d'autres plans (en physique, en informatique...). Par exemple, une vingtaine de titres sont déjà communs indépendamment au PCMATH et au plan de Physique.

Les comités scientifiques des bibliothèques mathématiques peuvent aider les bibliothécaires à se positionner sur certains titres comme pôle de conservation ou pôle associé, en ayant conscience que le *désherbage* que ce positionnement peut impliquer ne signifie pas la perte d'accès pérenne aux ressources imprimées auparavant fournies par leur bibliothèque.

Nous avons la chance de bénéficier, en mathématiques, d'un réseau documentaire (RNBM) très dynamique et il faut remercier le comité technique du PCMATH, dirigé par Nathalie Granottier (CIRM, Marseille), de l'investissement personnel important que chacun de ses membres fournit pour organiser la conservation partagée et l'accessibilité future des collections de périodiques imprimés de nos bibliothèques.

Quelques liens.

<http://www.rnbnm.org/le-pcmath/>
<http://www.abes.fr/Sudoc/>
 Le-reseau-Sudoc-PS-Publications-en-Serie/
 Plans-de-Conservation-Partagee-des-Periodiques
<https://www.ctles.fr/fr>

Le premier corpus en chiffres.

Il y a actuellement 23 bibliothèques participantes.

Sur les 433 titres traités,

- un peu moins de 250 ont une ou deux collections complètes labellisées,
- 13 titres restent orphelins (non pris en charge par au moins une bibliothèque),
- un peu moins de 180 titres sont encore lacunaires malgré les nombreux transferts effectués.



Claude SABBABH

Centre de mathématiques Laurent Schwartz École polytechnique, CNRS, université Paris-Saclay
claude.sabbah@polytechnique.edu

2. L'excellence est partout!



In memoriam Gilles Lachaud

• Y. AUBRY



Gilles Lachaud a effectué sa thèse d'état sur l'analyse spectrale des formes automorphes et les séries d'Eisenstein sous la direction de Roger Godement et l'a soutenue en 1979.

Il s'intéressa par la suite aux codes correcteurs d'erreurs et fit un exposé au séminaire Bourbaki en 1985 sur les codes de Goppa. Il

contribua au développement des codes issus de la géométrie algébrique, d'abord en France, puis à travers le monde, notamment en créant avec d'autres le colloque international AGCT qui a lieu tous les deux ans au CIRM depuis 1988. L'acronyme de ce colloque signifiait à l'origine « Algebraic Geometry and Coding Theory », qui se transforma, pour y inclure la théorie des nombres, en « Arithmetic, Geometry and Coding Theory »; un carré au-dessus du « C » mentionne à présent la présence de la cryptographie dans les thèmes abordés. Ce colloque est un succès incontestable et réunit tous les spécialistes mondiaux du domaine.

C'est en juin 1990 que je fis la connaissance de Gilles, dans son bureau au CIRM, établissement qu'il dirigea de septembre 1986 à août 1991. Le CIRM connut un essor notable durant cette période, notamment par la création de sa bibliothèque. Il me fit alors passer en quelque sorte un oral, autour du théorème de Riemann-Roch, avant de décider de me prendre en thèse sous sa direction. Il s'intéressait à ce moment-là aux variétés algébriques sur les corps finis, à leurs fonctions zêta et aux sommes exponentielles.

Gilles cherchait et trouvait fréquemment des ap-

plications de ses résultats à la théorie des codes. Par exemple de l'étude de fonctions L associées à des extensions d'Artin-Schreier de corps de fonctions de courbes sur les corps finis, il déduisit la distribution de poids de certains codes cycliques. Ou encore il appliqua ses résultats sur les sections hyperplanes des grassmanniennes à la détermination du nombre de codes linéaires MDS, à savoir les codes linéaires possédant une distance minimale la meilleure possible.

Dans les années 2000, il s'intéressa également aux formes modulaires (notamment de Ramanujan) qui lui permirent de donner la structure de la jacobienne de la forme de la quartique de Klein admettant le groupe $PSL(2, \mathbb{F}_7)$ comme groupe d'automorphismes.

Il travailla aussi autour de la question de distinguer les jacobiniennes de courbes parmi les variétés abéliennes. Cela revient à caractériser l'image de l'espace des modules des courbes de genre g dans l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g . Lorsque $g = 3$ et que le corps de base n'est pas algébriquement clos, il donna alors une réponse à un problème de J.-P. Serre dans ce cadre.

