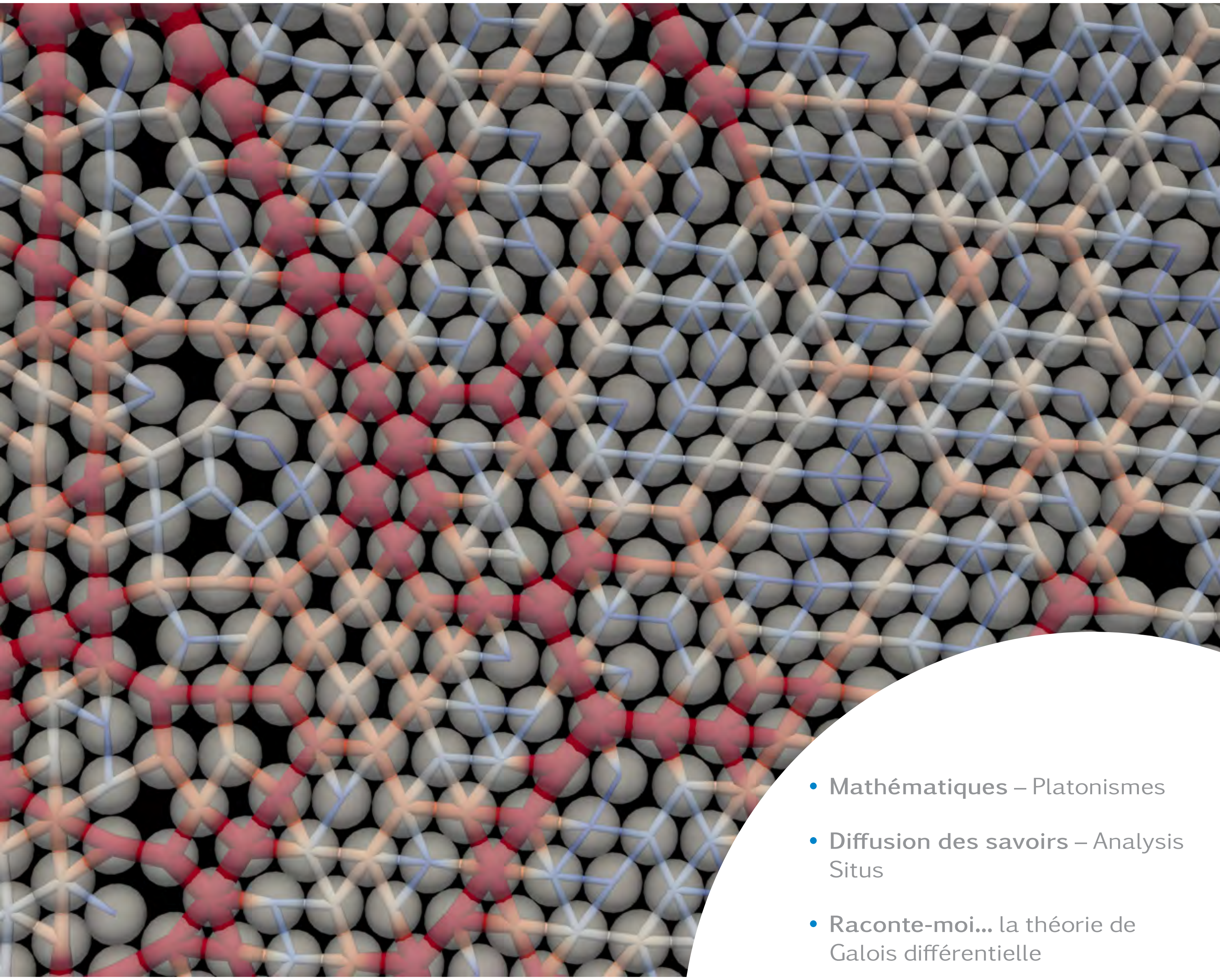
AVRIL 2017 – N° 152

la Gazette des Mathématiciens



- **Mathématiques** – Platonismes
- **Diffusion des savoirs** – Analysis Situs
- **Raconte-moi...** la théorie de Galois différentielle
- **Tribune libre** – Présidentielle : n'oublions pas la science !

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. La figure intitulée « Réseau de forces dans une foule en mouvement » représente des personnes (identifiées à des disques) fortement congestionnées cherchant à évacuer une salle (vers la gauche de l'image). Les arêtes du réseau représentent les interactions entre les personnes, la couleur et la largeur de chaque arête encodent l'intensité de la force d'interaction entre les deux individus impliqués dans le contact. Le champ de ces forces est solution d'un problème de Poisson discret posé sur le graphe dual des contacts. (crédit : Sylvain Faure et Bertrand Maury).

Nº 152

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

C'est par ces ravissants vers que s'ouvrent *Les Contrerimes* de Paul-Jean Toulet :

> *Avril, dont l'odeur nous augure*
> *Le renaissant plaisir,*
> *Tu découvres de mon désir*
> *La secrète figure.*

Et ni de désir, ni de plaisir, ce volet printanier de la *Gazette* ne saurait manquer.

