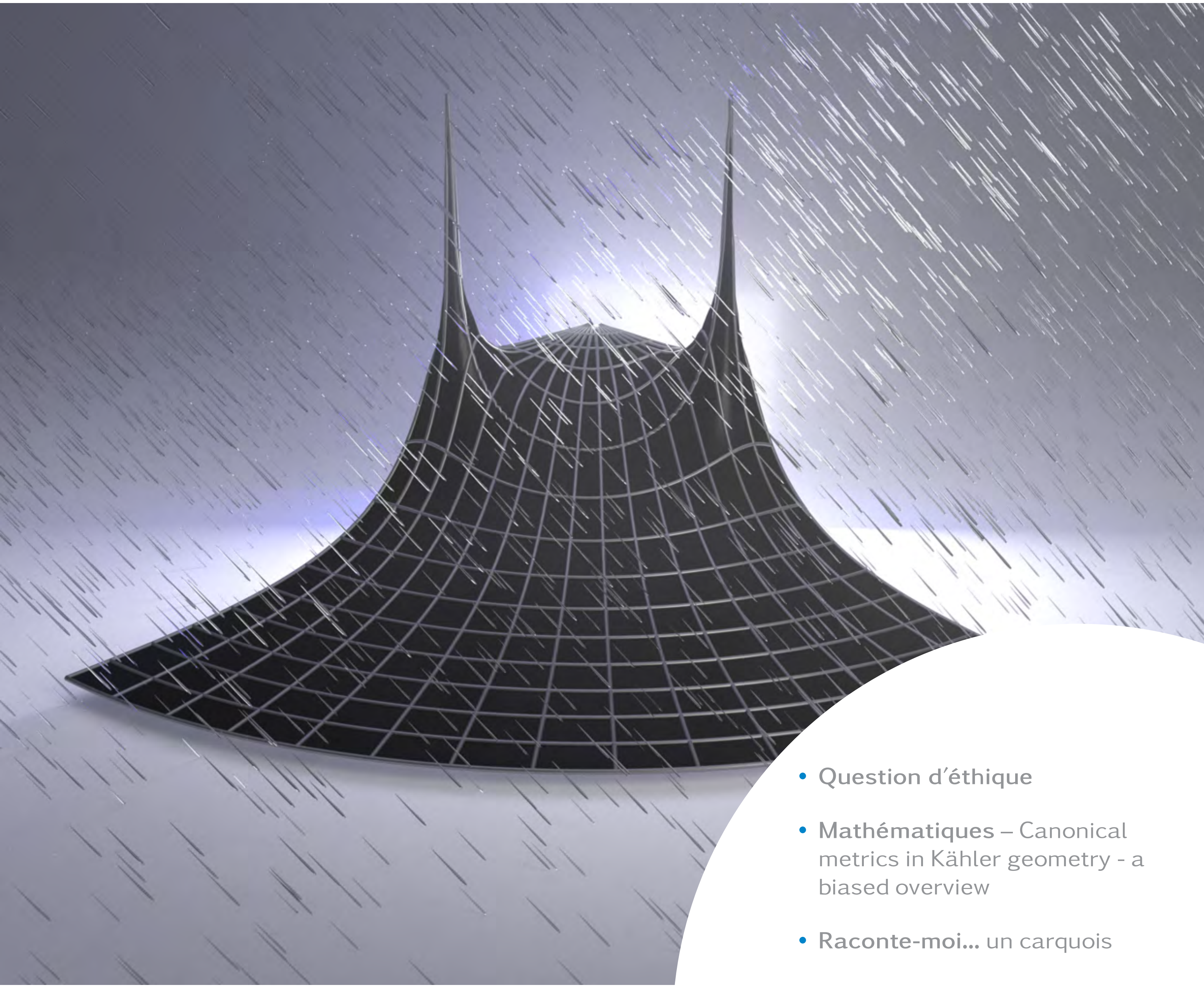
JANVIER 2018 – Nº 155

la Gazette des Mathématiciens



- **Question d'éthique**
- **Mathématiques** – Canonical metrics in Kähler geometry - a biased overview
- **Raconte-moi...** un carquois

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. Représentation graphique de la métrique de Weil-Petersson lorsqu'on se restreint à une petite partie de dimension 1 de l'espace des modules de quintiques de $\mathbb{CP}^4$ (qui a dimension 101). Plus précisément, on considère les variétés Calabi-Yau X_t de dimension 3 données par l'équation $Z_0^5 + Z_1^5 + Z_2^5 + Z_3^5 + Z_4^5 - 5tZ_0Z_1Z_2Z_3Z_4 = 0$ où l'on fait varier le paramètre t dans la partie du plan complexe : $\{0 \leqslant \arg(t) < \frac{2\pi}{5}, t \neq 1\}$. La métrique de Weil-Petersson mesure comment varie, au sens L^2, la métrique Kähler Ricci plate qui vit sur chaque X_t lorsque t varie. En particulier, on remarque que la métrique de Weil-Petersson explose là où X_t est singulière et que pour $t \to \infty$ elle tend vers une métrique à courbure constante négative. Calcul et texte : Julien Keller (Institut de Mathématiques de Marseille). Scène 3D et rendu : Damien Rohmer (Laboratoire Informatique de l'X).

Nº 155

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

En guise de réponse aux *Principia Ethica* de George Edward Moore, le philosophe et mathématicien Ludwig Wittgenstein affirma que :

« Dans la mesure où l'éthique naît du désir de dire quelque chose de la signification ultime de la vie, du bien absolu, de ce qui a une valeur absolue, l'éthique ne peut pas être une science. »

A contrario, ce constat n'empêche aucunement les sciences, et y compris les mathématiques, de devoir faire face à certaines questions d'éthique. Dans ce numéro, la *Gazette* consacre un dossier à ce que le poète Pierre Reverdy nommait non sans malice « l'esthétique du dedans ».

Parmi les problèmes éthiques auxquels le mathématicien peut se voir confronté, figurent la question du plagiat et certains conflits d'intérêts ; comme cela peut parfois arriver lorsque la priorité de la démonstration d'un résultat par telle ou tel s'avère contestée. Des résultats profonds ont récemment bouleversé le domaine de la géométrie kählerienne, donnant justement lieu à une controverse inhabituelle entre plusieurs sommités du sujet. Joël Fine revient sur cet épisode singulier et se risque, selon ses propres dires, à un « survol biaisé » sur ce thème fascinant. Mathématiques toujours, Claude Bardos et Norbert Mauser te convient à une promenade à travers une histoire française des équations cinétiques. Enfin, Claire Amiot a affûté sa plume pour te raconter une histoire de flèches et de carquois.

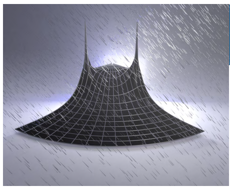
Diffusion des savoirs. Si philosophie et mathématique s'entremêlent le plus naturellement du monde depuis l'origine de la pensée humaine, la philosophie des mathématiques appliquées est un domaine encore en cours de structuration. En relatant le déroulement d'un séminaire qui a eu lieu sur ce sujet à la Sorbonne au printemps 2016, Anouk Barberousse, professeure de philosophie des sciences, t'invite à découvrir les principaux enjeux de cette jeune science. Pour la rubrique *Parité*, Indira Chatterji te livre son témoignage à travers une tribune sans concession. Un coup de poing dans le plafond de verre. Tu trouveras dans la rubrique *Information* des nouvelles de l'INSMI, l'annonce du lancement d'un nouveau journal : les *Annales Henri Lebesgue*, ainsi qu'une présentation du centre Mersenne. La *Gazette* rend également hommage dans ces pages à Gérard Tronel et Hans-Otto Georgii.

Une conclusion en forme de frustration. Le père Noël n'est visiblement pas passé... Alors que les mathématiques françaises ne cessent d'être honorées et que l'impact socio-économique de cette science sur notre société semble enfin reconnu, les résultats de l'appel d'offre sur les Écoles Universitaires de Recherche (EUR) sont accablants et ont eu l'effet d'une douche froide sur notre communauté. Sur vingt-neuf projets sélectionnés, aucun n'est consacré aux mathématiques, ni même à l'informatique. Les présidents de la Société Française de Statistique, de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et de la Société Mathématique de France cosignent une *Tribune libre* afin de t'alerter sur cette situation ubuesque.

En te souhaitant une agréable lecture et une excellente année 2018,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



Nº 155

Sommaire


SMF 2018
Deuxième congrès national de la Société Mathématique de France
Lille 4 au 8 Juin 2018
http://smf2018.sciencesconf.org/
Nalini Anantharaman, Université de Strasbourg
Denis Auroux, University of California, Berkeley
Christine Bachoc, Université de Bordeaux
Nicolas Bergeron, Université Pierre et Marie Curie
Lucien Birgé, Université Pierre et Marie Curie
Serge Cantat, CNRS et Université de Rennes
Zoé Chatzidakis, CNRS et École Normale Supérieure
Jean-Michel Coron, Université Pierre et Marie Curie
Hugo Duminil-Copin, IHES et Université de Genève
Alice Guionnet, CNRS et École Normale Supérieure de Lyon
Philippe Michel, École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Ngo Bao Chau, University of Chicago, VIASM
Simon Riche, CNRS et Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand
Stefaan Vaes, Katholieke Universiteit Leuven
Sessions thématiques :
Algèbre, Théorie des représentations
Statistiques, Traitement des données
Arithmétique et Logique
Topologie, Géométrie
EDP et analyse numérique
Systèmes dynamiques, théorie ergodique
Analyse et ses applications
Probabilités, combinatoire
Société Mathématique de France
Laboratoire Paul Painlevé
@SocMathFr
Crédit photo : Jos Leys
Conférence grand public : Vincent Borrelli, Université Claude Bernard, Lyon 1
Remise des prix d'Alembert et Jacqueline Ferrand
Conférence de Bernard Maurey, Université Paris-Diderot pour le 250ème anniversaire de Joseph Fourier
CEMPI
CNRS
Université de Lille
Inria
Labex MME-DII
cimi
AMIES

Société Mathématique de France SMF

Nº 155

Mot du président

Chères et chers collègues,

Je vous souhaite une excellente année 2018, qu'elle soit productive mathématiquement et sereine personnellement.

Cette année 2018 sera marquée par des changements qui vont influencer notre formation. La SMF, avec d'autres acteurs de la communauté, a été consultée par les missions gouvernementales en charge de la réforme du baccalauréat et de l'enseignement en mathématiques, et, après une large consultation, a porté la parole de la communauté notamment en insistant sur la formation des enseignants à tous les niveaux, y compris à l'université. Nous espérons que cette occasion unique sera vraiment saisie et que les mesures proposées seront ambitieuses, à la hauteur des enjeux.

Cette année s'annonce chargée à la SMF également.

Notre congrès aura lieu du 4 au 8 juin à Lille, vous pouvez déjà vous y inscrire : le programme est enthousiasmant. Notre nouveau site web (ainsi que notre système informatique mis à niveau) sera mis en ligne dans les prochains mois. Le 2e concours SMF junior sera organisé en novembre.

Du côté de la maison d'édition, les projets foisonnent : la collection *Astérisque* sera bientôt numérisée et mise en ligne, gratuitement pour les 316 premiers numéros. Que cela ne vous empêche pas de vous procurer les exemplaires papier ! Nous préparons une ré-édition enrichie des articles principaux (et ils sont nombreux !) d'Yves Meyer, avec l'aide de ce dernier. Enfin, je suis fier d'annoncer que la SMF, après en avoir obtenu les droits d'exploitation, publiera une version retravaillée de « Pursuing Stacks » d'Alexandre Grothendieck. Je remercie chaleureusement la famille Grothendieck pour sa confiance, Jean-Michel Marin pour son aide, et Georges Maltsiniotis pour son travail remarquable sur le manuscrit original.

Bref, de beaux projets à venir. Je vous invite à consulter notre site web, et pour les plus aventureux de suivre notre compte Twitter (plus de 2 000 abonnés) qui nous permet de diffuser, sans excès, des articles et nouvelles mathématiques. Je vous renouvelle mes meilleurs vœux pour 2018 !

Le 5 janvier 2018

Stéphane Seuret, président de la SMF

Question d'éthique

Vous avez dit éthique ? La *Gazette* vous propose, à travers deux textes de Jean-Michel Ganascia et Norbert Schappacher, une réflexion sur les enjeux éthiques de la recherche en mathématiques, et plus généralement en sciences.

L'éthique au CNRS, à l'heure du numérique

Dans cet entretien, réalisé par Christine Froidevaux, Jean-Gabriel Ganascia explique comment son itinéraire d'un côté et ses réflexions sur le développement de l'informatique dans la société et sur les métiers de la recherche de l'autre, l'ont mené à la présidence du comité d'éthique du CNRS.

Tu viens d'être nommé à la présidence du COMETS, peux-tu nous expliquer ce qu'est le COMETS ? Quand a-t-il été créé ? Pour quelles missions ?

Le COMETS (comité d'éthique du CNRS) a été créé en 1994. C'est une instance consultative indépendante dont les avis sont publics. Elle n'a de force que par les arguments qu'elle expose. En cela, c'est uniquement une force morale : elle ne traite pas de cas particuliers ; elle ne prend pas de décisions exécutoires ; elle n'intervient pas dans les polémiques scientifiques. En revanche, elle est invitée à échanger avec les autres comités d'éthique des sciences (comités d'éthique de l'INRA, de l'INSERM, CERNA [1], CCNE [2]...) sur des questions d'intérêt commun.

Pour bien comprendre le rôle du COMETS, il faut distinguer entre trois choses : les comités de réflexion comme le COMETS, les comités opérationnels d'éthique, ce que l'on appelle en anglais les IRB [3], les IEC [4], les ERB [5] ou les REB [6], et enfin les instances de déontologie mises en place par les institutions de recherche.

Commençons pas ces dernières : au terme de la loi, on doit trouver dans toutes les institutions publiques, et en particulier dans les organismes de recherche, un « référent déontologue » ou, tout au moins, une instance de déontologie, pour traiter les problèmes déontologiques, c'est-à-dire les infractions aux codes de conduite des différentes professions. En l'occurrence, dans le cas des institutions de recherche, la déontologie correspond à l'intégrité scientifique et il existe dans ces institutions des référents ou des instances pour recueillir les accusations, en particulier les allégations de fraudes et de plagiats, et leur apporter un traitement approprié.

Les comités d'éthique opérationnels obéissent à un impératif totalement différent. Ils ont été imaginés aux États-Unis par le NIH [7] pour évaluer la conformité des projets à un certain nombre de recommandations éthiques. Cependant, plutôt que de s'en charger lui-même, le NIH a délégué cette tâche aux institutions dont relevaient les laboratoires qu'il finançait. Ainsi, si un laboratoire de l'INSERM est financé par le NIH sur un projet scientifique, il appartient à l'INSERM de vérifier que la réglementation éthique est respectée dans le cadre de ce projet en mettant en place un comité opérationnel dont les procédures de validation sont transparentes et conformes à des exigences génériques du NIH.

1. Commission de réflexion sur l'Éthique de la Recherche dans les sciences du Numérique d'Allistene ; Allistene étant l'alliance des organismes de recherche dans le secteur du numérique (CEA, CNRS, CPU, INRIA, institut Mines-Télécom, etc.). `https://www.allistene.fr/`
2. Comité Consultatif National d'Éthique pour les sciences de la vie et de la santé.
3. Institutional Review Board.
4. Independent Ethics Committee.
5. Ethical Review Board.
6. Research Ethics Board.
7. National Institute of Health.

La communauté européenne reprend aujourd'hui le même principe : une fois évalués, les projets qui ont été classés sont soumis à des « évaluateurs éthiques » (*Ethical Reviewers*) qui les scrutent pour voir s'ils sont susceptibles d'enfreindre des recommandations générales portant par exemple sur l'expérimentation, qu'elle soit humaine ou animale, sur la protection de l'environnement ou sur la protection des données personnelles. Si c'est le cas, les porteurs des projets se voient notifier l'obligation soit de nommer un « superviseur éthique » (*ethical advisor*) soit de soumettre leur projet à un « comité opérationnel d'éthique » de l'organisme dont ils dépendent. Aujourd'hui, toutes les institutions de recherche, que ce soit les universités, le CNRS ou les autres organismes, éprouvent le besoin de disposer de ce type de comités opérationnels pour répondre aux injonctions des opérateurs américains et européens de financement de la recherche. La réflexion sur la création au CNRS de tels comités a commencé ; elle va se poursuivre et devrait aboutir rapidement.

Les missions des comités de réflexion comme le COMETS sont bien différentes, puisque l'on n'y statue pas sur des cas particuliers, qu'il s'agisse de projets scientifiques ou d'infractions à la déontologie des chercheurs, mais que l'on y engage des réflexions sur les questions éthiques générales liées (i) aux conséquences sociales et morales du développement des sciences et de leurs applications pratiques, (ii) aux principes qui régissent les comportements individuels des chercheurs et le fonctionnement des instances du CNRS et (iii) à l'exercice de la science elle-même. À l'issue de ces réflexions, il appartient au COMETS, de formuler des recommandations relatives à la définition, à la justification et à l'application de règles relatives à l'éthique et à la déontologie de la recherche. Enfin, le COMETS doit contribuer à la sensibilisation des personnels de la recherche à ces questions.

Dans ta nomination, quelle est la part de ton parcours personnel et quelle est celle de ton domaine de recherche ? Était-ce important de nommer un informaticien ?

Je me suis intéressé depuis une dizaine d'années à la modélisation des systèmes éthiques classiques, comme les systèmes conséquentialistes ou déontologiques, avec des outils d'Intelligence Artificielle.

Est-ce que tu peux préciser ce que tu entends par « système conséquentialiste » et « système déontologique » ?

Bien sûr, mais cela exige un petit détour par un rappel des fondements de l'éthique. Dans toutes les sociétés humaines, l'action est régie par des règles qui posent un certain nombre d'interdits : on ne tue pas ses semblables, sauf lorsqu'on fait la guerre, on n'épouse ni sa mère, ni sa sœur, etc. Dans les sociétés traditionnelles, ces interdits sont transmis par les anciens ; ils viennent de la coutume ou de la référence à un mythe originel. Les religions révélées recourent à un événement surnaturel où ces règles sont supposées avoir été données, par exemple, au don des tables de la loi à Moïse sur le Sinaï. Les philosophes des Lumières ont souhaité leur trouver un fondement rationnel. Pour cela ils ont cherché des principes généraux et, ce faisant, ils se sont opposés en adoptant deux types d'approches antagoniques : certains évaluent les actions au regard de leurs conséquences pratiques, cela correspond aux éthiques dites conséquentialistes, d'autres les évaluent au regard de leur conformité à des lois, ce qui correspond aux éthiques déontiques.

Ceci étant, que ce soit dans les éthiques déontiques ou conséquentialistes, les questions délicates se posent lorsqu'il y a des conflits entre commandements, par exemple lorsque l'injonction de dire le vrai aide des assassins à exécuter des crimes que l'on réprouve, ou lorsque la condamnation de la torture empêche d'obtenir des informations qui pourraient sauver des vies. Cela se présente de façon analogue à ce qui se produit en intelligence artificielle lorsque surgissent des contradictions entre règles et que l'on recourt, pour les surmonter, à des formalismes logiques comme la logique des défauts ou les logiques non monotones. Intrigué par cette analogie, j'ai fait appel à la programmation par ensembles réponses (ASP [8]) qui m'a semblé très appropriée pour cette modélisation.

En parallèle, je me suis intéressé aux problèmes éthiques suscités par le développement des technologies de l'information et de la communication. J'avais été invité en 2002 à participer à un col-

8. Answer Set Programming.

loque sur l'éthique des sciences organisé par le MURS[9] dans la nouvelle bibliothèque d'Alexandrie en Égypte. Je confesse que j'ai accepté plus par l'attrait du voyage que par intérêt pour l'éthique. À l'époque, je pensais que les questions se posaient surtout aux biologistes qui jouaient trop souvent aux apprentis-sorciers, aux médecins, avec les greffes d'organes et les expérimentations animales ou humaines, aux chimistes qui polluaient ou aux physiciens qui mettaient en danger l'Humanité, avec l'utilisation de l'énergie nucléaire, mais que nous, les informaticiens, n'œuvrions que pour le bien de tous. En préparant mon exposé, je me suis rendu compte que la présence de plus en plus grande des technologies de l'information dans le monde était susceptible de poser quelques questions et que bien d'autres travaillaient déjà sur ces sujets à l'étranger. De plus, j'étais irrité par les fausses peurs que suscitaient les déclarations extravagantes d'informaticiens comme Hans Moravec ou Hugo de Garis. Cela m'a conduit à lancer une première action sur l'éthique des STIC dans le cadre du programme « Société de l'information » du CNRS, à organiser quelques sessions de cours sur le sujet dans le cadre de l'école doctorale Edite de Paris et à participer à la rédaction d'un rapport[10] coordonné par Joseph Mariani sur l'éthique des STIC. Lorsque nous sommes parvenus à la fin de la rédaction de ce rapport, nous nous sommes rendus compte que Michel Cosnard, alors PDG d'Inria, avait demandé à un groupe de chercheurs, dont Claude Kirchner et Gille Dowek, de rédiger un autre rapport[11] sur les mêmes questions. Nous nous sommes alors rencontrés et nous avons décidé de faire une restitution commune et simultanée des deux rapports. Cela a eu lieu à la Maison de la chimie le 11 janvier 2010. Une de nos conclusions était qu'il faudrait mettre sur pied un comité d'éthique des sciences du numérique, d'où la création de la CERNA dans laquelle j'ai été nommé.

Quelques années après, quand Michèle Leduc a cherché un successeur à la présidence du COMETS, elle m'a sollicité en qualité d'informaticien, car elle s'était rendue compte que beaucoup de questions éthiques actuelles, qu'il s'agisse de questions sociétales ou de questions relatives à l'évolution des métiers de la recherche, étaient liées aux développements de l'informatique. Ainsi en va-t-il du partage des données, des masses de données, de la cryptographie et de la blockchain, de l'accès ouvert aux publications (*open access*), des sciences participatives, du rôle des médias numériques comme PubPeer[12] ou RetractionWatch[13] dans la vie de la communauté de la recherche etc.

On assiste en effet régulièrement à des scandales autour de fraudes scientifiques, aujourd'hui encore, c'est l'Institut Karolinska qui est éclaboussé pour avoir protégé un chirurgien italien malhonnête... Toutes les sciences se prêtent-elles également à ces fraudes ?

L'éventail des inconduites scientifiques est très large. Certaines relèvent de la fraude souvent caractérisée par le sigle FFP qui signifie Fabrication, Falsification, Plagiat, d'autres tiennent aux inversions d'ordre des signatures dans les articles ou aux conflits d'intérêt dans l'évaluation et dans les tâches d'expertise ou encore au non-respect des procédures, en particulier, lors d'expérimentations humaines ou animales. Dans le cas Paolo Macchiarini, ce chirurgien italien employé par l'hôpital Karolinska, il s'agit à la fois de falsification de données et de non-respect des procédures, en l'occurrence d'expérimentations médicales sur des sujets humains de techniques qui n'avaient pas été scientifiquement prouvées en respectant les différentes phases d'expérimentations dites précliniques sur des modèles animaux. C'est bien sûr là un cas très extrême et particulièrement traumatisant qui a conduit à la mort de plusieurs personnes. Mais, il existe bien d'autres inconduites qui se distinguent à la fois par leur degré de gravité et par leur nature. Ainsi, la falsification et la fabrication de données relèvent d'une volonté de tromper, ce qui paraît particulièrement grave pour des scientifiques dont l'objectif devrait être la quête de la vérité. Le plagiat et l'inversion de l'ordre des signatures n'apparaissent pas moins graves, mais cela relève d'un autre ordre

9. Mouvement Universel pour la Responsabilité Scientifique.

10. Joseph Mariani, Jean-Michel Besnier, Jacques Bordé, Jean-Michel Cornu, Marie Farge, Jean-Gabriel Ganascia, Jean-Paul Haton, Evelyne Serverin, *Pour une éthique de la recherche en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (STIC)*, rapport coordonné par Joseph Mariani et validé par le Comité d'éthique du CNRS (COMETS), novembre 2009, `http://www.cnrs.fr/comets/IMG/pdf/02-comstic.pdf`

11. Gilles Dowek, David Guiraud, Claude Kirchner, Daniel Le Métayer, Pierre-Yves Oudeyer, *Rapport sur la création d'un comité d'éthique en Sciences et Technologies du Numérique*, mai 2009.

12. `https://pubpeer.com/`

13. `http://retractionwatch.com/`

de manquement vis-à-vis non de la vérité scientifique, mais de ses collègues. Il en va de même lorsque l'expertise de scientifiques est biaisée par des conflits d'intérêt, si ce n'est que le tort causé va parfois bien au-delà de la seule communauté scientifique pour léser toute la société. Quant au non-respect des procédures, la nature de la faute dépend des procédures enfreintes : cela peut aller d'un effet sur l'environnement à des crimes de sang, comme lorsque Paolo Macchiarini expérimente des techniques directement sur des êtres humains. Or, les disciplines sont plus ou moins sujettes aux différents types d'inconduites. Ainsi, en mathématiques, il apparaît bien difficile de falsifier ou de fabriquer des données ; de même, l'expérimentation animale ou humaine y a peu cours. En revanche, le plagiat y est présent, et de plus en plus, du fait de la multiplication de revues à compte d'auteur peu scrupuleuses. La tenue d'un cahier de laboratoire où sont consignées toutes les expériences, paraît essentielle dans les laboratoires de sciences de la vie ; pour l'instant, cela n'a pas grand sens en informatique ou en mathématiques et a fortiori dans les disciplines littéraires. De même, la signification de certaines inconduites, comme le plagiat ou l'autoplagiat, change selon les disciplines : là où, dans les disciplines littéraires et dans les sciences humaines, la reprise de quelques éléments textuels apparaît totalement inadmissible, elle peut être tolérée dans d'autres secteurs où l'écrit scientifique est plus paraphrastique, à condition de mentionner ses sources et de circonscrire le réemploi à la formulation d'idées générales, sans l'étendre aux résultats obtenus. Les disciplines très expérimentales, comme la biologie et les sciences médicales, sont toutes très concernées par la fabrication et la falsification de données, et ce d'autant plus que de multiples facteurs susceptibles d'influer sur les résultats viennent souvent faire échec à leur reproductibilité. En physique, les questions se posent de façon différente, car il est d'usage de refaire systématiquement les mêmes expériences dans différents laboratoires. Et, en informatique, ces questions se formulent encore dans des termes différents en cela qu'un programme qui ne marche pas ne résulte généralement pas d'une falsification consciente des données, mais d'une erreur...

...Un système peut très bien marcher dans certains cas, mais pas dans tous, et le concepteur cache les cas où cela ne marche pas pour pouvoir mieux le vendre ?

Bien évidemment, la recherche en informatique n'est à l'abri ni des critiques, ni des comportements déviants. Mais, du fait de sa nature particulière, la fabrication et la falsification y sont beaucoup moins courantes que dans les sciences de la vie. Il suffit d'ailleurs de jeter un coup d'œil sur des sites comme PubPeer pour s'en rendre compte. En effet, les programmes informatiques constituent en eux-mêmes des résultats tangibles que tous peuvent utiliser et tester. Sans doute, certains de ces programmes ne sont-ils pas correctement validés, ce qui conduit, de temps à autres, à des catastrophes. Toutefois, en général, cela ne relève pas d'une tricherie consciente. Le plus souvent, la négligence en est la cause. De plus, cette validation incombe plus aux industriels qu'aux universitaires, sauf quand ces derniers cherchent à développer des procédures de validation ou qu'ils prétendent avoir procédé à ces validations.

Dans le nouvel arrêté de mai 2016 sur le diplôme national de doctorat, il est stipulé que les Écoles Doctorales doivent veiller « à ce que chaque doctorant reçoive une formation à l'éthique de la recherche et à l'intégrité scientifique ». Est-ce une bonne chose ?

Oui, je crois que c'est une excellente chose, à condition toutefois que cela engage à une réflexion et que l'enseignement ne se résume pas à l'énoncé rébarbatif d'un catalogue de prescriptions. Dans ce but, il faudrait que les formations soient conduites sur un mode délibératif propre à faire prendre conscience des enjeux de l'éthique et de l'intégrité scientifique qui nous concernent tous directement en tant que scientifiques d'abord, en tant que citoyens ensuite. À cet égard, il faut souligner que l'un des aspects les plus intéressants de l'intégrité scientifique relève de l'épistémologie de chaque discipline. Bien sûr, l'intégrité ne se réduit pas à l'épistémologie ; à l'évidence, l'appropriation indue du travail d'autrui ou les conflits d'intérêts n'en relèvent pas. Mais, les dimensions propres à l'intégrité scientifique, celles qui la distinguent de la déontologie du fonctionnaire, – déontologie qui comprend la dignité, l'impartialité, la probité, l'obligation de neutralité dans l'exercice de ses fonctions, le respect du principe de laïcité etc. – tiennent au caractère distinctif de l'activité des chercheurs. Notre métier consiste à établir des connaissances neuves. Et, tant la production que la preuve de ces connaissances ne sauraient s'accommoder de tricheries. À défaut, en tant que scientifiques, nous ne servirions plus à rien, puisque le savoir que nous sommes censés établir ne reposerait que sur la tromperie. Ces constatations s'accompagnent nécessairement de considérations sur les fondements des sciences et de leurs applications. Cela diffère selon la discipline ; la validation n'est pas identique en physique, en biologie, en médecine ou en anthropologie. En l'occurrence, en informatique, nous devons non seulement prouver que nos algorithmes sont corrects, mais on devrait aussi s'intéresser à la légitimité des usages que l'on fait de ces algorithmes. Pour bien comprendre, prenons un exemple : les algorithmes d'apprentissage font de l'induction à partir d'un grand nombre d'exemples qu'ils généralisent. Les résultats obtenus prouvent indubitablement leur capacité à détecter des corrélations entre variables sur de très grandes masses de données. Ces corrélations permettent, dans certains cas, de faire des prédictions très fiables. Cependant, lorsque les variables ont mal été choisies, ou bien que l'on souhaite étendre les prédictions très au-delà du domaine couvert par les exemples, l'emploi de ces modèles devient très périlleux. Ainsi, aux États-Unis, on évalue les probabilités de récidive sur la base d'un questionnaire appelé LSI-R [14], puis, en se fondant sur ces évaluations, on condamne plus sévèrement les personnes qui ont plus de risques de rechute. Or, ce questionnaire désavantage les personnes qui vivent dans des quartiers défavorisés, car ils ont plus de chances d'avoir été arrêtés par la police dans le passé, même s'ils n'ont commis aucun acte répréhensible. Nous nous trouvons là, avec cette utilisation de modèles statistiques, face à ce que l'on appelle des « prophéties auto-réalisatrices », en ce que les résultats du questionnaire LSI-R induisent une sévérité accrue pour des personnes qui vivent dans un environnement urbain pauvre, sévérité qui elle-même réduit les chances de trouver du travail pour ceux qui ont été condamnés et donc accroît les probabilités de récidiver. Dans un registre un peu différent, les modèles de prédiction appliqués au domaine boursier sont entraînés sur de grandes quantités d'exemples tirés de situations ordinaires. Or, ces exemples ne correspondent pas aux situations de crises. Les modèles statistiques apparaissent donc inappropriés à ces situations, car ces dernières s'éloignent considérablement du domaine des exemples fournis. Il ne faut donc pas s'étonner que ces modèles conduisent à des catastrophes dans ces cas de figures extrêmes.

14. Level of Service Inventory - Revised.

Est-ce suffisant de former de jeunes chercheurs ? N'y a-t-il pas un engrenage qui vient plus tard lorsque le chercheur est contraint à une productivité forcenée, le fameux « publish or perish », ou lorsque des intérêts financiers sont en jeu, et en ce cas, comment réagir ?

Non, bien entendu, il faut aussi former tous les personnels de la recherche et s'interroger sur ce qui conduit certains à déroger aux règles les plus élémentaires de la probité. L'évaluation chiffrée de l'activité fondée sur la seule prise en considération des publications scientifiques dans des revues à haut facteur d'impact conduit parfois quelques collègues à des dérives. De même, la recherche de financements peut amener à des compromissions. Aussi, il faut se rappeler, même si cela apparaîtra quelque peu naïf, qu'un idéal de chercheur doit toujours nous guider dans notre vie de scientifique. Il serait donc souhaitable que tous réactivent, de temps à autres, ce que furent leurs motivations initiales lorsqu'ils ont choisi ce métier. Sans doute n'est-il pas vraiment nécessaire de rappeler les règles de déontologie du scientifique, car tous les connaissent peu ou prou. En revanche, se demander, même – et peut-être surtout – après plusieurs années d'activité, quelles finalités nous poursuivons lorsque nous publions, lorsque nous déposons des dossiers à des appels d'offre, lorsque nous cherchons à recruter des collaborateurs ou lorsque nous signons des contrats avec des organismes de recherche ne semble pas inutile...

Que dire aux chercheurs qui déplorent que les procédures relatives au contrôle de l'éthique leur compliquent la vie et ralentissent la mise en place et le développement de leurs projets de recherche ?

Effectivement, on peut craindre que le respect de certaines procédures alourdisse un peu le travail. Cela dépend des procédures. Lorsqu'il s'agit de faire signer un consentement éclairé aux sujets engagés dans une étude, ça n'est ni très difficile, ni très long. Si cela consiste à réfléchir à la nature des flux d'information pour éviter, dans la mesure du possible, de faire circuler et de déporter des données personnelles, cela ne ralentit pas nécessairement beaucoup le travail et cela offre des arguments importants pour convaincre des utilisateurs potentiels et, surtout, pour éviter un rejet de la science et de la technologie dans la société. Au-delà, l'éthique peut aussi susciter de nouveaux sujets d'investigation, en particulier en informatique où les conséquences sociales du déploiement massif d'algorithmes dans tous les secteurs apparaissent de plus en plus grandes. À titre d'illustration, mentionnons les recherches sur la conception protégeant l'intimité (*privacy by design*), la fouille de données préservant l'intimité (*privacy preserving data mining*) ou l'anonymisation de données.

Au reste, soulignons que s'il s'agit d'empêcher les tricheries, cela prend du temps, mais c'est indispensable pour rester crédible...

Voici une question un peu provocatrice : réfléchir sur ces problèmes d'éthique, constituer des comités, rédiger des rapports, faire des recommandations, cela a-t-il un impact réel sur les orientations de la recherche, sur ses acteurs, sur ses financeurs ?

Les questions d'éthique et d'intégrité scientifique ont eu un impact effectif sur les financeurs et sur les acteurs de la recherche. Les procédures mises en place par les opérateurs de la recherche aux États-Unis et en Europe en attestent. La présence de rapporteurs chargés d'examiner les points éthiques litigieux des projets soumis à la commission européenne, après leur classement, paraît tout à fait révélatrice d'une évolution récente. Il en va identiquement avec la mise en place de comités opérationnels d'éthique – que l'on appelle aussi des IRB, des IEC des ERB ou des REB – et de référents « déontologues » dans les organismes de recherche. Cela change la pratique de la recherche en laboratoire, en particulier lors d'expérimentations animales ou humaines où certaines pratiques qui eurent lieu il y a trente ou quarante ans apparaissent désormais inconcevables, sauf dans des cas exceptionnels comme celui de Paolo Macchiarini. Ainsi, aujourd'hui, on doit systématiquement faire signer un formulaire de consentement éclairé aux sujets humains impliqués dans une expérience, même si cette expérience n'est pas invasive, comme c'est le cas lorsqu'on évalue des interfaces homme-machine. Les expérimentations animales sont elles aussi soumises à des règles très strictes. De même, on s'engage tous à rendre anonymes les données personnelles sur lesquelles on travaille ; à ne pas les diffuser et à ne pas les conserver. Enfin, comme on vient de le voir, l'éthique suscite de nouvelles orientations de recherche.

Pour finir, quelles orientations souhaites-tu donner au COMETS ?

Je viens de prendre la présidence du COMETS et les orientations ne sont pas encore totalement définies, car elles dépendront des souhaits de l'ensemble des membres du comité. Ceci étant, à titre personnel, je souhaiterais que l'activité du COMETS ne se limite pas exclusivement à l'examen des questions d'intégrité scientifique et d'exercice de la recherche dans les laboratoires. Ces questions apparaissent importantes. Il ne s'agit pas de le nier, mais, au cours de la mandature précédente, elles ont été beaucoup traitées et ce de façon très efficace. Les avis sur le traitement des écarts à l'intégrité, sur l'évaluation scientifique, sur la notion d'excellence et sur l'importance des nouveaux médias en témoignent. Il en va de même avec la « Charte Nationale de Déontologie des Métiers de la Recherche »[15] à laquelle le COMETS a grandement participé et avec le « guide »[16] qui a déjà été adopté par la Conférence des Présidents d'Université.

Aujourd'hui, il me semble qu'à l'heure où le financement de la recherche par projets se fait de plus en plus pesant, la question de la liberté de la recherche, et corrélativement, celle de la responsabilité du chercheur, pourraient être posées et ce, en deux sens. D'un côté, il s'agit de se demander si les chercheurs sont toujours libres de choisir leurs sujets d'étude ou s'ils doivent uniquement répondre aux demandes formulées par les pouvoirs en place ou par les citoyens. Et, d'un autre côté, il faut se demander si tous les sujets de recherche sont admissibles, autrement dit, si l'on peut rechercher sur tout, ou s'il est des recherches dont les conséquences sur l'humanité seraient trop dangereuses pour qu'on les poursuive. Il m'apparaît aussi que la finalité des financements par projet demande à être discutée. Les interrogations suscitées par la conservation du patrimoine et de la mémoire collective semblent aussi fort importantes, surtout à l'heure où les mémoires numériques se développent au rythme que nous connaissons.

15. `http://www.cnrs.fr/comets/spip.php?article133`
16. Un guide pour promouvoir une recherche intègre et responsable, `http://www.cnrs.fr/comets/spip.php?article91`

Enfin, je crois que beaucoup de questions ayant trait aux conséquences éthiques des travaux de recherche très contemporains en biologie, en particulier avec la biologie de synthèse, en climatologie ou en informatique, avec le traitement des masses de données et l'utilisation qui en est faite, avec la cryptographie et la *blockchain*, ou avec les véhicules autonomes, pourraient retenir notre attention.

Jean-Gabriel Ganascia est professeur d'informatique à l'université Pierre et Marie Curie et membre senior de l'Institut universitaire de France. Il poursuit ses recherches au LIP6 (Laboratoire d'informatique de Paris VI) et au sein du Labex OB-VIL (Observatoire de la vie littéraire) dont il est le directeur adjoint. Spécialiste d'intelligence artificielle (EurAI Fellow), d'apprentissage machine et de fouille de données, ses recherches actuelles portent sur le versant littéraire des humanités numériques, sur la philosophie computationnelle, sur l'éthique computationnelle et sur l'éthique des technologies de l'information et de la communication. Son intérêt pour les conséquences éthiques du développement des technologies de l'information et de la communication est ancien et il a publié plusieurs articles sur ce sujet.

Christine Froidevaux, qui a réalisé cet interview, est professeure d'informatique à l'université Paris-Sud, et vice-présidente de la Société Informatique de France.

Ce texte est reproduit avec l'accord de la Société Informatique de France.

Plagiat - pratiques éditoriales douteuses - conflits d'intérêts

Un aperçu du travail du Comité d'éthique de la Société Européenne des Mathématiques

• N. Schappacher

Dass niemals ein Mensch demjenigen adäquat handeln werde, was die reine Idee der Tugend enthält, beweist gar nicht etwas Chimärisches in diesem Gedanken. [1]

Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, A 315 / B 372.