J'eus le plaisir de travailler avec lui dans les années 2010 sur le nombre de points rationnels sur un corps fini des variétés abéliennes et jacobiniennes. Il dirigeait l'Institut de Mathématiques de Luminy depuis janvier 2000, et le fit jusqu'en août 2011. Ses responsabilités comme directeur, à la fois du CIRM et de cet institut, furent très appréciées; il les dirigeait avec tact et intelligence.

Dans ses derniers temps, il étudia la distribution de la trace de la représentation du groupe symplectique unitaire ou encore de la représentation de dimension 7 du groupe de Lie simple compact exceptionnel de type G_2 . En combinant la formule d'intégration de Weyl et l'application de Steinberg, il obtint une expression explicite de la densité de pro-

babilité de la distribution de la trace en termes de fonctions hypergéométriques de Gauss, répondant ainsi à une question de J.-P. Serre et N. Katz.

Ce rapide survol des thèmes de recherche abordés par Gilles Lachaud est loin d'être exhaustif. Je devrais notamment parler de son intérêt pour les fractions continues qui l'ont amené à travailler sur la théorie des voiles et polyèdres de Klein, les formules explicites pour le nombre de points des variétés sur les corps finis ou encore les codes sphériques et le « kissing number » des sphères.

Gilles a également dirigé une douzaine de

thèses, ses élèves étant pour un certain nombre d'entre eux en poste actuellement dans diverses universités.

Féru d'histoire des mathématiques, il était aussi doté d'une grande culture littéraire et artistique. Il présidait également l'association du Pavillon de France à Auroville qui œuvre aux échanges entre la France et l'Inde, ce pays qui comptait tant pour lui.

Gilles nous a quittés le 21 février 2018 à l'âge de 71 ans. Les moments passés en sa compagnie me manquent déjà beaucoup.

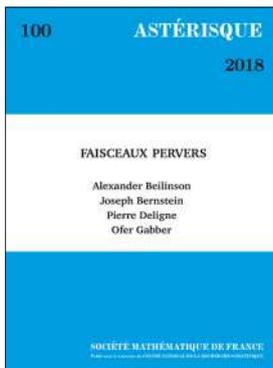


Yves AUBRY

Institut de mathématiques de Toulon, université de Toulon
yves.aubry@univ-tln.fr

Yves Aubry est maître de conférences à l'université de Toulon. Il est membre de l'Institut de mathématiques de Toulon (IMATH) ainsi que de l'Institut de mathématiques de Marseille (I2M). Il est spécialiste de géométrie algébrique sur les corps finis.

Astérisque - nouvelle impression



Vol. 100

Faisceaux Pervers

A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, P. DELIGNE & O. GABBER

ISBN 978-2-85629-878-7

2018 - 180 pages - Softcover. 17 x 24

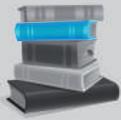
Public: 45 € - Members: 32 €

Ce volume présente la théorie des faisceaux pervers. Les définitions et les propriétés de base des t-structures sur les catégories triangulées sont données dans le premier chapitre. Le second chapitre introduit les faisceaux pervers et le foncteur de prolongement intermédiaire (pour toute perversité), tant dans le cadre des espaces stratifiés que dans celui des schémas. Le troisième chapitre traite de divers sujets complémentaires (catégories dérivées filtrées et foncteur de réalisation, localisation dans la catégorie dérivée des faisceaux). Le quatrième chapitre rassemble des propriétés de base des faisceaux pervers pour la perversité auto-duale. Le cinquième chapitre est le cœur de ce livre. Il est consacré à l'étude des faisceaux l-adiques pervers mixtes sur les variétés sur un corps fini; il contient notamment le théorème de pureté du prolongement intermédiaire, le théorème de décomposition, et le théorème de Lefschetz difficile relatif. Le sixième chapitre explique comment utiliser les résultats du chapitre précédent en géométrie algébrique complexe. La présente édition comprend une liste d'errata et d'addenda, une bibliographie additionnelle et un appendice sur la t-exactitude de certains foncteurs utiles.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





LIVRES



La forme d'une vie : Mémoires (1924-2010)