Désir irrépressible, tout d'abord, de saluer le remarquable succès d'Yves Meyer et à travers lui, une fois encore, de l'école mathématique française. Le père fondateur de la théorie des ondelettes vient en effet de se voir décerner le très prestigieux prix Abel, mettant ainsi dans l'embarras une bonne partie de la presse nationale qui se demande désormais avec effroi lequel du prix Abel ou de la médaille Fields doit être réellement considéré comme le prix Nobel des mathématiques.

Plaisir ensuite de te faire découvrir des mathématiques dans toute leur diversité. Du microspopique au macroscopique, Bertand Maury égraine les foules. Théorie de l'information, entropie, codes correcteurs d'erreurs, Alain Chenciner rend hommage à Claude Shannon. Marco Panza, historien et philosophe des mathématiques de son état, te conduira à travers les arcanes du platonisme ou plutôt, devrais-je dire, des platonismes. Quant à Julien Roques, il te racontera la théorie de Galois différentielle.

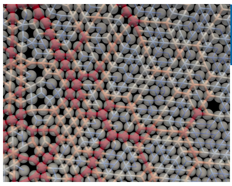
La rubrique *Diffusion des savoirs* se fait l'écho d'une initiative nouvelle et jubilatoire d'Henri Paul de Saint Gervais. Pas d'inquiétude, il ne s'agit pas d'un éminent mathématicien dont tu ignorerais le nom. Plutôt d'un messager. Avec son *Analysis Situs*, Henri Paul met à ta disposition un nouveau média (d'aucuns oseraient parler d'un analysis situs webus) permettant de découvrir l'œuvre immense d'Henri Poincaré dans ce domaine. À grand renfort d'images, de vidéos et d'hypertexte, une véritable immersion dans la topologie algébrique des variétés !

Dans la rubrique *Parité*, Mathieu Romagny attire ton attention sur une étude récente, l'une des premières de cette ampleur, concernant l'impact du genre sur les profils de publication en mathématiques.

Enfin, ce printemps est également marqué par l'élection présidentielle. Des candidats (se) débattent tant bien que mal, certains sont pris à partie, tandis que d'autres en fuient un, mais une chose est sûre : la science demeure étrangement absente. Afin de remédier à ce triste constat, notre chère société savante, épaulée de quelques sociétés amies (SFP, SIF, SMAI), signe une tribune à l'attention des candidats.

En te souhaitant une agréable lecture,

Boris Adamczewski



N° 152

Sommaire

la Gazette des Mathématiciens

Société Mathématique de France

N° 152

Mot du président

Chères et chers collègues,

Ce mois de mars 2017 est incontestablement marqué par le prix Abel obtenu par Yves Meyer, qui récompense « sa contribution majeure dans le développement de la théorie mathématique des ondelettes », mais plus généralement un mathématicien dont le parcours est à maints titres exceptionnel. Tout d'abord, au cours de sa carrière, il a choisi de s'intéresser à différents domaines mathématiques (théorie des nombres, analyse harmonique, ondelettes, équations aux dérivées partielles, traitement d'image, problème d'échantillonnage de signaux...). Chaque fois, il a imprimé sa marque et obtenu des résultats majeurs et profonds, aux conséquences dépassant souvent le domaine concerné. Une autre caractéristique d'Yves est sa capacité unique à travailler avec et faire interagir des scientifiques entre eux (pas seulement des mathématiciens!) : chimistes, physiciens, experts en signal et en image, et bien d'autres! Son œuvre et tous ses accomplissements, déjà récompensés par le prix Gauss en 2010, démontrent que la distinction entre mathématiques « pures » et mathématiques « appliquées » est aujourd'hui dépassée. Enfin, Yves Meyer a toujours été passionné par l'enseignement et la transmission des connaissances, comme en atteste le nombre impressionnant d'étudiant(e)s qu'il a accompagné(e)s, ainsi que son enthousiasme permanent lors des séminaires auxquels il participe (comme le SCAM à Créteil!). La SMF se réjouit donc que l'Académie norvégienne ait récompensé ce scientifique hors normes, et à travers lui l'école française de mathématiques.

Notamment grâce à ce prix Abel, les mathématiques sont très présentes dans les médias. Cela ne compense malheureusement pas l'absence manifeste des sciences dans les débats présidentiels. Auprès de ces mêmes médias et du grand public, les nombreuses récompenses obtenues par les mathématiciennes et mathématiciens français (médailles Fields, prix Abel, médaille d'or CNRS, prix EMS) peuvent également contraster avec les résultats très décevants obtenus par les élèves français aux tests internationaux.

Pour tenter de remettre les sciences au cœur des discussions, à l'initiative de la SMF, une tribune a été publiée dans le journal *Le Monde* le mercredi

22 mars. Dans cet article, écrit en collaboration avec la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, la Société Informatique de France et la Société Française de Physique, nous soulevons les questions essentielles liées à l'enseignement des sciences et la recherche, et cherchons à interpeller les candidat(e)s à l'élection présidentielle sur des sujets qui, à tout le moins, sont peu présents dans les débats, ou alors abordés seulement superficiellement. Nous avons reçu plusieurs messages très positifs (venant d'autres associations, de journalistes...) mais attendons encore les réactions des candidats. La version longue de la tribune est publiée dans ce fascicule, et nous sommes à l'écoute de vos réactions, que vous pouvez bien sûr envoyer à la *Gazette*.