1. Vous avez dit « Comité d'éthique ? »

L'éthique est-elle un métier ? Traditionnellement la réflexion éthique fait partie du répertoire professionnel des philosophes. Si les systèmes élaborés d'éthique sont sans doute moins fréquents aujourd'hui que par le passé, des philosophes professionnels continuent à être sollicités régulièrement pour intervenir sur des sujets d'éthique, que ce soit vis-à-vis du grand public (dans la tribune d'un journal, à la télévision...) ou pour l'ouverture d'un colloque scientifique. L'autre métier lié à l'éthique est celui des curés et théologiens. Mais comme je discuterai ici dans une publication française de quelques aspects de l'éthique des sciences, le principe de laïcité me permet de passer sous silence le métier religieux. Rappelons toutefois en passant que la laïcité n'a pas été aussi prestement appliquée après la Révolution française que le mètre, par exemple. Même la *Déclaration des droits de l'homme et du citoyen* de 1789, principale liste d'axiomes de notre éthique rationnelle, invoque encore les *auspices de l'Être suprême*. Les concrétisations de la laïcité en France ont résulté en fait du contexte de l'affaire Dreyfus – et ne valent donc encore aujourd'hui que pour la partie de la France métropolitaine qui fut territoire français en 1905, épargnant ainsi par exemple les facultés de théologie des universités de Strasbourg et de Metz.

S'il existe donc des compétences professionnelles en éthique, aucun entraînement ni examen d'entrée n'est exigé des membres des comités

1. Ma traduction : le fait qu'aucun homme n'agira jamais en accord avec ce que contient l'idée pure de la vertu ne prouve en rien que cette idée ait quelque chose de chimérique.

d'éthique, dont le nombre ne cesse de croître depuis plusieurs décennies. Ceci peut paraître comme un défaut inévitable, surtout dans le cas des comités d'éthique disciplinaires, comme celui de la *Société européenne des mathématiques*, EMS. L'observation peut néanmoins nous aider à mieux comprendre le vrai rôle des comités d'éthique d'aujourd'hui.

Les comités d'éthique actuels dans le domaine de la science fonctionnent comme tampons entre des institutions établies de la communauté scientifique d'une part et certaines critiques de la pratique scientifique, réelles ou redoutées, d'autre part, que ces dernières proviennent de l'intérieur de la communauté scientifique ou de l'extérieur, de l'espace public. Ces comités permettent donc aux institutions scientifiques, ou aux gouvernements, de faire valoir des points de vue ou d'exercer un certain contrôle sans pour autant en prendre la responsabilité immédiate. [2] En même temps leur autonomie relative peut mettre les institutions qui les ont créés dans la ligne de mire du travail du comité. [3] Dans ces conditions, choisir des collègues comme membres d'un comité d'éthique est un exercice subtil pour lequel aucune méthode avérée ne semble connue. Ceci d'autant moins que le choix est souvent compliqué par d'autres contraintes ; dans le cas de l'EMS par exemple, par l'équilibre souhaité des pays représentés...

Qui pense éthique pense souvent *valeurs* : le bon, le juste, l'honnête, etc. Les scientifiques mobilisent eux aussi des valeurs dans leur pratique quotidienne. Les mathématiciens par exemple sont fiers de la rigueur de leurs démonstrations, ils insistent parfois sur la beauté d'un résultat ou d'une théorie, et certains attachent beaucoup d'importance à la manière dont on établit tel ou tel théorème. Plus généralement, chaque communauté scientifique élabore et soutient une notion de la bonne science, avec des récompenses destinées à ceux qui incarnent le mieux cet idéal. Il n'est pas superflu d'essayer de démêler les catégories de valeurs – éthiques, morales, scientifiques... – qui se chevauchent ici. Une première analyse donne une distinction un peu schématique entre trois niveaux de la réflexion éthique que j'utiliserai pour structurer mon argument.

2. La déontologie de la pratique scientifique

Le premier niveau est celui des valeurs *scientifiques* qui impliquent à elles seules des règles *déontologiques* qu'un bon scientifique doit respecter. Ici on ne fait donc pas appel à une réflexion proprement éthique. Prenons un exemple : si un critère de la bonne recherche est sa nouveauté, son originalité, un plagiat perturbe l'attribution correcte de la reconnaissance scientifique, qui est essentielle à l'organisation interne de la communauté scientifique. Le plagiat est donc déjà condamnable pour cette raison-là, qui est inhérente au projet de la science. Le même raisonnement permet de condamner un rapporteur anonyme qui exploite des idées d'un manuscrit, qu'il propose d'ailleurs de refuser, et qu'il ne citera jamais, ou de manière inadéquate. Ceci dit, l'appréciation de ce dernier cas peut aussi relever d'une responsabilité particulière par rapport aux jeunes talents, dont on peut penser qu'elle procède d'un principe plus fondamental que la simple hygiène interne du projet scientifique.

À ce premier niveau on n'impose à la pratique scientifique que les règles qu'elle a elle-même initiées. Aucune réflexion éthique propre n'est exigée, seulement l'exégèse soignée du projet scientifique. [4] Le Comité d'éthique de l'EMS a consacré ses premières années d'existence à un tel travail détaillé d'exégèse. Plus précisément le Comité d'éthique de l'EMS a été créé en 2010 par le Conseil exécutif de l'EMS pour qu'il se penche sur des comportements déviants dans le secteur de la publication mathématique, « comme par exemple le plagiat, la publication multiple, les citations inadéquates, les auto-citations exagérées, les rapporteurs malhonnêtes, et autres violations du code professionnel. » [5] On retrouve donc ici, appliquées au domaine des mathématiques, à peu près les trois lettres célèbres du discours de tous les comités chargés d'éthique des sciences : FFP, pour Fabrication, Falsification, Plagiat – avec la seule différence que la Fabrication ou Falsification de données ne concerne qu'assez rarement le travail propre des mathématiciens. Elles peuvent pourtant

2. Les comités d'éthique commencent à être étudiés dans la littérature qui réfléchit aux sciences, comme la sociologie ou politologie des sciences. Le livre [3] essaie d'analyser ce rôle tampon, pour la mise en place des comités d'éthique français dans le domaine des sciences de la vie. Cette thèse allemande, parfois un peu lourde, s'appuie sur la notion foucaldienne de *gouvernementalité* d'une part, et transpose d'autre part aux comités d'éthique l'analyse critique que Dominique Pestre a exigée du postulat de la science participative.
3. Ceci est effectivement arrivé par le passé à l'EMS par rapport à son Comité d'éthique.
4. Cf. [5].
5. Je traduis du texte du mandat du comité lors de sa création.

avoir lieu, par exemple lors de la vérification numérique d'une conjecture.

Or ce qui est élémentaire n'est pas forcément trivial. La première grosse tâche du comité, sous son premier président Arne Jensen de l'université d'Aalborg au Danemark, était donc d'élaborer un *Code of Practice* (CoP) de la publication mathématique. La rédaction de ce document fut achevée au printemps 2012 ; il fut accepté par le conseil exécutif de l'EMS en octobre et entra en vigueur il y a environ cinq ans, le 1er novembre 2012. Je n'étais pas membre du comité à l'époque mais il paraît qu'à toutes ses étapes, de la conception à l'acceptation officielle du document, en passant par sa rédaction pointilleuse, la mise en place du CoP a été marquée par des discussions vives et intenses. Le texte final qui en est le résultat est franc et clair. Il essaie de prendre en compte certaines situations assez concrètes. Le texte du code est reproduit en annexe ; le lecteur peut aussi le télécharger sur la page web du comité. [6] Ce CoP n'existe qu'en anglais ; il n'est pas traduit en français ici par peur d'introduire des imprécisions.

Depuis 2012, la plupart des sociétés mathématiques membres de l'EMS, dont la SMF au nom de ses publications, ont formellement adhéré au CoP. D'autres, notamment la *London Mathematical Society* LMS, n'ont pas adhéré au texte rédigé par le comité européen, mais ont tout de même laissé entendre qu'elles en soutiennent les principes sous-jacents.

Pour le mathématicien λ (ou μ) le CoP peut servir de rappel succinct des règles quotidiennes du métier – on pourrait par exemple le distribuer en même temps que la charte informatique qu'on donne à lire aux nouveaux membres d'une unité de recherche – et d'aide déontologique face à une interrogation concrète. Il peut aussi éventuellement amener le lecteur à une réflexion plus poussée.

Au Comité d'éthique de l'EMS le CoP fournit le cadre officiel des discussions. Ce cadre n'a pas vocation à changer rapidement ; l'élaboration d'un CoP et sa ratification par les sociétés nationales membres de l'EMS n'est finalement pas un exercice qu'on refait tous les trois ans. Mais le monde ne s'arrête pas pour autant, et le domaine des publications scientifiques est en plein bouleversement.

Par exemple, lors de la dernière réunion du comité, en septembre 2017 à Madrid, nous avons entendu un rapport interne accablant, reposant sur des témoignages directs, montrant comment un journal mathématique autrefois respecté s'est vu transformé en pure entreprise lucrative après son acquisition par un grand éditeur de revues en *open access* payant. Constatant le déclin de cette revue le *Zentralblatt* a même arrêté de la recenser. L'exemple montre à quel point il est nécessaire aujourd'hui de vérifier à quel type de périodique on soumet ses articles. On peut d'ailleurs se demander si certains collègues distingués qui figurent toujours, photos comprises, sur la page web du journal comme membres du comité de rédaction se sont bien rendu compte du virage pris. [7]

De tels exemples posent, entre autres, la question de la réactivité du comité alors que le CoP restera inchangé encore quelque temps. Or, les toutes premières réflexions sur le CoP au sein du Comité d'éthique de l'EMS avaient déjà été nourries par un petit nombre de cas concrets de fraude. D'autres s'y sont rajoutés depuis, dont certains ont été officiellement reçus et examinés par le Comité et sur lesquels il s'est prononcé, conformément à la procédure dont les principes sont énoncés dans la dernière partie du CoP. Celle-ci commence par la phrase [8] : *le comité ne considérera que des cas qui lui sont formellement soumis par des personnes ou institutions impliquées dans les allégations de comportement non éthique*. Voir la section 5 ci-dessous pour une évocation de cas traités.

Certains cas traités, joints à nos observations du monde des publications mathématiques ont amené le Comité d'éthique de l'EMS à rédiger des remarques sur le CoP qui figurent sur la page web du comité comme *Comments on the EMS Code of Practice*. La dernière mise à jour de ces remarques jusqu'ici a été entérinée à Madrid en septembre 2017. Elle marque d'ailleurs la fin de la présidence du Comité d'éthique de l'EMS par Adolfo Quirós de l'Universidad Autónoma de Madrid. Quoiqu'elles n'engagent que la responsabilité du Comité d'éthique de l'EMS, nous suggérons évidemment de les prendre en compte en même temps que les parties correspondantes du code.

Voici un exemple : déjà en 2016 nous avions rajouté à la première partie du CoP, sur les responsabilités des auteurs, un commentaire appelé *A6* sur le fait que le directeur d'une thèse ne co-signera a priori pas la publication des résultats de cette thèse.

6. `http://www.euro-math-soc.eu/committee/ethics`
7. Le Comité d'éthique de l'EMS prépare une petite note sur ce cas dans la *Newsletter of the European Mathematical Society*.
8. Que je traduis ici tout en renvoyant le lecteur à la version anglaise en annexe, alinéa P1, qui fait foi.

Ce commentaire a été rendu plus explicite lors de la réunion de Madrid en 2017. Bien que les pratiques à cet égard ne soient pas forcément les mêmes dans toutes les branches des mathématiques, il nous a néanmoins semblé très important de souligner ce qui fait, et ce qui ne fait pas, partie intégrante du rôle de directeur de thèse. Ce rappel s'impose concrètement au vu des pratiques de plus en plus envahissantes d'évaluation des départements universitaires par les indices bibliométriques, pratiques qui créent toujours plus de pression pour les enseignants-chercheurs à maximiser n'importe comment le nombre de leurs publications.

Le fait que la sanction des fraudes du type FFP discutées dans cette section se déduit des principes mêmes de la pratique scientifique se reflète aussi dans le fait qu'elles sont typiquement découvertes par des pairs. [9] En partant de cette observation et selon la nature des institutions impliquées, on peut réfléchir à la possibilité de mettre en place une protection des sonneurs d'alarme, des *whistle-blowers*. Mais le Comité d'éthique de l'EMS est loin des tutelles des mathématiciens concernés. Il se borne donc à étudier les soumissions de cas concrets qui lui sont présentées par des personnes directement concernées.

3. Les conflits d'intérêts

La déontologie de la pratique scientifique dont il a été question dans la section précédente a une propriété formelle qu'il n'est pas inutile de relever explicitement : afin de pouvoir sanctionner un collègue pour une faute déontologique commise du genre FFP, il faut que cette faute soit effectivement avérée. Un plagiat qu'on ne peut pas établir (en comparant des textes) ne peut pas être condamné. La déontologie de la pratique scientifique ne vise que les types de fraude pour lesquels il peut y avoir présomption d'innocence.

Ceci a l'air banal, mais c'est précisément ce qui change dans ce que j'associe au deuxième niveau des réflexions d'éthique. Je regroupe ici tous les cas de figure où l'apparence, le soupçon d'un comportement inacceptable suffit pour réagir au nom de l'intégrité scientifique. [10] Les exemples types en sont les *conflits d'intérêts*. Troublée par des débats autour de quelques décisions prises par des comités travaillant pour l'EMS, la présidence de la société a demandé au Comité d'éthique en 2016 de préparer un texte de référence sur les conflits d'intérêts. Notre rédaction, qui s'inspire de nombreux textes analogues adoptés par d'autres institutions, fut terminée lors de la réunion du Comité à Strasbourg en février 2017 et accepté par le Conseil exécutif de l'EMS au mois de mars 2017. Le texte est joint en annexe. Je traduis librement de l'introduction :

> Les mathématiciens fonctionnent typiquement à l'intérieur de structures comme les universités, les instituts de recherche, ou bien de comités. Leurs devoirs se déduisent des missions de ces institutions et de la nature des responsabilités que les mathématiciens acceptent. Le but des directives suivantes est d'aider les mathématiciens à reconnaître des conflits d'intérêts possibles et/ou ressentis pour qu'ils puissent de bonne foi exprimer, gérer et résoudre de telles situations.
>
> Poursuivre ses intérêts personnels n'est a priori nullement répréhensible. Mais un conflit d'intérêts se manifeste quand des intérêts personnels interfèrent dans le jugement indépendant exigé des personnes qui exercent des devoirs et/ou responsabilités. Les membres d'un comité ont la responsabilité d'éviter des situations qui constitueraient, ou qui pourraient apparaître comme constituant un conflit d'intérêts. Par conséquent ils doivent être obligés de respecter un niveau élevé de conduite et découragés de poursuivre leurs intérêts personnels aux dépens des institutions ou de la communauté mathématique.

Dans beaucoup de tels conflits, les deux intérêts qui se contredisent sont en fait éthiques au sens originel, aristotélicien du mot : ils articulent chacun des types de bonne conduite sur laquelle se base la société, la *polis*. Et ceci quand bien même la tension du conflit pourrait être décrite comme l'opposition entre valeurs individuelles et collectives.

Imaginons le directeur d'une unité de recherche qui a une fille extrêmement douée et dont les derniers travaux publiés, excellents et innovateurs, viennent tout à propos pour renforcer une équipe

9. Pour rappeler un exemple d'en dehors des mathématiques, les premiers doutes par rapport aux illustrations d'Olivier Voinnet ont été soulevés par des rapporteurs, et ensuite répercutés par le site *PubPeer*.

10. Pour l'histoire de l'anglicisme *intégrité* qui est devenu si courant dans ce contexte, voir [5], pp. 54-56.

de l'unité qui vient de perdre un collaborateur. Selon la déontologie de la pratique scientifique (voir la section précédente), il serait bien que ce directeur mette tout en œuvre pour recruter sa fille sur le poste qui s'est libéré. C'est l'intérêt même de la science, de la qualité de la recherche de son unité qui l'exige ; j'ai bien dit que la fille est brillante et correspond parfaitement au profil du poste vacant. Mais bien sûr, s'il le fait, on le soupçonnera d'un geste paternel, d'un abus de son influence.

J'ai inventé cet exemple fictif pour mettre en évidence la différence entre les deux niveaux de réflexion éthique qu'on a vus jusqu'ici. Du coup il permet peut-être aussi de comprendre pourquoi les règles de conduite face aux conflits d'intérêts, venues d'abord du monde anglo-saxon, ont mis si longtemps à être adoptées en France. Voir par exemple à ce propos l'étude détaillée [2].

Dans la réalité du terrain les conflits d'intérêts concernent le plus souvent des affaires d'argent, et leur virulence augmente avec l'importance des montants impliqués. Le mathématicien pur s'attendra tout au plus à voir des cas qui tournent autour d'une conférence prestigieuse, d'une médaille, du financement d'un projet de recherche, ou d'un poste. Dans les domaines des mathématiques appliquées le paysage devient plus vaste – et s'ouvre sur d'autres terrains. Quel est le prix pour une critique circonstanciée de la pertinence d'une inférence statistique qui prétend montrer le caractère cancérogène du glyphosate ?

4. L'éthique peut bloquer la science

Il y a bien un troisième scénario : celui où les impératifs éthiques sont en contradiction potentielle ou manifeste avec des projets scientifiques. Par exemple, des expériences humaines pourraient offrir des progrès rapides et définitifs à la recherche médicale. C'est à cause des droits de l'homme reconnus que la plupart de telles expériences sont aujourd'hui exclues. Ce ne sont donc point les valeurs scientifiques, mais nos principes éthiques, les droits de l'homme, qui limitent ici effectivement la quête scientifique.

Bien qu'une telle opposition entre des valeurs éthiques et le projet scientifique n'ait au fond rien de surprenant, beaucoup de scientifiques, trop imprégnés de l'idée de la science comme bienfaitrice de l'humanité, peinent à en admettre la possibilité, ou du moins l'importance. Ainsi, malgré les procès de Nuremberg contre les médecins nazis il a fallu plusieurs décennies de recherche historique pour établir le fait que la plupart des expériences humaines réalisées dans les camps de concentration n'étaient pas seulement des exactions de docteurs sadiques, mais s'inséraient bel et bien dans des programmes de recherche scientifique acceptés à l'époque ; ces médecins profitaient de l'espace hors la loi des camps pour réaliser ces expériences illégales. La rationalité scientifique de certaines expériences criminelles peut même refaire surface, et poser problème, bien des années plus tard [11] :

> En avril 1988, la revue scientifique renommée *Science* rapportait [7] une controverse qui avait lieu aux États-Unis parmi les scientifiques de l'*Environmental Protection Agency* (EPA) à Washington. Dans une lettre ouverte adressée au directeur de l'EPA de l'époque, Lee Thomas, plus de vingt scientifiques protestaient contre l'emploi par l'EPA de données résultant d'expérimentations humaines effectuées [pendant la deuxième guerre mondiale] dans le camp de concentration du Struthof [près de Strasbourg]. À cette époque-là, l'EPA vérifiait les valeurs d'émission admissibles de phosgène, lequel est utilisé à grande échelle par l'industrie chimique pour la production de matières plastiques et de pesticides. La protestation s'élevait contre l'emploi du rapport du médecin allemand Otto Bickenbach concernant les résultats de ses expériences sur des prisonniers du camp de concentration du Struthof. Son rapport avait été mis à la disposition d'une entreprise sous contrat de l'EPA, qui devait développer un modèle mathématique de l'effet toxique du phosgène.
>
> Grâce à ces informations, les chercheurs américains avaient l'intention de confirmer les données obtenues lors d'expériences sur des animaux. En effet, les résultats sur la toxicité, obtenus sur des animaux, ne sont pas forcément transposables à l'homme. Cette contestation de l'utilisation des données obtenues au Struthof a été reprise par les

11. Je cite du début du chapitre [6].

> médias. Afin de ne pas se voir davantage reprocher publiquement d'utiliser des données obtenues grâce à des expériences humaines criminelles nazies, Lee Thomas s'efforça de limiter les dégâts. Fin mars 1988, il déclara que l'EPA renonçait à une analyse secondaire de ces données.

En face d'un tel affrontement entre l'éthique et le projet scientifique, on ne peut pas négocier. L'éthique réclame la préséance. Elle parle au nom de l'humanité, alors que la science n'est qu'un projet particulier de notre civilisation. Les droits de l'homme nous interdisent de sacrifier quelques êtres humains pour en sauver beaucoup d'autres.

Mais d'où l'éthique puise-t-elle la force de faire face à la science ? Dans la solidité de ses arguments d'une part, et dans l'accord de la société de l'autre. Même si les choses sont finalement toujours réglées par rapport à la société et dans un processus politique, pour lequel les détails des arguments d'éthique pourraient paraître secondaires, j'ai fait l'expérience de ce que la transparence de l'argumentation éthique est vitale pour une compréhension adéquate des débats menés, que ce soit à l'intérieur d'un comité d'éthique ou dans l'espace public. Ceci est très frappant par exemple dans les débats et affrontements autour des expériences animales pour la recherche scientifique, où les deux camps montrent très souvent une tendance fâcheuse à confondre différents fondements de l'éthique animale [12], soit pour élargir, soit pour réduire le périmètre des expériences justifiables. Des observations analogues s'appliquent à d'autres interpellations éthiques de la science actuelle, telles la gestion durable ou le changement climatique. Ce n'est pas parce qu'on fait face à des intérêts économiques énormes qu'on a le droit de négliger sa propre argumentation.

Le Comité d'éthique de l'EMS ne s'est pas encore occupé des questions éthiques dont il est question dans ce paragraphe. Son mandat original ne le suggère pas, et un tel débat le pousserait sans doute à ses limites. Je les évoque tout de même ici car les mathématiciens ne sont pas, par la nature de leurs travaux, à l'abri de pareils chocs avec des principes éthiques. Chaque mathématicien appliqué qui collabore avec une équipe scientifique partage en réalité les problèmes éthiques de celle-ci, dans la mesure où les modèles mathématiques infléchissent naturellement la démarche des recherches, et peuvent donc être la cause, finalement assez directe, de certaines expériences à mener, ou à éviter. Le mathématicien qui se trouve dans cette situation doit donc aussi assumer la responsabilité éthique de l'équipe entière.

5. Un comité qui traite des plaintes individuelles

Personne ne se fera des illusions sur la capacité (pour ne parler que de celle-ci) d'un petit Comité d'éthique d'améliorer le monde. Et force est de constater que les membres du Comité n'ont jamais été formés pour mener des enquêtes. C'est surtout ce dernier point qui m'avait rendu assez sceptique au début, à l'idée d'intégrer un comité qui statue sur des cas qui lui sont proposés par des protagonistes, c'est-à-dire par les victimes présumées. Or en voyant le très grand soin avec lequel les cas sont traités mes doutes ont été apaisés. Ensuite j'ai aussi compris l'importance de cet exercice pour la réflexion continue du comité.

Ceci dit le nombre de cas dont le Comité d'éthique de l'EMS a été saisi est petit, jamais plus de 4 cas par an – ce qui représente néanmoins une charge de travail non négligeable. L'existence du CoP et du comité n'est probablement pas très connue dans la communauté. Adolfo Quirós [2016] remarque aussi que beaucoup de problèmes sont résolus en interne ou en suivant les procédures établies par les journaux en question. Il m'est impossible d'estimer combien il peut y avoir de tels cas qui n'ont pas été portés à notre connaissance. Pour finir, afin de donner au moins une idée sommaire des cas traités par le Comité d'éthique de l'EMS, je traduis librement [et en commentant] de [4] :

> Comme on pouvait s'y attendre la plupart des cas concernent des plagiats [ou plus généralement des questions autour du rôle de personnes nommées comme auteurs d'un travail]. Il y a pourtant aussi des plaintes concernant des rapporteurs malhonnêtes, des traitements impropres [par des comités de rédaction] de manuscrits soumis, ou le refus de la part d'un journal de publier

12. Par exemple confusion entre des approches utilitaristes (comme celle de Peter Singer) et une éthique de compassion (comme celle d'Ursula Wolf), et d'autres réflexions profondes en la matière (comme celles de Jacques Derrida). Pour un panorama de grande envergure voir toujours [1].

des amendements demandés. Tous les cas de plagiats ne sont pas de la même sorte, et il n'est pas toujours facile de distinguer entre plagiat, référence impropre, ou encore résultats découverts indépendamment dans un domaine de recherche très actif. Le Comité fait alors appel à des évaluations par des experts indépendants.

Mais il y a aussi des cas de plagiats flagrants, des copiés-collés de longs passages, voire d'articles entiers (à l'exception du titre). On se demande alors comment ceci a pu échapper aux rédacteurs et aux rapporteurs. En fait ce phénomène est le plus souvent lié au fait que le plagiat a été publié dans un journal-arnaque (*predatory journal*) où la seule chose qui compte est de payer le tarif de publication, c'est-à-dire de la mise en ligne. Dans ces cas les « auteurs » coupables se sont généralement excusés rapidement, mais il était impossible d'obtenir une réaction de l'éditeur ou de la « rédaction », voire d'obtenir le retrait de l'article.

Références

[1] E. De Fontenay. *Le silence des bêtes: La philosophie à l'épreuve de l'animalité*. Fayard, 1998.

[2] M.-A. Hermitte et P. Le Coz. « La notion de conflit d'intérêts dans les champs de la santé et de l'environnement : regards philosophique et juridique ». *Journal international de bioéthique* **25**, nº 2 (2014), p. 15–50.

[3] S. Könninger. *Genealogie der Ethikpolitik: Nationale Ethikkomitees als neue Regierungstechnologie. Das Beispiel Frankreichs*. transcript Verlag, 2016.

[4] A. Quirós. « The EMS Ethics Committee: Work and Perspectives ». *Newsletter of the European Mathematical Society*, nº 10 (June 2016), p. 4–5.

[5] S. Roux. « Intégrité, éthos scientifique, fraudes et négligences ». *L'Archicube (Revue de l'Association des anciens élèves, élèves et amis de l'École normale supérieure)*, nº 19 (déc 2015), p. 52–70.

[6] F. Schmaltz. « Otto Bickenbach et la recherche biomédicale sur les gaz de combat à la Reichsuniversität Strassburg et au camp de concentration du Struthof-Natzweiler ». In : *C. Bonah et al. (eds.), Nazisme, science et médecine*. Édition Glyphe, 2006, p. 141–303.

[7] M. Sun. « EPA bars use of Nazi data ». *Science* **240**, nº 4848 (1988), p. 21–22.

Norbert Schappacher
http://irma.math.unistra.fr/~schappa/NSch/Home.html

Norbert Schappacher est professeur de mathématiques à l'université de Strasbourg. Après plusieurs décennies de travaux sur l'arithmétique des courbes elliptiques il s'est spécialisé dans le domaine de l'histoire des mathématiques, principalement du XIXe et XXe siècle, avec une attention particulière portée aux interactions entre mathématiques et politique. Il a été membre du COMETS, le comité d'éthique du CNRS, de 2011 à 2016. Il est depuis 2014 membre du Comité d'éthique de la Société mathématique européenne.

Je remercie chaleureusement Henri Carayol ainsi que les membres du Comité d'éthique de l'EMS des nombreuses remarques faites sur des versions antérieures de ce texte.

EMS Policy on Conflicts of Interest

Preamble

Mathematicians typically function in structures, such as universities, research institutes, or committees. Their duties derive from the missions of the institutions and from the nature of the responsibilities that they accept. The aim of these guidelines is to assist mathematicians to recognize possible and/or perceived conflicts of interest so that they can, in good faith, seek to disclose, manage, and resolve such situations.

There is *a priori* nothing wrong with pursuing personal interests, but a conflict of interest occurs when personal interests interfere with the independent judgment required from individuals in order to perform their duties and/or responsibilities.

Committee members have a responsibility to avoid situations that would constitute, or have the appearance of constituting, a conflict of interest. Therefore they must be held to a high standard of conduct, and discouraged from pursuing their own interests at the expense of institutions or the community.

Potential conflicts of interest of members of committees must first be considered in terms of any legal constraints and of the specified policies of the relevant institutions. In particular, EMS policies must be respected by members of EMS Committees. Nothing in this document should be construed as impinging on such existing constraints or upon the principle of academic freedom.

The guidelines proposed here apply to committees who are awarding EMS prizes, and to those who are selecting speakers at EMS Congresses and other EMS-organized scientific meetings. They can be extended, by analogy, to other EMS committees if the Executive Committee so decides.

Principles

In these guidelines the word *award* is used to mean both the award of a prize and the award of the distinction of being a speaker.

- Already the mere appearance of a conflict of interest may cast doubt on the integrity of the work of a Committee. Committee members should declare anything that, viewed from the outside, may appear as a potential conflict of interest.
- Committee members, and those who make nominations for an award, should be aware of the breadth of the class of people who are eligible for the award, and not, deliberately or inadvertently, be biased towards promoting or excluding candidates from a special subclass, such as, for example, those determined by gender, country of origin or employment, association with particular institutions, or areas of research (provided that that area is covered by the award).
  Also, they should not be unduly influenced by the standing of the person making a nomination.

Policy

- Every committee member has the responsibility to declare potential conflicts of interest promptly. Occasions to do so have to be provided officially by committee chairs; all parties involved then have a joint responsibility for handling issues related to conflicts of interest.
- Conflicts of interest may occur at different levels. When declaring a potential conflict of interest, its level should be indicated.
- The different levels of conflicts of interest, along with corresponding actions to be taken, may be illustrated as follows.

1. A committee member who has a (current or previous) personal relationship with a candidate should resign from the Committee as soon as this circumstance appears.
2. A committee member should resign if a recent PhD student or post-doctoral mentee is short-listed as a candidate. The same rule applies whenever a committee member had an active role in the candidate's work that is under consideration.
3. Whenever a committee member and a short-listed candidate have a close professional relationship, such as co-authorship,

association with the same grant, one of them being a sometime student or supervisor of the other, or the existence of a (recent or predictable future) close institutional connection between them, the committee member should be excluded from discussions of the candidate's file and leave the room.

– The Chair should decide whether a connection is sufficiently close to create the appearance of conflict of interest and, as a consequence, should request that the committee member resigns, respectively takes no part in the discussion concerning the relevant person, or should state that in fact there is no conflict of interest. In case it is the Chair who declares a potential conflict of interest, the Vice-Chair should make the decision.

Role of the Ethics committee of EMS

The Ethics Committee of the EMS will consider submissions concerning alleged conflicts of interest that mathematicians have failed to disclose, but only in relation to the EMS committees operating under these guidelines, as described in the preamble. These submissions will be handled using the procedures specified in the EMS Code of Practice.

Code of Practice

Approved by the EMS Executive Committee on 29th October 2012

Preamble

The *European Mathematical Society Ethics Committee* was created by the *Executive Committee* of the *European Mathematical Society* in the spring of 2010. The remit and the list of inaugural members of the Committee are given at the end of this Code.

The first task of the *Ethics Committee* was to prepare a Code of Practice; this is the present document. The Code was approved by the *Executive Committee* of the *European Mathematical Society* on October 29th, 2012, on the recommendation of the *Council of the European Mathematical Society*, and came into effect on November 1st, 2012.

The *European Mathematical Society* recommends that this Code be adhered to by all mathematicians, editors, and publishers of mathematics, especially those based in Europe, but more generally by all who are concerned with the publication, dissemination, and assessment of mathematical research.

It is recommended that this Code of Practice be taken into account by officials of universities and other institutions that employ European mathematicians when transgressions of the Code by their employees are drawn to their attention.

The Code emphasises ethical aspects of publication, dissemination, and assessment of mathematics. The *European Mathematical Society* considers the successful open and transparent publication and dissemination of mathematical research to be of the greatest importance for the future of our subject. Unethical behaviour in publication and dissemination contaminates and jeopardises the integrity and expansion of mathematics, and could have serious consequences for individuals.

The Code will be revised within three years, in the light of experience with cases analysed, and after consideration of comments received.

The *Ethics Committee* is willing to consider cases involving allegations of unethical behaviour in the publishing of mathematics. The practices that the Committee intends to follow are laid down in the section "Procedures", given below.

Code of Practice

In this section, we set out a code of good practice and ethical behaviour in the publication, dissemination, and assessment of mathematical research, and we specify what we consider to be misconduct or unethical behaviour in this area.

Responsibilities of authors

1. Individual researchers and authors should understand and uphold high standards of ethical behaviour, particularly in relation to the publication and dissemination of their research.

An aspect of good practice is the granting of proper credit, and the referencing of the work of others, with appropriate bibliographic references.

It is important to note that it is not unethical to be mistaken in the attribution, or lack of attribution, of results, provided that authors have carefully sought to determine whether their claimed results are new, and provided that errors of attribution are corrected in a timely and appropriate manner, as they are discovered or pointed out.

Publication of mathematical results as one's own when the author has learned of the results from others, for example through published material, lectures, conversation, or earlier informal publication, constitutes plagiarism: this is a form of theft, is unethical, and constitutes serious misconduct.

2. Each co-author should have contributed significantly to the research reported in any published work, and each person who contributed significantly to the relevant research should be named as a co-author. Further, all named authors should accept joint responsibility for any submitted manuscript and final publication. It is misconduct for one author to submit and to publish joint research without the consent of his or her named co-authors.

3. Most mathematics is published by the submission of manuscripts to journals or conference proceedings (including those that will appear only online), or by the writing of books. Our guiding principle is that an author or authors who submit a work to editors or publishers take responsibility for the integrity of what they have written, seeking carefully to ensure that the mathematics presented is correct and that the work of others is appropriately acknowledged.

4. In mathematics simultaneous or concurrent submission of a manuscript describing the same research to more than one publication constitutes misconduct. Similarly, in mathematics the publication of the same research in more than one journal or outlet without appropriate acknowledgement and citation constitutes misconduct.

5. Translations of published or unpublished works should always fully acknowledge the source of the work.

6. Mathematicians should not make public claims of potential new theorems or the resolution of particular mathematical problems unless they are able to provide full details in a timely manner.

Responsibilities of editors and publishers

1. It is recommended that journals publishing mathematics should establish and conspicuously present their standards for ethical behaviour in publishing, and specify their responsibilities and the steps to be taken to investigate and respond to suspicions or accusations of misconduct. Journals should respond to an author's complaints with respect and due process.

2. Editors should adhere to high standards of ethical treatment of all authors in arriving at a responsible and objective decision about publication. An editor should withdraw from any editorial duties that would involve a personal, commercial, or professional conflict of interest. An editor should also avoid any misuse of their privileged position or of information received as part of their editorial duties to influence the handling of their own papers, or those of colleagues, students, or personal acquaintances. Certainly no information received in confidence should ever be used in the editor's own work.

3. It is recommended that journals publishing mathematics should make clear their policy and practices for handling submissions. In particular, an editor or publisher should acknowledge receipt of a manuscript. A publisher should ensure that the progress of consideration of a submitted manuscript is monitored, and seek diligently to avoid excessive delays in either the refereeing of a paper or the decision process. The publisher must obtain consent to publish either from one author acting on behalf of all authors, or from all authors.

   The date of submission of, and the date of any significant changes to, a manuscript should be published; this is important, in particular, in cases of disputes concerning priority.

4. Publishers have an obligation to present mathematical papers and books in a clear and precise format, and they should ensure that

the mathematical symbols, words, and sentences that are used in the published work are clear and are not a barrier to understanding. It is misconduct on the part of publishers merely to reproduce without improvement submitted manuscripts that are badly written or presented.

5. Editors and publishers should consider carefully and make objective judgements about the acceptance of submitted manuscripts. Normally this will be on the basis of reports from appropriate referees, but the Committee recognises that it will sometimes be clear to editors that a submitted manuscript is considerably below the standards of the journal, or not in an appropriate subject area, and can therefore be rejected without submission to referees; in this case, the authors should be courteously informed of this rejection in a timely and reasoned manner.
6. The editors should inform potential authors of decisions taken in a courteous and timely manner, always passing on constructive criticism and information provided by the referees. Editors may decide that it is appropriate that certain comments provided by the referees should be confidential to the Editorial Board, and not passed on verbatim to the authors.
7. An author may communicate to the editors the information that a mathematical statement or an attribution in his or her published article is incorrect. In the case where this information is significant, it is recommended that the editors publish a correction or retraction, preferably written by the original author.
8. In some cases, it may be pointed out to the editors by another person that certain statements or attributions in an article appear to be incorrect. In these cases, the editors should consider the comments carefully and react in a proportionate manner; when appropriate, they should insist that the authors write a correction or retraction.
9. In rare cases, the editors may become convinced that parts of a work that they have published have been plagiarised from another source. In these cases, the editors should request the authors to submit for publication a substantial retraction; if this is not forthcoming, the editors themselves should publish a statement giving details of the plagiarism involved.
10. Many articles are first published on the journal web site. It may become apparent that an article so published contains mathematical errors, incorrect attributions, or has been plagiarised in whole or in part. It is recommended that publishers retain the original article for the historical record, but that they indicate by addition at a later specific date appropriate corrections, as they would for a printed article. In extreme cases, it may be that the publishers should indicate that the article has been "withdrawn" either at the request of the authors or by a decision of the publishers; in this case, any subsequent printed version should reflect this decision.
11. A publisher of journals or books should not list on any of its publications a person as 'editor' or 'editorial advisor' or similar without full disclosure of this to the person concerned and receipt of his or her explicit agreement. The name of any person who resigns from such a position must quickly be removed from the displayed list.
12. Any person listed as editor or editorial advisor should be aware of, and content with, the standards and editorial procedures and policies of the journal, and be willing to act in extreme cases when it is clear that the publishers are not following this Code.

Responsibilities of referees

1. Referees should adhere to high standards of ethical treatment of all authors in arriving at responsible and objective recommendations about the publication of material that they assess. Referees should seek to validate the correctness, significance, novelty, and clarity of a manuscript under consideration, and then report their findings to the editor in a careful and constructive manner. Nevertheless, final responsibility for the published work lies with the authors.
2. A person asked to accept the task of refereeing a paper may feel that there is a potential personal or professional conflict of interest, for example, when he or she is asked to referee a manuscript from a recent student, collaborator, or colleague. In such cases, the potential referee should discuss with the editor any possible conflicts of interest, and continue to act only with the agreement of the editor.

3. Once they have accepted the task of refereeing a manuscript, referees should seek to report in a timely manner, taking into account the length of the manuscript and the requests of the editors.
4. A referee should eschew the use of privileged information gleaned from a manuscript under review.
5. A referee who suspects any element of plagiarism in a manuscript under consideration, or any other unethical behaviour, should quickly report these concerns to the editor.

Responsibilities of users of bibliometric data

1. Whilst accepting that mathematical research is and should be evaluated by appropriate authorities, and especially by those that fund mathematical research, the Committee sees grave danger in the routine use of bibliometric and other related measures to assess the alleged quality of mathematical research and the performance of individuals or small groups of people.
2. It is irresponsible for institutions or committees assessing individuals for possible promotion or the award of a grant or distinction to base their decisions on automatic responses to bibliometric data.
3. It is unethical to manipulate references within an article or to arrange the publication of articles for the purpose of artificially influencing the bibliometric data, impact factors, and citation counts that are generated.
4. It is unethical to include inappropriate citations of one's own work or of the work of particular colleagues or of articles in journals with which the author has a connection.
5. It is misconduct for publishers to advertise their own journals by the quotation of insecure or partial or tendentious bibliometric data.

Procedures

The following procedures will guide the considerations of individual cases that are brought to the attention of the *Ethics Committee*.

P1 The Committee will consider only cases that are formally submitted to it by persons or bodies that are involved in claims of unethical behaviour. The Committee will not consider cases submitted by those who have no standing in a dispute, and the Committee will not itself seek out instances of apparent unethical behaviour.

The Committee may decline to act on any case that is brought to its attention. The Committee will not reconsider a case after a decision has been made unless substantial new information which could lead to a different decision is made available.

P2 Cases for consideration should be communicated to the Chairman of the Committee.

Although the Committee will not act until a formal complaint is lodged, earlier informal enquiries may be addressed to the Chairman.

P3 The Committee expects that before submitting a case a complainant will have already sought to address the issues involved and, in the case of published works, will have utilised the procedure for dealing with ethical issues formulated by the publishers.

P4 The Committee will not consider any case in which formal legal proceedings have been instigated, and may cease to consider a case if such proceedings are commenced. The Committee will not consider any case that is a matter of direct dispute between a mathematician and the institution that employs that person.

P5 The normal procedure of the Committee when it receives a formal complaint will be as follows.

First, the Committee will determine whether it is appropriate to consider the complaint and whether a prima facie case exists.