Benoît MANDELBROT

Flammarion, 2014. 381 p. ISBN : 978-2081220362

Commençons par une question – purement rhétorique puisque le sujet de cette recension en donne immédiatement la réponse : quel est le mathématicien dont la trajectoire croise à la fois Jacques Hadamard, Norbert Wiener, John Von Newman, Barry Mazur mais aussi Noam Chomsky, Max Delbrück (fondateur de la biologie moléculaire), Stephen Jay Gould (célèbre paléontologue), Jean Piaget (l'illustre psychopédagogue), Michiko Shoda (l'impératrice du Japon) et bien d'autres célébrités ? Rien que pour la richesse de ces multiples rencontres, cette autobiographie, traduite de l'anglais par Johan Guedj, vaut le détour. Vous y apprendrez forcément beaucoup car que ce soit par la stature de ce savant universellement connu ou par le hasard heureux ou tragique des temps et des lieux, Benoît Mandelbrot aura connu nombre d'événements historiques et de rencontres exceptionnelles. Cela commence dès l'enfance où ses parents, lucides, décident avant guerre de quitter Varsovie pour se réfugier à Paris : « Tous les gens que nous connaissions sont restés, nous seuls sommes partis pour la France et nous seuls avons survécu » écrit sobrement Mandelbrot. Comme on s'en doute, ce déracinement ne suffira pas à mettre la famille à l'abri. Après la défaite de juin 40, les Mandelbrot se réfugient à Tulle et vivent dans l'angoisse d'une interpellation ou d'une délation. En dépit de plusieurs alertes sérieuses, ils réussiront à sortir indemnes de cette sombre période. « La chance m'a aidé en de nombreuses occasions », c'est une évidence et elle est heureuse. Mais elle mérite aussi d'être creusée.

La chance aura certes été fidèle à Mandelbrot tout au long de sa vie mais comme disait Louis Pasteur, elle ne sourit qu'aux esprits préparés. C'est là certainement une des grandes forces du caractère de Mandelbrot. Jamais il n'a hésité à quitter le confort tranquilisant des voies toutes balisées pour suivre sa propre trajectoire et permettre à Dame Chance – comme il l'appelle affectueusement – de le rencontrer. Qu'on en juge. La guerre finie, il intègre l'ÉNS Paris et la quitte presque instantanément pour l'École polytechnique : « Weil et Bourbaki [lui inspirant] beaucoup d'antipathie », il décide ensuite de poursuivre ses études dans le domaine de l'aéronautique au Caltech en Californie, un choix qui n'allait pas de soi à une époque où ses camarades de promotion « craignant que la France ne mît trop de temps à se relever [...] envisageaient de s'installer dans un pays éloigné et plus riche de promesses, tels l'Argentine ou le Brésil ». De retour en France, il obtient un poste à Philips Electronique sous la direction du physicien Hendrick Casimir (celui de l'effet du même nom) et entame une thèse dans la foulée. Celle-ci achevée, il met de nouveau le cap vers les États-Unis où il débute un postdoctorat sous la direction de Norbert Wiener au MIT pour devenir ensuite le dernier postdoctorant de John von Neumann à Princeton. Puis c'est à Genève qu'on le retrouve où il travaille avec Jean Piaget : « Je compris assez vite qu'il n'avait encore jamais entendu des mots tels que : *Je ne comprends pas tout à fait. Pouvez-vous m'expliquer ?* ». Il obtient ensuite un poste de maître de conférences à Lille : « L'État fournissait un logement à tout fonctionnaire civil, mais il n'avait rien de mieux à m'offrir qu'une méchante maisonnette d'ouvrier dans une lointaine banlieue lilloise ». Il repart à Yorktown Heights où le premier directeur du centre de recherche d'IBM le reçoit ainsi : « Vous pensez que l'essentiel est de rivaliser avec votre ancien directeur de thèse mais vous allez vite découvrir qu'au quotidien la recherche scientifique est une profession très ardue [...] si vous êtes des mordus

de la recherche scientifique pure, IBM peut vous offrir tout une palette de tâches passionnantes et bien rémunérées. » Mandelbrot accepte le poste et débute une nouvelle période de sa vie qu'il qualifie « d'âge d'or ». Mais... je m'arrête et je vous laisse découvrir la suite par vous-même. Vous constaterez que le rythme des rencontres ne faiblit jamais et vous revivrez l'ébullition scientifique qui régnait alors chez IBM Research et qui produira cinq prix Nobel. Surtout, vous suivrez le cheminement intellectuel de Mandelbrot, les problèmes qu'il rencontre et qui le stimulent et vous verrez se dessiner petit à petit la route qui le conduira vers sa découverte la plus fameuse, la géométrie fractale.