If it does so determine, the Committee will then seek to discover the underlying facts of a case. As part of this process, the Chairman will write privately to the accused person or bodies, and invite them either to act quickly to accept the complaint and make appropriate amends, or to explain to the Committee why they do not deem it appropriate to act in this way.

In the latter case, or when the accused party does not respond, especially when accusations of plagiarism are made, the Committee will normally ask some experts, each unconnected to the various parties, to study the accusations and advise the Committee whether they are justified. On receipt of this advice, the Committee will form a view on the merits of the case, and will then communicate its findings privately to all parties.

The Committee expects that any party deemed to have acted unethically will make appropriate and timely amends.

P6 In the case where the party deemed to have acted unethically remains obdurate, and the Committee is convinced that unethical behaviour has occurred, the Committee will make a formal finding, which will be sent by the Chairman to the *President* of the *European Mathematical Society*.

The *President*, after consultation with the *Executive Committee*, may communicate the findings, for example by informing the Head of the Institution that employs the party deemed to have acted unethically, the relevant Heads of Department of people involved, relevant editors and publishers, as appropriate.

The *European Mathematical Society* may publicise the findings of the Ethics Committee in a particular case.

P7 The Committee will report regularly on its activities and summarise its findings, without identifying persons or institutions involved in specific cases, in the *Newsletter* of the *European Mathematical Society*.

Members of the Ethics Committee will adhere to the following principles.

- Each member of the Committee will excuse himself or herself from the discussion of and any participation in the decision concerning any case submitted to the Committee if they have any conflict of interest (or anything that could give an appearance of a conflict of interest) related to the submitted case. Such a Committee member should inform the Chairman in advance, and then he or she will not receive any papers or information related to the relevant case.
- All members of the Committee will keep all cases confidential until a decision has been made public; all internal discussions and information received concerning individuals will remain confidential.

Remit

The remit of the *European Mathematical Society Ethics Committee* was specified by the *Executive Committee of the European Mathematical Society* in Spring 2010, as follows.

The Ethics Committee will focus on unethical behaviour in mathematical publications. This includes, for example, plagiarism, duplicate publication, inadequate citations, inflated self citations, dishonest refereeing, and other violations of the professional code. The Committee will be responsible for the following three tasks:

1. To raise the awareness of the problem by preparing a code of practice.

2. To encourage journals and publishers to respond to allegations of unethical behaviour in a conscientious way.

3. To provide a mechanism whereby researchers can ask the Committee to help them pursue claims of unethical behaviour.

The Committee may take up any other relevant questions related to ethics in connection with its work.

Équations cinétiques : une histoire française

• C. Bardos
• N. J. Mauser

1. Introduction

Dans cet article on se propose de décrire l'évolution de l'étude des équations cinétiques dans le monde mathématique autour de la France entre les années 1970 et 2000. Bien sûr, dans ce très large sujet nous nous focalisons sur certains aspects. Un accent particulier est mis sur le rôle des lemmes de moyenne comme outil clef dans la théorie cinétique classique. Dans ce contexte, nous présentons aussi les transformées de Wigner de la théorie cinétique quantique et leur lien avec la physique classique dans la limite « semi-classique » $\hbar \to 0$.

L'analyse asymptotique est au centre de cet exposé. C'est pourquoi nous étudions le passage des équations cinétiques (« mésoscopiques »), comme l'équation de Boltzmann, aux équations des fluides (« macroscopiques »), comme les équations d'Euler ou de Navier-Stokes, quand certains paramètres (nombres de Strouhal et Knudsen) tendent vers zéro. Il nous a paru essentiel pour mettre les choses en perspective de revenir un peu en arrière en évoquant certains précurseurs. En revanche, après les années 2000 le sujet a « explosé » et son évocation conduirait encore à plusieurs articles.

Pour situer les équations cinétiques dans une perspective plus large, il convient de remarquer qu'il a fallu plusieurs milliers d'années à l'espèce humaine pour inventer, avec Leibniz en 1684 et Newton en 1713, les équations différentielles, bien adaptées à la description de mouvements ponctuels tandis qu'ensuite pas plus de 30 ans ont suffi pour passer aux équations aux dérivées partielles décrivant les milieux continus, par exemple avec d'Alembert en 1747 et Euler en 1775. Dans ce contexte, pour les milieux raréfiés, la notion de densité de particules ayant en un point x une vitesse v est due à Maxwell en 1866, qui propose aussi la distribution de vitesses portant son nom. Tandis que des équations « cinétiques », dédiées à l'évolution de cette densité, apparaissent peu après, avec Boltzmann en 1872 et Lorentz en 1905. Si l'importance des idées de Boltzmann n'a pas été immédiatement reconnue, dès le début du xx$^{\rm e}$ siècle elles ont très rapidement eu un rôle essentiel souligné, pour les mathématiciens, par Hilbert dans l'énoncé de son 6$^{\rm e}$ problème posé au Congrès International des Mathématiciens (icm) de 1900 à Paris et par plusieurs contributions d'Einstein.

Mais elles ont vraiment commencé à intéresser les mathématiciens et en particulier les mathématiciens français au plus tôt dans les années 70. Par exemple, à l'icm de Nice en 1970 il n'y a eu qu'un seul exposé sur le sujet (par Guiraud). On peut aussi citer, à cette époque, quelques articles de mécaniciens comme Choquet-Bruhat avec Bancel en 1973 et bien sûr Cabannes en 1962, qui sera par la suite un témoin actif.

Ensuite, le sujet s'est imposé dans notre communauté et particulièrement en France, comme en témoignent les deux médailles Fields de P.-L. Lions (1994) et de Villani (2010) ainsi que de nombreux autres prix internationaux.

Bien sûr cela est dû, entre autres, au fait que les équations cinétiques apparaissent dans une grande variété de sciences : astrophysique, vols dans l'espace (surtout lors de la rentrée des véhicules dans l'atmosphère), interaction entre fluides et particules, énergie nucléaire, technologie des semi-conducteurs, en biologie (pour suivre l'évolution des cellules en immunologie et chimiotaxie). C'est aussi dû au fait que les recherches dans ce domaine impliquent à la fois mathématiciens purs et appliqués, avec des résultats de nature géométrique ou faisant appel à l'analyse harmonique, aux probabilités et au calcul numérique. Ce qui explique que ce sujet a pris sa place dans l'expansion et la globalisation mondiale de la recherche mathématique. De nombreuses écoles d'été (ou d'hiver) lui ont été consacrées, suscitant des collaborations internationales variées, par exemple le GDR SPARCH (dirigé par Raviart) et notamment le réseau Européen HYKE (HYperbolic and Kinetic Equations, dirigé par N.J.M.) qui a réuni les communautés « équations cinétiques » et « lois de conservation hyperboliques ». Il est bien sûr impossible de tout décrire dans le cadre présent et ce texte, écrit par deux témoins actifs de l'évolution en France et en Europe, se concentre sur les années 1970-2000 en s'appuyant sur l'histoire des lemmes de moyenne.

2. Le temps des Physiciens et la Préhistoire

Les équations cinétiques concernent donc des quantités $f(x,v,t)$ avec $f \geqslant 0$ représentant une densité (dans le sens d'une probabilité) de particules situées au point x à l'instant t et qui dépendent en plus d'une variable cinétique v. Dans les exemples initiaux, v représente la vitesse des particules, donc f est la densité de particules au point x ayant la vitesse v à l'instant t. On appelle $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v$ « l'espace des phases » en d dimensions d'espace (d=3 ou d= 2,1 pour les systèmes avec symétrie ou confinement). La vitesse v peut être remplacée par une impulsion ξ, etc., ou enfin une longueur et une direction lorsqu'il s'agit de polymères ou de cellules biologiques.

Les équations cinétiques contiennent par nature un terme de « transport libre » (= « terme d'advection ») : $\partial_t f + v \cdot \nabla_x f$ qui représente l'évolution de la densité de particules en l'absence de forces extérieures. Dans ce cas simple, pour une donnée initiale $f_0 = f(t=0)$, la solution de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$

est

$$f(x,v,t) = f_0(x - vt, v).$$

En présence d'une force (extérieure) F (gravité, force électrique,...), il faut ajouter à ce transport libre un terme correspondant à la deuxième loi de Newton $\frac{d}{dt}v = F$ (masse $m=1$). Si cette force dérive d'un potentiel, c.-à-d. $F = -\nabla_x V$, on a une équation dite de Liouville :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x V \cdot \nabla_v f = 0,\ f(x,v,0) = f_0(x,v), \quad (1)$$

qui, avec le crochet de Poisson :

$$\{H, f\} = \nabla_v H \cdot \nabla_x f - \nabla_x H \cdot \nabla_v f, \quad (2)$$

entre l'Hamiltonien $H(x,v)$, c.-à-d. l'énergie $\frac{|v|^2}{2} + V(x)$, et la fonction f, peut être reformulée dans sa version symplectique : $\partial_t f + \{H, f\} = 0$. Si la force F dépend de la solution f, l'équation (1) devient non linéaire, ce qui est en particulier le cas de l'équation de Vlasov (cf. section 6).

Comme les équations cinétiques décrivent des régimes intermédiaires entre la dynamique des particules et les observations macroscopiques, des paramètres (mesurant par exemple la raréfaction du milieu ou l'ordre de grandeur des échelles de temps) s'introduisent naturellement. En particulier, le nombre de Strouhal, St, donne les échelles de temps, tandis que le nombre de Knudsen, Kn, décrit la densité du milieu (conformément à l'intuition il porte aussi le nom de « libre parcours moyen »). Finalement, une analyse mathématique conduit à introduire un petit paramètre de référence, noté ϵ, et à comparer les autres paramètres à celui-ci.

Ainsi, pour illustrer cette analyse, nous considérons essentiellement trois équations. Nous considérons l'équation de Boltzmann

$$\mathrm{St}\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{C}(f,f), \quad (3)$$

l'équation de Lorentz

$$\begin{aligned}&\epsilon\partial_t f + v \cdot \nabla_x f \\ &= -\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}^d} k(x,v,w)(f(t,x,v) - f(t,x,w))d\mu(w), \quad (4)\end{aligned}$$

et, avec S^2 désignant la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, une équation pour un modèle simplifié du transport

$$\epsilon\partial_t f + \omega \cdot \nabla_x f = -\frac{1}{\epsilon}\left(f - \int_{S^2} f(x,\omega',t)d\omega'\right). \quad (5)$$

Dans l'équation de Boltzmann (3) $\mathcal{C}(f,f)$ représente des changements dans la vitesse des particules dus à des collisions binaires élastiques, c.-à-d. conservant la masse, le moment cinétique et l'énergie de deux particules entrant en collision. Au niveau de cet exposé on évite de détailler sa structure ; il suffit de garder à l'esprit que l'on a :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d_v} \mathcal{C}(f,f)dv = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d_v} \mathcal{C}(f,f)v\,dv = 0, \\ &\int_{\mathbb{R}^d_v} \mathcal{C}(f,f)\frac{|v|^2}{2}dv = 0,\end{aligned} \quad (6)$$

ainsi que la décroissance de la "production de l'entropie", qui s'annule pour une Maxwellienne, ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^d_v} \mathcal{C}(f,f)\ln f\,dv \leqslant 0, \quad (7)$$

et que, de plus, si

$$\int_{\mathbb{R}_v^d} \mathcal{C}(f,f) \ln f \, dv = 0,$$

alors

$$f(x,v,t) = M_{\rho,u,\theta}(x,v,t) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}, \qquad (8)$$

où $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ et $\theta(x,t)$ sont des densités macroscopiques caractérisant la Maxwellienne.
La relation (7) implique en particulier la décroissance de l'entropie

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d} f(x,v,t) \ln f(x,v,t) \, dx dv \leqslant 0,$$

ce qui est le fameux théorème H, sujet de controverses, à l'époque de Boltzmann, car il semble en contradiction apparente avec le principe de récurrence de Poincaré. On peut dire qu'actuellement ce paradoxe est résolu.

L'équation de Lorentz (4) décrit une situation dans laquelle le phénomène dominant est l'interaction des particules avec un milieu hôte tandis que l'interaction entre les particules est négligée. Ce qui explique que cette équation est linéaire. Elle a été introduite par Lorentz en 1905 pour l'évolution des électrons entre les atomes. Ensuite elle a joué un rôle essentiel en neutronique pour étudier l'interaction entre les neutrons et les noyaux des atomes. Ici, $k(x,v,w)$ est un noyau positif et symétrique tandis que $d\mu(w)$ est une probabilité sur $\mathbb{R}_v^d$. Le paramètre ϵ est introduit pour valider des approximations macroscopiques.

Le « modèle simplifié du transport » (5) est un avatar de l'équation de Lorentz (4) qui correspond à une mesure $d\mu$ chargeant uniquement la sphère unité, donc les modules des vitesses ne sont pas affectés par l'interaction.

En ce qui concerne l'équation de Boltzmann, à partir du bilan d'entropie, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f_\epsilon(x,v,t) \ln f_\epsilon(x,v,t) \, dx dv + \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f_\epsilon(x,v,t) \mathcal{C}(f_\epsilon, f_\epsilon) \ln f_\epsilon(x,v,t) \, dx dv = 0,$$

on déduit, avec l'équation (8) que, pour $\epsilon \to 0$, toute valeur d'adhérence de la famille f_ϵ est une Maxwellienne locale, c'est-à-dire une gaussienne M donnée par (8). En insérant cette expression dans l'équation de Boltzmann et en utilisant l'équation (6) de conservation des moments, on en déduit aussi que ces paramètres macroscopiques sont solution des équations d'Euler des fluides compressibles :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{St}\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \\
&\mathrm{St}\partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + \rho\theta) = 0, \\
&\mathrm{St}\partial_t \Big(\rho \frac{|u|^2}{2} + \frac{d}{2}\rho\theta\Big) + \nabla_x \cdot \Big(u\Big(\rho\frac{|u|^2}{2} + \frac{d+2}{2}\rho\theta\Big)\Big) = 0.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Cette dérivation (sous une forme naturellement moins moderne) motivait Hilbert quand il énonça son 6e problème à l'ICM à Paris en 1900 : « *Les travaux de Boltzmann sur les principes de la mécanique suggèrent le problème de développer mathématiquement les processus limitatifs, juste esquissés, qui mènent de la vision atomiste aux lois du mouvement du continu.* » En revanche, on observe que les équations (9) ne font apparaître ni la viscosité, ni la diffusivité thermique du fluide (quantités fondamentales en mécanique des fluides). Pour y remédier Hilbert proposa en 1916 de faire apparaître ces quantités dans le second terme en ϵ d'un développement formel de la fonction f_ϵ. Indépendamment, Chapman en 1916 et Enskog en 1917 ont établi une connexion plus directe entre l'équation de Boltzmann et les équations macroscopiques. Plutôt que de considérer les deux premiers termes du développement en ϵ, ils introduisent une Maxwellienne locale (8) dépendant de ce paramètre

$$M_\epsilon(x,v,t) = \frac{\rho_\epsilon}{(2\pi\theta_\epsilon)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|v-u_\epsilon|^2}{2\theta_\epsilon}}, \qquad (10)$$

et ils prouvent que, pour que M_ϵ soit une solution de l'équation de Boltzmann modulo un reste en ϵ^2, il faut et il suffit que $\rho_\epsilon, u_\epsilon, \theta_\epsilon$ soient solutions des équations de Navier-Stokes « macroscopiques »

$$\begin{aligned}
&\mathrm{St}\partial_t \rho_\epsilon + \nabla_x (\rho_\epsilon u_\epsilon) = 0, \\
&\mathrm{St}\partial_t (\rho_\epsilon u_\epsilon) + \nabla_x (\rho_\epsilon u_\epsilon \otimes u_\epsilon + \rho_\epsilon \theta_\epsilon) \\
&\quad = \epsilon \nabla_x \cdot \{\nu(\theta_\epsilon)(\sigma(u_\epsilon) - \frac{2}{d}\nabla_x \cdot \sigma(u_\epsilon)\mathrm{I})\}, \\
&\mathrm{St}\partial_t \Big(\rho_\epsilon \frac{|u_\epsilon|^2}{2} + \frac{d}{2}\rho_\epsilon\theta_\epsilon\Big) + \nabla_x \Big(u_\epsilon\Big(\rho\frac{|u_\epsilon|^2}{2} + \frac{d+2}{2}\rho_\epsilon\theta_\epsilon\Big)\Big) \\
&\quad = \frac{\epsilon\nu(\theta_\epsilon)}{2}\sigma(u_\epsilon) : \sigma(u_\epsilon) + \epsilon \nabla_x \cdot [\kappa(\theta_\epsilon)\nabla_x \theta_\epsilon],
\end{aligned} \qquad (11)$$

avec

$$\sigma(u_\epsilon) = \frac{\nabla u_\epsilon + \nabla^t u_\epsilon}{2}, \qquad \sigma(u_\epsilon) : \sigma(u_\epsilon) = \mathrm{Trace}\, \sigma(u_\epsilon) \otimes \sigma(u_\epsilon).$$

Ainsi, la viscosité $\epsilon\nu(\theta_\epsilon)$ et la diffusivité thermique $\epsilon\kappa(\theta_\epsilon)$, objets macroscopiques qui à l'époque de Boltzmann ou de Maxwell pouvaient déjà être mesurés expérimentalement, sont dans les dérivations ci-dessus des quantités proportionnelles au nombre de Knudsen. Elles dépendent de la température macroscopique selon des lois de puissances qui peuvent être intuitées (et même calculées) à partir de l'interaction entre les molécules. La concordance entre les mesures expérimentales et les formules déduites du calcul ci-dessus permettait donc de conforter les hypothèses faites sur la dynamique de ces molécules.

Les calculs ci-dessus sont en partie très formels : toutes ces équations étant non linéaires, elles n'ont pu être étudiées rigoureusement qu'avec les outils modernes de l'analyse fonctionnelle. En particulier, les équations d'Euler supportent des solutions singulières (avec discontinuités) et, sous des conditions naturelles de compression, des solutions régulières deviennent singulières en temps fini. Ce sont de bons exemples d'utilisation des notions de dérivées au sens des distributions et on doit alors parler de solutions faibles. On observe que de ces équations on peut déduire la relation de conservation de l'entropie macroscopique :

$$\partial_t\left(\rho \ln \frac{\rho^{\frac{2}{3}}}{\theta}\right) + \nabla_x \cdot \left(\rho u \ln \frac{\rho^{\frac{2}{3}}}{\theta}\right) = 0. \qquad (12)$$

Mais ce genre de calcul cesse d'être valable en présence de discontinuités. Ensuite on peut montrer que si les solutions faibles des équations d'Euler compressibles sont limites faibles dans un sens convenable de solutions des équations de Navier-Stokes ou de moments de solutions de l'équation de Boltzmann, alors elles vérifient la relation (12) dans le sens d'une inégalité seulement (on obtient que le membre de gauche est négatif ou nul). En dimension 1 d'espace, cette contrainte assure l'unicité et la stabilité des solutions correspondantes. Par contre, à plus d'une dimension, des travaux récents de Chiodaroli, De Lellis et Kreml [6], faisant suite aux résultats de De Lellis et Szkelyhidi, ont montré une instabilité totale (existence d'une infinité de solutions même entropiques) pour les équations d'Euler.

Dégager ce qui peut être rigoureusement prouvé compte tenu des outils disponibles sera l'objet des activités des années 1970-2000 en impliquant plutôt des solutions de Navier-Stokes incompressibles et des fluctuations de solutions renormalisées (au sens de DiPerna–Lions) de l'équation de Boltzmann. Ceci est au centre de notre exposé (cf. Section 4).

3. Le CEA et l'équation de transport

Comme cela a été évoqué ci-dessus, après Hilbert et dans la période de l'entre-deux-guerres on trouve sur ce sujet à peu près rien chez les mathématiciens francais, qui ont par exemple oublié Poincaré aussi bien que le 6e problème d'Hilbert. Par contre, il y a au moins un physicien, Jacques Yvon, qui dès cette époque a posé les problèmes dans un langage nouveau dont l'intérêt ne sera perçu que bien plus tard par les mathématiciens. En 1936 (voir [22]), pour étudier un gaz de N molécules, il introduit dans les densités de $n \leqslant N$ particules $f_n^N(x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, v_2, \dots, v_n)$ probabilité jointe d'avoir la première particule au point x_1 avec la vitesse v_1, la seconde au point x_2 avec la vitesse v_2, etc., et il explicite les relations entre ces densités. Chaque densité f_n^N est pour $n < N$ solution d'une équation impliquant dans son second membre la densité f_{n+1}^N et bien sûr f_N^N coïncide avec la solution de l'équation de Liouville déterminée par le système initial. Il montre que les solutions de l'équation de Boltzmann produisent par factorisation des solutions approchées de ce système d'équations. Il invente ainsi une hiérarchie d'équations qui sera redécouverte onze années plus tard par Kirkwood, Born et Green d'une part, et Bogolioubov d'autre part, d'où son nom de hiérarchie BBGKY. À part son interprétation physique très concrète cette hiérarchie jouera un rôle essentiel dans les démonstrations à partir des travaux de Grad en 1949 et Lanford en 1974 de la dérivation rigoureuse de l'équation de Boltzmann.

Le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) est créé en 1945 et Yvon y entre en 1946, d'abord comme collaborateur, puis détaché en 1949 et enfin Haut-commissaire de 1970 à 1975.

Au sujet de l'équation de transport des neutrons, il écrit : « J'ai rapidement compris (1946) que l'équation intégro-différentielle de Boltzmann, légèrement modifiée, serait la charpente de l'arsenal des nouveaux physiciens mathématiciens. » En fait il s'agit comme évoqué ci-dessus de l'équation de Lorentz appliquée à l'interaction (absorbtion et réémission) des neutrons avec les atomes du milieu ambiant. Cette équation, qui ne dispose, bien sûr, pas de solution explicite, fait partie des défis que le CEA va aborder avec des ordinateurs et plus de mathématiques. C'est le programme d'Amouyal et d'Horowitz, défini sous l'influence d'Yvon et ce sera dans ce cadre que Dautray rejoindra en 1955 le groupe de physique mathématique du CEA. C'est là que J.-L. Lions le rencontrera en tant que collaborateur extérieur introduit par Lattès.

Avec la participation et l'appui financier du CEA et d'autres grands industriels, comme EDF ou Dassault, et en intégrant plusieurs anciens élèves de J.-L. Lions, ce groupe va jouer un rôle majeur dans l'expansion des mathématiques appliquées dans les années 50 et les équations cinétiques tiendront une place importante dans celle-ci, d'abord par l'organisation d'écoles d'été comme celles du CEA-EDF-INRIA au château de Bréau (selon un modèle inauguré par les écoles de physique des Houches puis de Cargèse) et qui tend à fleurir dans notre communauté.

Ensuite, en utilisant aussi sa position de professeur des universités, J.-L. Lions suscitera l'invitation en France pour de longues durées de chercheurs mathématiciens leaders dans le domaine des équations cinétiques : Nishida à Orsay en 1974, Ukai à Orsay et à Paris 13 en 1977, Nicolaenko à Orsay en 1977 et Papanicolaou à l' INRIA et à l'École d'été du Château du Bréau en 1978.

Enfin, et c'est là qu'un des rédacteurs de ce texte intervient plus explicitement. Dautray a pris l'initiative de diriger avec J.-L. Lions la rédaction d'un traité de mathématiques appliquées : Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et la Technologie. Les premiers des 9 volumes ont paru en 1984 chez Masson, Paris, et il y aura ensuite plusieurs versions et plusieurs traductions en particulier une version anglaise éditée par Springer.

L'entreprise s'inspirait à la fois de la pratique du groupe Bourbaki et de la rédaction du Courant-Hilbert, un livre phare de la physique mathématique. Comme dans le Courant–Hilbert, J.-L. Lions et Dautray définissent la structure de l'ouvrage avec ses thèmes, ses volumes et ses chapitres mais encore plus que dans le Courant–Hilbert (où sont mentionnés les contributions de Friedrichs, John, Lax, Nirenberg et autres) ils déléguèrent à de plus jeunes collaborateurs, en les citant parfaitement, la rédaction de chapitres, voire de volumes de l'ouvrage. Selon la tradition de Bourbaki au plus fort de la rédaction, Dautray réunissait chez lui les rédacteurs et faisait circuler les différentes contributions pour des critiques croisées.

À cette époque il disposait de moyens convenables pour cette entreprise. Il s'était assuré la collaboration de plusieurs chercheurs du CEA, entre autres Sentis ou Kavenoky. Il avait un ingénieur CEA, Cessenat, travaillant à plein temps sur ce projet ainsi que des consultants permanents, comme P.-L. Lions et Perthame. Enfin il s'était assuré la collaboration de plusieurs scientifiques du contingent. À cette époque le service militaire était encore obligatoire. Parmi les scientifiques du contingent il y avait en 1985 plusieurs de nos (jadis jeunes) collègues comme Julia et Golse.

3.1 – L'approximation de la diffusion

Dautray et J.-L. Lions ont donc confié à C.B. la rédaction d'un volume sur l'équation de transport. En particulier Dautray insistait sur la mise en forme rigoureuse de l'approximation de la diffusion.

L'évolution des neutrons en présence de noyaux réactifs (uranium ou plutonium) est décrite par une équation cinétique de type Lorentz (4). Mais, comme toute équation cinétique, elle dépend des $2d$ variables de l'espace des phases et de la variable temps. Un calcul direct n'est donc en général pas possible. Aussi dans les années 40-60 les utilisateurs Metropolis et Ulam à Los Alamos, Khasminski en Russie et enfin Benoist au CEA, ont utilisé, pour calculer la densité « macroscopique » de particules

$$\rho(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d} f(x,v,t)\,dv \tag{13}$$

au point x et à l'instant t, une approximation dite approximation de diffusion qui est définie par la solution de l'équation :

$$\partial_t\rho-\kappa\Delta\rho=c\rho. \tag{14}$$

Cette approche (valide près du régime critique) reposait sur une estimation des ordres de grandeur et sur une interprétation probabiliste. C'est d'ailleurs cette démarche qui est à l'origine de la méthode dite de Monte Carlo pour le calcul d'intégrales et de solutions d'équations aux dérivées partielles. Si la démarche était bien expliquée au niveau physique en 1958 dans le livre de Weinberg et Wigner [21], on était alors encore loin d'une formulation mathématique précise permettant de la justifier.

En 1974, Larsen et Keller se sont inspirés du rôle des nombres de Knudsen et de Strouhal dans l'équation de Boltzmann et ont produit une démonstration directe, reposant sur l'analyse fonctionnelle. En suivant la suggestion de Dautray cette démonstration a été reproduite dans le livre. Et, pour plus de clarté, elle est aussi reproduite ci-dessous dans le cadre du modèle simplifié suivant.

$$\partial_t f_\epsilon+\frac{1}{\epsilon}\omega\cdot\nabla_x f_\epsilon+\frac{1}{\epsilon^2}\Big(f_\epsilon-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} f_\epsilon(x,\omega')\,d\omega'\Big)=c(x)f_\epsilon \tag{15}$$

où $\omega \in \mathbb{S}^2$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $x \mapsto c(x)$ est une fonction, ne dépendant que de x, positive ou négative. Bien entendu, il convient d'ajouter des conditions aux limites. En neutronique, la condition aux limites standard est la condition absorbante (toute particule quittant le milieu est absorbée par les revêtements et donc ne revient pas). En introduisant la normale extérieure $\vec{n}$ à la frontière $\partial\Omega$ cela s'exprime en écrivant la relation :

$$\forall (x,\omega) \in \partial\Omega\times\mathbb{S}^2,\ \omega\cdot\vec{n}(x) < 0 \Rightarrow f_\epsilon(x,\omega,t) = 0. \quad (16)$$

Multiplication par f_ϵ et intégration sur $\partial\Omega \times \mathbb{S}^2$ conduisent, avec la formule de Green, à l'inégalité

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\mathbb{S}^2} |f_\epsilon(x,\omega,t)|^2 d\omega dx + \frac{1}{\epsilon^2}\int_\Omega dx \int_{\mathbb{S}^2} (f_\epsilon - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} f_\epsilon(x,\omega)d\omega)^2 d\omega \leqslant \int_{\Omega\times\mathbb{S}^2} c(x)|f_\epsilon(x,\omega,t)|^2 d\omega dx. \quad (17)$$

Il en résulte que les solutions sont pour $0 \leqslant t \leqslant T$ uniformément bornées en ϵ dans $L^2(\Omega \times \mathbb{S}^2)$ et que, pour $\epsilon \to 0$, toute valeur d'adhérence de la suite f_ϵ dans L^2 faible notée, comme cela sera le cas pour d'autres limites faibles $\overline{f_\epsilon}$, est une fonction $\rho(x,t)$ indépendante de ω. L'intégration de la relation (15) par rapport à ω donne la loi de conservation :

$$\partial_t \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} f_\epsilon(x,\omega)d\omega + \nabla_x \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{\mathbb{S}^2} \omega f_\epsilon(x,\omega)d\omega\right) = c(x)\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} f_\epsilon(x,\omega)d\omega. \quad (18)$$

Comme $\int_{\mathbb{S}^2} \omega f_\epsilon(x,\omega)d\omega$ converge faiblement vers 0, il convient (comme on disait jadis) de lever l'indétermination dans le second terme du premier membre de (18). Pour cela on multiplie une seconde fois l'équation (15) par $\epsilon\omega$ et après intégration on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{\mathbb{S}^2} \omega f_\epsilon(x,\omega)d\omega &= -\nabla_x \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} \omega\otimes\omega f_\epsilon(x,\omega,t)d\omega \\ &\quad + \epsilon\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} \omega(c(x)f_\epsilon(x,\omega,t) \\ &\quad - \epsilon\partial_t f_\epsilon(x,\omega,t)d\omega \\ &\to \nabla_x \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} \omega\otimes\omega d\omega : \nabla_x \overline{f(x,t)} = -\frac{1}{3}\nabla_x\rho(x,t).\end{aligned} \quad (19)$$

En reportant dans l'équation (18) et en passant à la limite (il s'agit d'un problème linéaire et à ce niveau la nature de la convergence n'a pas besoin d'être précisée) on obtient :

$$\partial_t\rho(x,t) - \frac{1}{3}\Delta\rho(x,t) = c(x)\rho(x,t). \quad (20)$$

Bien entendu ensuite se pose le problème de la condition aux limites sur $\partial\Omega$. Compte tenu de (16) la condition de Dirichlet

$$x \in \partial\Omega \Rightarrow \rho(x,t) = 0$$

semble la plus naturelle. Mais dans les années 50 les physiciens (cf. [21] page 198) ont observé que l'approximation était bien meilleure si on remplaçait la condition de Dirichlet par une condition du type Robin :

$$x \in \partial\Omega \Rightarrow \rho(x,t) + \lambda\partial_{\vec{n}}\rho(x,t) = 0.$$

Le terme λ ayant la dimension d'une longueur porte le nom de longueur d'extrapolation. Son évaluation s'inspire de l'observation du rayonnement stellaire.

Dans le cadre de la rédaction du Dautray-Lions on a, avec les ordres de grandeur proposés par Larsen et Keller, trouvé une démonstration directe (quantitative) du calcul de ce λ, en analysant le problème de transport dans un demi-espace qui porte le nom de problème de Milne (d'après l'astrophysicien).

Il se trouve que ce même problème se pose de manière analogue pour la relation entre l'équation de Boltzmann et l'équation de Navier-Stokes compressible (cf. 11). L'adaptation des résultats sur le problème de Milne à l'équation de Boltzmann a donc été considérée en 1986 dans un article de Bardos, Caflish et Nicolaenko [1]. Et ce type de recherches a trouvé sa place dans le cadre du projet de la navette spatiale hermes, envisagé en 1975, puis abandonné en 1992. Compte tenu de sa structure européenne, il a néanmoins suscité des collaborations régulières entre industriels et universitaires impliquant en particulier (avec les scientifiques français), Neunzert de Kaiserlautern et Cercignani du Politecnico de Milan (qui avait travaillé de manière continue et très fructueuse sur l'équation de Boltzmann depuis 1962).

Cette collaboration s'est poursuivie au-delà du cadre européen par exemple avec Desphande (Indian Institute of Science, Bangalore) et surtout avec Sone et son groupe du Laboratory of Aeronautical Engineering de Kyoto.

3.2 – L'approximation de la taille critique

Dans un volume consacré à l'équation du transport et édité par le CEA il était naturel d'évoquer le problème de la taille critique, qui en régime cinétique s'exprime par la valeur propre principale de l'opérateur défini (mais non borné) dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_v^d)$ par

$$T(f) = f \mapsto -v \cdot \nabla_x f + \mathcal{L} f, \tag{21}$$

avec une condition aux limites convenable (par exemple absorbante) tandis que $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire opérant en les variables v et représentant l'effet (absorption et réémission) du milieu sur les particules. Les équations de Lorentz (4) et sa simplification (5) en fournissent les prototypes les plus pertinents. L'analyse spectrale de l'opérateur $f \mapsto T(f)$ n'est pas simple, car il n'est ni auto-adjoint ni anti-adjoint et son spectre peut contenir à la fois du spectre continu et des valeurs propres de multiplicité finie. Néanmoins des mathématiciens comme Albertoni- Montagnini en 1966 et Ghidouche-Point-Ukai en 1976 ont démontré l'existence d'une valeur propre principale réelle et simple. Il est donc naturel d'espérer que la valeur propre obtenue dans l'approximation de la diffusion fournisse une « bonne approximation » de la valeur propre principale Λ_ϵ de l'opérateur de transport et contribue ainsi à déterminer la criticité du matériau.

Dans le cas du modèle simplifié (5), en utilisant le changement d'échelle de Larsen et Keller, on est conduit à considérer le couple $(\Lambda_\epsilon, f_\epsilon(x,v) \geqslant 0)$ solution de l'équation (avec des conditions aux limites absorbantes) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon}\omega \cdot \nabla_x f_\epsilon - \frac{1}{\epsilon^2}\Big(f_\epsilon - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} f_\epsilon(x,\omega')d\omega'\Big) \\ + c(x) f_\epsilon = \Lambda_\epsilon f_\epsilon, \quad f_\epsilon(x,v) \geqslant 0, \\ \int_{\Omega \times \mathbb{S}^2} |f_\epsilon(x,\omega)|^2 dx d\omega = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Dans un article [18] inclus dans sa thèse d'État soutenue en 1981, Sentis avait démontré que le couple $(\Lambda_\epsilon, f_\epsilon)$ convergeait vers le couple (Λ, u) solution de l'équation de diffusion avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\frac{1}{3}\Delta u + c(x) u = \Lambda u, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{23}$$

L'objectif était aussi de montrer qu'avec l'introduction de la longueur d'extrapolation λ donnée par le problème de Milne, la valeur propre principale correspondant au même opérateur avec la condition de Robin

$$u_\epsilon + \epsilon \lambda \partial_{\vec{n}} u_\epsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{24}$$

devait fournir une approximation d'ordre supérieur.

Ces résultats sont maintenant inclus dans le dernier chapitre du livre Dautray-Lions consacré au transport. Mais entre-temps, à la fin de 1984, Cessenat, chargé par Dautray de la relecture finale des différentes contributions, avait découvert un « trou » dans la démonstration [18]. Dans la démonstration du résultat principal de [18] il n'était pas vraiment établi que $\int_{\mathbb{S}^2} f_\epsilon(x,\omega)d\omega$ convergeait vers une fonction non nulle. Il avait donc demandé à Sentis de remédier à cela de façon urgente (car il fallait envoyer les épreuves à l'éditeur). Ce dernier avait demandé à son stagiaire militaire, Golse, ainsi qu'à Perthame, qui était dans le même bureau, de l'aider à corriger la preuve. Certes, il est clair que si $f \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^2)$ et $\omega \cdot \nabla_x f \in L^2(\Omega \times \mathbb{S}^2)$ alors la fonction $x \mapsto f(x,\omega)$ possède une régularité supplémentaire dans la direction ω mais cela ne permet pas de conclure. En fait, ils ont montré dans une note aux CRAS, publiée au début 1985, que si des fonctions f sont bornées dans $L^2(\Omega \times \mathbb{S}^2)$ et telles que $\|\omega \cdot \nabla_x f\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{S}^2)}$ sont bornés alors, pour toute fonction $\phi \in L^\infty(\mathbb{S}^2)$, les moyennes $\int_{\mathbb{S}^2} f(x,\omega)\phi(\omega)d\omega$ forment un ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$. Ce lemme a permis de corriger la preuve du résultat annoncé. Plus tard, Golse, Perthame et Sentis ont montré avec P.-L. Lions que ces moyennes appartenaient à l'espace de Sobolev $H_x^{\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire que l'on gagne ainsi un demi cran de régularité en x. Plus précisément à titre d'exemple on a [12] :

Théorème 1. *Pour toute fonction test $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}_v^3)$ à support compact, il existe une constante $C(\phi)$ telle que si $f \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d)$ et si*

$$\epsilon \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = h \in L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d)$$

alors

$$\Big\| \int f(x,v,t)\phi(v)dv \Big\|_{L^2(\mathbb{R}_t, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_x^d))} \leqslant C(\phi) \Big\| h \Big\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d)}.$$

Preuve. Notons $\hat{f}(\xi, v, \tau)$ la transformée de Fourier en x, t de la fonction $f(x,v,t)$ et de même pour la fonction $\hat{h}$. Nous voulons majorer

$$|\xi| \Big| \int \hat{f}(\xi, v, \tau)\phi(v)dv \Big|^2.$$

Pour cela on introduit un paramètre α et on décompose l'intégrale en deux parties en fonction du signe de $|\epsilon\tau + \xi \cdot v| - \alpha$. On majore

$$\left| \int 1_{|\epsilon\tau+\xi\cdot v|\leqslant\alpha} \hat{f}(\xi, v, \tau)\phi(v)\,dv \right|^2$$

par

$$\left(\int |\hat{f}(\xi, v, \tau)|^2\,dv \right)\left(\int 1_{|\epsilon\tau+\xi\cdot v|\leqslant\alpha} |\phi(v)|^2\,dv \right).$$

On utilise ensuite que $|(\epsilon\tau + \xi \cdot v)\hat{f}(\xi, v, \tau)| = |\hat{h}(\xi, v, \tau)|$ pour majorer

$$\left| \int 1_{|\epsilon\tau+\xi\cdot v|>\alpha} \hat{f}(\xi, v, \tau)\phi(v)\,dv \right|^2$$

par

$$\left(\int |\hat{h}(\xi, v, \tau)|^2\,dv \right)\left(\int \frac{1_{|\epsilon\tau+\xi\cdot v|>\alpha}}{|\epsilon\tau + \xi \cdot v|^2} |\phi(v)|^2\,dv \right).$$

Les deux intégrales dépendant de ϕ peuvent s'estimer directement. On conclut alors avec un choix optimal de α. □

Ultérieurement Dautray a découvert que l'énoncé du Théorème 1 avait un précurseur. En 1984 Agoshkov avait établi un résultat de ce type. Il l'avait utilisé pour des théorèmes de trace bien utiles en analyse numérique, mais la portée générale de cet énoncé semble lui avoir échappé.

4. Application des Lemmes de Moyenne

Un des défis des années 80 était la preuve de l'existence de solutions (éventuellement dans un sens faible) de l'équation de Boltzmann, pour toute donnée initiale naturelle, en utilisant seulement la conservation de la masse et de l'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v} \left(1 + \frac{|v|^2}{2}\right) f(x, v, t)\,dx\,dv = \int_{\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v} \left(1 + \frac{|v|^2}{2}\right) f(x, v, 0)\,dx\,dv,$$

et la décroissance de l'entropie :

$$\int_{\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v} f(x, v, t) \ln f(x, v, t)\,dx\,dv \leqslant \int_{\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v} f(x, v, 0) \ln f(x, 0)\,dx\,dv, \tag{25}$$

d'où l'idée d'adapter à d'autres espaces de fonctions le théorème 1. Donc en 1988, Golse, P.-L. Lions, Perthame et Sentis [12] montrent par interpolation que les relations

$$f(x, v) \quad \text{et} \quad v \cdot \nabla_x f \in L^p(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v) \tag{26}$$

impliquent pour $1 < p < \infty$ (avec $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^3_v)$ à support compact) et pour $0 < s < \inf(1/p, 1 - 1/p)$ l'estimation

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d_v} f(x, v)\phi(v)\,dv \right\|_{W^{s,p}} \leqslant C(\phi) \left\| f \right\|^{1-s}_{L^p(\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v)} \left\| v \cdot \nabla_x f \right\|^{s}_{L^p(\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_v)}.$$

Avec un exemple élémentaire, ils observent aussi que cette estimation ne s'étend pas au cas $p = 1$. Pour surmonter cet obstacle Di Perna et P.-L. Lions utilisent conjointement avec le lemme de moyenne les estimations a priori d'énergie et surtout d'entropie (25). Ainsi ils sont arrivés à prouver l'existence de solutions de l'équation de Boltzmann (dans un sens assez faible) dites renormalisées mais globales en temps et ne dépendant que propriétés naturelles des données initiales (cf. [8]).

Le parallèle entre cette démonstration et celle fournie par Leray pour les équations de Navier-Stokes est frappant, tant au niveau des résultats que des méthodes. Il devient alors naturel de faire apparaître dans la limite macroscopique de l'équation de Boltzmann les solutions « turbulentes » de Leray des équations de Navier-Stokes incompressibles ($\nabla \cdot u = 0$) à viscosité strictement positive.

En 1991 Bayly, Levermore et Passot [3] avaient observé que, si dans les équations (11) on introduit une vitesse et des fluctuations de densité et de température de l'ordre de ϵ : $(u, \rho, \theta) = (\epsilon\tilde{u}, 1+\epsilon\tilde{\rho}, 1+\epsilon\tilde{\theta})$, on obtient formellement, dans la limite $\epsilon \to 0$, les équations de Navier-Stokes incompressibles avec en particulier une viscosité ν^* et une diffusivité thermique κ^* strictement positives.

Ainsi pour relier les solutions de DiPerna-Lions à celle de Leray il convient de considérer des fonctions

$$f_\epsilon = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|v|^2}{2}} (1 + \epsilon g_\epsilon(x, v, t)), \tag{27}$$

solutions d'équations de Boltzmann rescalées :

$$\epsilon\partial_t f_\epsilon + v \cdot \nabla_x f_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{C}(f_\epsilon). \tag{28}$$

Cette démarche avait été proposée dans les années 1990-91 d'abord pour des calculs formels en régime stationnaire par Sone puis dans des régimes réguliers et pour des temps finis par Marra, Esposito et Lebowitz et enfin par Bardos, Golse et Levermore (cf. [2]), en s'inspirant de la dérivation de l'approximation de la diffusion pour l'équation (15) par la méthode des moments. Ce calcul était à l'époque formel et justifié seulement pour des données initiales très régulières et petites par rapport à la viscosité par Bardos et Ukai en 1991.

L'objectif final, à savoir prouver la convergence pour tout temps et pour toute donne initiale « naturelle » a fait l'objet de plusieurs contributions et n'a été complété qu'en 2004 par Golse et Saint-Raymond [13].

Dans [13], en plus des estimations déduites de l'énergie et de l'entropie, les auteurs utilisent un contrôle des ondes acoustiques (dû à P.-L. Lions et Masmoudi [15]) et une version raffinée des lemmes de moyenne. Ils montrent que, pour une famille de solutions de l'équation du transport libre, des propriétés d'équi-intégrabilité en les variables v peuvent se transposer en équi-intégrabilité en les variables (x,v) de manière, avec le théorème de Dunford-Pettis, à obtenir de la convergence forte. Ceci résulte de la proposition suivante :

Proposition 1. *Pour tout $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ toute solution f de l'équation*

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0 \quad \text{on } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v \tag{29}$$

satisfait à l'estimation

$$\|f(t)\|_{L^q_x(L^p_v)} \leqslant |t|^{-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f(0)\|_{L^\infty_x(L^p_v)}. \tag{30}$$

5. Lemmes de Moyenne et Transformée de Wigner

Le lecteur remarquera que la Proposition 1 présente une forte ressemblance avec les propriétés de régularisation de l'équation de Schrödinger libre (et ses inégalités de Strichartz) qui s'obtiennent en représentant pour $t > 0$ la solution de Schrödinger libre dans $\mathbb{R}^d$

$$i\partial_t \psi + \frac{1}{2}\Delta\psi = 0,$$

par la formule

$$\psi(x,t) = \frac{e^{-i\frac{d\pi}{4}}}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2it}} \psi_0(y)\,dy \tag{31}$$

dont on déduit d'une part l'effet régularisant (par exemple, pour toute distribution à support compact la fonction $\psi(x,t)$ est analytique) et d'autre part l'effet de dispersion :

$$\|\psi(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi_0(y)|\,dy. \tag{32}$$

Compte tenu de la relation

$$\frac{d}{dt}\|\psi(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0\,, \tag{33}$$

on peut en déduire les estimations de Strichartz classiques.

La relation entre l'effet de dispersion pour l'équation de transport et pour l'équation de Schrödinger a été détaillée pour la première fois par Castella et Perthame [5]. Elle s'explique naturellement en considérant la transformée de Wigner $w(x,v,t)$ [11] qui permet de définir une « théorie cinétique quantique » dans « l'espace de phases » $(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v)$ en introduisant la fonction de Wigner :

$$w(x,v,t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d_y} \psi(x+\frac{y}{2})\psi^*(x-\frac{y}{2}) e^{-iv\cdot y}\,dy\,, \tag{34}$$

qui transforme la fonction d'onde complexe en une fonction réelle sur l'espace de phase, avec l'inconvénient que w peut être négative. Ainsi ce n'est pas une distribution de probabilité au sens strict comme f dans les équations cinétiques classiques. Sinon, la fonction de Wigner a toutes les bonnes propriétés, par exemple les moments en v donnent les densités macroscopiques, telles les densités de « position »

$$\int_{\mathbb{R}^d_v} w(x,v,t)\,dv = |\psi(x,t)|^2 = \rho(x,t)$$

et de « courant »

$$\int_{\mathbb{R}^d_v} v w(x,v,t)\,dv = \mathbb{Im}(\nabla\psi(x,t)\psi^*(x,t)) = J(x,t)\,. \tag{35}$$

Et l'équation de Schrödinger libre (31) se transforme directement en équation de transport libre :

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2}\Delta\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t w(x,v,t) + v\cdot\nabla_x w(x,v,t) = 0$$

dont on déduit à nouveau (33), en notant que

$$\begin{aligned}|\psi(x,t)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d_v} w(x,v,t)\,dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d_v} w_0(x-vt,v,t)\,dv.\end{aligned}$$

Ainsi y a-t-il dans les articles de Perthame, Gasser et Markowich (cf. [17]) une systématisation du point de vue cinétique pour retrouver les estimations de dispersion, ainsi qu'une généralisation de la méthode pour d'autres EDPS.

Plus généralement avec un potentiel réel V et avec la constante de Planck $\hbar$ (dont la limite $\hbar \to 0$ représente la limite « (semi)classique ») $H_\hbar\psi = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi$ définit un opérateur Hamiltonien (non borné mais auto-adjoint) dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors la solution de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\psi_\hbar = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi_\hbar + V\psi_\hbar \tag{36}$$

est donnée par $\psi_0 \mapsto \psi_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H_\hbar}\psi_0$ avec $e^{-itH_\hbar}$ groupe unitaire.

Maintenant l'évolution en temps de la fonction de Wigner est donnée par l'équation de Wigner consistant de l'opérateur du transport libre classique et d'un opérateur pseudodifférentiel en V (évidemment non local suite aux transformées de Fourier dans la définition (34)) :

$$\partial_t w_\hbar(x,v,t) + v\cdot\nabla_x w_\hbar(x,v,t) - [\Theta(V_\hbar)w_\hbar](x,v,t) = 0,$$

où $\Theta(V_\hbar)w_\hbar](x,v,t)$ est donné par l'intégrale en (y,v') du produit de

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\frac{V(x+\frac{\hbar y}{2}) - V(x-\frac{\hbar y}{2})}{i\hbar}e^{-iv\cdot y}$$

et de

$$e^{i\frac{v'\cdot(x-y)}{\hbar}}w_\hbar(\frac{x+y}{2},v',t).$$

Pour un potentiel V assez régulier on a

$$[\Theta(V_\hbar)w_\hbar](x,v,t) = \nabla_x V(x)\nabla_v w_\hbar(x,v,t) + O(\hbar).$$

Donc nous récupérons, au moins formellement, l'équation de Liouville dans la limite $\hbar \to 0$. On peut montrer que, sous certaines hypothèses, la « fonction de Wigner » $w_\hbar(x,v,t)$ converge vers une mesure non négative $w_0(x,v,t)$ baptisée « la mesure de Wigner » par P.-L. Lions et Paul [14] et, au moins formellement, pour ce $w_0(x,v,t) \geqslant 0$ nous récupérons la théorie cinétique classique, c.-à-d. l'équation de Liouville.

$$\begin{aligned}\partial_t w_0(x,v,t) + v\cdot\nabla_x w_0(x,v,t)&\\ -\nabla_x V\cdot\nabla_v w_0(x,v,t) &= 0.\end{aligned} \tag{37}$$

Les dérivations ci-dessus peuvent être justifiées rigoureusement : la théorie générale pour le cas linéaire est élaborée en [11] et le cas non linéaire spécial de la limite du système « Schrödinger-Poisson » vers « Vlasov-Poisson » est donné en [14] et [24].

Nous finissons cette brève présentation du « cinétique quantique » avec les commentaires suivants.

1) La fonction de Wigner est une reformulation de la « matrice de densité » $K_\hbar(x,y,t)$, définie pour un « état pur » ψ comme

$$K_\hbar(x,y,t) = \psi_\hbar(x,t)\otimes\psi^*_\hbar(y,t).$$

Cette matrice de densité, qui est le noyau d'un opérateur intégral en $L^2(\mathbb{R}^d)$ appellé « opérateur de densité » $\hat{K}$, est un objet clé de la mécanique quantique statistique. Dans le cas général d'un « état mixte », où le système se trouve avec probabilité λ_j dans l'état $\psi_j(x,t)$, avec $\lambda_j \geqslant 0$ et $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j = 1$, on a

$$K_\hbar(x,y,t) = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(\psi_j)_\hbar(x,t)\otimes(\psi_j)^*_\hbar(y,t). \tag{38}$$

Tandis que l'opérateur $\hat{K}_\hbar$ est solution de l'équation Heisenberg-Von Neumann

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{K}_\hbar + [H_\hbar, \hat{K}_\hbar] = 0, \tag{39}$$

la relation entre la matrice de densité $K_\hbar(x,y,t)$ et la fonction de Wigner $w_\hbar(x,v,t)$ est donnée par

$$K_\hbar(x,y,t) = \int_{\mathbb{R}^d_v} e^{i\frac{v\cdot(x-y)}{\hbar}}w_\hbar(\frac{x+y}{2},v,t)dv \tag{40}$$

et

$$w_\hbar(x,v,t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d_y} e^{-iv\cdot y}K_\hbar(x+\frac{\hbar y}{2}, x-\frac{\hbar y}{2}, t)dy.$$

Avec $\hbar \to 0$ le calcul formel ci-dessus conduit à établir la correspondance entre l'évolution de $\hat{K}_\hbar$ selon l'équation de Heisenberg-Von Neumann

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{K}_\hbar + [H_\hbar, \hat{K}_\hbar] = 0$$

et l'évolution de $w = \lim_{\hbar\to 0} w_\hbar$ selon l'équation (cinétique) de Liouville :

$$\partial_t w + \{H, w\} = 0. \tag{41}$$

On voit ainsi comment dans la « limite (semi)classique » le commutateur des opérateurs devient le crochet de Poisson (2) des fonctions.

2) Sous des hypothèses de régularité convenables sur w on retrouve dans le cadre du calcul de Weyl le théorème obtenu par Egorov en 1970 [9], en utilisant les opérateurs Fourier intégraux introduits par Hörmander. Ce théorème dit précisément que

dans ce cadre l'opérateur $e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}_\hbar}K_\hbar(0)e^{i\frac{t}{\hbar}\hat{H}_\hbar}$ est, modulo un reste calculable, décrit par la formule (40) avec w son symbole solution de l'équation (41).

Le principe du calcul ci-dessus demeure formellement valable dans le cas non linéaire où le potentiel V dépend de la solution comme dans le cas de Heisenberg-Von Neumann-Poisson :

$$i\frac{d}{dt}\hat{K}_\hbar + [-\frac{\hbar^2}{2} + V_\hbar, \hat{K}_\hbar] = 0,$$
$$V_\hbar(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3_x} \frac{1}{|x-y|} K_h(y,y)dy,$$

soit :

$$-\Delta V_\hbar = K_h(x,x) = \mathrm{Trace}(\hat{K}_\hbar).$$

On obtient alors à la limite $\hbar \to 0$ l'équation de Vlasov-Poisson

$$\partial_t w + w\cdot\nabla_x w - \nabla_x V\cdot\nabla_v w = 0,$$
$$\rho(x,v,t) = \int_{\mathbb{R}^3_v} w(x,v,t)dv,$$
$$-\Delta V(x,t) = \rho(x,t).$$

À cause de la non-linéarité du problème, la justification, dans les preuves existantes, du passage à la limite $\hbar \to 0$, nécessite que la transformée de Wigner de la donnée initiale $K_h(0)$ soit uniformément bornée dans L^2. En dimension 1 d'espace ceci est réalisé pour des solutions faibles (non uniques) de Vlasov-Poisson avec données initiales mesures par Zheng, Zhang et Mauser ([24]). Mais en dimension supérieure, comme cela apparaît dans les articles de P.L. Lions-Paul et Markowich-Mauser, la considération d'états mixtes (38), avec une condition très restrictive sur les λ_j, qui doivent dépendre de la constante de Planck $\hbar$ tel que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j^\hbar)^2 \leqslant C\hbar^3\,, \qquad (42)$$

semble s'imposer et il est intéressant d'observer que cette idée apparaissait déjà en 1946 dans une note d'Yvon [23]. On retrouve donc la présence de Jacques Yvon dans toute l'histoire !

Compte tenu des différents domaines d'application les variantes mathématiques des lemmes de moyenne se sont multipliées ; par exemple dans [12] le théorème suivant souligne le rôle d'une hypothèse de transversalité.

Théorème 2. *Soit μ une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}^d_v$ telle que*

$$\sup_{v\in S^{d-1}} \mu(\{v\in\mathbb{R}^d_v / |v\cdot e| \leqslant \epsilon\}) \leqslant C\epsilon\,, \quad \forall \epsilon > 0\,, \qquad (43)$$

alors avec u solution de l'équation $u + v\cdot\nabla_x u = f$, l'application $f \mapsto \int u(x,v)d\mu(v)$ est continue de $L^2(dx\otimes d\mu(v))$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d_x)$.

Ce résultat a été généralisé par Gérard et Golse [10] pour des moyennes par rapport à y de solutions d'équations pseudo-différentielles. Pour traiter des problèmes de type Vlasov-Maxwell, DiPerna et P.-L. Lions [7] ont inclus dans la théorie des équations cinétiques, des lemmes de moyenne avec des opérateurs différentiels en la variable v, et ce point de vue a trouvé une généralisation systématique dans l'article de Tadmor et Tao [19].

6. Équations cinétiques, Limites statistiques ; en guise de conclusion

Les contributions évoquées ci-dessus au sujet des lemmes de moyenne concernaient uniquement les relations entre les équations cinétiques et les équations macroscopiques. Mais bien entendu l'histoire contient aussi les relations entre la dynamique de N particules (molécules, atomes, ions ou électrons) avec N grand ou tendant vers l'infini. On parle alors de la mécanique statistique (classique ou quantique) ce qui donnerait matière encore à plusieurs articles.

Néanmoins, il faut au moins souligner qu'au niveau intuitif et formel ces relations existaient déjà dans l'esprit de Maxwell, Boltzmann et Lorentz, qu'un des outils essentiel pour cela a été la hiérarchie BBGKY, comme on l'a vu introduite dans cet esprit par Yvon en 1935 [23], et que les premiers travaux rigoureux sont dus à Grad et Lanford.

Il faut aussi dire qu'il y a de grandes similitudes entre la dérivation des modèles cinétiques, soit à partir de la mécanique statistique classique, soit à partir de la mécanique statistique quantique, ce qui peut s'expliquer en utilisant la transformation de Wigner. C'est aussi dans ce cadre qu'apparaît naturellement l'équation de Vlasov, déjà évoquée ci-dessus.

Il faut remarquer que Vlasov a proposé cette équation en 1938, soit 66 ans après l'équation de Boltzmann. Cela s'explique par le fait que l'équation de Vlasov s'applique à des domaines modernes de la physique, tandis que l'équation de Boltzmann était consacrée à la physique du XIX^e siècle. Cependant, par son caractère vraiment non linéaire, elle contient les difficultés essentielles de la théorie.

Ainsi, après des travaux précurseurs de Neunzert et Spohn, le sujet s'est développé au sein de la même communauté en utilisant aussi les outils évoqués ci-dessus (par exemple la version des lemmes de moyenne donnée dans [7]). De plus, l'approche Vlasov a donné lieu à de nombreux avatars motivés par la physique contemporaine, notamment dans la modélisation des plasmas, par exemple dans le contexte de la fusion nucléaire (le projet international ITER, entre Japon et Cadarache). Une version relativiste de Vlasov, où la force F est la force Lorentzienne contenant le champ magnétique et où la vitesse v est bornée par la vitesse de lumière c et donnée par $v(\xi)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^d$, conduit au système non linéaire « Vlasov-Maxwell ». En plus, il y a des approximations « semi-non-relativistes » à ordre $1/c$ ou $O(1/c^2)$ (une présentation concise de cette hiérarchie des équations cinétiques non linéaires se trouve par exemple dans [4]). Notons que beaucoup de problèmes d'analyse mathématique et numérique sont encore ouverts pour ce genre d'équations cinétiques.

Enfin, comme l'équation de Liouville (1) génère un flot Hamiltonien qui préserve la mesure sur l'espace des phases, des travaux récents (Brenier et al) sont apparus autour des relations entre les équations de Vlasov de Monge-Ampère et du transport optimal (cf. Villani [20]).

Avec ces observations on comprend que depuis les années 2000 le sujet a littéralement explosé avec entre autres le travail en 2011 de Mouhot et Villani sur l'amortissement de Landau [16], qui a contribué à la deuxième médaille Fields de la communauté cinétique française. Dans cette évolution le réseau européen HYKE (HYperbolic and Kinetic Equations, 2002-2005), incluant 350 scientifiques dans 16 pays européens plus les USA, dont quasiment tous les mathématiciens vivants cités dans cet article (et quelques jeunes amis qui nous ont quittés trop tôt, comme N. BenAbdallah et F. Poupaud), a joué un rôle catalysateur important.

Références

[1] C. Bardos, R. E. Caflisch et B. Nicolaenko. « The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard sphere gas ». *Comm. Pure Appl. Math.* **39**, nº 3 (1986), p. 323–352. ISSN : 0010-3640.

[2] C. Bardos, F. Golse et D. Levermore. « Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations ». *J. Statist. Phys.* **63**, nº 1-2 (1991), p. 323–344. ISSN : 0022-4715.

[3] B. J. Bayly, C. D. Levermore et T. Passot. « Density variations in weakly compressible flows ». *Phys. Fluids A* **4**, nº 5 (1992), p. 945–954. ISSN : 0899-8213.

[4] N. Besse, N. J. Mauser et E. Sonnendrücker. « Numerical approximation of self-consistent Vlasov models for low-frequency electromagnetic phenomena ». *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* **17**, nº 3 (2007), p. 361–374. ISSN : 1641-876X.

[5] F. Castella et B. Perthame. « Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322**, nº 6 (1996), p. 535–540. ISSN : 0764-4442.

[6] E. Chiodaroli, C. De Lellis et O. Kreml. « Global ill-posedness of the isentropic system of gas dynamics ». *Comm. Pure Appl. Math.* **68**, nº 7 (2015), p. 1157–1190. ISSN : 0010-3640.

[7] R. J. DiPerna et P.-L. Lions. « Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems ». *Comm. Pure Appl. Math.* **42**, nº 6 (1989), p. 729–757. ISSN : 0010-3640.

[8] R. J. DiPerna et P.-L. Lions. « On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability ». *Ann. of Math. (2)* **130**, nº 2 (1989), p. 321–366. ISSN : 0003-486X.

[9] J. V. Egorov. « On the local solvability of pseudo-differential equations » (1971), p. 717–722.

[10] P. Gérard et F. Golse. « Averaging regularity results for PDEs under transversality assumptions ». *Comm. Pure Appl. Math.* **45**, nº 1 (1992), p. 1–26. ISSN : 0010-3640.

[11] P. Gérard, P. A. Markowich, N. J. Mauser et F. Poupaud. « Homogenization limits and Wigner transforms ». *Comm. Pure Appl. Math.* **50**, nº 4 (1997), p. 323–379. ISSN : 0010-3640.

[12] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame et R. Sentis. « Regularity of the moments of the solution of a transport equation ». *J. Funct. Anal.* **76**, nº 1 (1988), p. 110–125. ISSN : 0022-1236.

[13] F. Golse et L. Saint-Raymond. « The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels ». *Invent. Math.* **155**, nº 1 (2004), p. 81–161. ISSN : 0020-9910.

[14] P.-L. Lions et T. Paul. « Sur les mesures de Wigner ». *Rev. Mat. Iberoamericana* **9**, nº 3 (1993), p. 553–618. ISSN : 0213-2230.

[15] P.-L. Lions et N. Masmoudi. « From the Boltzmann equations to the equations of incompressible fluid mechanics. I, II ». *Arch. Ration. Mech. Anal.* **158**, nº 3 (2001), p. 173–193, 195–211. issn : 0003-9527.

[16] C. Mouhot et C. Villani. « On Landau damping ». *Acta Math.* **207**, nº 1 (2011), p. 29–201. issn : 0001-5962.

[17] B. Perthame. « Mathematical tools for kinetic equations ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **41**, nº 2 (2004), p. 205–244. issn : 0273-0979.

[18] R. Sentis. « The principal eigenvalue of a transport operator-an asymptotic expansion ». In : *System modeling and optimization (New York, 1981)*. Vol. 38. Lect. Notes Control Inf. Sci. Springer, Berlin, 1982, p. 393–400.

[19] E. Tadmor et T. Tao. « Velocity averaging, kinetic formulations, and regularizing effects in quasi-linear PDEs ». *Comm. Pure Appl. Math.* **60**, nº 10 (2007), p. 1488–1521. issn : 0010-3640.

[20] C. Villani. *Optimal transport*. **338**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Old and new. Springer-Verlag, Berlin, 2009, p. xxii+973. isbn : 978-3-540-71049-3.

[21] A. M. Weinberg et E. P. Wigner. *The physical theory of neutron chain reactors*. The University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1958, p. xii+801.

[22] J. Yvon. *La théorie statistique des fluides et l'équation d'état*. **203**. Hermann & cie, 1935.

[23] J. Yvon. « Sur les rapports entre la théorie des mélanges et la statistique classique ». *C. R. Acad. Sci. Paris* **223** (1946), p. 347–349.

[24] P. Zhang, Y. Zheng et N. J. Mauser. « The limit from the Schrödinger-Poisson to the Vlasov-Poisson equations with general data in one dimension ». *Comm. Pure Appl. Math.* **55**, nº 5 (2002), p. 582–632. issn : 0010-3640.

Claude Bardos

Laboratoire J.-L. Lions, Paris & wpi Wien
claude.bardos@gmail.com
https://www.ljll.math.upmc.fr/~bardos/

C. Bardos, professeur émerite en mathématiques, est spécialiste des équations aux dérivées partielles en physique et en dynamique des fluides.

Norbert Julius Mauser

wpi & Inst. cnrs Pauli, umi2842 c/o Fak. Math. Univ. Wien
mauser@courant.nyu.edu
www.wpi.ac.at/director

N.J. Mauser, professeur en mathématiques est spécialiste des équations aux dérivées partielles et en physique quantique.

Les auteurs remercient Thomas Alazard pour ses précieux conseils et son aide à la rédaction, ainsi que M. Farge, F. Golse, J.-C. Saut, R. Sentis et les referees inconnus pour leur relecture attentive. Ce travail a été soutenu par la Austrian Science Foundation fwf, contrats nº F65 (sfb « Taming Complexity in PDEs ») et nº W1245 (dk « Nonlinear PDEs »).

Canonical metrics in Kähler geometry a biased overview

• J. Fine

A natural and fruitful question in Riemannian geometry is the following: does a manifold have a "best" Riemannian metric? Back in 1982 Calabi gave a precise formulation of this vague question in the Kähler setting [9, 10], leading to conjectures which have been at the forefront of research in Kähler geometry ever since. My goal in this short survey is to give a biased overview of the subject and a few of its highlights. The contents are biased both by my own interests and knowledge. Moreover, many developments, both old and new, have been omitted simply for lack of space.

I assume the reader is familiar with basic Riemannian geometry, and at least the definition of both de Rham cohomology and complex manifolds. Towards the end I also use holomorphic line bundles. In an attempt to reach as wide an audience as possible, I have tried to keep the discussion nontechnical and almost all proofs are either omitted or at best greatly abbreviated. Experts may find the result frustratingly imprecise, for which I apologise.

If this survey piques your curiosity and you want to read more about canonical Kähler metrics, then there are several excellent and much more detailed introductions, for example [41, 35, 44].

1. Kähler manifolds and extremal metrics

1.1 – Definition and examples of Kähler manifolds

Let X be a complex manifold. Multiplication by i on each tangent space gives an endomorphism $J\colon TX \to TX$ with $J^2 = -1$.

Definition 1. A Riemannian metric g on X is called *Hermitian* if $g(Ju,Jv) = g(u,v)$ for all tangent vectors u,v. If, in addition, $\nabla J = 0$ then g is called a *Kähler metric* (where ∇ is the Levi-Civita connection of g).

The simplest example is the Euclidean metric on $\mathbb{C}^n$. The simplest compact example is the Fubini-Study metric on $\mathbb{CP}^n$. To define this metric, consider the free isometric action of $S^1 \subset \mathbb{C}$ by multiplication on the unit sphere $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. The Fubini-Study metric on the quotient $\mathbb{CP}^n$ is the unique Riemannian metric making $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ a Riemannian submersion. One can check that it is Kähler either by direct calculation or by carefully exploiting the fact that it is $\mathrm{U}(n+1)$ invariant.

Before we give more examples, it will be useful to have an equivalent definition of Kähler and for this we need some more notation. Given a Hermitian metric, we define the *associated 2-form* ω by $\omega(u,v) = g(Ju,v)$. Meanwhile, a 2-form ω is called *Hermitian* (or *type* $(1,1)$) if $\omega(Ju,Jv) = \omega(u,v)$. In this case, $g(u,v) = \omega(u,Jv)$ defines a Hermitian bilinear form on TX. We call such an ω *positive*, and write $\omega > 0$, if the Hermitian bilinear form $g(u,v) = \omega(u,Jv)$ is positive definite, so that g is a genuine Hermitian metric. This sets up a correspondence $g \leftrightarrow \omega$ between Hermitian metrics and positive Hermitian 2-forms. We will frequently abuse this by referring to a positive Hermitian 2-form ω as a Hermitian metric.

When g is Kähler, we have $\nabla\omega = 0$ and so, in particular, $\mathrm{d}\omega = 0$. What is perhaps surprising is that if $\mathrm{d}\omega = 0$ then g is *automatically* Kähler. This makes it easy to give two large classes of examples. Firstly, any Hermitian metric on a Riemann surface is automatically Kähler since $\mathrm{d}\omega$ is a 3-form, and surfaces have no non-zero 3-forms. Secondly, if $Y \subset (X, g_X)$ is a complex submanifold of a Kähler manifold, then the restriction g_Y of the Kähler metric is also Kähler. This is because the associated 2-form $\omega_Y = (\omega_X)|_Y$ is the restriction of that from X. Since restriction commutes with exterior derivative, we see that $\mathrm{d}\omega_Y = 0$. It follows that complex submanifolds of $\mathbb{CP}^n$ all carry Kähler metrics. Such manifolds are called *projective*. Projective manifolds are a huge source of Kähler manifolds. For example, the common zeros of a collection of homogeneous polynomials over $\mathbb{C}$ in $n+1$ variables give a projective manifold, provided the zero locus is smooth (a generic condition).

Kählerity is a powerful definition; as we have seen there are many examples, yet the definition is sufficiently strong to have deep consequences. For example, the odd Betti numbers of a compact Kähler manifold are always even (a result of Hodge theory, described for example in the references [23, 47]) and this is just the tip of the iceberg. Many more subtle restrictions on the topology of Kähler manifolds have been discovered (formality [15], restrictions on the fundamental group [1], ...). The field of Kähler geometry is vast and yet still rapidly growing. In this survey we will be concerned only with a small part of the study of these manifolds, namely the search for a "canonical" choice of Kähler metric on a given Kähler manifold.

1.2 – Calabi energy and extremal metrics

Of fundamental importance to our story are the following Definition and Lemma.

Definition 2. Given a Kähler metric ω on X, the fact that $\mathrm{d}\omega = 0$ means that ω determines a cohomology class $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$. We call this the *Kähler class* of the metric. Given a Kähler class $[\omega]$ we write $\mathcal{H}$ for the collection of all Kähler metrics whose associated 2-form lies in $[\omega]$.

Lemma 1 (The $\partial\overline{\partial}$-Lemma). *Let α be a Hermitian 2-form on a compact Kähler manifold X. If $\alpha = \mathrm{d}\beta$ is exact, then there exists a smooth function $\phi\colon X \to \mathbb{R}$, unique up to the addition of a constant, such that $\alpha = i\partial\overline{\partial}\phi$.*

Here $i\partial\overline{\partial}\phi$ is (the 2-form associated to) the complex Hessian of ϕ. In local holomorphic coordinates $z_1, \dots, z_n$,

$$i\partial\overline{\partial}\phi = \sum_{j,k=1}^{n} i \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k.$$

When ω and ω' are Kähler forms in the same cohomology class, the $\partial\overline{\partial}$-Lemma gives the existence of a function ϕ such that $\omega' = \omega + i\partial\overline{\partial}\phi$. The function ϕ is called a *Kähler potential* and so Kähler metrics in a fixed Kähler class are parametrised by Kähler potentials, up to an additive constant. This is the foundational analytic reason why Kähler metrics are often more tractable than general Riemannian metrics: they are determined by a single scalar function (at least once the cohomology class is fixed) rather than a tensor.

In [9], Calabi set out a programme to find a canonical choice of Kähler metric ω representing a given Kähler class $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$. To do so he introduced what is now called the *Calabi functional*, $\mathcal{C}$, and described its critical points. Given a Kähler metric ω, we write Rm_ω, Ric_ω and R_ω for the Riemannian curvature, Ricci curvature and scalar curvature respectively and dvol_ω for the volume form.

Definition 3 (Calabi [9]). The Calabi functional $\mathcal{C}$ is

$$\mathcal{C}(\omega) = \int_X R_\omega^2 \,\mathrm{dvol}_\omega.$$

When ω is a critical point of $\mathcal{C}\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ we call ω an *extremal Kähler metric*.

Theorem 1 (Calabi [9]). *Let (X, J) be a compact complex manifold. A Kähler metric ω on X is extremal if and only if ∇R_ω is a holomorphic vector field, i.e., $L_{\nabla R_\omega} J = 0$ so that the flow of ∇R_ω generates a 1-parameter group of biholomorphisms of X.*

Extremal Kähler metrics, when they exist, are Calabi's candidates for "canonical metrics" on Kähler manifolds. There is one quick reason why Calabi's suggestion is potentially a good idea. It is clear from the definition of $\mathcal{C}$ that the final Euler-Lagrange equation will involve purely the scalar curvature, a single real-valued function. This is the same amount of freedom as one has in choosing a Kähler metric in a given Kähler class, corresponding to the choice of Kähler potential. Additional motivation comes from the fact that on a Kähler manifold there is a remarkable identity

$$\int_X |\mathrm{Rm}_\omega|^2 \,\mathrm{dvol}_\omega = \int_X R_\omega^2 \,\mathrm{dvol}_\omega + C$$

where C is a constant which depends only on X and $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$. It follows that critical points of $\mathcal{C}$ are the same as critical points of the L^2-norm of the *full* curvature tensor. So extremal metrics arise when one looks for the least curved Kähler metric in a given Kähler class.

We now turn to examples, beginning with constant scalar curvature Kähler metrics, which are the main focus of this survey. In fact, one doesn't typically expect a complex manifold to have any non-zero holomorphic vector fields and so this is also the generic case. The simplest examples of constant scalar curvature Kähler metrics are given by the Fubini-Study metric on $\mathbb{CP}^n$ and other homogeneous Kähler metrics, such as on flag varieties. Further examples are given by the uniformisation theorem: any Riemann surface carries a Kähler metric of constant scalar curvature. Moreover, this metric is unique once the Kähler class has been fixed, which equates to the total area in this case. This perfect existence and uniqueness result in complex dimension one gives the paradigm; understanding to what extent it holds in higher dimensions is the central question in the area.

The first example of an extremal metric with non-constant scalar curvature was given by Calabi in his original article [9]. He considered certain holomorphic submersions $\mathbb{CP}^1 \hookrightarrow X \to \mathbb{CP}^n$ with the property that the action of $\mathrm{U}(n+1)$ on the base lifts to X and for which the generic orbits have codimension 1. In this case the partial differential equation $L_{\nabla R} J = 0$ becomes an *ordinary* differential equation which one can solve by direct means.

In the years since Calabi's early papers on the subject, much effort has been devoted to finding extremal Kähler metrics. A typical approach is to begin with a solution (X, ω) and produce another on a related manifold. For example, if (X, ω) is an extremal Kähler metric then, under certain circumstances, one can find an extremal Kähler metric on the blow up of X at various points [2, 43]. Another example is provided by holomorphic vector bundles $E \to (X, \omega)$ over constant scalar curvature Kähler bases; under certain circumstances, one can find an extremal Kähler metric on the fibrewise projectivisation $\mathbb{P}(E)$ [24, 8]. (The literature on existence of extremal Kähler metrics is vast and I will make no attempt to cover it here.)

It was also realised early on that certain Kähler manifolds and Kähler classes could never contain extremal metrics. Perhaps the first obstruction was provided by Lichnerowicz and Matsushima, who showed that if X admits a constant scalar curvature Kähler metric, then the identity component of the group of biholomorphisms of X must be a reductive group [30, 28]. Another important obstruction was discovered by Futaki, related to the holomorphic vector fields on X [22]. I will come back to Futaki's obstruction and its subsequent generalisations later, but first I will describe probably the most important class of examples, namely Kähler-Einstein metrics.

1.3 – Kähler-Einstein metrics, I

A very special case of constant scalar curvature metrics are those with constant Ricci curvature, namely the Einstein metrics, where $\mathrm{Ric} = \lambda g$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$. In the Kähler case, again something remarkable happens. One can build a 2-form $\rho(u, v) = \mathrm{Ric}(Ju, v)$ out of the Ricci curvature, just as one associates ω to g. It turns out that the 2-form ρ, called the Ricci form, is automatically a closed Hermitian form. Moreover, the cohomology class $[\rho] = 2\pi c_1(X)$ is predetermined by the complex structure on X and so *doesn't depend on the choice of Kähler metric!* Indeed one finds by direct calculation that if ω, ω' are two cohomologous Kähler forms then their Ricci forms are related by

$$\rho(\omega') = \rho(\omega) - i\partial\bar{\partial} \ln\left(\frac{(\omega')^n}{\omega^n}\right). \qquad (1)$$

(Readers who have not met the first Chern class before can simply take $2\pi c_1(X) = [\rho]$ to be the definition, which makes sense when taken together with the fact that this doesn't depend on the choice of metric used to define ρ. The factor of 2π is there to ensure that $c_1(X)$ is an *integral* cohomology class.)

Since a Kähler-Einstein metric has $\rho = \lambda\omega$ we must have $2\pi c_1(X) = \lambda[\omega]$. There are four mutually exclusive possibilities.

1. **The class $-2\pi c_1(X)$ is a Kähler class.** Then we must have $\lambda < 0$ and we can only look for Kähler-Einstein metrics in a negative multiple of $c_1(X)$.
2. **The class $c_1(X) = 0$ vanishes.** Then the only possibility is $\lambda = 0$ and we can look for Kähler-Einstein metrics in any Kähler class.
3. **The class $2\pi c_1(X)$ is a Kähler class.** Then we must have $\lambda > 0$ and we can only look for Kähler-Einstein metrics in a positive multiple of $c_1(X)$.
4. **None of the above hold.** Then X does not admit a Kähler-Einstein metric.

An interesting aside is that if ω is a Kähler metric with constant scalar curvature and $\lambda[\omega] = 2\pi c_1(X)$ then in fact ω is Kähler-Einstein. One can show this via Hodge theory: for a Kähler metric, constant scalar curvature is equivalent to ρ being harmonic; $\lambda\omega$ and ρ are thus harmonic forms in the same cohomology class and so must be equal.

By way of examples, $\mathbb{CP}^n$ falls in the third case, and the Fubini-Study metric is indeed Kähler-Einstein with $\lambda > 0$. Meanwhile, elliptic curves have $c_1(X) = 0$ and carry flat Kähler metrics, which are of course Kähler-Einstein with $\lambda = 0$. For Riemann surfaces of genus at least 2, the class $-2\pi c_1(X)$ is Kähler and the hyperbolic metric provided by the uniformisation theorem is Kähler-Einstein with $\lambda < 0$.

In the first two cases above, the existence and uniqueness questions were completely resolved in the 1970s.

Theorem 2 (Aubin [4], Yau [48]). *If X is a compact complex manifold and $-2\pi c_1(X)$ is a Kähler class then $-2\pi c_1(X)$ contains a unique Kähler-Einstein metric (with $\rho = -\omega$).*

Theorem 3 (Yau [48]). *If X is a compact complex manifold and $c_1(X) = 0$ then every Kähler class on X contains a unique Kähler Ricci-flat metric.*

Theorem 3 gave the first examples of compact Ricci-flat manifolds which were not actually flat, a breakthrough which led to Yau being awarded the Fields medal.

I will give a very brief outline of how Theorems 2 and 3 are proved. Suppose that ω is a reference Kähler metric with $\lambda[\omega] = 2\pi c_1(X)$. Then by the $\partial\bar\partial$-lemma there is a smooth function f such that

$$\rho(\omega) = \lambda\omega + i\partial\bar\partial f.$$

Meanwhile, given a second Kähler metric $\omega' = \omega + i\partial\bar\partial\phi$ in the same cohomology class, the Ricci forms $\rho(\omega')$ and $\rho(\omega)$ are related via (1). Rearranging, one shows that finding a Kähler-Einstein metric ω' is equivalent to finding ϕ such that

$$(\omega + i\partial\bar\partial\phi)^n = e^{f-\lambda\phi}\omega^n. \tag{2}$$

This equation is called the *complex Monge-Ampère equation*. It is analogous to prescribing the determinant of the complex Hessian $i\partial\bar\partial\phi$ of ϕ.

An extremely important fact is that the equation is *second order* in ϕ. Naively, the metric ω' is second order in ϕ and so the Ricci curvature is fourth order and so one would expect the Einstein equation to also be fourth order in ϕ.

The by-now standard approach to the complex Monge-Ampère equation (2) is via a "continuity method". In its simplest form, one considers the following path of equations parametrised by $t \in [0,1]$, for a Kähler metric $\omega + i\partial\bar\partial\phi$:

$$(\omega + i\partial\bar\partial\phi)^n = e^{tf-\lambda\phi}\omega^n.$$

When $t = 0$ we have the trivial solution $\phi = 0$. We now attempt to deform ϕ with t, at each time solving the t-dependent complex Monge-Ampère equation, until $t = 1$ and we finally arrive at a solution to the original equation, giving a Kähler-Einstein metric.