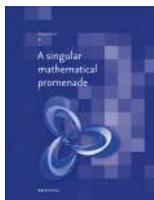
Je dois tout de même ajouter une mise en garde : le style du livre est sobre et posé mais Mandelbrot n'y pratique aucune forme de modestie. Cette posture, éloignée des règles traditionnelles, m'a parfois un peu dérangé. Mais à la relecture, j'y ai décelé une transparence touchante : Mandelbrot nous fait part de sa grande estime de soi et de ses ambitions immenses sans chercher à les dissimuler sous une couche protectrice de fausse humilité et de bienséance académique. Il ne les cache pas. Il ne se cache pas. Même si l'ouvrage n'est pas écrit sous le ton de la confession, sa franchise brute ouvre un accès direct à ses ressorts et ses valeurs : « Que la flatterie est troublante ! Chaque éloge m'envoie au septième ciel, enchante véritablement ma journée ! Je dirais que de tels moments font le bonheur de ma vie. » Certes, on imagine aussi sans peine les douleurs, les blessures narcissiques infligées par les commentaires dédaigneux de ses travaux ou encore par les tentatives infructueuses d'obtenir un poste de professeur, d'abord à Chicago, puis à Harvard et enfin au MIT : « Après 1964, je cessais de me demander si IBM était le lieu approprié et me mis au travail ». Il finira par obtenir le titre de *Sterling Professor* à Yale à... 75 ans : « Le magazine des anciens élèves avait prévu un article sur mon arrivée, en 1987 [sur un poste à mi-temps], mais la rédaction prit à ce point son temps qu'elle en consacra un second, simultanément, à ce nouveau poste [en 1999] et à ma retraite prochaine ». On constate enfin, rasséréiné, que l'estime de soi n'empêche pas la clairvoyance. Mandelbrot consigne sans fard ses erreurs ou ses échecs : « mon mémoire [de doctorat] était "techniquement" faible et imparfaitement écrit », « Malgré un travail opiniâtre [avec Jean Piaget], je ne fis pas de miracle [...] mes successeurs eurent plus de succès que moi », « [À propos d'un défi lancé par son oncle, le mathématicien Szolem Mandelbrot] J'espérais le revoir rapidement pour lui annoncer *veni, vedi, vici*. Malheureusement, comme Szolem, et comme d'autres, j'ai échoué », « [Concernant l'ensemble de Mandelbrot] Je ne réussis à prouver que les conjectures les plus simples. Je savais que je serais incapable d'y parvenir pour les plus difficiles ». En fin de compte, la posture à la fois immodeste et transparente de l'auteur révèle un certain courage. Elle est aussi certainement le résultat obligé de la détermination d'un soliste de la science mû par un rêve démesuré : aboutir à une découverte aussi importante que celle de Kepler sur la nature elliptique des trajectoires des planètes. Un doyen d'université aurait d'ailleurs confié à Mandelbrot « Pour un penseur, la plus grave des maladies mentales consiste à ne pas être sûr de qui l'on est. C'est un problème dont vous ne souffrez pas ». Tant mieux. Le rêve képlérien de Mandelbrot aura profité à tous et augmenté la beauté du monde.

À vous désormais de découvrir cette autobiographie, qui, si elle n'est pas exempte d'imperfections^a, reste passionnante d'un bout à l'autre... quelle vie, quel savant, quel destin !

Et pour ceux qui voudraient compléter leur lecture par une strate conséquente de mathématiques, je vous recommande le numéro spécial de la *Gazette* d'avril 2013 entièrement consacré aux travaux du père de la géométrie fractale.

Vincent BORELLI
Institut Camille Jordan, Lyon

a. L'une d'entre elles mérite d'être réparée ici, séance tenante. Elle concerne la *Conjecture 4/3* au sujet de laquelle Mandelbrot écrit ceci : « Les trois mathématiciens qui associèrent leurs talents pour y parvenir recueillirent des louanges immédiates et, en 2006, le plus jeune du trio reçut la prestigieuse médaille Fields ». Devinez quoi ? Les noms ne sont pas cités ! Il s'agit de Gregory Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner. Et pour les rares qui ne le sauraient pas, je précise que le plus jeune du trio est le dernier de ces trois noms.