There are two separate parts in finding this deformation. The first is to show that if there is a solution for all $t \in [0, T]$ then there is $\epsilon > 0$ such that we can also find a solution for $t \in [0, T + \epsilon)$. This is shown using the implicit function theorem and the argument is insensitive to λ. The crux is the second part, showing that if we have solutions for a sequence of parameters t_j which converges to a limit T, then the solutions also converge, up to a subsequence, giving a solution for the parameter $t = T$. If this can be done then the set of $t \in [0,1]$ for which the corresponding equation has a solution is both open and closed, hence it is the entire interval. For this compactness part of the argument, the sign of λ is critical. When $\lambda < 0$, the key estimate follows fairly easily from the maximum principle. When $\lambda = 0$ the problem is far more subtle and Yau's solution involves Moser iteration, a technique which was relatively new at the time.

When $\lambda > 0$, or equivalently when $2\pi c_1(X)$ is a Kähler class, there are examples where a Kähler-Einstein metric fails to exist. The continuity method must break down in these cases and the compactness alluded to above must fail. The case $\lambda > 0$ has recently been resolved in a spectacular breakthrough by Chen-Donaldson-Sun [12, 13, 14]. We will very briefly discuss their contribution in §4, after we have seen Mabuchi's K-energy and discussed K-stability.

2. Mabuchi's K-energy

From here on, we focus exclusively on constant scalar curvature Kähler metrics. There is a version of the story adapted to more general extremal Kähler metrics (see most notably the work of Székelyhidi [42]) but the special case of constant scalar curvature contains the essential points.

2.1 – The Riemannian geometry of the space of Kähler metrics

Recall that $\mathcal{H}$ denotes the space of all Kähler metrics in a given Kähler class. Mabuchi's idea was to treat $\mathcal{H}$ as an infinite dimensional Riemannian manifold [29]. The same approach was subsequently adopted independently by Semmes and Donaldson [38, 17]. By using Kähler potentials, we can identify the tangent space $T_\omega\mathcal{H}$ with the space of smooth functions with zero mean value:

$$T_\omega\mathcal{H} = \left\{\phi \in C^\infty(X,\mathbb{R}) : \int_X \phi \,\mathrm{dvol}_\omega = 0\right\}.$$

Such a function ϕ is tangent at $t = 0$ to the path $\omega_t = \omega + ti\partial\bar\partial\phi$ which is a path of Kähler metrics at least when $|t|$ is small enough. (We impose mean-value zero to take account of the fact that Kähler potentials are unique up to an additive constant.) We now define a Riemannian metric on $\mathcal{H}$ by using the L^2-innerproduct:

$$\langle\phi,\psi\rangle_\omega = \int_X \phi\psi\,\mathrm{dvol}_\omega.$$

The first remarkable feature of this metric is that it is non-positively curved. Given an orthonormal pair ϕ and ψ of tangent vectors at ω, the sectional curvature in the corresponding plane is

$$\sec = -\int_X |\{\phi,\psi\}_\omega|^2 \mathrm{dvol}_\omega. \tag{3}$$

Here, $\{\phi,\psi\}_\omega$ denotes the Poisson bracket on functions defined by the symplectic form ω. Explicitly, in the Kähler setting, this is the function defined by

$$\{\phi,\psi\}_\omega = \omega(\nabla\phi,\nabla\psi). \tag{4}$$

This is strongly reminiscent of a phenomenon in the study of symmetric spaces. Let K be a Lie group with complexification G (think, for example, of $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$) and suppose we are given an innerproduct on the Lie algebra $\mathfrak{k}$ of K which is conjugation invariant (for example, $-\mathrm{Tr}(AB)$ on $\mathfrak{su}(n)$). This gives rise to a G-invariant Riemannian metric on the coset space G/K. This metric is non-positively curved: the tangent space at a point of G/K is naturally identified with $i\mathfrak{k}$; given a pair of orthonormal vectors $A, B \in \mathfrak{k}$, the sectional curvature in the plane spanned by iA, iB is

$$\sec = -|[A,B]|^2. \tag{5}$$

To see the relevance to our situation, observe that the Poisson bracket (4) makes the space of smooth functions into a Lie algebra. Given a function ϕ, we associate to it the vector field $V_\phi = J\nabla\phi$, called the *Hamiltonian vector field generated by* ϕ. We write $\mathrm{HVect}(X,\omega)$ for the space of all Hamiltonian vector fields. One checks that $V_{\{\phi,\psi\}} = [V_\phi, V_\psi]$, so the Poisson bracket is identified with the Lie bracket of vector fields and $\mathrm{HVect}(X,\omega) \subset \mathrm{Vect}(X)$ is a subalgebra of the Lie algebra of all vector fields. The corresponding subgroup of the group of diffeomorphisms is called the Hamiltonian group, $\mathrm{Ham}(X,\omega)$. One can check that the L^2-innerproduct on functions defines an innerproduct on $\mathrm{HVect}(X,\omega)$ which is invariant under the action of $\mathrm{Ham}(X,\omega)$ by conjugation. So we are almost in the situation $K \subset G$ discussed above. What is missing is the complexification G of $\mathrm{HVect}(X,\omega)$, but despite this we still have $\mathcal{H}$ which plays the role of the fictional quotient G/K. The above discussion leads to the conclusion that $\mathcal{H}$ should be interpreted, formally at least, as a non-positively curved symmetric space associated to the Hamiltonian group.

2.2 – K-energy

We now connect this to our search for constant scalar curvature metrics. Given a metric $\omega \in \mathcal{H}$, we can use the L^2-innerproduct against R_ω to define a linear map $T_\omega\mathcal{H} \to \mathbb{R}$, giving a 1-form α on $\mathcal{H}$:

$$\alpha_\omega(\phi) = \int \phi R_\omega \mathrm{dvol}_\omega.$$

A direct calculation shows that α is *closed*, which in turn implies that there is a function $\mathcal{E}\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, unique up to an additive constant, with $\mathrm{d}\mathcal{E} = \alpha$. This function $\mathcal{E}$ was introduced by Mabuchi in [29], and is called the *K-energy*. Notice that, by construction, the critical points of $\mathcal{E}$ are precisely those metrics in $\mathcal{H}$ with constant scalar curvature.

The K-energy enjoys a truly special property: it is convex along geodesics in $\mathcal{H}$! To explain this more precisely, we need some more notation. Given a function ϕ we can consider the failure of the flow of $\nabla\phi$ to be holomorphic; this is given by the Lie derivative $L_{\nabla\phi}(J)$, a section of $\mathrm{End}(TX)$. Now let $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ be a geodesic with $\gamma(0) = \omega$ and $\gamma'(0) = \phi$. One can show that

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathcal{E}\circ\gamma)\right|_{t=0} = \int_X |L_{\nabla\phi}J|^2 \mathrm{dvol}_\omega.$$

From this it follows that not only is $\mathcal{E}$ geodesically convex, but that it is *strictly* geodesically convex unless there are functions ϕ for which $\nabla\phi$ is a holomorphic vector field. In particular, if X has no non-zero holomorphic vector fields (or even if all non-zero holomorphic vector fields are nowhere vanishing, such as for elliptic curves) then $\mathcal{E}$ is strictly geodesically convex.

It is important to emphasis the formal nature of this calculation. Since $\mathcal{H}$ is an infinite dimensional manifold, there is no guarantee that geodesics exist. Finding a geodesic amounts to solving a degenerate version of the complex Monge-Ampère equation. This is a difficult problem which has occupied many authors (see, for example, [11, 34, 27] for a small selection of what has been achieved). Putting this technical problem to one side, however, we can still exploit the formal picture to develop an insight for what should happen.

For example, if $\mathcal{E}$ is geodesically *strictly* convex it should have at most one critical point, and hence there should be at most one constant scalar curvature metric in $\mathcal{H}$. To see this, suppose for a moment there were two such points, ω_0 and ω_1, and join them by a geodesic ω_t. Then the function $\mathcal{E}(\omega_t)$ is a strictly convex function of t but with critical points at $t = 0$ and $t = 1$, which is a contradiction unless $\omega_0 = \omega_1$. This argument was pushed through by Chen, who managed to find geodesics of sufficient regularity to prove a uniqueness result for constant scalar curvature Kähler metrics [11]. (See also the article [16] of Donaldson, which gives an alternative proof in the projective case, avoiding geodesics in infinite dimensional spaces, and using instead geodesics in a sequence of finite dimensional approximations of $\mathcal{H}$.)

2.3 – The Futaki invariant

Mabuchi introduced K-energy as a way to "integrate" the Futaki invariant, an obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics which had been discovered previously by Futaki [22]. Rather than follow the historical progression, we will describe how the Futaki invariant arises out of Mabuchi's picture.

The behaviour of $\mathcal{E}$ gives a suggestion as to how to approach the existence of a constant scalar curvature Kähler metric. Pick a reference point $\omega \in \mathcal{H}$ and given $\phi \in T_\omega\mathcal{H}$, write $\gamma_\phi(t)$ for the geodesic with $\gamma_\phi(0) = \omega$ and $\gamma'_\phi(0) = \phi$. Assume for the sake of this discussion that these geodesics exist for all time. Write $\mathcal{E}_\phi(t) = \mathcal{E}(\gamma_\phi(t))$ for the restriction of $\mathcal{E}$ to the geodesic. By convexity, we know that $\mathcal{E}'_\phi(t)$ is a non-decreasing function of t. Write $F(\phi) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{E}'_\phi(t)$.

The crucial observation is that if, for some ϕ, we have $F(\phi) < 0$ then $\mathcal{H}$ *can not contain a constant scalar curvature metric*. Imagine, for a contradiction, that it did, with ω_0 being a critical point of $\mathcal{E}$. Since $F(\phi) < 0$, $\mathcal{E}(\gamma_\phi(t))$ must tend to $-\infty$ as $t \to \infty$. Let ω_1 be some point on this geodesic with $\mathcal{E}(\omega_1) < \mathcal{E}(\omega_0)$. Join ω_0 and ω_1 by a geodesic ω_s. Then (assuming this second geodesic can also be found!) $\mathcal{E}(\omega_s)$ is a convex function of s, with a critical point at $s = 0$ and so is non-decreasing in s, giving a contradiction.

As we have already stressed, finding geodesics with which to test the sign of $F(\phi)$ is a highly non-trivial problem, but there is one class of examples which are straightforward and these lead us to Futaki's invariant. Fix a Kähler metric $\omega_0 \in \mathcal{H}$ and suppose that $f\colon X \to \mathbb{R}$ has holomorphic gradient, in other words $L_{\nabla f} J = 0$. Write $u_t\colon X \to X$ for the 1-parameter group of diffeomorphisms generated by ∇f. Since $L_{\nabla f} J = 0$, we have $u_t^* J = J$ and the diffeomorphisms are actually biholomorphisms. We can then define a path of Kähler metrics by $\omega_t = u_t^*(\omega)$. (Since $u_t^* J = J$, these are all positive Hermitian forms.) A direct calculation shows that ω_t is a geodesic in $\mathcal{H}$, and so we can use it in the above discussion.

We now compute F for this geodesic. The aforemention calculation gives that $\omega_t = \omega + i\partial\bar\partial\phi_t$ where $\frac{\partial\phi}{\partial t} = u_t^*(f)$. Moreover, if we suppose that f has mean-value zero with respect to ω_0 then

$$\int_X u_t^*(f)\mathrm{dvol}_{\omega_t} = \int_X u_t^*(f\mathrm{dvol}_{\omega_0}) = 0.$$

So, interpreting tangent vectors as mean-value zero functions, we have that the tangent to ω_t is $u_t^*(f) \in T_{\omega_t}\mathcal{H}$. It follows that

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(\omega_t) &= \int_X (u_t^* f) R_{\omega_t} \mathrm{dvol}_{\omega_t} \\ &= \int_X u_t^*\left(f R_{\omega_0}\, \mathrm{dvol}_{\omega_0}\right) = \int_X f R_{\omega_0}\, \mathrm{dvol}_{\omega_0}.\end{aligned}$$

This calculation shows that the derivative is independent of t and that the K-energy is *linear* along the geodesic. In particular,

$$F(f) = \int f R_{\omega_0}\, \mathrm{dvol}_{\omega_0}. \tag{6}$$

Our above discussion shows that if this is negative, then there is no constant scalar curvature Kähler metric in $\mathcal{H}$. Moreover, if it is positive, then $F(-f)$ will be negative and so again no constant scalar curvature metric can exist. (The fact that $F(-f) = -F(f)$ is because K-energy is linear along the geodesic and depends on the special nature of the geodesic in question; this is certainly not the behaviour in general!)

Futaki's original proof took a completely different approach [22]. He showed directly that, whilst the various terms in the expression (6), namely $f, R_\omega, \mathrm{dvol}_\omega$ depend on $\omega \in \mathcal{H}$, in fact the overall combination $F(f)$ depends only on the vector field $v = \nabla f$. Assuming this, if there exists $\omega_0 \in \mathcal{H}$ with constant scalar curvature, we can use it to compute $F(f)$ and it is clear then that $F(f) = 0$.

3. K-stability

In [21], Donaldson showed how Mabuchi's K-energy is an example of a general framework involving moment map geometry. This led to a precise conjecture relating existence of constant scalar curvature metrics to an algebro-geometric notion of "stability". This is what we will describe next. (An excellent and much more detailed overview of this material can be found in Richard Thomas's notes [44] and I am indebted to him for teaching me the subject.)

3.1 – The Kempf-Ness function

We begin with the general framework, which goes back to the work of Kempf and Ness [26] and was subsequently developed by Kirwan [31]. Let Z be a compact Kähler manifold with Kähler metric Ω and let K be a compact Lie group which acts on Z by Kähler isometries, i.e., biholomorphisms which preserve Ω. Each element $\xi \in \mathfrak{k}$ in the Lie algebra of K gives a vector field V_ξ on Z with $L_{V_\xi}\Omega = 0$. Meanwhile, one can check that if $f\colon Z \to \mathbb{R}$ is smooth, the Hamiltonian vector field $V = J\nabla f$ generated by f also satisfies $L_V\Omega = 0$. We will require that all of the vectors V_ξ generating our action are Hamiltonian in this way and, moreover, that the corresponding functions can be chosen "coherently". We ask for a map $\mu\colon Z \to \mathfrak{k}^*$ with the property that for any $\xi \in \mathfrak{k}$, the function $\mu_\xi\colon Z \to \mathbb{R}$ defined by $\mu_\xi(x) = \langle \mu(x), \xi\rangle$ is a Hamiltonian function for the vector field V_ξ. We also ask that μ be equivariant with respect to the actions of K on Z and $\mathfrak{k}^*$. Such a μ is called a *moment map* (or momentum map by some authors). We should mention that moment maps need not always exist and even when they do they may not be unique.

The goal of Kempf-Ness theory is to find zeros of the moment map. We write G for the complexification of K. The group G also acts on Z, this time by biholomorphisms, but which do not necessarily preserve the metric. The central question which Kempf and Ness address is:

$$\text{given } z \in Z, \text{ when can we find } g \in G \text{ such that } \mu(g\cdot z) = 0? \tag{7}$$

(This question arises when one tries to compare two different types of quotient, namely the complex quotient constructed by geometric invariant theory and the symplectic quotient constructed by symplectic reduction. Unfortunately describing this fully would take us too much time.)

We will illustrate our discussion by reference to an example. The group $K = \mathrm{SU}(2)$ acts by holomorphic isometries on $\mathbb{CP}^1$ whereas the complexification $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ acts by Möbius transformations, which do not necessarily preserve the metric. One way of seeing the SU(2) action on $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ is to take the unit sphere in $\mathfrak{su}(2)^*$, where SU(2) acts via the coadjoint action. The coadjoint action preserves the Killing form and so also the unit sphere. One can check from this point of view that the moment map $\mu\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathfrak{su}(2)^*$ is simply the inclusion. This amounts to the statement that given a directed axis in $\mathbb{R}^3$, if we restrict the corresponding coordinate function to the unit sphere S^2, it has as Hamiltonian vector field the generator of the rotation about that axis. Since $\mu^{-1}(0)$ is empty, we see that we can *never* find a zero of the moment map.

We can build a family of more interesting examples out of this one. Let Z_k be the set of unordered k-tuples of points in $\mathbb{CP}^1$ and we allow k-tuples where not all the points are distinct. The groups SU(2) and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ act in an obvious way on Z_k. We can also think of Z_k as follows. Given a non-zero homogenous polynomial $p(x,y)$ in two variables, of degree k and with complex coefficients, we can associate to p its zeros:

$$p^{-1}(0) = \{[x:y] \in \mathbb{CP}^1 : p(x,y) = 0\}$$

where we count zeros with multiplicity. This gives a point in Z_k and two polynomials give rise to the same point if and only if they have the same roots and hence are constant non-zero multiples of each other. In this way we see that $Z_k = \mathbb{P}(S_k)$ is the projectivisation of the space S_k of degree k homogeneous polynomials in two variables. The action of SU(2) or $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in this picture is by change of variables. As a complex projective space, Z_k carries a Kähler metric Ω, namely the Fubini-Study metric, and this is preserved by the action of SU(2). It is not difficult to check that the moment map $\mu_k\colon Z_k \to \mathfrak{su}(2)^*$ is given by the sum of the moment maps for each copy of $\mathbb{CP}^1$, i.e., given a k-tuple $z_1,\dots,z_k \in \mathbb{CP}^1$ then $\mu_k(z_1,\dots,z_k) = \mu(z_1)+\dots+\mu_k(z_k)$. In other words, the moment map is the centre of mass of the k-tuple. We see then that in this example, question (7) becomes the following: *given k points on $\mathbb{CP}^1$, when can we move them simultaneously by the same Möbius transformation so that they have centre of mass equal to zero?*

Now, if $k = 2$ or 3 one can see by hand that it can be done if and only if none of the points coincide. This is because the action of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ on $\mathbb{CP}^1$ is triply transitive: it takes any triple of distinct points to any other triple, so in particular any triple can be taken to one with centre of mass equal to zero. But if you imagine trying to solve the problem directly with, say, 100 points you quickly realise that a direct approach like this is extremely hard!

Kempf and Ness's solution to question (7) is as follows. Since μ is K-equivariant, the zeros of μ are a union of K-orbits and so it makes sense to consider the space of K-orbits inside the given G-orbit, which we can identify with G/K. The tangent space to G/K at the identity coset is identified with $i\mathfrak{k}$ and so we can interpret $i\mu(z) \in i\mathfrak{k}^*$ as a 1-form there. Similarly, given another $g \in G$, we obtain an identification of the tangent space to G/K at $g\cdot K$ with $i\mathfrak{k}$ and also a 1-form there, namely $i\mu(g\cdot z)$. Now the K-equivariance of μ ensures that this procedure gives a well-defined global 1-form α on G/K. Kempf and Ness showed that α is closed and so is in fact the derivative of a function, now called the Kempf-Ness function, $E\colon G/K \to \mathbb{R}$. By construction the critical points of E are precisely the zeros of the moment map which we are looking for. Moreover, when we equip G/K with its natural non-positively curved symmetric Riemannian metric, the function E is automatically geodesically convex. It was Donaldson's key observation that Mabuchi's K-energy enjoys these same properties precisely because it is the Kempf-Ness function for a moment map problem! (Dondaldson was following a well-troden path in applying finite dimensional moment map ideas to problems in PDE, going back to ideas of Atiyah-Bott [3].)

Before we explain this infinite dimensional moment map interpretation of constant scalar curvature Kähler metrics, we will first explain how in this *finite* dimensional setting, Kempf and Ness used E to definitively answer question (7). Just as in our discussion of K-energy, we consider all the geodesics emanating from an arbitrary choice of origin in G/K, which we may as well take to be the identity coset. The geodesics are all of the form $\exp(it\xi)\cdot K$ for $\xi \in \mathfrak{k}$. To each ξ we associate the limiting derivative of E along the corresponding geodesic:

$$F(\xi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(\exp(it\xi)\cdot K).$$

In this finite dimensional setting there is no problem with existence of geodesics. So (assuming that the Kempf-Ness function is strictly geodesically convex, or equivalently that the action of K is locally free) it is immediate that E has a critical point if and only if $F(\xi) > 0$ for all ξ; moreover, when this happens the critical point is unique.

Now we come to a remarkable result, called the Hilbert-Mumford criterion. It states that *it suffices to check the sign of $F(\xi)$ only for those ξ which generate a $\mathbb{C}^*$-subgroup $\mathbb{C}^* \to G$*. Given a homomorphism $\mathbb{C}^* \to G$, we work back in the original Kähler manifold Z and take the limit $z_\infty = \lim \lambda\cdot z$ where $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tends to infinity. (The limit as $\lambda \to 0$ corresponds to analysing the other end of the same geodesic in G/K.) Kempf and Ness's crucial observation was that the value of $F(\xi)$ for the $\mathbb{C}^*$-action generated by ξ can be computed purely from the behaviour of the $\mathbb{C}^*$-action at z_∞.

Of course, the point z_∞ is fixed by the $\mathbb{C}^*$ action so this needs some clarification. For Kempf-Ness's strategy to work, we need to assume that the Kähler class $[\Omega]$, a priori an element of $H^2(Z,\mathbb{R})$, actually lies in $H^2(X,\mathbb{Z})$. When this happens there is a holomorphic line bundle $L \to Z$ with $c_1(L) = [\Omega]$. Moreover, the moment map is precisely the information needed to lift the action of G from Z to the total space of L. Now, since z_∞ is fixed by the $\mathbb{C}^*$ action on Z, the action of $\mathbb{C}^*$ on L preserves the line L_{z_∞}. Such a one-dimensional representation is given by a weight $w \in \mathbb{Z}$, with $\lambda \in \mathbb{C}^*$ acting as multiplication by λ^w. Kempf and Ness proved that *this weight is nothing other than $F(\xi)$*.

We return to our example, the action of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ on Z_k, the space of k-tuples of points in $\mathbb{CP}^1$. In this case, the symmetric space $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathrm{SU}(2)$ is nothing other than 3-dimensional hyperbolic space H^3. Each choice of k-tuple $z = (z_1,\dots,z_k)$ gives a geodesically convex function on H^3. The line-bundle $L \to Z_k$ is described as follows. Given a k-tuple $z = (z_1,\dots,z_k)$ we write $E_{z_j} \subset \mathbb{C}^2$ for the complex line which corresponds to the point $z_j \in \mathbb{CP}^1$; then we take the tensor product: $L_z = E_{z_1}\otimes\dots\otimes E_{z_k}$. This gives the fibre of L over the point $z \in Z_k$. (We should be a little careful here, since the k-tuple is unordered, with different orders giving different tensor products which are naturally isomorphic; we elide this point.) Meanwhile, a $\mathbb{C}^*$ subgroup of $SL(2,\mathbb{C})$ is determined by its eigenvectors, one of which is multiplied by λ and the other by λ^{-1}; we denote the corresponding fixed points $p_+, p_- \in \mathbb{CP}^1$. The action of $\mathbb{C}^*$ pushes all of $\mathbb{CP}^1$ away from p_- and towards p_+. From the hyperbolic perspective, we have chosen two points $p_\pm$ on the sphere at infinity in H^3, these are the endpoints of a unique geodesic and the $\mathbb{C}^*$-group of isometries of H^3 is generated by rotations around and translations along this geodesic.

Under the limit $\lambda \to \infty$, the only point of $\mathbb{CP}^1$ which does not end up at p_+ is p_- itself. So given a k-tuple z, the limit z_∞ is thus $z_\infty = ap_- + (k-a)p_+$ where a is the number of times p_- appeared in z (and we have switched to an "additive" notation for an unorderd k-tuple for convenience). The action of $\mathbb{C}^*$ on $L_{z_\infty} \cong E^a_{p_-} \otimes E^{k-a}_{p_+}$ has weight $(k-a)-a = k-2a$ which is positive provided $k > 2a$. Since any distinct pair of points p_-, p_+ arise from a $\mathbb{C}^*$ subgroup, we see that we can solve question (7) and find g such that $g \cdot z$ has zero centre of mass provided no point occurs in z with multiplicity $k/2$ or more. Notice that the necessity of this condition is more or less obvious. What is quite miraculous is that it is also sufficient! (There is one boundary case which our analysis has seemingly ignored: if z contains two distinct points each with multiplicity $k/2$. In this case the problem has an easy solution. It was excluded by the assumption that the Kempf-Ness function be *strictly* convex.)

3.2 – Scalar curvature as a moment map

In [21] Donaldson explained how to fit the search for constant scalar curvature Kähler metrics into this framework. Let (X,J,ω) be a Kähler manifold. Rather than vary the Kähler form ω, we will instead vary the complex structure J. We write $\mathcal{Z}$ for the set of all endomorphisms $J\colon TX \to TX$ with $J^2=-1$, for which (ω,J) is a Kähler structure on X. This is really two separate conditions: firstly there is the differential condition that J must be integrable, in the sense that there is a holomorphic atlas for the underlying smooth manifold X in which J is identified with multiplication by i on each tangent space; secondly there is the pointwise condition that it must makes ω into a positive Hermitian form (which will automatically be Kähler since it is closed).

We next explain how the infinite dimensional manifold $\mathcal{Z}$ is itself a Kähler manifold. First note that $\mathcal{Z}$ is a submanifold of the space of sections of $\mathrm{End}(TX)$. Given a point $J \in \mathcal{Z}$, we use the Kähler structure (ω,J) on X to define an L^2-innerproduct on the sections of $\mathrm{End}(TX)$. This in turn induces a Riemannian metric on $\mathcal{Z}$. Now linearising the requirement that $J^2=-1$, we see that a tangent vector $A \in T_J\mathcal{Z}$ must satisfy $AJ+JA=0$. If A satisfies this, then so does JA. One can also check that if A preserves the integrability condition and makes ω a positive Hermitian form, then so does JA. It follows that $\mathcal{J}(A)=JA$ defines a complex structure on the tangent space $T_J\mathcal{Z}$. One then checks that this is integrable and, together with the L^2 Riemannian structure, makes $\mathcal{Z}$ into a Kähler manifold.

The next piece of the jigsaw is the group $\mathcal{K} = Ham(X,\omega)$ of Hamiltonian diffeomorphisms of (X,ω). This acts on $\mathcal{Z}$ by pull-back: given $J \in \mathcal{Z}$ and an arbitrary diffeomorphism g, the pair $(g^*\omega, g^*J)$ is again a Kähler structure on X; if moreover $g \in \mathcal{K}$ then $g^*\omega = \omega$ and so (ω, g^*J) is a Kähler structure, meaning $g^*J \in \mathcal{Z}$. It is straightforward to see that this preserves the Kähler structure of $\mathcal{Z}$ and so one can ask for a moment map. Donaldson's insight was that this is given by the scalar curvature. More precisely, let $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ be a smooth function with mean-value zero, generating the Hamiltonian vector field $J\nabla\phi$ on X. This gives in turn a vector field $\mathcal{V}_\phi$ on $\mathcal{Z}$. We can define a function M on $\mathcal{Z}$ by setting

$$M_\phi(J) = \int_X \phi\Big(R(\omega,J) - \overline{R}\Big)\omega^n$$

where $R(\omega,J)$ is the scalar curvature of the Kähler metric (ω,J) and $\overline{R}$ is its mean-value. One can check that this function $M_\phi\colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ is a Hamiltonian function for $\mathcal{V}_\phi$ and that varying ϕ we obtain a moment map. Moreover, a zero of the moment map is precisely a Kähler structure (ω,J) with constant scalar curvature. This puts us, formally at least, in the set-up considered by Kempf-Ness.

One thing, however, is seemingly missing: the complexification $\mathcal{G}$ of $\mathcal{K}$. Whilst there is no such group, we can still talk about the orbits of its action! The Lie algebra of Hamiltonian vector fields certainly does complexify: the complex valued "Hamiltonian" function $\phi + i\psi$ generates the vector field $J\nabla\phi - \nabla\psi$ on X. This in turn defines a tangent vector $\mathcal{V}_\phi + \mathcal{J}\mathcal{V}_\psi \in T_J\mathcal{Z}$. The collection of all such vectors gives the tangent space to the orbit at J of the mythical complexified group. We can now consider the same question (7) as Kempf-Ness: *given $J_0 \in \mathcal{Z}$ when can we find $J \in \mathcal{Z}$ in the same "$\mathcal{G}$-orbit" with $R(\omega,J)$ constant?*

Recall that the original question of Calabi involved fixing J and rather varying ω in its Kähler class. These two points of view are related by a diffeomorphism: if instead of moving J along the vector field $\nabla\psi$, we fix J and move ω along the vector field $\nabla\psi$ the corresponding change in ω is $i\partial\bar{\partial}\psi$; so we can think of imaginary Hamiltonians $i\psi$ as infinitesimal Kähler potentials which move ω in its Kähler class. The upshot is that the coset space $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ is naturally identified with the space $\mathcal{H}$ of Kähler metrics in a fixed cohomology class and the Kempf-Ness function which integrates the moment map is seen to be precisely Mabuchi's K-energy.

3.3 – K-stability

The point of recasting Mabuchi's work in the Kempf-Ness framework is to shed light on the question of existence of constant scalar curvature Kähler metrics. In finite dimensions at least, finding a zero of the moment map in a complex orbit comes down to studying $\mathbb{C}^*$-degenerations and their corresponding weights. This leads to the following set-up.

Let $X \subset \mathbb{CP}^N$ be a projective manifold. The restriction of the Fubini-Study metric makes X Kähler and we will investigate whether or not the corresponding Kähler class κ contains a constant scalar curvature metric. We will need the concept of a $\mathbb{C}^*$-degeneration of X, which is called a *test configuration*. To define this we start with a new embedding $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{CP}^M$ of X into a potentially much *bigger* projective space. (This will allow for many more test configurations than if we fixed the ambient dimension.) We require that the new Fubini-Study metric on X coming from this new embedding represents a multiple, $r\kappa$, of the original Kähler class. We now fit X into a family $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, embedded in $\mathbb{CP}^M \times \mathbb{C}$, which is invariant under a $\mathbb{C}^*$-action on $\mathbb{CP}^M \times \mathbb{C}$ covering the standard action on $\mathbb{C}$. We require three things of $\mathcal{X}$:

- $\pi^{-1}(1) = \iota(X)$.
- The map π is flat.
- The central fibre $X_0 = \pi^{-1}(0)$ is a normal variety with log terminal singularities.

It follows from $\mathbb{C}^*$-equivariance and the first condition that all fibres $\pi^{-1}(z)$ for $z \neq 0$ are biholomorphic to X. Schematically at least, $\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ is supposed to represent a geodesic in $\mathcal{H}$ coming from a $\mathbb{C}^*$-action on $\mathcal{Z}$, together with the limiting point lying in (some compactification of) $\mathcal{Z}$, coming from $\lambda \to 0$. The central fibre will not, in general, be biholomorphic to X. When X_0 *is* biholomorphic to X we say the test configuration is *trivial*. The second condition in the definition is technical, an algebro-geometric analogue of requiring the fibres to vary "continuously". The third condition is again technical; it says that whilst we permit singular central fibres, the possible singularities are restricted.

One way to produce test configurations is as follows. Given an embedding $X \subset \mathbb{CP}^M$, we take a subgroup $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}(M+1, \mathbb{C})$. We use this action to move X around inside $\mathbb{CP}^M$ and take the closure of the images:

$$\mathcal{X} = \mathrm{Cl}\{(\lambda \cdot x, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}^*, x \in X\}$$

where the closure is taken in $\mathbb{CP}^M \times \mathbb{C}$. The general fibre is biholomorphic to X, but the central fibre is some potentially singular subvariety which is fixed by the $\mathbb{C}^*$-action. Notice that if the $\mathbb{C}^*$ action on $\mathbb{CP}^M$ actually fixes X, then $\mathcal{X} = X \times \mathbb{C}$ and the central fibre is biholomorphic to X, giving a trivial test configuration.

Returning to a general test configuration, we also need the "weight" of the $\mathbb{C}^*$ action, as in the Kempf-Ness set-up. To define this we first recall that projective space carries a "tautological" line bundle, $E \to \mathbb{CP}^M$, whose fibre over E_p over a point p, is the corresponding complex line $E_p \subset \mathbb{C}^{N+1}$. Given a test configuration $\mathcal{X}$, we write $L_0 \to X_0$ for the restriction to the central fibre X_0 of the dual of the tautological bundle. (We need to take the dual to make the signs of weights agree with our previous conventions.) We write V for the space of holomorphic sections of L_0. We will also need to consider powers, L_0^k of this line bundle, and the spaces V_k of holomorphic sections of L_0^k. Now, since $0 \in \mathbb{C}$ is fixed by $\mathbb{C}^*$, the $\mathbb{C}^*$-action on $\mathcal{X}$ restricts to give an action on X_0. This action lifts to the line bundle L_0 and hence to its powers L_0^k. This gives a $\mathbb{C}^*$-action on each vector space V_k. We write d_k for the dimension of V_k and w_k for the total weight of the corresponding $\mathbb{C}^*$-action. Standard results in algebraic geometry (the Grothendieck-Riemann-Roch theorem and its equivariant version, together with Kodaira vanishing) show that

$$\frac{w_k}{k d_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + O(k^{-2}).$$

We define the Futaki invariant of $\mathcal{X}$ to be $\mathrm{Fut}(\mathcal{X}) := F_1$. This is a generalisation of the original version of the Futaki invariant described above. If we take a trivial test configuration built out of a $\mathbb{C}^*$ action on X then F_1 is precisely the "classical" Futaki invariant of the generating vector field.

We finally arrive at the definition of K-stability, and the central conjecture about constant scalar curvature Kähler metrics.

Definition 4. Let $X \subset \mathbb{CP}^N$ be a projective manifold and denote by $\varkappa$ the Kähler class of the restriction of the Fubini-Study metric to X. We say that $(X, \varkappa)$ is *K-stable* if for any test configuration $\mathcal{X}$ we have $\mathrm{Fut}(\mathcal{X}) \geq 0$ and, moreover, $\mathrm{Fut}(\mathcal{X}) > 0$ when $\mathcal{X}$ is non-trivial.

Conjecture 1 (The Donaldson-Tian-Yau conjecture). *$(X, \varkappa)$ is K-stable if and only if $\varkappa$ contains a constant scalar curvature metric.*

It is important to emphasise that this conjecture relates two things which are at first sight from completely different universes. On one side, finding a constant scalar curvature metric amounts to solving a partial differential equation. On the other, K-stability is defined purely in terms of algebraic geometry. It is truly remarkable that these two seemingly unrelated problems are in fact intimately related.

Yau was the first to suggest that the existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature should be related to some algebro-geometric notion of stability [49]. He was surely motivated by a precursor to this, the so-called Hitchin-Kobayashi correspondence (proved by Donaldson [18, 20] and Uhlenbeck-Yau [46]) which equates the existence of Hermitian-Einstein metrics in holomorphic vector bundles to their slope stability. Yau's vague suggestion was made more precise by Tian, who realised that Futaki's obstruction could be extended to manifolds which did not admit vector fields themselves, provided they could be degenerated in a sufficiently nice fashion to varieties which did admit vector fields [45]. This gave the first concrete definition of stability. Donaldson gave additional evidence for the conjecture, via the Kempf-Ness framework as well as refining the definition of K-stability to make it purely algebro-geometric.

In one direction the conjecture has been proved. Stoppa has shown that if $\varkappa$ contains a constant scalar curvature Kähler metric, then X is K-stable [40], albeit using a slightly different definition of K-stability. In the Kähler-Einstein setting (where $\varkappa = c_1(X)$) this was predated by work of Tian [45] showing that existence of a Kähler-Einstein metric implies another variant of K-stability. More recent work of Berman [6] showed that existence of a Kähler-Einstein metric implies the version of K-stability stated here. The other direction, proving that K-stability implies existence of a constant scalar curvature metric, is largely open. There are only a handful of situations in which the conjecture has been proved. The most spectacular is for Kähler-Einstein metrics, by work of Chen-Donaldson-Sun, which we briefly describe in the next section. We also mention the proof of the conjecture for toric surfaces, by Donaldson [19], and for certain Kähler classes on ruled manifolds by Hong [24] and Brönnle [8] (who treats the extremal case). (In this last case, the relationship with K-stability of the ruled manifold $\mathbb{P}(E) \to X$ and the slope stability of the bundle $E \to X$ goes via the work of Ross-Thomas [37, 36].)

4. Kähler-Einstein metrics, II

As mentioned above, the Donaldson-Tian-Yau conjecture has been completely settled in the Kähler-Einstein case.

Theorem 4 (Chen-Donaldson-Sun [12, 13, 14]). *Let X be a compact Fano manifold, i.e., a complex manifold for which $c_1(X)$ is a Kähler class. If $(X, c_1(X))$ is K-stable then X carries a Kähler-Einstein metric.*

The proof involves an ingenious version of the continuity argument outlined above in §1.3. The strategy begins with a smooth divisor $D \subset X$ (i.e., a complex submanifold of codimension-one) which is the zero locus of a holomorphic section of $\Lambda^n TX$ (where n is the complex dimension of X) or perhaps of some positive power $(\Lambda^n TX)^\lambda$. One then finds a Kähler-Einstein metric on X which has a conical singularity along D of cone angle $2\pi\beta$ for some small initial value of $\beta > 0$. In the case $\lambda = 1$ the existence of such a metric is due to Berman [5]. When $\lambda = 2$, one can take a double cover $Y \to X$ branched along D. Y has $c_1(Y) = 0$ and so by Yau's Theorem it carries a Ricci flat metric. This metric descends to give a Ricci flat metric on X with cone angle $\beta = 1/2$. For higher values of λ one can rely on work of Brendle [7] or Jeffre-Mazzeo-Rubinstein [25].)

One now attempts to deform the metric, keeping it Kähler-Einstein, whilst increasing the cone angle. Making a small deformation of the cone angle (openness in the continuity method) involves the implicit function theorem, although there are additional complications due to the singularity of the metric. The much more substantial part of the problem is to prove that if $\beta_i \to \beta_\infty$ are a convergent sequence of cone angles of Kähler-Einstein cone metrics ω_i then, after passing to a subsequence, the ω_i also converge to a Kähler-Einstein metric ω_∞ with cone angle β_∞.

The idea is to show that if the ω_i don't converge, then there is a destabilising test configuration for X, contradicting the fact that it is K-stable. The central fibre of the test configuration is found as follows. Fix a large positive integer r. The holomorphic line bundle $(\Lambda^n TX)^r$ has a large number of holomorphic sections forming a vector space whose dimension grows like $O(r^n)$. Given a basis $s_0, \dots, s_N$ of holomorphic sections, Kodaira's embedding theorem says that the map $\iota \colon X \to \mathbb{CP}^N$ given by $\iota(x) = [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]$ is an embedding of X. (For each point x, the sections $s_i(x) \in (\Lambda^n T_x X)^r$ are elements of an abstract line; identifying this line with $\mathbb{C}$ we can think of $s_i(x) \in \mathbb{C}$ as complex numbers; changing the identification will scale all these numbers by the same amount and so does not alter the final point $[s_0(x) : \cdots : s_N(x)] \in \mathbb{CP}^n$.) Different choices of basis will give different embeddings, but the sequence of Kähler metrics ω_i give preferred choices: we take for $\iota_i \colon X \to \mathbb{CP}^N$ the embedding defined by an L^2-orthogonal basis of holomorphic sections, with respect to ω_i. The crux is to show that (up to the action of $\mathrm{U}(N+1)$) the images $\iota_i(X)$ converge to a projective variety W which is the central fibre of a test configuration for X. This requires an in-depth analysis of the embeddings ι_i, combining geometric insights and a technical *tour de force*.

From one perspective, Chen-Donaldson-Sun's Theorem 4 could be seen as the end of the story for Kähler-Einstein metrics, giving a necessary and sufficient condition for their existence. However, it seems likely instead to be the beginning of another story. Proving that a Fano manifold is K-stable is an extremely difficult problem in algebraic geometry, and much remains to be done if Theorem 4 is to be of genuine use in finding examples of Kähler-Einstein metrics. Theorem 4 also opens the way to study the moduli of families of Kähler-Einstein metrics. Given a sequence (J_i, ω_i) of Kähler-Einstein structures on the same underlying smooth manifold, what are the possible limits? One can think of this as the higher dimensional generalisation of understanding the compactification of the moduli space of Riemann surfaces. Thanks to Theorem 4 we now know that it is the same as asking for limits of K-stable varieties and so techniques of algebraic geometry can be brought to bear on the problem. Indeed progress is already underway in this direction [33, 32, 39].

Références

[1] J. Amorós et al. *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*. 44. American Mathematical Soc., 1996.

[2] C. Arezzo, F. Pacard et M. Singer. « Extremal metrics on blowups ». *Duke Mathematical Journal* **157**, nº 1 (2011), p. 1–51.

[3] M. F. Atiyah et R. Bott. « The Yang-Mills equations over Riemann surfaces ». *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, nº 308 (1982), p. 523–615.

[4] T. Aubin. « Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes ». *CR Acad. Sci Paris.* **283** (1976), p. 119–121.

[5] R. J. Berman. « A thermodynamical formalism for Monge-Ampère equations, Moser-Trudinger inequalities and Kähler-Einstein metrics ». *Advances in Mathematics* **248** (2013), p. 1254–1297.

[6] R. J. Berman. « K-polystability of Q-Fano varieties admitting Kähler-Einstein metrics ». *Inventiones mathematicae* **203**, nº 3 (2016), p. 973–1025.

[7] S. Brendle. « Ricci flat Kähler metrics with edge singularities ». *International Mathematics Research Notices* **2013**, nº 24 (2012), p. 5727–5766.

[8] T. Brönnle. « Extremal Kähler metrics on projectivized vector bundles ». *Duke Mathematical Journal* **164**, nº 2 (2015), p. 195–233.

[9] E. Calabi. « Extremal Kähler metrics ». In : *Seminar on Differential Geometry*. Vol. 102. Ann. of Math. Stud. Princeton, N.J. : Princeton Univ. Press, 1982, p. 259–290.

[10] E. Calabi. « Extremal Kähler metrics. II ». In : *Differential geometry and complex analysis*. Berlin : Springer, 1985, p. 95–114.

[11] X. Chen. « The space of Kähler metrics ». *Journal of Differential Geometry* **56**, nº 2 (2000), p. 189–234.

[12] X. Chen, S. Donaldson et S. Sun. « Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities ». *Journal of the American Mathematical Society* **28**, nº 1 (2015), p. 183–197.

[13] X. Chen, S. Donaldson et S. Sun. « Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π ». *Journal of the American Mathematical Society* **28**, nº 1 (2015), p. 199–234.

[14] X. Chen, S. Donaldson et S. Sun. « Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof ». *Journal of the American Mathematical Society* **28**, nº 1 (2015), p. 235–278.

[15] P. Deligne et al. « Real homotopy theory of Kähler manifolds ». *Inventiones mathematicae* **29**, nº 3 (1975), p. 245–274.

[16] S. K. Donaldson. « Scalar curvature and projective embeddings. I ». *J. Differential Geom.* **59**, nº 3 (2001), p. 479–522. issn : 0022-040X.

[17] S. Donaldson. « Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics ». In : *Northern California Symplectic Geometry Seminar*. 196. American Mathematical Soc. 1999, p. 13.

[18] S. K. Donaldson. « Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles ». *Proceedings of the London Mathematical Society* **3**, nº 1 (1985), p. 1–26.

[19] S. K. Donaldson. « Constant scalar curvature metrics on toric surfaces ». *Geometric and Functional Analysis* **19**, nº 1 (2009), p. 83–136.

[20] S. K. Donaldson. « Infinite determinants, stable bundles and curvature ». *Duke Math. J* **54**, nº 1 (1987), p. 231–247.

[21] S. K. Donaldson. « Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology ». *Fields medallists' lectures* **5** (1997), p. 384–403.

[22] A. Futaki. « An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics ». *Inventiones mathematicae* **73**, nº 3 (1983), p. 437–443.

[23] P. Griffiths et J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, 2014.

[24] Y.-J. Hong. « Constant Hermitian scalar curvature equations on ruled manifolds ». *Journal of Differential Geometry* **53**, nº 3 (1999), p. 465–516.

[25] T. Jeffres, R. Mazzeo et Y. A. Rubinstein. « Kähler-Einstein metrics with edge singularities ». *Annals of Mathematics* **183**, nº 1 (2016), p. 95–176.

[26] G. Kempf et L. Ness. « The length of vectors in representation spaces ». *Algebraic geometry* (1979), p. 233–243.

[27] L. Lempert et L. Vivas. « Geodesics in the space of Kähler metrics ». *Duke Mathematical Journal* **162**, nº 7 (2013), p. 1369–1381.

[28] A. Lichnerowicz. « Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes compactes ». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences* **244**, nº 25 (1957), p. 3011–3013.

[29] T. Mabuchi. « K-energy maps integrating Futaki invariants ». *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* **38**, nº 4 (1986), p. 575–593.

[30] Y. Matsushima. « Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne ». *Nagoya Mathematical Journal* **11** (1957), p. 145–150.

[31] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan. *Geometric Invariant Theory*. Springer Verlag, 1994.

[32] Y. Odaka. « Compact moduli spaces of Kähler-Einstein Fano varieties ». *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **51**, nº 3 (2015), p. 549–566.

[33] Y. Odaka, C. Spotti et S. Sun. « Compact moduli spaces of Del Pezzo surfaces and Kähler-Einstein metrics ». *Journal of Differential Geometry* **102**, nº 1 (2016), p. 127–172.

[34] D. H. Phong et J. Sturm. « The Monge-Ampere operator and geodesics in the space of Kähler potentials ». *Inventiones mathematicae* **166**, nº 1 (2006), p. 125–149.

[35] D. H. Phong et J. Sturm. « Lectures on stability and constant scalar curvature ». *Current developments in mathematics* **2007** (2009), p. 101–176.

[36] J. Ross et R. Thomas. « A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties ». *Journal of Algebraic Geometry* **16**, nº 2 (2007), p. 201–255.

[37] J. Ross et R. Thomas. « An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics ». *Journal of Differential Geometry* **72**, nº 3 (2006), p. 429–466.

[38] S. Semmes. « Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds ». *American Journal of Mathematics* (1992), p. 495–550.

[39] C. Spotti, S. Sun et C. Yao. « Existence and deformations of Kähler-Einstein metrics on smoothable Q-Fano varieties ». *Duke Mathematical Journal* **165**, nº 16 (2016), p. 3043–3083.

[40] J. Stoppa. « K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds ». *Advances in Mathematics* **221**, nº 4 (2009), p. 1397–1408.

[41] G. Székelyhidi. *An Introduction to Extremal Kähler Metrics*. **152**. American Mathematical Society, 2014.

[42] G. Székelyhidi. « Extremal metrics and K-stability ». *Bulletin of the London Mathematical Society* **39**, nº 1 (2006), p. 76–84.

[43] G. Székelyhidi. « On blowing up extremal Kähler manifolds ». *Duke Mathematical Journal* **161**, nº 8 (2012), p. 1411–1453.

[44] R. P. Thomas. « Notes on GIT and symplectic reduction for bundles and varieties ». In : *Surveys in Differential Geometry 10*. International Press, 2006, p. 221–273.

[45] G. Tian. « Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature ». *Inventiones Mathematicae* **130**, nº 1 (1997), p. 1–37.

[46] K. Uhlenbeck et S.-T. Yau. « On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* **39**, nº S1 (1986).

[47] R. O. Wells. *Differential analysis on complex manifolds*. **21980**. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[48] S.-T. Yau. « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampére equation, I ». *Communications on pure and applied mathematics* **31**, nº 3 (1978), p. 339–411.

[49] S.-T. Yau. « Open problems in geometry ». In : *Proc. Symp. Pure Math.* Vol. 54. 1993, p. 1–28.

Joël Fine

Joël Fine est professeur de mathématiques à l'université libre de Bruxelles, spécialiste en géométrie différentielle et analyse géométrique.

Un séminaire de philosophie des mathématiques appliquées

• A. Barberousse

Fin mai 2016 s'est tenue à Paris, dans le cadre des Séminaires Internationaux de Sorbonne Universités, une rencontre de philosophie des mathématiques appliquées réunissant un petit groupe de chercheurs du domaine [1]. Le présent article a pour but de présenter les grands axes de cette rencontre, ainsi que la philosophie des mathématiques appliquées. Ses questions centrales se situent à la frontière entre la philosophie des mathématiques et la branche de la philosophie des sciences qui porte sur la modélisation. La philosophie des mathématiques est une discipline ancienne de la philosophie, dont on trouve les prémisses chez Platon et Aristote, mais qui s'est surtout développée depuis le début du xx^e^ siècle, avec l'essor de la logique contemporaine. La philosophie de la modélisation est récente ; elle correspond à un tournant de la philosophie des sciences, qui a d'abord pris les théories comme principaux objets d'étude, puis s'est tournée vers les modèles, classiques et numériques, pour mieux rendre compte de l'activité scientifique. La philosophie des mathématiques appliquées est un domaine récent, en cours de constitution ; le but de ce Séminaire International était justement de parcourir les questions prometteuses et de réfléchir aux possibilités de structuration internationale.

Par ailleurs, trois mathématiciens avaient été invités : Pascal Frey (Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC), François Dubois (CNAM) et Laure Saint-Raymond (Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC), qui ont tous trois présenté leurs travaux devant un auditoire inhabituel mais fortement intéressé par la question des critères de validité des modèles et par l'intimité des relations entre mathématiques et physique.

1. L'étonnement d'Eugene Wigner

L'une des sessions du séminaire à consister à examiner à nouveaux frais un étonnement ancien au sujet des mathématiques appliquées qu'Eugene Wigner avait énoncé en 1960 sous la forme de « l'efficacité déraisonnable des mathématiques dans les sciences empiriques »[8]. Pourquoi les mathématiques sont-elles si efficaces pour décrire les phénomènes ? Quelle est l'origine de cette efficacité ? Cet étonnement traverse l'histoire de la physique depuis le xvii^e^ siècle. Lors du séminaire, il a pris la forme suivante : comment se fait-il qu'on ait souvent l'impression que les objets et théories mathématiques « attendent », pour ainsi dire, que les physiciens aient besoin de s'en servir ? L'un des participants au séminaire, Sorin Bangu, de l'université de Bergen, a pris l'exemple de l'oscillateur harmonique simple pour illustrer cet étonnement. L'objet « nombre complexe » ainsi que la théorie mathématique appropriée, semblent rétrospectivement avoir été à *disposition des physiciens*, prêts à l'emploi au moment où ils ont voulu étudier le mouvement périodique et trouver des solutions périodiques aux équations du mouvement – alors que bien entendu, la théorie des nombres complexes a été originellement développée pour des raisons purement mathématiques, sans que leur usage futur en physique ait été anticipé d'aucune manière.

Sorin Bangu défend la thèse selon laquelle il faut distinguer l'étonnement de Wigner sous sa forme *générale* (l'applicabilité des mathématiques en général est un phénomène étonnant) et l'étonnement qui porte sur chaque épisode particulier dans lequel des questions que se posaient les physiciens

1. Anouk Barberousse (université Paris-Sorbonne, SND, organisatrice), Isabelle Drouet (université Paris-Sorbonne, SND), Markus van Atten (CNRS, SND), Vincent Ardourel (université Catholique de Louvain), Cyrille Imbert (CNRS, Archives Poincaré), Nicolas Fillion (Simon Fraser University, Canada), Sorin Bangu (université de Bergen, Norvège), Johannes Lenhard (université de Bielefeld, Allemagne), Robert Moir (Université de Western Ontario, Canada).

ont trouvé des réponses dans des travaux de mathématiques qui avaient été développés de façon indépendante. Il souligne que chaque épisode de l'histoire des sciences qui inclut une telle convergence inattendue entre la dynamique des travaux des physiciens et celle des travaux mathématiques doit être expliqué indépendamment des autres, et aussi indépendamment des explications générales que l'on peut donner par ailleurs au phénomène décrit par Wigner. L'abondance des convergences de ce type dans l'histoire des sciences empiriques laisse penser qu'il ne peut s'agir de simples coïncidences, sans toutefois que cette hypothèse soit exclue d'emblée. L'article de Wigner enjoignait les chercheurs à chercher une explication *rationnelle* à ce phénomène.

L'explication générale qui rencontre aujourd'hui le plus de succès en philosophie des sciences est que les équations utilisées par les physiciens sont vraies ou au moins approximativement vraies : la raison pour laquelle il y a convergence entre la dynamique des travaux des physiciens et celle des travaux des mathématiciens est simplement que les physiciens réussissent dans certains cas à découvrir les vraies lois de la nature, qui s'expriment sous forme mathématique. Cette explication est donnée par la thèse du *réalisme scientifique*, qui, dans l'une de ses versions, affirme que les énoncés des théories physiques sont susceptibles d'être vrais, ce qui signifie qu'ils ne sont pas de simples outils de prédiction. Cependant, la thèse philosophique du réalisme scientifique se heurte à de nombreuses objections, qui ont pour effet qu'elle est impuissante à expliquer les cas particuliers des « miracles » à la Wigner.

Les thèses proposées par Sorin Bangu [2] ont soulevé de nombreuses discussions, l'hypothèse de la coïncidence (selon laquelle les convergences entre développement des mathématiques et développement des sciences empiriques sont à chaque fois des événements contingents, ne requérant pas d'explication particulière) ayant recueilli les faveurs de plusieurs participants. Elles exemplifient l'une des branches importantes de la philosophie des mathématiques appliquées, celle qui relie l'usage des mathématiques aux grandes questions de la philosophie des sciences sur la vérité des théories scientifiques et la justification de leurs énoncés.

2. Les mathématiques entre calculs et concepts

Parmi les grandes questions de la philosophie des mathématiques, celle de la relation entre développement conceptuel et développement du calcul concerne particulièrement les mathématiques appliquées. Les philosophes des mathématiques ont surtout souligné l'importance du mouvement vers l'abstraction qui traverse l'histoire des mathématiques, en particulier depuis le XIX^e^ siècle, alors que les philosophes des mathématiques appliquées insistent sur le mouvement parallèle vers l'élaboration de méthodes de calcul de plus en plus efficaces.

Au sujet des relations qu'entretiennent le mouvement vers l'abstraction et la construction de concepts d'un côté, et le mouvement vers la mise au point de techniques de calcul de solutions approchées, Nicolas Fillion (Simon Fraser University, Canada) a défendu la thèse audacieuse selon laquelle l'usage des ordinateurs permet la combinaison harmonieuse des aspects conceptuels et des aspects computationnels des mathématiques [4]. Pour défendre cette thèse, il souligne les éléments de continuité entre le développement de l'analyse numérique, et en particulier du calcul des perturbations, avant et après l'apparition des ordinateurs. La question de savoir si les ordinateurs transforment les mathématiques a été l'une des questions centrales de la rencontre.

La place des mathématiques dans les modèles numériques

L'un des thèmes majeurs a été la question de savoir ce que change l'usage des ordinateurs à la modélisation mathématique : s'agit-il d'un changement radical, ou d'une amplification de pratiques établies antérieurement ? Qu'est-ce qui change du point de vue des mathématiques elles-mêmes ? Doit-on dire qu'il s'agit d'un changement conceptuel ? Il est maintenant avéré que l'organisation sociale de la science a été profondément transformée par l'utilisation massive d'ordinateurs, mais la question de savoir si les concepts mathématiques eux-mêmes en ont subi les conséquences reste ouverte. C'est en étudiant en détail des exemples concrets que l'on pourra répondre à cette question.

À première vue, il semble que la part strictement mathématique des modèles n'est pas affectée par le fait que ce ne sont pas des humains mais des machines qui effectuent les calculs. Cependant, dès que l'on entre dans les détails des programmes, on se rend compte que l'usage des pratiques d'ajustement et le recours à des morceaux de programme bidouillés rendent difficile d'isoler, au sein d'un modèle, ce qui relève des seules mathématiques.

Le recours fréquent aux ajustements de paramètres et à différentes formes de « bidouillage » brouille ce que l'on pourrait appeler « l'image cartésienne de la modélisation », selon l'expression de Johannes Lenhard (Université de Bielefeld, Allemagne) [5]. Selon cette image, il est possible de séparer strictement les différents éléments des modèles : ceux qui relèvent des hypothèses empiriques (physiques ou biologiques), ceux qui relèvent des mathématiques, ceux qui relèvent des nécessités de la programmation. L'idéal selon lequel on pourrait écrire des programmes rigoureusement modulaires est difficilement accessible, ce qui fait que dans les modèles numériques, les nécessités de la programmation contaminent, en quelque sorte, les éléments qui viennent des mathématiques. Les philosophes des sciences parlent ici d'un « problème de Duhem » propre à la modélisation numérique. Pierre Duhem, dans *La théorie physique, son objet sa structure*, paru pour la première fois en 1906, défend la thèse selon laquelle une théorie physique se tient comme un tout organique face au tribunal de l'expérience. Les diverses hypothèses qui la constituent sont ainsi solidaires et il est difficile d'isoler celle qui est responsable de l'échec d'un test empirique. Les philosophes de la modélisation ont étendu cette propriété aux modèles classiques et aux modèles numériques, insistant sur la difficulté qu'il y a à isoler rigoureusement ce qui, au sein du modèle, est responsable de sa réussite ou de son échec lors d'un test empirique : s'agit-il des hypothèses théoriques ? des paramètres qui ont été soigneusement ajustés ? du maillage trop grossier, ou trop fin ? L'argument de Duhem, transposé aux modèles numériques, fait des mathématiques des éléments inséparables des autres composants des modèles. L'inséparabilité de principe des éléments mathématiques au sein des modèles se trouve au fondement des nombreuses méthodes d'ingénierie informatique qui tentent de contrôler séparément les propriétés internes du modèle numérique et sa validité empirique. Ainsi les méthodes de « Validation et vérification » ont-elles pour objectif de garantir d'une part la cohérence interne du programme (c'est la partie « vérification ») et d'autre part sa conformité avec ce qu'il est censé représenter (c'est la partie « validation »). Cette séparation est cependant plus facile à exprimer qu'à mettre en œuvre concrètement. Les éléments strictement mathématiques des modèles semblent donc inextricablement mêlés aux autres éléments. Deux attitudes sont dès lors possibles : doit-on considérer la modélisation numérique comme une extension du domaine des mathématiques appliquées, malgré son hétérogénéité, ou bien doit-on considérer que les mathématiques sont en droit distinctes de l'informatique et des sciences de la modélisation, et donc que les progrès de ces dernières ne participent pas de l'évolution des mathématiques ? La philosophie des mathématiques a longtemps privilégié la seconde attitude ; il se peut que son « tournant pratique », qui consiste à prendre davantage en considération les pratiques des mathématiciens, la conduise à donner une chance à la première.

2.1 – Que faire avec des équations sans solutions exactes ?

Une autre question centrale de la philosophie des mathématiques appliquées, liée à la discussion précédente, a fait l'objet de nombreuses discussions : c'est celle de savoir ce que l'on peut ou doit faire avec une équation qui n'a pas de solutions exactes (problème de la tractability en anglais). L'intérêt pour ce problème rejoint une tendance actuelle de la philosophie des mathématiques qui se tourne de plus en plus vers la notion de *faisabilité* après avoir davantage mis l'accent sur celle de prouvabilité.

Avant d'examiner la question de savoir quoi faire lorsque l'on ne dispose pas de solutions exactes, il est utile de présenter rapidement les discussions actuelles sur la faisabilité, c'est-à-dire sur la possibilité d'obtenir les résultats escomptés à partir du calcul (le plus souvent approché) de solutions d'équations. Cette notion peut être abordée de plusieurs points de vue, et notamment à partir des ressources computationnelles disponibles, comme l'ont fait Cyrille Imbert et Anouk Barberousse [3]. Mais la notion de ressource computationnelle elle-même peut faire l'objet de débats. Doit-on attendre du développement des ordinateurs, voire des supercalculateurs, qu'il soit le moyen ultime de résoudre toutes les questions de faisabilité ? Cela n'apparaît pas comme une stratégie prometteuse. À l'inverse, on peut se retourner vers le passé et tenter d'identifier d'éventuelles continuités entre l'avant-ordinateur et l'après. Ce chemin permet de mettre l'accent sur un phénomène qui a été mis en évidence par quelques historiens et philosophes des sciences comme Thomas Kuhn et Nancy Cartwright, à savoir la récurrence de certains modèles mathématiques à travers les disciplines, comme l'oscillateur harmonique, ou de certaines équations très générales appelées « *templates* » par Paul Humphreys [6], comme l'équation de Poisson. Parmi les autres exemples de modèles qui reviennent souvent dans l'histoire de différentes disciplines, on peut également citer le modèle d'Ising ou un petit nombre d'hamiltoniens. Les théories physiques disponibles autorisent l'utilisation de nombreuses autres équations, mais ce sont celles-ci qui ont régulièrement les faveurs des modélisateurs. Pourquoi est-ce le cas ? L'explication la plus souvent avancée est celle du conservatisme, qui s'accorde avec la vision kuhnienne de la « science normale » au sein de laquelle on s'attache avant tout à perfectionner les outils qui ont montré leur efficacité auparavant. On peut cependant envisager une autre explication, qui tient à l'extrême difficulté de la pratique de résolution d'équations : avant l'usage des ordinateurs, avoir à sa disposition un petit nombre d'équations dont certaines solutions au moins étaient bien connues, c'était posséder un véritable trésor. S'aventurer vers l'apprivoisement d'autres équations, moins bien connues, c'était au contraire prendre l'énorme risque de ne jamais parvenir à de nouveaux résultats. Ainsi les pratiques de la modélisation étaient-elles soumises à de fortes contraintes computationnelles. La diffusion des ordinateurs a-t-elle radicalement transformé cette situation ? Certes, il est moins difficile qu'auparavant d'obtenir des solutions approchées – mais dans certains cas seulement ! Les ordinateurs ne sont pas des baguettes magiques qui font disparaître toutes les contraintes computationelles ! Elles en atténuent certaines, mais leur effet est toujours présent.

Face aux contraintes computationnelles, lorsque l'on ne parvient pas à trouver des solutions aux équations, on peut utiliser une stratégie consistant à transformer le problème d'une façon semblable à celle que Descartes a utilisée en son temps : la stratégie mise en œuvre par Descartes a consisté à transcrire dans le formalisme de la géométrie algébrique des problèmes qui étaient insolubles dans la géométrie courante, ce qui lui a permis d'obtenir des solutions qui n'étaient pas disponibles par l'intermédiaire des méthodes anciennes. Descartes, ici, n'a pas suivi une méthode déjà éprouvée mais a soumis des problèmes qui l'intéressait à un changement de perspective (plutôt qu'à un ensemble de procédures déjà en place pour trouver des solutions) : il a regardé ces problèmes sous un point de vue nouveau.

Ce changement de perspective a été l'occasion d'une énorme transformation des concepts mêmes de la géométrie. Une stratégie semblable de re-conceptualisation est aujourd'hui envisageable comme méthode générale lorsque l'on est face à une équation qui n'a pas de solutions exactes. C'est du moins ce qu'a soutenu Robert Moir, de l'université de Western Ontario, Canada. On peut en outre la coupler avec l'utilisation de méthodes numériques, car comme on l'a vu précédemment, la question de savoir ce qu'on l'on peut faire avec une équation (question de la faisabilité) a partiellement changé de nature en raison de l'apparition des ordinateurs. En effet, la notion de faisabilité dépend des instruments disponibles ; or les ordinateurs permettent des calculs qui étaient auparavant inenvisageables.

Ce qui vient d'être dit soulève une question philosophique redoutable. Adopter la stratégie cartésienne revient à transformer une question mathématique, celle de la faisabilité ou de la tractabilité, en une question technique, au sens où la réponse qu'on peut lui apporter ne dépend plus seulement des ressources mathématiques elles-mêmes, mais de la technologie disponible. Cela va à l'encontre de la plupart des thèses qui ont été défendues jusqu'à présent en philosophie des mathématiques, domaine dans lequel l'influence de la notion de « méthode pure » a été forte. Ainsi, dès le XVII^e^ siècle, Descartes a été accusé de violer des règles de méthode considérées comme fondamentales, et une telle accusation a surgi de nouveau à chaque fois qu'une entreprise semblable de re-conceptualisation a été mise en œuvre. Or comment doit-on considérer la pureté des méthodes ? Doit-elle être considérée comme une norme de la pratique des mathématiques, ou bien doit-on au contraire voir la violation des règles comme une vertu, source de transformations fécondes ? Il semble que si l'on porte l'attention sur la question de savoir comment on extrait des solutions approchées lorsque les équations n'ont pas de solutions exactes, c'est bien la seconde perspective qui semble décrire le mieux l'évolution historique des mathématiques en général – et non seulement des mathématiques appliquées. On voit ainsi que le thème des relations entre évolution des mathématiques et évolution de la technologie est l'un des thèmes majeurs de la philosophie des mathématiques appliquées, comme cela a déjà été souligné ci-dessus.

On peut ajouter à ce qui précède que relativement à la philosophie des mathématiques telle qu'elle s'est développée depuis plus d'un siècle, la prise en considération des mathématiques appliquées introduit un véritable changement de perspective. Lorsque l'on se tourne vers les pratiques de résolution numérique, on se rend compte que les notions qui sont jusqu'à aujourd'hui centrales en philosophie des mathématiques, comme celles de généralité, perdent leur importance au profit d'autres : ainsi, dans le but mettre en œuvre la stratégie consistant à changer de cadre mathématique pour résoudre un problème qui résiste dans son cadre original, on peut être amené à abandonner partiellement la norme selon laquelle le résultat obtenu doit être général pour prendre en compte de façon plus importante le contexte du problème posé, c'est-à-dire la nature des solutions attendues. Le contexte fournit en général des critères de sélection des solutions possibles dont la spécificité est d'être indépendants du critère de généralité : par exemple, on ne répugnera pas à adopter une solution parce qu'elle peut être calculée rapidement, même si le calcul ne procède pas d'une méthode pouvant être appliquée à d'autres cas. Il permet également de définir les ressources disponibles pour construire une solution (ces dernières pouvant également conduire à une perte en généralité). En outre, et pour des raisons semblables, le contexte du problème ainsi que les ressources disponibles conduisent le plus souvent à ne pas satisfaire strictement à l'exigence de *conservation du contenu* dans le chemin inférentiel qui va de l'équation initiale aux solutions calculées. Le contenu d'un énoncé ou d'une équation est ce que désignent les signes qui forment l'énoncé ou l'équation, ou encore leur signification. La conservation du contenu est cependant jugée comme un critère central de la qualité d'une inférence mathématique, du moins dans la philosophie des mathématiques au sens classique du terme.

La discussion ci-dessus conduit naturellement à poser la question suivante : comment définir la notion de « transformation d'un problème mathématique » lorsqu'on applique cette stratégie dans le but de rendre possible l'extraction de solutions approchées d'équations qui n'ont pas de solutions exactes ? Faire appel à la notion de conservation du contenu, qui est utilisée pour définir les inférences valides, revient à imposer un critère trop fort dans le contexte des mathématiques appliquées. D'un côté, on cherche bien entendu à ce que les solutions produites ne modifient pas la description du problème proposée par l'équation initiale. Mais de l'autre, le changement de cadre mathématique introduit nécessairement des modifications. La question se pose alors de savoir si la notion de conservation du contenu, malgré les services qu'elle rend dans l'analyse de la pratique inférentielle, n'est pas trop stricte pour décrire des aspects importants de la pratique mathématique.

En conclusion de ces considérations, l'idée a été proposée lors du séminaire qu'il serait judicieux de travailler à un nouveau concept de « solution d'une équation ». Le concept qui sert de référence jusqu'à présent est celui de solution exacte d'une équation : c'est à cette norme que sont comparés les autres types de solutions. Cependant, ces derniers sont de loin les plus courants si l'on prend les mathématiques appliquées en considération.

3. L'équation de Boltzmann

Une journée presque entière du séminaire a été consacrée à certains développements récents autour de l'équation de Boltzmann. Cette équation historique décrit à l'échelle microscopique (ou peut-être devrait-on dire mésoscopique) le comportement irréversible des gaz très dilués. Dès la fin du xix^e siècle, elle a suscité de nombreux débats sur les fondements de la physique statistique, car elle décrit un comportement macroscopique irréversible alors que les molécules, à l'échelle microscopique, sont supposées avoir un comportement réversible par inversion du sens du temps. Le « paradoxe de l'irréversibilité » a été un moteur majeur de la discussion sur les fondements de la mécanique statistique. En effet, ce que nous appelons « l'équation de Boltzmann » est ce qui a permis à son auteur de dériver le « théorème H », qui est couramment interprété comme une dérivation du deuxième principe de la thermodynamique à partir des lois du mouvement des particules. L'enjeu est donc de taille : l'équation de Boltzmann est au centre d'un redoutable problème physico-philosophique, mais depuis les travaux de Boltzmann, elle est en outre devenue un objet mathématique majeur.

Ce n'est cependant pas cet aspect historique qui a été discuté, mais plutôt les conséquences philosophiques du théorème de Lanford (qui fait part ailleurs l'objet d'un résultat récent, présenté lors du séminaire par Laure Saint-Raymond). Le théorème de Lanford est actuellement le meilleur moyen que nous ayons de partir des lois microscopiques (les équations de Hamilton) et de parvenir, par *des calculs exacts*, à une loi d'ensemble irréversible. Le théorème de Lanford est considéré comme un résultat mathématique majeur de la théorie cinétique des gaz. Il permet de se passer de l'hypothèse que Boltzmann avait introduite pour sa propre dérivation, à savoir le *Stosszahlansatz* ou hypothèse sur le nombre de collisions, qui est incontestablement asymétrique par rapport au temps, même s'il ne s'en est pas rendu compte tout de suite. Selon cette hypothèse, le nombre de collisions d'un type donné, c'est-à-dire impliquant des molécules d'énergie cinétique x et des molécules d'énergie cinétique x', est à la fois proportionnel au nombre des premières et au nombre des secondes, ce qui revient à considérer que les vitesses de deux molécules qui entrent en collision sont indépendantes l'une de l'autre – or, si l'on pense qu'elles obéissent aux équations hamiltoniennes, ce ne saurait être le cas. En effet, l'hypothèse d'indépendance consiste à supposer que les vitesses des molécules cessent d'être assujetties aux lois du mouvement juste avant le choc, ce qui signifie que leur mouvement ne peut plus être décrit par des équations réversibles. Dans la dérivation de Boltzmann lui-même, le responsable de l'apparition de l'irréversibilité est donc clairement identifié. Mais qu'en est-il dans la dérivation de Lanford ?

La question qui est discutée à la fois en physique, en mathématiques, et en philosophie de la physique, est celle de savoir si l'irréversibilité apparaît naturellement, en quelque sorte, ou si elle est introduite par le mathématicien, au sein de la dérivation de l'équation de Boltzmann à partir de lois microscopiques réversibles ; et, si elle est introduite par le mathématicien, de quelle façon exactement. Un article parut récemment [7] défend la thèse selon laquelle aucun ingrédient asymétrique n'est ajouté aux équations hamiltoniennes dans le théorème de Lanford. Vincent Ardourel (université Catholique de Louvain, Belgique) a cependant montré, en analysant les deux éléments centraux de la dérivation de Lanford que sont la limite de Boltzmann-Grad et les configurations initiales, que leur combinaison consiste en un ingrédient asymétrique [1].

4. Conclusion

Les discussions qui ont eu lieu lors de la rencontre ont permis de mettre au jour l'importance des notions de faisabilité et de contraintes pour notre compréhension des mathématiques appliquées. La variété des normes d'acceptabilité d'un résultat mathématique a également été soulignée ; elle doit être contrastée avec le recours aux notions de généralité, de rigueur et de pureté de la méthode qui est souvent associé à l'usage des mathématiques. Les théories et méthodes mathématiques sont plus flexibles que l'image qu'en donne la philosophie des mathématiques.

Il est apparu que le type de travaux menés dans ce Séminaire International était susceptible de fournir aux modélisateurs et aux informaticiens, en plus des mathématiciens qui les accompagnent, un cadre épistémologique mieux adapté que celui de la philosophie des mathématiques telle qu'elle a été pratiquée jusqu'ici. Un projet allant dans ce sens est d'imaginer un cours d'épistémologie des mathématiques appliquées à destination des étudiants confrontés aux difficultés de la modélisation.

Références

[1] V. Ardourel. « Irreversibility in the Derivation of the Boltzmann Equation ». *Foundations of Physics* **47**, nº 4 (2017), p. 471–489.

[2] S. Bangu. « On 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences' ». In : *Models and inferences in science*. Springer, 2016, p. 11–29.

[3] A. Barberousse et C. Imbert. « Recurring models and sensitivity to computational constraints ». *The Monist* **97**, nº 3 (2014), p. 259–279.

[4] N. Fillion. « Demystifying the Applicability of Mathematics ». In : *Trick or Truth?* Springer, 2016, p. 135–144.

[5] H. Hasse et J. Lenhard. « Boon and bane: On the role of adjustable parameters in simulation models ». In : *Mathematics as a Tool*. Springer, 2017, p. 93–115.

[6] P. Humphreys. *Extending ourselves: Computational science, empiricism, and scientific method*. Oxford University Press, 2004.

[7] J. Uffink et G. Valente. « Lanford's Theorem and the Emergence of Irreversibility ». *Foundations of Physics* **45**, nº 4 (2015), p. 404–438.

[8] E. Wigner. « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences ». *Communications in Pure and Applied Mathematics* **13** (1960), p. 1–14.

Anouk Barberousse

Anouk Barberousse est professeure de philosophie des sciences à l'université Paris-Sorbonne et spécialiste de l'épistémologie des simulations numériques et des systèmes complexes.

Tribune d'Indira Chatterji : de l'autre côté du plafond de verre

• I. Chatterji

Nouveau Monde, tea time post-colloquium « *I will think of you in the shower* ». Ce ponte des mathématiques françaises, qui fait la fierté de notre communauté et qui incarne la classe pour beaucoup d'entre nous, s'adresse à une jeune étudiante qui s'approche de lui pour un selfie.

Je sais. Il ne l'a pas violée. Certains diront même que c'est simplement là la manière française de conter fleurette à une jeune femme. Ou alors qu'elle l'a cherché avec son selfie. Peut-être qu'elle n'a pas relevé, mais plus probablement cette phrase va résonner avec des évènements passés et entamer son enthousiasme pour les mathématiques. #MeToo. Le privilège masculin, c'est de ne pas résonner et ne pas se faire entamer. Rien de très objectif, chiffrable, tangible.

Une amie journaliste à qui je raconte cette anecdote me dit que c'est vraiment léger comparé à son milieu. Tellement léger que Ruth Charney, ancienne présidente de l'AWM (Association for Women in Mathematics) dit ne jamais avoir personnellement ressenti de sexisme, mais se rend compte de son existence en voyant la sous-représentation des femmes dans les comités éditoriaux de grandes revues, ainsi que dans les universités d'élite. En France, cette discrimination sexiste est bien là, au vu et au su de nous tous :

en 25, 6% de PR contre 18% de MCF, et en 26, 18% PR contre 39% de MCF (2016, voir [2]).

Selon Broze [2], en 2016 en section 25 nous étions tout confondu 1387 permanents, dont 189 femmes. Nous sommes 530 PR, il devrait donc y avoir 72 femmes. Or nous ne sommes que 33, il y manque donc 39 femmes en PR25. En section 26 ça donne 174 et elles ne sont que 104, il y manque donc 70 femmes en PR26. Et ça, c'est la partie visible de l'iceberg, qui n'est pas en train de fondre car en dix ans la part des femmes a diminué.

J'aurais voulu continuer cet article avec la proportion des femmes qualifiées sur les 10 dernières années, le nombre moyen de candidatures et d'auditions, le nombre moyen d'articles et d'indices de citations par année de carrière, afin de pouvoir énoncer un résultat suivi d'une preuve qui se termine par un $\square$. Mais je n'ai rien de tout ça, et je n'ai pas les ressources pour trouver ces chiffres. Je n'ai qu'une théorie, reposant sur quelques observations.

Le « plafond de verre » (de l'anglais « *glass ceiling* »), est un terme qui désigne une barrière invisible au sein d'une hiérarchie qui empêche les femmes ou les minorités d'accéder aux niveaux supérieurs. C'est la barrière invisible qui empêche une centaine de mathématiciennes françaises de passer PR. J'ai demandé autour de moi à quoi est dû ce plafond de verre : elles postulent moins largement, moins longtemps, elles sont moins compétitives, elles préfèrent les gosses, elles se sont fait saquer. On ne sait pas trop et on s'en fiche un peu.

Ces femmes ne sont pourtant pas virtuelles, ce sont des collègues qu'on connaît bien, on déjeune ensemble, on discute de mathématiques, d'enseignement, de politique du laboratoire, de tout ou de rien. Elles ont un nom, des théorèmes, des étudiants, des projets de recherche. Et des perspectives de carrière réduites à peau de chagrin. Bien sûr le système même du passage MCF à PR fait qu'il y aura toujours des gens qui veulent passer PR et qui n'y arriveront pas pour des raisons non mathématiques, mais il serait équitable que ça arrive proportionnellement autant aux hommes qu'aux femmes.

Je pense qu'une proportion non négligeable de cette centaine de mathématiciennes, a été discriminée, de manière plus ou moins active. Et ce, malgré le réel effort d'impartialité dans nos jugements scientifiques que nous (les rang A) faisons. Mais il n'est pas exclu que nous ayons discriminé sans le faire exprès, et ça semble même assez plausible : « *Implicit and unconscious bias* » est le terme anglais, et c'est un phénomène assez bien documenté. On notera par exemple l'expérience [4] où pour un même CV montré à des directeurs de laboratoire, lorsque le prénom était masculin le salaire proposé était en moyenne plus élevé que lorsque le prénom était féminin (des expériences similaires ont été faites avec des noms à connotation racisée).

En demandant autour de moi, j'entends souvent des explications détournées qui impliquent que les femmes MCF sont plus faibles que leurs homologues masculins. Cela pré-suppose que l'on puisse mettre de manière canonique un ordre total sur l'ensemble des dossiers. Or on sait bien que ce n'est pas le cas : un dossier n'a pas une seule valeur réelle, mais un ensemble de valeurs, qui dépendent du nombre d'articles, de leur longueur, des co-auteurs, des journaux, des affiliations, des responsabilité et aussi des experts qui examinent les dossiers. Il est facile de voir qu'il n'existe pas d'ordre total canonique sur un tel ensemble.

Dans la réalité de la plupart des recrutements, lorsqu'on a éliminé les dossiers les plus faibles et fait le deuil des plus forts, on se retrouve avec un nuage de très bons dossiers, tous plus ou moins équivalents. Et puis on va en choisir un. Mais pas au hasard : après des délibérations souvent politiques, quelques fois très émotionnelles et jamais purement mathématiques. Difficile dès lors d'éliminer l'hypothèse de la discrimination.

Bien sûr, une autre hypothèse intéressante c'est qu'elles postulent moins longtemps et moins largement que les hommes. C'est une hypothèse très vérifiable, mais pas par moi. Mais je serais étonnée que les stratégies de candidatures suffisent à elles seules à expliquer le plafond de verre.

Ce qui devient du sexisme, c'est ce qu'on fait de ce constat : notre indifférence pour cette question, et nos réactions face à ces collègues.

J'ai entendu plus d'une fois que telle ou telle autre MCF n'avait pas vraiment besoin de cette promotion PR car son mari gagnait suffisamment. Je n'aurais pas relevé ce commentaire pour cet article s'il ne m'avait pas été rapporté à plusieurs reprises. La plupart d'entre nous passons un temps considérable à demander des bourses et des promotions dont on n'a pas vraiment besoin, mais nous le faisons car nous voulons plus de visibilité pour nos mathématiques et avons besoin d'une certaine reconnaissance de nos pairs. Ne pas reconnaître qu'une femme MCF a ce même besoin est insultant.

J'ai aussi entendu dire qu'augmenter la part des femmes en mathématiques n'augmenterait pas le niveau car on est déjà arrivé à saturation. C'est une vision tellement triste des mathématiques. Même si la plupart des mathématiques produites sont surtout le fruit d'un intense labeur qui pourrait être fourni également par un homme ou une femme, ce sont ces quelques rares et superbes idées si originales qui font la beauté du sujet. Se priver de la moitié du vivier c'est se priver de la moitié de ces perles.