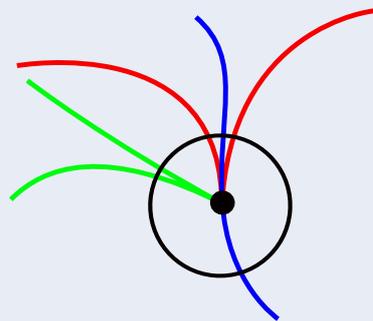
A singular mathematical promenade

Étienne GHYS

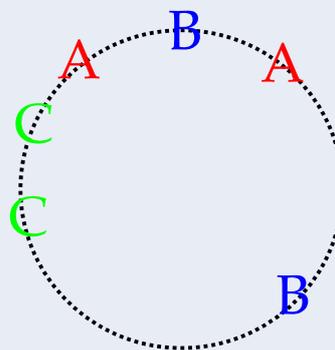
ÉNS Éditions, 2017. 312 p. ISBN : 978-2-84788-939-0

Que font les mathématiciens lorsqu'ils sont forcés d'assister à des réunions assommantes? Ils griffonnent des maths sur des petits papiers qu'ils font discrètement passer à leurs copains! Notre aventure commence alors qu'Étienne Ghys assiste à une telle réunion et que Maxim Kontsevich lui fait passer un ticket de métro sur lequel il a esquissé des bribes de théorème. Notre géomètre, après avoir réussi à déchiffrer l'énoncé et reconstitué une preuve, commence à s'interroger d'abord sur les polynômes réels et leur rapport avec certaines permutations, puis sur des problèmes de combinatoire liés aux positions relatives de courbes algébriques réelles.

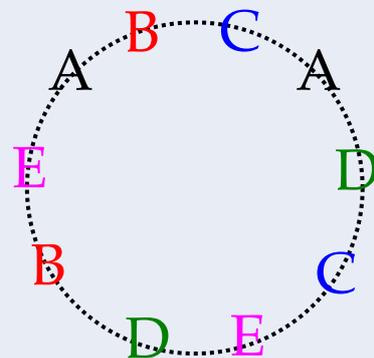
Quelque temps après, il tient un joli théorème. En voici un énoncé dans un cas particulier :



Courbe algébrique
à trois branches,



... et le cycle associé.



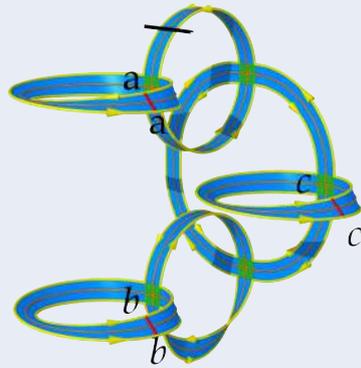
Théorème : cette configuration
à cinq branches est **impossible**.

Plutôt que d'en faire un article et de le soumettre à une revue (par exemple au *Journal of Mathematics and System Science* qui ne facture pourtant que 60 dollars *par page* pour accepter des articles, même générés aléatoirement, bienvenue dans le monde merveilleux du *gold open access*), Étienne Ghys décide d'en faire un « petit livre » qu'il propose librement au téléchargement ainsi que l'intégralité des sources latex et les 612 (!) illustrations parmi lesquelles j'ai pioché sans vergogne les trois diagrammes plus haut, et je ne fais que commencer!

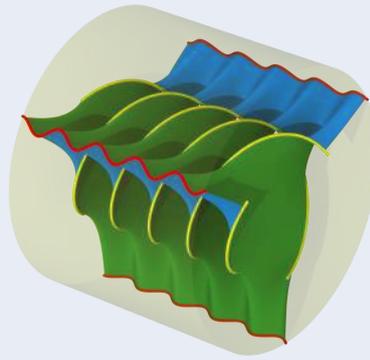
Alors, de quoi s'agit-il? D'aboutir à une preuve de son théorème certes, mais surtout de se promener dans le monde mathématique en visitant ou revisitant beaucoup de grands monuments ainsi que des lieux moins fréquentés.