Depuis mon arrivée en France, au-dessus du plafond de verre, je ne peux m'empêcher de remarquer une sur-représentation de « filles de » et/ou « femmes de » mandarins. J'ai pourtant toujours eu l'impression que c'était pour moi plutôt un désavantage : étudiante j'étais « fille de », je me suis sentie peu intégrée et me suis exilée dès que possible. Lorsque je suis devenue « femme de » j'ai divisé mon salaire en deux et augmenté mon enseignement. Mais après discussions avec quelques collègues et amies, je commence à croire que d'être « fille de » et « femme de » m'a offert un privilège que je n'avais jamais remarqué. Revenons un instant au vieux cochon du début. Il n'aurait probablement jamais fait cette remarque si cette étudiante avait été la fille ou la femme d'un de ses amis. De manière similaire, les remarques déplacées sur une « fille de » et « femme de » mandarin me semblent plus rares que sur les autres femmes (même si loin d'être inexistantes) : est-ce que d'être « femme de » et « fille de » m'aurait offert le privilège masculin d'exercer mon métier en étant suffisamment peu discriminée pour que ça ne déraille pas ma carrière ?

Selon Claire Mathieu, une des auteurs de [1] et professeur au Collège de France, les connaissances actuelles ne sont pas suffisantes pour avancer une conjecture sur la raison du plafond de verre, mais son article montre qu'il est possible de proposer un modèle pour définir et analyser cette question rigoureusement. Leur article modélise le phénomène du plafond de verre et montre que l'homophilie, combinée avec la minorité entrante des femmes et le système de sélection, suffisent à le créer. L'homophilie est un phénomène social bien documenté, qui consiste à préférer les gens qui nous ressemblent, et qui, en présence d'une majorité d'hommes, a le même effet discriminatoire que le sexisme. Même si dévisser rigoureusement tous les mécanismes qui forment le plafond de verre s'avère être une question trop difficile, ce qui est à notre portée maintenant, c'est d'étudier les dossiers de ces femmes qui ne passent pas le plafond.

Il n'y a pas besoin d'être mathématicien pour comprendre que ce n'est pas à coups de bandes dessinées et de bonnes pratiques sur des postes gelés qu'on va faire bouger les choses pour nos collègues discriminées. J'ai participé en 2011 à un des comités PES qui assuraient la transition PEDR. Un comité similaire pourrait examiner les dossiers des femmes MCF qui auraient aimé passer PR mais qui ne passent pas, et faire convertir quelques postes de MCF en postes PR. Ça ne coûterait rien de plus que le comité en soi, vu qu'une MCF est payée autant qu'une PR2, et ça nous permettrait de passer de 6 à 14% de femmes PR25, ce qui serait équitable.

Pour conclure sans conclusion, vous remarquerez que je ne dis rien sur la centaine de collègues masculins qui sont passés PR grâce à cette discrimination. Les expériences de [3] suggèrent que dans un environnement majoritairement masculin, l'arrivée de femmes dans la hiérarchie provoque une réaction hostile de la part des hommes les plus faibles. Ça correspond assez bien à mon expérience.

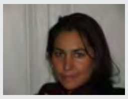
Références

[1] C. AVIN et al. « Homophily and the glass ceiling effect in social networks ». In : *Proceedings of the 2015 Conference on Innovations in Theoretical Computer Science*. ACM. 2015, p. 41–50.

[2] L. BROZE. http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2016/SLIDES/LaurenceBroze-Parite2016.pdf.

[3] M. M. KASUMOVIC et J. H. KUZNEKOFF. « Insights into sexism: male status and performance moderates female-directed hostile and amicable behaviour ». *PloS one* **10**, n° 7 (2015), e0131613.

[4] C. A. MOSS-RACUSIN et al. « Science faculty's subtle gender biases favor male students ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* **109**, n° 41 (2012), p. 16474–16479.



Indira CHATTERJI
indira.chatterji@math.cnrs.fr
http://math.unice.fr/~indira/

Indira Chatterji s'intéresse à la théorie géométrique des groupes et est professeur à l'université de Nice.

Je remercie les collègues qui ont bien voulu discuter de ce sujet avec moi. Iels se reconnaîtront.

... un carquois

• C. Amiot

1. Introduction

Un *carquois* (quiver en anglais) est un graphe orienté, en général fini. Plus précisément, un carquois Q est la donnée de deux ensembles (finis) : Q_0 l'ensemble des sommets, Q_1 l'ensemble des flèches, et de deux applications $Q_1 \to Q_0$ associant à une flèche sa source et son but. Cette dénomination a été introduite par le mathématicien Pierre Gabriel au début des années 70. [1]

La notion de carquois est devenue, à la suite des travaux de Gabriel, un outil fondamental en théorie des représentations d'algèbres de dimension finie. Une question centrale de cette théorie est la description des modules sur une algèbre donnée.

Rappelons qu'un module de dimension finie sur une $\mathbb{C}$-algèbre associative A est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action par endomorphismes de l'algèbre A.

L'observation cruciale de P. Gabriel dans [5] est la suivante : *Étant donnée une $\mathbb{C}$-algèbre A de dimension finie, on peut lui associer un carquois Q_A (souvent appelé le carquois de Gabriel de A) tel que tout A-module de dimension finie peut être vu comme une* représentation de Q_A sur $\mathbb{C}$.

L'objet de ce texte est de définir la notion de représentation de carquois et d'expliquer différents outils permettant de mieux comprendre ces objets.

2. Représentations de carquois

Soit Q un carquois (qu'on supposera toujours connexe). Une *représentation* V de Q sur $\mathbb{C}$ est la donnée de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie V_i pour chaque sommet $i \in Q_0$, et d'applications linéaires $V_\alpha : V_i \to V_j$ pour chaque flèche $\alpha : i \to j$. La dimension de V est donnée par $\sum_{i \in Q_0} \dim V_i$.

Exemple 1. Soit Q le carquois ci-dessous, qu'on appelera de type A_2 dans la suite :

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \,.$$

On a $Q_0 = \{1, 2\}$ et $Q_1 = \{\alpha\}$. Une représentation de Q est la donnée de deux espaces vectoriels V_1 et V_2 et d'une application linéaire V_α de V_1 dans V_2.

Par exemple, V et W sont deux représentations de Q de dimensions respectives 1 et 3 :

$$V = (\mathbb{C} \xrightarrow{0} 0) \qquad W = (\mathbb{C}^2 \xrightarrow{(1\ -3)} \mathbb{C}).$$

L'application linéaire W_α est ici donnée par sa matrice dans les bases canoniques.

Exemple 2. Soit Q le carquois suivant :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \end{tikzcd} \,.$$

Une représentation de Q est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un endomorphisme de V.

2.1 – Morphismes de représentations

Étant données deux représentations V et W de Q, un *morphisme* $\varphi : V \to W$ est la donnée d'applications linéaires $\varphi_i : V_i \to W_i$ pour chaque sommet i telles que pour toute flèche $\alpha : i \to j$, on ait

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "V_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_i"] & V_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ W_i \arrow[r, "W_\alpha"] & W_j \end{tikzcd} \qquad \varphi_j \circ V_\alpha = W_\alpha \circ \varphi_i.$$

Les notions de représentation et de morphisme de représentations permettent de définir ce qu'on appelle la catégorie $\operatorname{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ des représentations de Q.

1. La notion générale de graphe étant trop générique et vague, P. Gabriel a choisi d'introduire un nom spécifique, qui se réfèrerait uniquement à la théorie des représentations.

Exemple 3. Reprenons l'exemple de type A_2 (ex. 1). Alors il existe un morphisme φ de V dans W donné par :

$$\begin{tikzcd} V = \arrow[d, "\varphi"'] & (\mathbb{C} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & 0) \arrow[d, "0"] \\ W = & (\mathbb{C}^2 \arrow[r, "(1\ -3)"] & \mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Étant donné Q et $i \in Q_0$ un sommet, on peut définir une représentation, notée S_i, de dimension 1, où l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est placé au sommet i. Cette représentation est *simple* au sens où elle n'admet pas de sous-représentation non triviale. Dans le cas où le carquois Q n'a pas de cycles orientés, toutes les représentations simples sont de cette forme.

2.2 – Représentations indécomposables

On peut définir la notion de somme directe de représentations d'un même carquois Q : la somme directe de V et W est définie par $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$ et l'application $(V \oplus W)_\alpha$ est donnée par une matrice diagonale par blocs, $V_\alpha \oplus W_\alpha$. Une représentation est dite *indécomposable* si elle n'est pas isomorphe à une somme directe de sous-représentations de dimensions strictement inférieures.

Ainsi toute représentation est isomorphe à une somme directe de représentations indécomposables. De plus on peut montrer que cette décomposition est unique à permutation et à isomorphisme des facteurs près.

Exemple 4. Reprenons le type A_2 (ex. 1 et 3). Notons

$$S_1 = (\mathbb{C} \xrightarrow{0} 0), \qquad S_2 = (0 \xrightarrow{0} \mathbb{C})$$

les représentations simples, et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ notons

$$V_\lambda = \quad (\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}).$$

Alors on a

$$V_\lambda \oplus S_1 \oplus S_2 = \qquad (\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)} \mathbb{C}^2).$$

La représentation V_0 est décomposable : $V_0 = S_1 \oplus S_2$. Tandis que si $\lambda \neq 0$, alors V_λ est indécomposable et isomorphe à V_1. Remarquons de plus que V_λ n'est pas simple. En effet S_2 est une sous-représentation de V_λ pour tout λ.

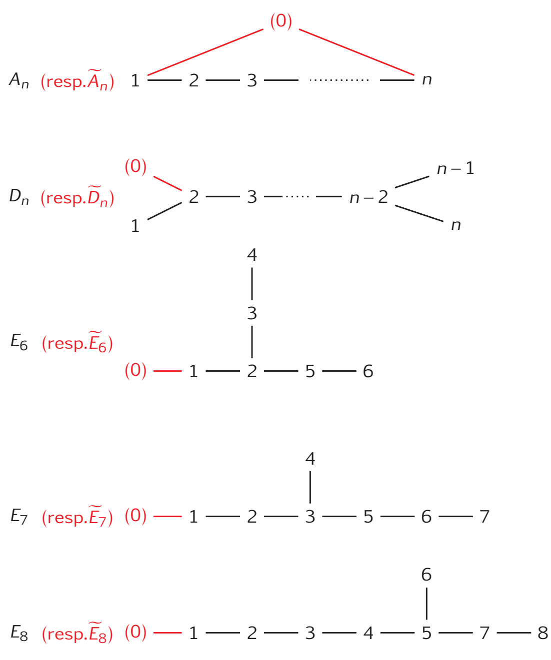
Exemple 5. Reprenons l'exemple 2. Pour $\lambda \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ notons $J_n(\lambda)$ la représentation de dimension n donnée par le bloc de Jordan de taille n associée à la valeur propre λ. Alors la représentation $J_n(\lambda)$ est indécomposable. De plus la réduction des endomorphismes sur $\mathbb{C}$ nous dit que toute représentation de Q est isomorphe à une somme directe de représentations de la forme $J_n(\lambda)$. Notons que pour $n = 1$ la représentation $J_1(\lambda)$ est simple. On obtient dans ce cas une infinité de représentations simples deux à deux non isomorphes.

2.3 – Le cas fini

Le but étant de comprendre la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$, une question alors naturelle est de décrire l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$ des classes d'isomorphismes des représentations indécomposables d'un carquois Q.

Une partie de la réponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 (Gabriel 1972, [5]). *Étant donné un carquois connexe Q, l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$ est fini si et seulement si Q est une orientation d'un graphe de Dynkin de type A, D ou E.*



Graphes de Dynkin (étendus)

Exemple 6. Reprenons le type A_2 (ex. 1, 3 et 4). Soit

$$W = \quad (\mathbb{C}^m \xrightarrow{M} \mathbb{C}^n)$$

une représentation de Q donnée par une matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Il existe des matrices $P \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ et $Q \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ telles que

$$QMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

où l'entier r est le rang de la matrice M. Autrement dit on a un isomorphisme de représentations

$$W \simeq (S_1)^{m-r} \oplus (S_2)^{n-r} \oplus (V_1)^r.$$

On a donc

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q) = \{[S_1],[S_2],[V_1]\}.$$

3. La forme de Tits

À une représentation $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ on peut associer son *vecteur dimension* défini par

$$\underline{\dim} V := (\dim V_i)_{i\in Q_0}.$$

On définit une forme quadratique sur $\mathbb{Z}^{Q_0}$, la *forme de Tits*, par :

$$q_Q(\underline{d}) = \sum_{i\in Q_0} d_i^2 - \sum_{\alpha\in Q_1, \alpha: i\to j} d_i d_j.$$

Un résultat plus précis que le théorème de Gabriel a été démontré par Victor Kac.

Théorème 2 (Kac (1980) [6]). *Soient Q un carquois connexe et $\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$. Il existe une représentation indécomposable de vecteur dimension $\underline{d}$ si et seulement si $q_Q(\underline{d}) \leqslant 1$. De plus,*

- *si $q_Q(\underline{d}) = 1$, l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q,\underline{d})$ des classes d'isomorphismes des représentations indécomposables de vecteur dimension $\underline{d}$ est réduit à un point,*
- *et si $q_Q(\underline{d}) \leqslant 0$, l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q,\underline{d})$ est infini.*

Tout comme en théorie de Lie, le cas où q_Q est semi-définie positive (correspondant aux graphes de Dynkin étendus, en rouge sur la figure précédente) donne une autre famille particulière de carquois. Un tel carquois est en effet *docile*, au sens où pour tout vecteur dimension $\underline{d}$, l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q,\underline{d})$ est un ensemble fini de familles à 0 ou 1 paramètre. Dans le cas où q_Q prend des valeurs négatives, le carquois est dit *sauvage*, et la classification complète des indécomposables est une tâche essentiellement impossible, au sens où il existe des familles arbitrairement grandes d'indécomposables.

Exemple 7. Pour $m \in \mathbb{N}$ on définit le carquois à m flèches suivant :

$$1 \;\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow}\; 2$$

Alors un calcul simple permet de voir que

$$\begin{aligned} q(x,y) &= x^2 + y^2 - mxy \\ &= (x - \tfrac{m}{2}y)^2 + \tfrac{(2-m)(2+m)}{4} y^2. \end{aligned}$$

Autrement dit $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$ est fini si et seulement si $m = 0$ ou $m = 1$, Q est docile si et seulement si $m \leqslant 2$ et sauvage si $m \geqslant 3$.

4. L'approche géométrique

Lorsque Q n'est pas de type Dynkin, l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$ est infini. Une stratégie pour mieux comprendre cet ensemble, consiste à essayer de lui donner une structure géométrique, ou plus exactement à donner une structure géométrique à certains de ses sous-ensembles.

Fixons $\underline{d} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ un vecteur dimension, et notons $R = \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q,\underline{d})$ l'ensemble des représentations de vecteur dimension $\underline{d}$. Cet ensemble R est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel isomorphe au produit d'espaces de matrices $\bigoplus_{\alpha:i\to j} \mathcal{M}_{d_j\times d_i}(\mathbb{C})$. Le groupe $G = \prod_{i\in Q_0} \mathrm{GL}(d_i,\mathbb{C})$ agit naturellement sur R par :

$$(g_i)_{i\in Q_0}.(V_\alpha)_{\alpha\in Q_1} := (g_j.V_\alpha.g_i^{-1})_{\alpha\in Q_1, \alpha:i\to j}.$$

La forme de Tits peut s'interpréter via la formule :

$$q_Q(\underline{d}) = \dim G - \dim R. \tag{1}$$

Deux représentations V et W de R sont dans la même orbite si et seulement si elles sont isomorphes. L'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q,\underline{d})$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble des orbites, ou autrement dit, du quotient de R par l'action de G. Comme le groupe G est algébrique, et que son action sur R est aussi algébrique, on a, pour tout V dans R, l'égalité suivante :

$$\dim \mathcal{O}_V = \dim G - \dim G_V \tag{2}$$

où $\mathcal{O}_V$ est l'orbite de V, et G_V le sous-groupe stabilisateur de V.

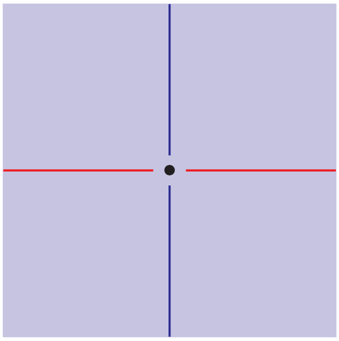
En combinant (1) et (2), on obtient immédiatement

$$\dim R - \dim \mathcal{O}_V = \dim G_V - q_Q(\underline{d}). \tag{3}$$

Exemple 8. Soit Q le carquois suivant de type A_3 :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$$

Notons $\underline{d} = (1,1,1)$. Alors l'espace R est isomorphe à $\mathbb{C}^2$, et le groupe G isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^3$ agit sur $R = \mathbb{C}^2$ par $(\alpha, \beta, \gamma).(x,y) = (\beta x \alpha^{-1}, \gamma y \beta^{-1})$. L'espace R est donc la réunion disjointe de quatre orbites qui sont $\mathcal{O}_{(0,0)}, \mathcal{O}_{(1,0)}, \mathcal{O}_{(0,1)}$ et $\mathcal{O}_{(1,1)}$ de dimensions respectives 0, 1, 1 et 2.



Comme les orbites ne sont pas toutes fermées (elles sont localement fermées pour la topologie de Zariski), le quotient R/G n'a pas de bonne structure topologique. Une stratégie pour avoir un quotient raisonnable peut être d'utiliser la théorie géométrique des invariants. Mais dans le cadre de cette théorie, le quotient, noté $R/\!/G$, paramètre uniquement les orbites fermées. Dans le cas où le carquois Q n'a pas de cycle orienté, il n'y a toujours qu'une seule orbite fermée, réduite à un point (l'origine), et qui correspond à l'unique représentation semi-simple (c'est-à-dire celle qui est la somme directe des représentations simples avec multiplicités). Or ce sont les orbites de grande dimension qui nous intéressent et que l'on cherche à paramétrer. En effet, plus la dimension de l'orbite est grande moins la représentation se décompose.

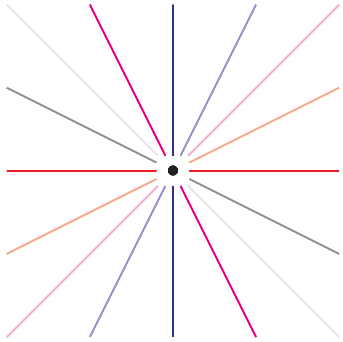
La réunion des orbites de dimension maximale forme toujours un ouvert dense U de R. D'après (3), cette dimension maximale est toujours inférieure ou égale à $\dim R + q_Q(\underline{d}) - 1$ (puisque le stabilisateur contient toujours $\mathbb{C}^*$). Donc le quotient de U par G, lorsqu'il a une bonne structure, devrait être de dimension $1 - q_Q(\underline{d})$ s'il existe des indécomposables dont le stabilisateur a dimension 1.

Exemple 9. Soit Q le carquois donné dans l'exemple 7.

Étudions d'abord le cas $m = 2$, et $\underline{d} = (1,1)$. On a alors $R = \mathbb{C}^2$ et $G = (\mathbb{C}^*)^2$. L'action de G sur R est définie par

$$(\alpha, \beta).(x,y) = (\alpha^{-1} x \beta, \alpha^{-1} y \beta).$$

Dans ce cas, il n'y a pas d'orbite dense, mais une infinité d'orbites de dimension 1 et une orbite de dimension 0. Toutes les orbites de dimension 1 correspondent à des représentations indécomposables, tandis que l'orbite de dimension 0 est $\{S_1 \oplus S_2\}$. L'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$ est donc en bijection avec la droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.



Prenons maintenant un m général, et posons $\underline{d} = (1, d)$. Un élément de R est la donnée de m vecteurs colonnes de taille d, autrement dit c'est la donnée d'une matrice de taille $m \times d$. L'action de $G = \mathbb{C}^* \times \mathrm{GL}(d)$ est donnée par $(\lambda, P).M = \lambda^{-1} MP$. Une représentation donnée par une matrice M sera donc isomorphe à une représentation M' si et seulement si l'image de M et celle de M' coïncident. De plus, M sera indécomposable si et seulement si le rang de M est d. Ainsi l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$ vérifie les propriétés suivantes :

- si $d > m$, $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d}) = \emptyset$;
- si $m = 0$ ou $m = d$, $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$ est réduit à un point ;
- si $0 < d < m$, $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q, \underline{d})$ est en bijection avec la Grassmannienne $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^m)$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces de dimension d de $\mathbb{C}^m$.

Malheureusement le quotient de la réunion des orbites de dimension maximale U par G n'a pas toujours une structure de variété algébrique. L'idée suivante, due à Alastair King dans [7], est alors de se restreindre encore à un sous-ensemble de U (des représentations satisfaisant à une certaine condition appelée stabilité). Renvoyons ici à [8] pour un très bel article de survol sur le sujet.

5. Théorie d'Auslander-Reiten

On se place ici dans le cas où le carquois Q n'a pas de cycle orienté.

Nous nous sommes jusqu'ici intéressés aux objets de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$. Mais qu'en est-il des morphismes ? Un outil très efficace pour aborder cette question est l'utilisation des *suites presque scindées* introduites par Maurice Auslander et Idun Reiten en 1975 dans [2]. Le but est double : parvenir à une description assez précise des morphismes, et pouvoir calculer récursivement certains indécomposables par un algorithme.

Pour décrire les morphismes de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$, on introduit une notion analogue à la notion de représentation indécomposable : la notion de *morphisme irréductible*. Approximativement, un morphisme est irréductible s'il ne s'écrit pas comme une composition non triviale de deux morphismes.

5.1 – Carquois d'Auslander-Reiten

À la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$, on associe alors un carquois noté $\Gamma = \Gamma_Q$ et appelé le *carquois d'Auslander-Reiten* dont les sommets sont indexés par l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$. Le nombre de flèches entre $[X]$ et $[Y]$ dans Γ_Q est la dimension de l'espace des morphismes irréductibles entre X et Y.

Ce carquois a un nombre infini de sommets si Q n'est pas de type Dynkin. Mais on peut montrer qu'il est toujours *localement fini* : le nombre de flèches incidentes à un sommet est toujours fini. Il a de plus une structure de *carquois à translation* : il existe des sous-ensembles finis P_0 et I_0 de l'ensemble de sommets Γ_0 et une bijection

$$\tau : \Gamma_0 \backslash P_0 \longrightarrow \Gamma_0 \backslash I_0$$

telle que le nombre de flèches $X \to Y$ est le même que le nombre de flèches $\tau Y \to X$. Les ensembles P_0 et I_0 ont tous deux même cardinalité que Q_0. On appelle *projectives* les représentations correspondantes aux sommets P_0 et *injectives* celles correspondantes à I_0. La catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(Q)$ étant abélienne, on a en effet une notion de suite exacte.

Exemple 10. Pour le carquois de type A_2 (ex. 1, 4 et 6), le carquois d'Auslander-Reiten est donné par :

$$\begin{tikzcd} & {[V_1]} \arrow[dr] & \\ {[S_2]} \arrow[ur] & & {[S_1]} \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \end{tikzcd}$$

On a $P_0 = \{[S_2],[V_1]\}$, $I_0 = \{[V_1],[S_1]\}$ et $\tau(S_1) = S_2$.

L'application τ a une interprétation algébrique : elle provient d'un foncteur

$$\tau : \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q),$$

appelé *translation d'Auslander-Reiten* qui vérifie les propriétés suivantes

- si X n'est pas projective, alors τX n'est pas injective ;
- et il existe une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{(g_i)} \bigoplus_i Y_i \xrightarrow{(f_i)} X \longrightarrow 0$$

appelée suite *presque scindée* ou *suite d'Auslander-Reiten*, où tous les morphismes f_i et g_i sont irréductibles.

Chaque suite presque scindée correspond à une maille dans Γ_Q de la forme

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[ddr] & \\ & Y_2 \arrow[dr] & \\ \tau X \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & X \arrow[ll, dotted, "\tau"'] \\ & Y_n \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Exemple 11. Dans l'exemple 10, la suite exacte

$$0 \longrightarrow S_2 \longrightarrow V_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte presque scindée.

5.2 – Composantes préprojective et préinjective

Une représentation indécomposable X est appelée *préprojective* si $\tau^n X$ est projectif pour un certain $n \geqslant 0$. De manière duale, une représentation indécomposable X est appelée *préinjective* si $\tau^{-n} X$ est injectif pour un certain $n \geqslant 0$. On peut alors montrer que le sous-carquois dont les sommets sont préprojectifs (resp. préinjectifs) forme une composante connexe $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) de Γ_Q.

Dans le cas où Q est un carquois de Dynkin, le carquois Γ_Q est toujours connexe et on a donc $\mathcal{P} = \mathcal{I}$. De plus la structure de Γ_Q est totalement connue, et se décrit très facilement à partir de Q.

Dans le cas où Q n'est pas de type Dynkin, les composantes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont infinies et distinctes. Mais ces deux composantes sont bien comprises et leur carquois se construit aisément à partir de Q. En outre, les suites presque scindées permettent de calculer facilement par récurrence les vecteurs dimension des représentations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ en utilisant la formule :

$$\underline{\dim} X + \underline{\dim} \tau X = \sum_i \underline{\dim} Y_i.$$

Comme les représentations préprojectives et préinjectives sont entièrement déterminées par leur vecteur dimension, cet algorithme est très puissant.

Exemple 12. Soit Q le carquois de l'exemple 9 avec $m = 2$. Dans ce cas la composante $\mathcal{P}$ est de la forme :

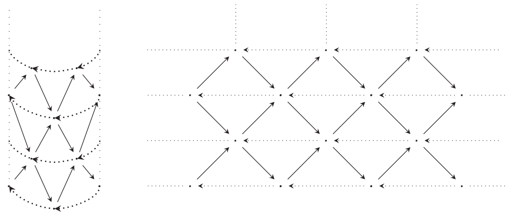
$$\begin{tikzcd}
 & {[1\ 2]} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[3\ 4]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[5\ 6]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \cdots \\
{[0\ 1]} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[2\ 3]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[4\ 5]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[6\ 7]} \arrow[ll, dotted] &
\end{tikzcd}$$

La composante $\mathcal{I}$, elle, a la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
\cdots & {[6\ 5]} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[4\ 3]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[2\ 1]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
{[7\ 6]} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[5\ 4]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[3\ 2]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[1\ 0]} \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

5.3 – Composantes régulières

Les autres composantes connexes sont appelées *régulières*. Bien que l'ensemble $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}}(Q)$ ne soit pas descriptible dans le cas sauvage, les composantes connexes régulières ont des structures bien particulières : elles sont des tubes dans le cas docile, ou bien des composantes de la forme $\mathbb{Z}A_\infty$ dans le cas sauvage.



Tube — Composante de type $\mathbb{Z}A_\infty$

Exemple 13. Reprenons l'exemple 9 avec $m = 2$. L'ensemble des composantes régulières de Γ_Q forme une famille de tubes de rang 1 indexée par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

6. Pour aller plus loin

L'apport des représentations de carquois dans la théorie des représentations d'algèbres est considérable. Tous les résultats présentés ici se généralisent en effet au cas des modules de dimension finie sur une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie. Nous renvoyons ici le lecteur voulant en savoir plus aux livres [1], [3] ou aux notes de cours [4].

Un autre aspect très intéressant de la théorie des représentations de carquois porte sur les opérations combinatoires reliant certains carquois entre eux, comme les réflexions ou les mutations. En effet, l'interprétation algébrique en terme de représentations de ces opérations a donné de nombreuses applications au domaine (voir par exemple [9]).

Références

[1] I. Assem, D. Simson et A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1: Techniques of representation theory.* English. Cambridge: Cambridge University Press, 2006, p. ix + 458. ISBN : 0-521-58631-3/pbk; 0-521-58423-X/hbk.

[2] M. Auslander et I. Reiten. « Representation theory of Artin algebras. III: Almost split sequences. » English. *Commun. Algebra* **3** (1975), p. 239–294. ISSN : 0092-7872; 1532-4125/e. DOI : 10.1080/00927877508822046.

[3] M. Auslander, I. Reiten et S. O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*. **36**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 1997, p. 425. ISBN : 9780521599238.

[4] W. Crawley-Boevey. « Lectures on representations of quivers, More lectures on representations of quivers ». Lecture notes, 1992, available at the author's webpage.

[5] P. Gabriel. « Unzerlegbare Darstellungen. I. (Indecomposable representations. I). » German. *Manuscr. Math.* **6** (1972), p. 71–103. ISSN : 0025-2611; 1432-1785/e. DOI : 10.1007/BF01298413.

[6] V. Kac. « Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory. » English. *Invent. Math.* **56** (1980), p. 57–92. issn : 0020-9910; 1432-1297/e. doi : 10.1007/BF01403155.

[7] A. King. « Moduli of representations of finite dimensional algebras. » English. *Q. J. Math., Oxf. II. Ser.* **45**, n° 180 (1994), p. 515–530. issn : 0033-5606; 1464-3847/e. doi : 10.1093/qmath/45.4.515.

[8] M. Reineke. « Moduli of representation of quivers. » English. In : *Trends in representation theory of algebras and related topics. Proceedings of the 12th international conference on representations of algebras and workshop (ICRA XII), Toruń, Poland, August 15–24, 2007.* Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2008, p. 589–637. isbn : 978-3-03719-062-3/hbk.

[9] I. Reiten. « Tilting theory and cluster algebras ». Advanced School on Representation Theory and related Topics, ICTP Trieste, January 2006, arXiv:1012.6014.

Claire Amiot

Claire Amiot est maître de conférence à l'université Grenoble-Alpes. Ses travaux portent sur la théorie des représentations d'algèbres, l'algèbre homologique et les algèbres amassées.

L'auteur voudrait remercier Michel Brion, Vianney Combet, Fanny Kassel, Bernhard Keller, Evelyne Miot, Pierre-Guy Plamondon et Pierre Will pour leurs conseils bienveillants sur des versions antérieures de ce texte.

Double jeu mathématique

Au moment même où les besoins en cryptographie, intelligence artificielle, modélisation, simulation, statistique et traitement de données, ne cessent de croître dans nos entreprises, notre pays est bien doté pour répondre aux défis mathématiques inhérents à la révolution numérique, à laquelle la société dans son ensemble fait face. Dans ce contexte, il est utile de se rappeler les résultats de l'étude réalisée en 2015 commandée par le LabEx AMIES sur l'impact socio-économique des mathématiques : 15% du PIB et 9% des emplois en France sont directement liés aux mathématiques.

Durant les 12 derniers mois, les mathématiques françaises ont été mises à l'honneur. En 2016, la médaille d'or CNRS, la plus haute distinction scientifique française, a été attribuée à la mathématicienne Claire Voisin. En 2017, c'est à l'échelle internationale que les mathématiques françaises sont couronnées, avec le prix Abel d'Yves Meyer. Enfin, l'une des médailles de l'innovation 2017 du CNRS est allée à une mathématicienne, Raphaèle Herbin, pour ses travaux en analyse numérique en lien avec la sûreté nucléaire. Forte de son deuxième rang en nombre de médailles Fields (12 médailles, derrière les États-Unis), la France affiche une école mathématique en pleine santé, brillante tant sur le plan théorique que dans ses applications. Le gouvernement actuel semble avoir mesuré l'importance de la formation scientifique par les mathématiques. En témoigne en particulier la mission de réflexion sur l'enseignement en mathématiques dont C. Torossian et C. Villani sont porteurs.

Et pourtant! La semaine dernière, à la sortie de l'appel d'offre sur les Écoles Universitaires de Recherche (EUR) à visée structurante lancé par le Commissariat Général à l'Investissement (CGI), la consternation régnait dans les laboratoires de mathématiques : parmi les 29 projets sélectionnés sur les 191 qui avaient été déposés (émanant de toutes les disciplines), on ne trouve aucun projet consacré aux mathématiques (qui étaient souvent conçus en lien avec l'informatique, science elle aussi laissée de côté par le jury).

Rappelons que l'objectif de ces EUR est de créer des équivalents aux Graduate Schools américaines. Les masters et doctorats qui y seront proposés s'appuient sur des laboratoires de haut niveau pour renforcer l'impact et l'attractivité, notamment à l'international, de la recherche française. Les financements d'une EUR permettent de favoriser les échanges scientifiques en subventionnant l'invitation de spécialistes éminents venant de l'étranger. Ils offrent également la possibilité de financer des bourses de thèse et de master, argument incitatif venant en soutien au développement de vocations scientifiques. Le dispositif semblait particulièrement adapté aux mathématiques, une discipline qui allie intimement dans son fonctionnement recherche et enseignement. En effet, parmi les 4000 mathématiciennes et mathématiciens français du milieu académique, environ 90 pour cent enseignent à l'université ou dans des écoles d'ingénieur (les 10 pour cent complémentaires sont des chercheurs).

Cette initiative du CGI semblait prometteuse, et une quinzaine de laboratoires de mathématiques, répartis sur tout le territoire national, s'en sont saisis. Beaucoup de collègues ont travaillé plusieurs mois sur les maquettes de réponse à cet appel d'offre, mettant pour un temps leur recherche de côté pour se consacrer à la communauté, aux futurs scientifiques, et au montage de projets structurant leur laboratoire.

Dès lors, comment comprendre que le jury de cet appel d'offres, mené par le CGI, organisme dépendant directement du Premier Ministre, néglige un pan entier de la recherche scientifique, en contradiction avec la volonté affichée par le gouvernement et les enjeux liés à l'innovation et la transformation numérique ?

Gérard Biau, Président de la Société Française de Statistique – Thierry Horsin, Président de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles – Stéphane Seuret, Président de la Société Mathématique de France

Nouvelles de l'Insmi

• P. Auscher

28 août 2017 : prise de fonction en tant que directeur de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (Insmi). Le voyage commence aux commandes d'un navire qui a déjà derrière lui quelques belles traversées et deux capitaines courageux qui ont laissé un bateau bien armé, en bon état, et avec un équipage bien entraîné. On ne chôme pas à l'Insmi, les projets sont nombreux, les enjeux sont importants...

Alors que j'étais à l'Agence d'Évaluation de la Recherche et d'Enseignement Supérieur [1], en 2009, j'avais assisté au lancement de cet institut dédié aux mathématiques au sein du cnrs, ainsi qu'au choix de ce nom, qu'avec du recul, j'apprécie encore plus : Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions. Tout est dit : un institut qui a le souci de tous les mathématiciens du territoire national, qui travaille à établir les conditions les plus favorables au développement de la recherche en mathématiques, tout en favorisant les projets scientifiques ambitieux et innovants ; un institut qui dépasse l'opposition mathématiques pures et appliquées en plaçant les mathématiques au centre – qu'il s'agisse de la démonstration de conjectures célèbres ou de la construction d'algorithmes, – tout en interagissant avec les autres sciences et avec la société, grand public et entreprises ; un institut à qui a été confiée officiellement en 2010 la mission nationale d'animer la recherche en mathématiques en France.

Tout en veillant à toujours développer le cœur disciplinaire, l'Insmi recrute aussi pour ses laboratoires des chercheurs en interactions avec d'autres sciences ou relevant d'autres sections ou de commissions interdisciplinaires. L'Insmi est également présent au sein de la Mission pour l'Interdisciplinarité du cnrs et participe à nombre d'appels d'offre.

Avec le souci de valoriser les mathématiques auprès du grand public, l'Insmi soutient le gds « Autour de la Diffusion des Mathématiques » (AuDiMath), un « groupement de service » consacré à la diffusion des mathématiques, et encourage les actions innovantes en la matière. On en a besoin pour faire naître des vocations scientifiques, pour soutenir la formation des enseignants en mathématiques, qu'il s'agisse de la formation initiale ou, surtout, de la formation continue. Les chercheurs en mathématiques et le réseau AuDiMath ont une expérience à partager et des idées à apporter.

Soucieux du transfert de compétences vers les entreprises, l'Insmi travaille depuis plusieurs années dans ce domaine à travers l'Agence pour les Mathématiques en Interactions avec les Entreprises et la Société (Amies), récompensée par un LabEx. Cela crée ainsi une visibilité de nos formations et doctorants auprès des entreprises. La création du réseau des maisons de la Modélisation, de la Simulation et de l'Optimisation (mso), présentes dans quasiment toutes les régions de France, montre le chemin parcouru depuis la naissance de MaiMoSINE, pionnière du genre. Toutes ces actions demandent à être poursuivies avec détermination et enthousiasme, dans une société où les besoins en calcul, en modélisation et en traitement de données ne cessent de croître.

La politique de site s'est considérablement développée depuis la loi Fioraso de 2013 et la mise en place de regroupements d'universités et écoles sous des formes variées dans un périmètre géographique. Or une des forces de notre communauté est un fonctionnement en réseau au niveau national. L'Insmi veille donc à ce que cette spécificité soit reconnue et que les mathématiques trouvent leur place, tant au niveau des sites que des divers appels à projets des programmes d'investissement d'avenir (LabEx, IdEx-Isite, Écoles Universitaires de Recherche,...). Pour cela, l'Insmi accompagne les porteurs de projets et a des discussions constantes

1. aeres devenue hcéres.

avec les représentants scientifiques du cnrs sur chaque site.

L'organisation des moyens de calcul et de conservation des données dans des structures organisées et pérennes, respectueuses de l'environnement et d'un développement durable est un des enjeux qu'il nous faudra porter avec nos différents partenaires. Le travail mené par l'Unité mixte de service (l'ums) Gricad est riche en enseignement. L'Insmi s'appuie dans cette réflexion sur l'expérience du Groupement de recherche (gdr) Calcul et de Mathrice (le réseau des informaticiens des laboratoires de mathématiques : un gds que les autres instituts nous envient), et continuera à travailler ces questions au sein de la Mission Calcul et Données du cnrs avec les autres instituts.

L'Insmi a une forte orientation à l'international. Comme un transatlantique, il a ses ports d'attache sur tous les continents, ses Unités mixtes internationales (umi), Laboratoires internationaux associés (lia) et Groupements de recherche internationaux (gdri), aussi appelés International research network (irn). Dans ce domaine, l'Insmi a mené une politique de positionnement stratégique au Mexique (umi ouverte à Mexico en 2017), en Afrique du Sud et en Corée (projets bien avancés), dans le prolongement de ses actions précédentes en Chine ou en Inde. De nouvelles perspectives s'ouvrent en Iran ainsi qu'en Afrique subsaharienne, deux directions dans lesquelles des projets exploratoires sont pertinents. En Europe, signalons l'ouverture prochaine d'une umi à Londres. L'Insmi va continuer à travailler à restructurer ses actions bilatérales en Europe en visant à ce que les projets s'adaptent à la notion de consortium prônée par la politique européenne. Rappelons enfin le système de délégations qui permet aux enseignants-chercheurs de répondre positivement à des invitations pour des séjours longs à l'étranger, que ce soit dans nos structures ou ailleurs.

Deux chantiers importants sont devant nous dans le cadre d'actions Contrat Plan État-Région (cper) : les agrandissements du Centre international de rencontres mathématiques (Cirm), une ums avec la Société Mathématique de France (smf) et Aix Marseille Université (amu, et l'Institut Henri Poincaré (l'ihp), une ums avec Sorbonne Université (su). D'une part, la construction d'une nouvelle salle de conférences et de chambres supplémentaires vont permettre au Cirm d'accueillir simultanément deux rencontres scientifiques et de répondre à l'accroissement des propositions d'événements. Dans le même temps, la smf pilote un chantier pour augmenter les capacités d'accueil du restaurant du Cirm et rénover les cuisines. D'autre part, l'ihp va pouvoir profiter du bâtiment Perrin, mis à disposition de l'ihp par l'su. Situé en face du bâtiment Borel occupé actuellement par l'ihp, ce bâtiment historique va être rénové et étendu. Il pourra ainsi abriter un espace novateur de médiation scientifique dédié aux mathématiques et aux sciences du numérique, une nouvelle salle de conférences, des espaces de travail, des bureaux... Je salue les directions du Cirm et de l'ihp qui ont permis que ces projets ambitieux voient le jour, ainsi que les financeurs, région Paca, smf et cnrs pour le premier, ville de Paris, région Île-de-France, su et cnrs pour le second.

D'autres défis attendent la communauté mathématique. L'un des plus importants concerne la documentation. En cette période de mutation que connaît aujourd'hui l'édition scientifique, l'Insmi se doit d'être force de réflexion et de proposition, et j'aurai à cœur qu'il le fasse, avec le conseil scientifique de l'Insmi, le réseau national des bibliothèques de mathématiques (le gds rnbm), l'ums Mathdoc et la bibliothèque Jacques Hadamard. L'Insmi en particulier soutient le récent appel de Jussieu pour permettre l'éclosion de nouveaux modèles d'éditions, comme par exemple le centre Mersenne, plateforme support à l'édition académique en LaTex hébergée par Mathdoc. L'accès aux données, et leur utilisation, que constituent les archives et les articles, est un enjeu que l'Insmi suit aux côtés de la Direction de l'information scientifique et technique (Dist) du cnrs.

Emploi scientifique, insertion des jeunes, l'Insmi a son rôle à jouer. Il est de sa responsabilité de veiller à la préservation du potentiel mathématique français en maintenant le nombre de postes aux concours cr à un niveau satisfaisant. L'Insmi compte sur le réseau de gdr thématiques pour contribuer à l'insertion des jeunes dans la communauté nationale des mathématiciens, les aider à s'orienter dans l'offre internationale de post-docs et les accompagner dans leur formation à travers workshops, écoles thématiques et conférences. Les appels à projets type Projets exploratoires premier soutien (peps) jeunes chercheurs que l'Insmi propose les aident à développer leurs projets scientifiques. La mobilité entre laboratoires contribue à la dissémination des idées et au dynamisme de notre école mathématique. La mobilité dans les affectations au moment des recrutements cr et du passage dr sera une stratégie affichée et volontariste de l'institut.

L'Insmi encourage également la mobilité, qu'elle soit interne sur projet scientifique, ou externe, comme par exemple celle de nos cr vers la carrière de professeur.

C'est en travaillant en étroite collaboration avec les directeurs des Unités mixtes de recherche (umr) de l'Insmi, ce socle sur lequel se construit la recherche mathématique, que je piloterai le navire Insmi. Il convient aussi de ne pas oublier le rôle crucial de nos it dans nos laboratoires en support à l'activité de recherche. Si maintenir la barre est important, tout bon marin sait qu'il a besoin de ses voiles – la section 41 du comité national, le conseil scientifique de l'Insmi – et de son équipage, directeurs adjoints scientifiques, directeur adjoint administratif, chargés de mission, chargés d'études et d'administration scientifiques et assistantes. Enfin, je compte sur un dialogue fécond avec les sociétés savantes, avec les universités et les écoles qui abritent les mathématiciens, ainsi que les grands organismes avec lesquels ils collaborent. Et je nous souhaite à toutes et à tous une belle croisière !

Bilan de quelques actions de l'Insmi

1. Délégations cnrs

Le cnrs finance chaque année 480 années de délégations qui sont partagées entre les dix instituts du cnrs. Bien qu'il soit le plus petit des dix instituts du cnrs, l'Insmi bénéficie d'un cinquième des délégations mises en jeu. En effet, la communauté mathématique est très universitaire et a donc davantage recours aux délégations que d'autres disciplines. C'est aussi un choix politique du cnrs de soutenir fortement les mathématiques par ces délégations.

Année	2014	2015	2016	2017
Nb. de demandes	285	256	248	253
Nb. de personnes ayant obtenu 6 mois de délégation	177	190	174	159
Nb. de personnes ayant obtenu 1 an de délégation	14	6	23	25
Total des délégations Insmi (en années)	102,5	101	110	104,5

Rappelons que l'étape finale de l'attribution des délégations se fait au niveau des sites et est arbitrée par son directeur scientifique référent (dsr). À l'issue de l'analyse des dossiers par les sections du comité national, les instituts se réunissent pour un premier arbitrage, puis le dsr dialogue avec les directions d'établissements.

Les dossiers sont évalués par les sections de l'institut dont relèvent les laboratoires d'affectation. L'expertise scientifique des dossiers effectuée par la section 41 du comité national est basée sur la liste de critères élaborée conjointement par le comité national et l'Insmi, liste qui est publiée sur le site de la section. Le projet scientifique est un élément déterminant de l'évaluation du dossier. Rappelons que les informations concernant les services faits lors des années précédentes, les décharges, les crct et les délégations auprès d'autres organismes de recherche (Inria par exemple) doivent apparaître clairement dans les dossiers de candidature. Enfin, concernant les accueils en umi, il faut penser à se signaler auprès du directeur adjoint scientifique en charge de l'international ; pour mémoire, un appel d'offre spécifique est envoyé aux laboratoires durant l'automne.

2. Postes de chercheurs invités et d'ingénieurs sur projets

Chaque année, lors des demandes de moyens effectuées par les unités, il est possible de demander des postes de chercheurs invités (autrefois appelés « postes rouges »). Ces postes permettent de faire venir dans nos unités (umr, ums, fr) des chercheurs venant de l'étranger qui sont embauchés sur un contrat à durée limitée d'une durée de 3 mois sur des postes de cr ou de dr. Ces demandes sont examinées par le comité national.

Dans ce cadre, à l'automne 2017, l'Insmi a reçu 44 demandes (36 demandes à l'automne 2016 et 44 en 2015) dont 4 demandes non recevables. Les dossiers scientifiques ont été évalués par le comité national et, comme en 2016 et en 2015, 16 de ces demandes ont été acceptées. Ces postes de chercheurs associés correspondent annuellement à 4 emplois à temps plein. À cela, il faut ajouter 18 mois concernant l'organisation des semestres à l'IHP, et autour de 2 années de chercheurs issus de nos UMI/LIA (2,5 en 2017, 1,5 en 2016). Au total, ce sont 8 ETPT (« équivalent temps plein travaillé ») qui sont consacrés à ces invitations.

Par ailleurs, depuis cette année, l'Insmi propose des volants de 6 mois ou 1 an de CDD pour recruter des ingénieurs afin de mener à bien des projets de développement d'algorithme ou des projets de traitement de données. Là aussi, les demandes remontent lors de la demande de moyens de l'unité et sont analysées par le comité national. Dans ce cadre, à l'automne 2017, l'Insmi a reçu 9 demandes dont une hors cadre, deux émanant de la même unité, et deux demandes qui font également l'objet d'un autre processus d'attribution (Noemi, FSEP ou autre). Au final, c'est quatre CDD de 6 mois qui vont être lancés en retour.

3. Programmes Peps Jeunes Chercheur-e-s

L'Insmi a lancé en 2016 un Programme exploratoire premier soutien (Peps) annuel dédié aux jeunes chercheurs et chercheuses, « jeunes » au sens où les lauréats ont soutenu leurs thèse depuis moins de 7 ans (le délai étant augmenté d'une année par enfant en cas de congé de maternité ou d'adoption, et de la durée du congé pris en cas de congé maladie, paternité ou parental, ainsi qu'en cas de service national).

L'objectif est d'aider ces collègues à développer leur recherche, à nouer des collaborations en France ou à l'international et à amorcer ainsi des projets de plus grande ampleur pouvant mener à terme à un dépôt auprès d'une agence de moyens.

Durant ces deux années d'existence du programme, la situation a été très stable. Le montant global des projets déposés était d'environ 350 k€, celui des projets retenus autour de 170 k€ pour un total d'une cinquantaine de projets lauréats.

4. Programmes interdisciplinaires

En soutien à l'interdisciplinarité, l'Insmi s'associe à des actions montées avec les autres instituts et dans le cadre de la Mission Interdisciplinarité (MI) du CNRS. Globalement, on observe une faible pression du côté des mathématiques dans ces différents programmes et les collègues sont vivement encouragés à postuler.

Les appels d'offre sont relayés dans la lettre de l'Insmi ou sur le site internet. Les dossiers de candidature sont légers (4 à 6 pages) et nécessitent un faible niveau de détail. Les projets portés par des jeunes chercheurs sont très appréciés par les évaluateurs. Ces appels étant interdisciplinaires, les projets sont évalués par des experts de deux disciplines et il est donc important que la rédaction des projets soit faite en coordination avec tous les collègues impliqués dans le projet.

Typiquement, ces projets durent un ou deux ans, avec un budget annuel de 5 à 20 k€. Le budget peut être utilisé pour du fonctionnement et du matériel et ne permet donc pas de payer des salaires. Quelques subventions de stage de M2 sont néanmoins distribuées par la MI. Les crédits sont versés directement dans les laboratoires et doivent être dépensés au cours de l'année civile.

Chaque année, deux programmes sont lancés en juillet au moment des demandes de moyens des unités. Il s'agit de deux appels à projets impliquant l'Insmi et l'Institut National des Sciences de l'Univers (INSU) :

- **Tellus** (depuis 2016)
  Modélisation de la surface terrestre, fluides géophysiques, astronomie,
  57 k€ distribués en 2016 et 36 k€ en 2017 ;
- **Manu** (chaque année depuis 5 ans), dans le cadre du programme LEFE (Les Enveloppes Fluides et l'Environnement),
  Méthodes mathématiques et numériques, fluides et environnement.

Les autres appels à projets sortent entre septembre et janvier de l'année suivante. Ils couvrent différentes interfaces. L'un d'entre eux, le **Défi Infiniti** recouvre des aspects de modélisation et concerne donc tout particulièrement les mathématiciens. En 2016 et 2017, l'Insmi a été plus particulièrement impliqué par les appels suivants :

- **Défi s2c3** - Comportements humains collectifs (1 projet en 2016 porté par des membres de laboratoires de l'Insmi, 2 projets en 2017) ;
- **Défi Littoral** (3 projets en 2016), pas d'appel d'offre en 2017 ;
- **Défi Imag'in** (3 projets Insmi en 2016, 1 projet en 2017) ;

– **Défi Mastodons** sur les données massives (1 projet Insmi en 2016, 4 projets en 2017) ;
– **Défi Infiniti** (5 projets Insmi en 2016, 10 projets en 2017) ;
– **Peps mpi** - Modélisation des processus infectieux (1 projet Insmi en 2017) ;
– **Peps Energie** (1 projet en 2017).

Enfin, l'Insmi a eu deux lauréats du programme *Osez l'interdisciplinarité !* en 2017. Cet appel d'offre lancé cette année vise à soutenir les chercheurs cnrs désireux de faire une reconversion thématique dans un cadre interdisciplinaire.

L'enveloppe totale correspondant à ces projets est d'environ 235 k€ en 2017 (contre 134 k€ en 2016).

Les **Peps de site**, cofinancés par le cnrs et les sites, ont pris fin en 2016. L'interdisciplinarité a souvent été utilisée comme source et force de structuration scientifique du site et les dossiers déposés ont reçu une évaluation externe puis une évaluation conjointe par le site et le cnrs. Dans ce cadre, en 2016, une quinzaine de projets impliquant des membres de laboratoire relevant de l'Insmi ont été sélectionnés pour un montant total de 195 k€.

Pascal Auscher, Virginie Bonnailllie-Noël, Jean-Stéphane Dhersin, Clotilde Fermanian Kammerer, Mathieu Lewin.

Annales Henri Lebesgue

- X. Caruso
- D. Cerveau
- S. Gouëzel
- X. Lachambre
- N. Raymond
- S. Vũ Ngọc

1. Des mathématiques éphémères et durables

Les théorèmes, leurs preuves et les idées qui les font vivre n'appartiennent à personne, pas même à leurs auteurs. En écrivant cela, on imagine aisément qu'un léger sourire taquin puisse poindre au coin de la bouche de la lectrice, comme si y germait l'ébauche d'une volonté de contradiction. Certaines sentences un peu excessives, péremptoires même, peuvent pourtant ouvrir une réflexion. C'est ainsi que d'un bloc informe et grossier, certains sculpteurs antiques ont façonné des corps plus vrais et plus gracieux que nature. On raconte même qu'un chypriote, Pygmalion, réussit si bien son œuvre et l'aima avec tant d'ardeur que Vénus lui insuffla la vie [1]. Nombreuses sont aussi les légendes qui font de certains hommes d'occasionnels démiurges [2] qui animent une matière amorphe et inerte. Qu'on se souvienne des sages Deucalion et Pyrrha qui, sauvés du déluge par Jupiter, redonnèrent vie à l'humanité en jetant des pierres (probablement de l'argile) derrière eux [3].

Au-delà de la portée symbolique de ces histoires, c'est justement sur de l'argile que furent parfois écrites les premières considérations mathématiques et les premiers récits mythologiques (occidentaux ou orientaux), comme si être auteur, c'était être un peu créateur. Bien sûr, les Anciens n'écrivaient pas que sur des tablettes : des textes antiques racontent que les géomètres traçaient leurs figures sur du sable pour soutenir leurs raisonnements et transmettre leurs idées aux générations futures. C'est ainsi que Socrate amena par exemple un esclave à résoudre publiquement le problème de la duplication du carré [4]. Mais, cher lecteur, tu n'as

1. *Les Métamorphoses*, Livre X, 243, Ovide.
2. De δῆμος (peuple) et ἔργον (travail) : l'artisan.
3. *Les Métamorphoses*, Livre I, 325.
4. *Ménon*, 80d, Platon.

Deucalion et Pyrrha, Rubens (1636), Musée du Prado

peut-être pas ouvert la *Gazette* pour qu'on te narre les Métamorphoses ovidiennes ou qu'on te parle de réminiscences platoniciennes. Que reste-t-il du sable des géomètres qui ancrait la géométrie dans l'éphémère et de l'argile des scribes qui devait faire durer leurs œuvres ?

2. Un colosse aux pieds d'argile

Un peu à la façon de l'âme platonicienne qui, s'abîmant dans le temps, rencontre le désir et l'oubli, quittons le monde antique et enjambons ensemble les siècles pour retrouver le présent. La craie a remplacé le sable ; des amphithéâtres universitaires et des écoles variées accueillent des assemblées estudiantines. Les séances de cours et de travaux dirigés, au fond si éphémères, y luttent régulièrement contre l'oubli qui guette de toutes parts la somme fabuleuse de connaissances acquise depuis l'Antiquité. Ces connaissances appellent notre responsabilité : la question de la mémoire scientifique et de sa diffusion est prégnante. Mais que sont devenues les tablettes d'argile ? Il n'y a pas si longtemps, les œuvres mathématiques étaient encore publiées exclusivement sur du papier. Peut-être, chère lectrice, as-tu toi-même erré dans des bibliothèques mathématiques et as-tu navigué d'une travée à une autre à la recherche d'un précieux théorème ? Peut-être t'es-tu déjà assise dans un fauteuil confortable, un article dans une main et un stylo dans l'autre, secrètement charmée par ce plaisir délicat ? Peu à peu, on a virtualisé les œuvres mathématiques. Elles hantent désormais une multitude de serveurs publics et privés ; elles sont immédiatement disponibles et semblent n'être plus engourdies par leur support de papier. Bien sûr, elles ne sont pas devenues de purs fantômes et le lancement d'une impression n'est pas encore devenu une séance de spiritisme. Elles sont bien matérielles et hébergées, pour la majorité, dans les serveurs d'éditeurs commerciaux (par convention, appelons-les Elsa et Sponz). Par ce biais, une pression financière s'exerce régulièrement sur les structures publiques (laboratoires, universités, etc.) qui œuvrent directement pour les sciences. Elsa et Sponz ne se soucient plus de la sauvegarde de nos connaissances que par accident : ils décident surtout de nos besoins pour satisfaire les leurs. Ainsi, l'accès aux travaux mathématiques n'est pas seulement payant, il est aussi soumis, par exemple, à la règle des bouquets de revues : pour avoir accès à un journal, nous devons aussi en acheter une foule d'autres que nous n'avons pas demandés. Un laboratoire désire-t-il un élégant assortiment de roses et de tulipes, cet obscur couple de fleuristes le contraint souvent à y

5. On pourra consulter l'article (*Gazette des Mathématiciens*, 147) de F. Hélein qui traite en partie de cette question.

ajouter des marguerites, des pissenlits et, parfois, une meule de foin. Où est la cohérence scientifique dans ces pratiques ? [5]

À mesure que nous nous sommes habitués à ce fonctionnement, nous avons cessé de nous en étonner, tout en voyant pourtant des sommes considérables quitter chaque année les trésoreries des laboratoires de recherche.

3. La naissance des *Annales Henri Lebesgue*

De nombreux collègues regrettent cette situation, mais ne savent peut-être pas comment changer de paradigme éditorial. Ils constatent notamment que les auteurs des articles sont le plus souvent financés par la recherche publique et qu'éditeurs et rapporteurs effectuent un travail bénévole. Comment donc imaginer que le fruit de ce travail puisse être une source de profit aux dépens des organismes qui financent justement les auteurs, les éditeurs et les rapporteurs ? Cette question est d'autant plus saisissante que nous avons aujourd'hui les moyens publics d'assurer la diffusion et la conservation des œuvres mathématiques. Le Centre Mersenne [6], récemment fondé, peut en effet fournir tous les services nécessaires à la publication des travaux mathématiques : mise en place du site web de la revue, mise aux normes, diffusion, archivage des articles. De l'argile publique et pour moins cher, en somme.

ANNALES
HENRI LEBESGUE

C'est dans ce contexte que les *Annales Henri Lebesgue* ont vu le jour. Depuis plus de deux ans, des enseignants-chercheurs de l'ouest de la France ont entrepris de les créer. Au commencement, il faut bien l'avouer, elles n'étaient qu'une idée vague et chétive. Pourtant, le sentiment qu'elles incarneraient un modèle gratuit, ouvert et exigeant les amena à revenir dans les conversations avec une certaine vigueur. Le Centre Henri Lebesgue [7] pouvait aussi provisoirement les nourrir, les façonner et leur donner corps. Les laboratoires concernés s'engagèrent même à les financer pour assurer leur pérennité. Nous avons alors contacté de nombreux collègues français et étrangers afin de constituer un comité éditorial motivé. Ces collègues furent enthousiasmés à l'idée de participer à un mouvement d'ensemble de la communauté mathématique, soutenu par le CNRS. Leurs réponses positives nous firent bientôt craindre d'avoir trop d'éditeurs. De zélés collègues prirent ensuite de l'élan, installèrent Open Journal Systems [8] et l'adaptèrent aux besoins d'une revue mathématique. On protégea juridiquement les Annales et un graphiste modela l'identité visuelle du site de soumission des articles [9]. Les *Annales Henri Lebesgue* devinrent alors réelles tout en acquérant une existence indépendante.

4. Lectorat et comité éditorial

Les *Annales Henri Lebesgue* sont une revue généraliste de mathématiques, purement électronique, qui a vocation à publier des articles de très grande qualité et librement accessibles à toutes et à tous. Bien que l'initiative soit née dans l'ouest de la France, le comité éditorial, au sein duquel des thématiques variées sont représentées, comporte une moitié d'éditeurs extérieurs, majoritairement étrangers. Bien sûr, ce nouveau journal ne résoudra pas tous les problèmes de l'édition à lui seul ; il rejoindra le patrimoine des revues mathématiques françaises ayant des pratiques éditoriales raisonnables [10]. Le comité éditorial se renouvellera régulièrement aussi bien pour impliquer d'autres collègues que pour couvrir, dans le temps, un spectre thématique plus large et prenant davantage en compte la représentativité des mathématiciennes.

5. Publiez vos œuvres dans une revue libre !

Les Annales sont ouvertes à toutes et à tous, des doctorants aux chercheuses aguerries. Il peut

6. Métamorphose du CEDRAM (`http://www.mersenne.fr/`) accompagnée par le CNRS et l'université Grenoble Alpes.
7. `https://www.lebesgue.fr/fr`
8. `https://pkp.sfu.ca/ojs/`
9. `https://annales.lebesgue.fr/index.php/AHL`
10. Une liste non exclusive est consultable ici : `http://www.cedram.org/`.

y avoir une inquiétude à l'idée d'envoyer ses très bons travaux à des revues naissantes : la réputation de ces dernières n'est pas toujours clairement établie et on peut redouter que les travaux qui y sont publiés ne jouissent pas d'une reconnaissance immédiate. On serait pourtant surpris par l'enthousiasme grandissant des mathématiciennes et des mathématiciens, notamment des plus jeunes, pour ces initiatives éditoriales et par leur désir de s'y associer. En créant ce journal, nous répondons à ce désir en leur offrant un support digne de leurs plus belles réalisations. C'est donc sans scrupules et avec enthousiasme qu'on peut demander à chacune et à chacun de faire vivre les Annales.

En fait, les bonnes réputations des revues, pour la plupart, ne sortent pas de la cuisse de Jupiter : il fallut que des travaux d'une très grande qualité y fussent envoyés et qu'un comité éditorial sérieux œuvrât à leur évaluation. Les œuvres, en un certain sens, sont plus importantes que les revues elles-mêmes : elles n'ont pas besoin de ces dernières pour être bien écrites ou pour receler une grande valeur scientifique. Par contre, elles ont besoin de l'attention d'éditeurs et de rapporteurs de qualité : c'est le travail de ces personnes qui fait, avec le temps, les réputations non usurpées et non héritées. Les nombreux échanges qui ont ponctué la création des *Annales Henri Lebesgue* n'ont jamais cessé de graviter autour de cette idée.

La communauté mathématique a les moyens de veiller à l'ensemble du processus de publication et de participer ainsi à une politique éditoriale cohérente. Les *Annales Henri Lebesgue* sont une des pierres que nous avons voulu laisser derrière nous. Donnez-leur vie !

Le centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

- T. Bouche
- E. Miot
- C. Vaudaine

Le centre Mersenne a été fondé en 2017 en tant que partenariat entre la cellule Mathdoc et UGA Éditions, avec des moyens de l'IDEX de l'université Grenoble Alpes. Doté de deux tutelles, l'INSMI du CNRS et l'université Grenoble Alpes (UGA), il est lancé en 2018.

Qu'est-ce que le centre Mersenne ?

Le centre Mersenne est une structure publique d'édition pour des publications scientifiques qui propose

- une plateforme de diffusion, à destination des chercheurs, qui pourront consulter les publications via une fonction de recherche étendue ;
- un ensemble de services modulaires, à destination des équipes éditoriales.

Les publications scientifiques concernées sont par exemple des revues, livres, actes et séminaires, nationaux et internationaux, de toutes disciplines scientifiques. Les deux dénominateurs communs étant la publication en LaTeX et en libre accès.

Le centre Mersenne s'adresse donc à un double public. D'une part à la communauté des chercheurs « lecteurs » qui accéderont, via un portail internet, à l'ensemble des contenus des revues membres. D'autre part aux chercheurs « rédacteurs », c'est-à-dire aux comités de rédaction qui pourront à faible coût éditer leur revue en sélectionnant les services de leur choix.

Les services proposés

Le centre Mersenne propose un éventail de services qui visent à donner tous les outils nécessaires aux équipes éditoriales pour leur faciliter la gestion d'une publication. Des outils à la fois techniques et éditoriaux : mise en ligne et diffusion des articles sur la plateforme du centre Mersenne (ce service s'accompagne de la création d'un site web personnalisé par revue, ainsi que de l'attribution de DOI (Digital Object Identifier) et de l'archivage pérenne via la solution CLOCKSS), l'installation et le paramétrage en fonction des pratiques de chaque revue du logiciel de gestion de flux éditorial Open Journal System (OJS).

L'équipe Mersenne propose également une formation et une maintenance du logiciel OJS, la création d'une maquette LaTeX dans une classe spécifique, la mise aux normes, c'est-à-dire la structuration des métadonnées et la mise en page avec cette classe, la révision des textes, le secrétariat de rédaction, la détection de plagiat, l'impression...

L'équipe

Composée d'une dizaine de personnes de profils professionnels variés : mathématiciens, développeurs informaticiens, responsable de projet, responsable de mise en page, l'équipe du centre Mersenne s'appuie sur l'expertise acquise au fil des activités antérieures de la cellule Mathdoc (bibliothèque numérique Numdam, plateforme de diffusion de documents mathématiques Cedram).

Sélection des revues

Plus concrètement, quelles sont les revues concernées et comment devenir membre du centre Mersenne ? L'ensemble des revues du Cedram sera progressivement intégré au centre Mersenne et constituera ainsi le premier noyau de revues de mathématiques du site. Il y aura aussi dès janvier 2018 quatre revues supplémentaires de profils variés. Il peut s'agir d'une création de revue, à l'instar des *Annales Henri Lebesgue* (dont il est par ailleurs question dans ce numéro de la *Gazette*). Ou encore d'une revue existante qui quitte son éditeur commercial pour basculer en libre accès. C'est le cas de la revue *Algebraic Combinatorics*, née de la démission fracassante du comité de rédaction de la revue *Journal of Algebraic Combinatorics* éditée par Springer. Il peut aussi s'agir d'une revue sortant du périmètre mathématique ou d'une revue existante qui souhaite bénéficier d'une infrastructure solide...

Le centre Mersenne est gouverné par deux instances afin de sélectionner les publications pouvant l'intégrer : le conseil scientifique et le comité de pilotage. Les demandes de revues souhaitant adhérer au centre Mersenne seront examinées par le conseil scientifique de Mathdoc au fil de l'eau. Celui-ci émettra un avis sur la qualité scientifique et opérationnelle du projet. Il pourra aussi prioriser les demandes et proposer des orientations de développement. La décision finale sera prise par le comité de pilotage qui tiendra également compte des moyens financiers, techniques et humains disponibles.

Un principe fondateur : le libre accès

La création du centre Mersenne répond au besoin de disposer de solutions de publication alternatives, à la fois publiques (pas de privatisation des connaissances), à faibles coûts (voire gratuites) et en libre accès (pour garantir la libre circulation des résultats de recherche). Et plus précisément en libre accès diamant. Cela signifie que les revues membres s'engageront à donner librement accès à tous leurs articles sans restriction, sans que les auteurs ne doivent payer de frais de publication. C'est déjà le cas de toutes les revues du Cedram depuis 2017. En cela, cette politique s'inscrit pleinement dans un contexte d'essor d'initiatives similaires telles que OpenEdition pour les revues de sciences humaines et sociales (développé par le Cléo, qui est une UMS) ; EpiSciences (développé par le CCSD, qui est une UMS) ; la fondation MathOA... Ces différents projets visent tous à proposer des alternatives de publication à coût faible, voire nul, de façon à ramener à un niveau soutenable les dépenses souvent exorbitantes que représentent pour les institutions publiques les abonnements aux revues éditées par des maisons d'édition commerciales à but (extrêmement) lucratif. Ce sont essentiellement ces mêmes institutions qui financent la recherche publique alimentant le contenu de ces revues... L'appel de Jussieu, qui a recueilli à cette heure de l'ordre de 70 signatures, ou encore le bras de fer actuel entre le consortium Couperin et certains éditeurs sont des exemples de cette prise de conscience et des stratégies mises en œuvre pour renverser la vapeur.

Un modèle économique en développement

La production et la diffusion de revues en libre accès représentent évidemment un coût humain et financier. L'équipe du centre Mersenne travaille à divers scénarios de financement. L'objectif est de disposer d'un modèle économique solide pour lui permettre de poursuivre son développement de manière soutenable.

Le principe de base est que le développement et la maintenance de l'infrastructure elle-même font partie des missions de Mathdoc, dont les moyens proviennent de ses tutelles, tandis que les surcoûts induits par la production de chaque revue doivent être équilibrés par un financement spécifique. Exemples de surcoût : mise aux normes LaTeX, correction de la langue, détection de plagiat, secrétariat de rédaction mutualisé...

Si la revue s'appuie sur une institution de recherche, nous comptons sur le soutien concret de cette dernière pour permettre à la revue d'exister. Certaines revues indépendantes pourraient être soutenues par un consortium de bibliothèques. D'autres pistes sont à l'étude : mécénat, souscriptions, adhésions, donations par le biais de fondations...

Ce modèle, encore en cours d'élaboration, sera amené à évoluer au gré des sources de financement et des opportunités futures. Nous avons pour cela pleinement confiance en les idées novatrices et en la volonté d'implication des différents acteurs de la recherche publique, qu'ils soient chercheurs, lecteurs, institutions ou bibliothèques !

Gérard Tronel
1934-2017

Notre collègue Gérard Tronel est décédé le 25 août 2017 à l'hôpital d'Ussel (Corrèze). Depuis plusieurs années, il luttait contre le cancer. Suivant sa volonté, ses obsèques ont eu lieu dans l'intimité familiale et ses cendres ont été dispersées à Montvernier (Savoie), où il a passé son enfance. Gérard était né en 1934. Il avait suivi Jacques-Louis Lions lors de la création, en 1969, du Laboratoire d'analyse numérique où il a fait ensuite toute sa carrière comme Maître de conférences de mathématiques. Gérard a beaucoup œuvré pour la communauté mathématique. Très investi dans les relations scientifiques avec les mathématiciens soviétiques, il avait collaboré avec les équipes de M.A. Krasnosel'skii et d'O.A. Oleinik. Après la fin de l'URSS, il avait contribué à l'organisation d'un système de (petites) bourses qui ont permis à de nombreux jeunes mathématiciens russes de continuer la recherche sur place.

En 2002 il avait reçu le prix D'Alembert pour sa participation à l'organisation de l'année mondiale des mathématiques en l'an 2000. Il avait aussi participé à la création et à l'organisation du cycle « Un texte, un mathématicien » à la BnF. Enfin et surtout, il avait été en 2004 l'âme de la renaissance, et ensuite de l'organisation, du Prix Maurice Audin, un combat qui lui tenait à cœur.

Un hommage a été rendu à Gérard le 12 janvier 2018 à l'université Pierre et Marie Curie (Jussieu), voir `http://www.ljll.math.upmc.fr/Hommage-Gerard-Tronel-12janv2018/`

Voir aussi `http://smf.emath.fr/files/pergerard-finale-3.pdf` pour une version plus détaillée de ce texte.

Hans-Otto Georgii
1944-2017

Le 16 mai dernier s'est éteint soudainement notre collègue probabiliste allemand Hans-Otto Georgii. Cet enseignant-chercheur fit un remarquable travail de pionnier dans le domaine de la mécanique statistique mathématique : il y développa des méthodes probabilistes rigoureuses, profondes et puissantes.

Hans-Otto Georgii, né à Cottbus en 1944, étudie à Erlangen la physique et les mathématiques. Il prépare une thèse sous la direction de Konrad Jacobs, intitulée Transition de phase d'ordre 1 dans les modèles gazeux réticulés. Dans son habilitation (1978) il introduit – et développe – d'une manière rigoureuse le concept de Mesures de Gibbs canoniques en volume infini, mesures qui modélisent des systèmes thermiques à un nombre fixé de particules.

Après un court passage par Bielefeld en tant qu'assistant il devient en 1981 Professeur de Probabilités et Statistique à l'université Ludwig-Maximilian de Munich, où il fera toute sa carrière.

Ses champs de recherche comprennent, outre les thèmes de transition de phase et les modèles liés à la thermodynamique, la géométrie stochastique et l'étude de processus stochastiques en biologie mathématique. Son livre *Gibbs measures and phase transitions* publié en 1988, écrit avec une précision extrême, est une référence fondamentale et inégalée sur ce thème. Hans-Otto Georgii développa de multiples collaborations internationales, notamment avec nos collègues français D. Dereudre, R. Drouilhet et J. Ruiz.

Il encadra nombre de doctorants et de jeunes chercheurs en habilitation, même après sa retraite : la transmission du savoir lui tenait très à cœur. Ses qualités pédagogiques sont éclatantes en particulier dans son livre Introduction aux Probabilités et Statistiques, dont existent déjà cinq éditions en allemand et deux en anglais. À quand une version française ?

Hans-Otto Georgii, bien que discret, était très estimé par son entourage professionnel pour sa disponibilité constante et sa serviabilité à l'égard de tous. Il avait de plus une personnalité intègre et particulièrement modeste.

Nous regrettons sincèrement sa disparition, mais savons que son héritage mathématique profond perdurera, ainsi que tout ce qu'il nous a transmis, aussi bien du point de vue humain que scientifique.

Géométrie et topologie avec Thurston & Systèmes dynamiques avec Poincaré - Voyages en mathématiques

Aurélien ALVAREZ

Le Pommier, 2013. ISBN : 978-2-7465-0708-1 & 978-2-7465-0707-4

Ces deux livres sont des recueils qui rassemblent une vingtaine d'articles parus sur le site *Images des Mathématiques* sur le thème des systèmes dynamiques et de la géométrie en dimension 2 et 3. Ils servent également de prétexte à présenter deux figures emblématiques de la géométrie moderne : Henri Poincaré, d'une part, et William Thurston, d'autre part.

Le premier, on le sait, est celui qui a jeté les bases de la topologie algébrique en introduisant la notion d'homotopie et en énonçant la célèbre conjecture qui porte son nom et qui a été mise à prix par le *Clay Institute* en l'an 2000. Les motivations de Poincaré étaient peut-être moins connues. Elles remontent à l'étude du problème à 3 corps ou, plus concrètement, à la question de savoir si la Terre pourra, un jour (lointain), s'échapper du système solaire. Cette question a littéralement façonné l'œuvre de Poincaré : elle est à l'origine, comme nous l'avons dit, du développement de la topologie algébrique mais aussi de celui des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos. William Thurston, quant à lui, récipiendiaire de la médaille Fields en 1982, est un spécialiste des variétés de petite dimension et, sans aucun doute, le mathématicien qui a manié avec le plus d'élégance et de réussite l'art de la déformation et du couper-coller. Si Poincaré a le mérite d'avoir énoncé sa fameuse conjecture, c'est Thurston qui a imaginé les outils qui ont mené à sa résolution, par Perelman, en 2003.

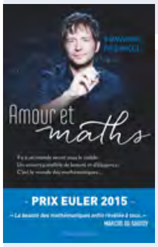
Le livre sur les systèmes dynamiques nous replonge au début du XX^{e} siècle et nous prend par la main pour nous expliquer comment Poincaré a su extirper du problème des trois corps les prémisses de la topologie moderne et de la théorie du chaos. Des articles historiques viennent compléter de manière agréable les aspects scientifiques en nous plongeant au cœur de l'affaire Dreyfus ou en nous racontant comment cet homme à l'intelligence exceptionnelle, Henri Poincaré, a accepté de se prêter au jeu d'une expérience clinique ayant pour but affiché d'étudier les sources du génie.

Le second livre nous mène – ou plutôt, devrais-je dire, nous promène – à travers les beautés de la géométrie en dimension 2 et en dimension 3. On y croise, tout d'abord, des nœuds, des entrelacs, des tresses ; on y découvre (ou en y redécouvre) au passage, les théories mathématiques afférentes et quelques résultats surprenants. Petit à petit, on en vient à explorer des mondes plus exotiques : le ruban de Moebius, la chambre hyperbolique, le complémentaire du nœud de trêfle. De nombreuses illustrations (ainsi que des vidéos disponibles sur le site *Images des mathématiques*) agrémentent notre lecture, à la manière des photographies qui viennent illustrer le récit plein d'enthousiasme de notre meilleur ami qui nous raconte ses vacances à l'autre bout du monde.

La métaphore de la promenade est empruntée aux livres eux-mêmes dans lesquels les différents chapitres sont présentés comme les étapes successives d'une randonnée en montagne. Pour filer la métaphore, la difficulté des articles ou, si l'on veut, la difficulté des étapes, est indiquée dans les livres comme le dénivelé (ou plutôt l'altitude en l'occurrence) de l'étape. L'idée est séduisante ; il est dommage que la présentation la rende peu visible et difficile à repérer. On y fait toutefois facilement attention dès lors que l'on est au courant. La typographie est recherchée et rend la lecture agréable. Les titres des parties apparaissent toutefois dans la marge, ce qui fait qu'on les rate facilement.

En résumé, ces deux livres offrent deux excellentes lectures, accessibles au plus grand nombre, qui évoquent les bouleversements du XX^{e} siècle dans notre compréhension de la géométrie et de l'importance qu'elle a prise dans les mathématiques en général. À glisser entre les mains de toutes et de tous les passionnés.

Xavier Caruso
Université Rennes 1



Amour et maths
Edward Frenkel
Flammarion, 2015. 364 p. ISBN : 978-2081344198

En revenant sur son parcours académique, d'un brillant lycée moscovite à Paris, en passant par Boston et Princeton, Edward Frenkel guide son lecteur, a priori non-mathématicien, à travers les arcanes de la recherche mathématique moderne et tente de lui en confier quelques intuitions. Le fil conducteur de ce livre est donc double : d'une part une autobiographie, d'autre part une description des mathématiques qui ont mû (et ému) son auteur, notamment le *programme de Langlands géométrique*.
Frenkel y dédie ainsi plusieurs chapitres dans lesquels il évoque les groupes de symétrie, la théorie de Galois, la « pierre de Rosette » de Weil reliant théorie des nombres, géométrie des courbes sur les corps finis et surfaces de Riemann, la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil et son impact sur le grand théorème de Fermat, le programme de Langlands, son analogue géométrique (Drinfeld, Laumon), ses relations avec la théorie quantique des champs (Witten, Kapustin)... Il n'est d'aucun intérêt de tenter de résumer ici ce qu'est le programme de Langlands géométrique ; je ne pourrais que conduire les spécialistes à s'étrangler de mes inévitables imprécisions sans pour autant transmettre aux autres le sentiment de fascination que m'a procuré la lecture de ce livre. De toute façon, le lecteur trouvera dans son livre moins des énoncés mathématiques précis que des images, parfois assez vives, de ce qu'ils pourraient signifier. Frenkel rend aussi très bien compte, je crois, du processus intellectuel et humain qui conduisit à son élaboration et à sa compréhension.
Edward Frenkel insère un second thème au cœur de ce récit : la discrimination antisémite dont il fut victime dès ses premières années d'enseignement supérieur. L'examen d'admission à *Mekh. Mat.* occupe ainsi tout le troisième chapitre du livre. Le recueil *You failed your math test, Comrade Einstein* édité par M. Shifman (World Scientific, 2005) décrit cet aspect du monde académique soviétique des années 70-80 ; il contient aussi les énoncés et les solutions par I. Vardi d'une vingtaine de ces exercices « tueurs » posés aux jeunes étudiants qu'il s'agissait d'empêcher d'accéder à l'université.
Un troisième thème parcourt implicitement tout le livre de Frenkel, comment sa progression dans le monde mathématique s'est peu à peu construite grâce à une succession de rencontres avec des mathématiciens généreux : Petrov, ami de la famille alors qu'il n'était que lycéen, puis, pendant ses premières années d'études universitaires ; Fuchs puis Feigin qui l'initient à la théorie des algèbres de Kac-Moody ; Drinfeld, qu'il rencontre à Harvard et lui suggère d'utiliser ses premiers travaux avec Feigin pour franchir une étape du programme de Langlands géométrique ; Witten enfin qui interpréta le programme de Langlands géométrique comme phénomène de dualité en électro-magnétisme quantique.

En terminant son livre par l'évocation du court-métrage *Rites d'amour et de maths* qu'il réalisa en 2008, Frenkel n'ignore pas la médiatisation dont il fait l'objet et dont témoigne par exemple l'article « Edward Frenkel, maths lover » publié dans *L'Obs* à l'été 2015 – un aspect du personnage (« beau gosse qui montre ses fesses ») qui rebute plus d'un collègue.
Néanmoins, l'art avec lequel Frenkel entrecroise de façon dynamique les trois thèmes autobiographie/mathématique/discrimination font de son livre un manifeste enthousiasmant de l'amour qu'il éprouve pour les mathématiques.

Antoine Chambert-Loir
Université Paris Diderot


PRIX DE THÈSE
du laboratoire de mathématiques
Blaise Pascal
Date limite de candidature
15 juin 2018
Ce prix d'un montant de 4000 € récompense une thèse de mathématiques fondamentales soutenue entre le 1er janvier 2016 et le 31 décembre 2017.
UNIVERSITÉ Clermont Auvergne
http://recherche.math.univ-bpclermont.fr/evenements/prix_these_lmbp.php
prix.lmbp@math.univ-bpclermont.fr

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.