Le livre est très richement illustré (il n'y a qu'une douzaine de pages sans illustration), plein d'humour et fera le bonheur de tout mathématicien en herbe ou confirmé. Certains chapitres, comme ceux sur les permutations, sont lisibles par un élève de premier cycle mais le cœur de cible est plutôt un étudiant de master.

Pour les lecteurs plus avancés, le livre reste une lecture très enrichissante et agréable de part la variété de sujets qui y sont abordés parfois presque avec tendresse et des nombreux dessins et remarques qui viennent éclairer d'une lumière nouvelle des notions classiques. Sans compter un petit nombre de chapitres plus ardues mais passionnants.



Un éclatement de surface.
C'est pas dans le Hartshorne
qu'on verrait ça!



Une fibre de Milnor
expliquée en détail.
Étonnant, non ?

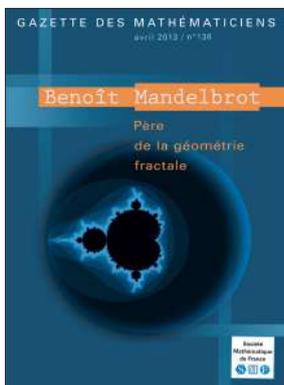
La promenade proposée est loin d'être linéaire. Elle nous mène des polynômes jusqu'au théorème de Newton-Puiseux, fait des détours par la résolution des singularités de courbes algébriques et la fibration de Milnor. On y croise des objets familiers (la fibration de Hopf, le nœud de trèfle, le ruban de Möbius) et un petit chapitre sur les séries divergentes dans lequel l'auteur s'emploie à introduire ces objets en essayant de choquer le moins possible, et à montrer qu'Euler était très loin de manipuler « sans précaution » ces séries qui renferment une telle richesse.

Mais cet ouvrage ne renferme pas que de la géométrie et de l'algèbre : on y trouve aussi des questions subtiles sur les permutations, des associaèdres, des opérades et j'y ai même appris la définition d'un A_∞ -espace, ce sur quoi je n'aurais pas parié au moment d'ouvrir le livre. Bref, le livre est très plaisant et on y apprend des tonnes de choses – même sans lire le texte!

Enfin, le livre a beau être en téléchargement libre, il est également possible d'en acheter un exemplaire papier chez ÉNS Éditions pour une somme raisonnable afin par exemple de pouvoir l'offrir. Des fichiers .tex font en général moins plaisir même s'ils peuvent parfois occasionner une certaine excitation : on doit compiler son propre cadeau comme on montait naguère ses Legos.

Damien MÉGY
Université de Lorraine, Nancy

Benoît Mandelbrot, père de la géométrie fractale



Numéro spécial de la Gazette des Mathématiciens

sous la direction de S. JAFFARD et S. SEURET

ISBN 978-2-85629-360-7
GA136 - 2013 - 192 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 25 € - Members: 18 €

Bien plus que tout autre, le nom de Benoît Mandelbrot est associé à la géométrie fractale. Ce mathématicien franco-américain, mais aussi physicien, informaticien, a bousculé les frontières entre disciplines. Son regard sans *a priori* s'est attaché à la description de phénomènes mathématiques, physiques et géophysiques, économiques, sociologiques, faisant fi des théories préexistantes. Dans cet ouvrage, de proches collaborateurs témoignent des bouleversements qu'il a apportés dans chacune de leurs disciplines. Au travers de leurs textes surgit le portrait d'une personnalité scientifique hors norme.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris



CONCOURS

Mathématiques SMF junior

Du 26 octobre au
4 novembre 2018

10 problèmes
à résoudre
en **10** jours !

Résolution
dimension
mesure
Analyse
Géométrie
Ensemble
Combinatoire
calcul
Nombres
Problèmes
Recherche
Probabilités
Modèles
Théorèmes
Nombres
Algèbre
variable
méthode
Conjecture
vectoriel
calcul
Nombres
Inscris-toi !
Des prix à gagner de
250 à 750 euros,
des livres...

Tu es étudiant(e) en **Master,**
Licence, classe prépa ?

Tu veux faire des maths
en équipe et goûter au plaisir
de la recherche ?

<http://smf.emath.fr/concours-smf-junior>



Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@dma.ens.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et Mac \TeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK \TeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