Les 6 et 7 mars derniers, des représentants de l'IMU sont venus à Paris pour découvrir et évaluer la candidature de la France à l'organisation de l'ICM2022. Cette visite s'est très bien passée, la France présentant un projet ambitieux et ouvert au monde. Ceci a été rendu possible par le travail considérable effectué depuis presque 5 ans par le comité d'organisation, présidé par François Loeser. Nous attendons maintenant avec impatience les recommandations de l'IMU qui arriveront en avril (peut-être les résultats seront-ils connus quand vous lirez ces lignes).

Je poursuis ce mot avec d'autres activités récentes de la SMF.

Les 10 sujets du concours SMF junior sont prêts ! Je vous rappelle que ce concours, destiné à tous les étudiants au plus en master, se déroule sur 10 jours du 2 au 11 mai prochains. L'objectif est de faire travailler les étudiant(e)s par équipe sur des sujets variés (algèbre, analyse, géométrie, modélisation, probabilités...), et donc de donner un avant-goût de la recherche en travaillant en équipe sur un temps relativement long. Pour faire de cette initiative un succès, je vous remercie de bien vouloir transmettre cette information à vos étudiants et responsables de master, en incitant toutes et tous à participer. Il y aura de nombreux prix, notamment pour les contributions originales, qui seront remis lors d'une cérémonie à l'IHP le 10 juin 2017. Consultez notre site web pour obtenir toutes les informations, l'inscription pour le concours est ouverte et extrêmement simple !

Depuis ce mois de janvier, tous les articles des *Bulletins* et des *Mémoires* de la SMF possèdent un DOI [1], et bientôt seront aussi concernés les articles des *Annales de l'ÉNS*. Ce travail fait partie de la volonté de modernisation de la SMF, qui se manifestera d'autres façons dans un futur proche. Par exemple, notre nouveau site web (accompagné d'une restructuration de notre système informatique) sera mis en ligne avant la fin de l'année 2017. Cette refonte demande un investissement important de la SMF et surtout de

1. Digital Object Identifier.

ses personnels, ainsi que du Bureau de la SMF. Nous espérons que tous ces efforts trouveront leur récompense dans la satisfaction que vous aurez à consulter régulièrement ce site.

Mais vous n'êtes pas obligés d'attendre cette rénovation pour consulter le site actuel, les actualités, nos dossiers... ainsi que notre compte Twitter qui compte depuis la semaine passée 1500 abonnés et a publié plus de 1000 tweets (mais pas plus d'un par jour !).

Enfin, je vous rappelle que l'adhésion à la SMF (et/ou son renouvellement) est toujours possible ! Nos nombreuses actions pour la communauté sont rendues possibles grâce à l'implication des personnels et des bénévoles, et grâce au soutien que vous pourrez nous apporter dans l'organisation, l'animation et la participation à nos événements. N'oubliez donc pas d'adhérer en 2017 : cela nous aide évidemment à fonctionner, cela conforte surtout notre engagement collectif.

Je vous souhaite un agréable printemps 2017.

Le 2 avril 2017

Stéphane Seuret, président de la SMF

Grains de foules

• B. Maury

Nous nous proposons de montrer comment l'élaboration de modèles de mouvements de foules (destinés à décrire par exemple l'évacuation d'un bâtiment) conduit à des questions délicates sur les liens entre la description microscopique (et nativement lagrangienne) de systèmes de particules de type sphères dures et la description à l'échelle macroscopique de tels systèmes. Nous nous intéresserons plus précisément à la description lagrangienne du mouvement d'une collection de disques rigides sans recouvrement, en détaillant la prise en compte de cette contrainte de non-recouvrement dans l'évolution de la population. Le pendant macroscopique de cette situation consiste à considérer un continuum de matière (ou de « gens » dans le cas de foules) décrit par une densité assujettie à rester en dessous d'une valeur maximale prescrite. À l'échelle macroscopique, le cadre du transport optimal, et la métrique de Wasserstein associée, permettent de conserver au moins partiellement le caractère lagrangien de la description et de transposer au niveau macroscopique des résultats classiques portant sur le système microscopique. Mais cette transposition, si elle permet d'établir un dictionnaire formel assez complet entre les deux niveaux de description, cache un certain nombre de différences profondes, dont certaines ont des conséquences importantes sur le comportement des modèles.

1. Back to seventies

Le processus de raffle, introduit par J.J. Moreau [4] il y a une quarantaine d'années, peut s'exprimer de façon très générale comme suit : on considère une famille $(K(t))_t$ de sous-ensembles d'un espace métrique, et l'on cherche à caractériser le mouvement $t \mapsto q(t)$ d'un point obéissant aux principes suivants :

1. bouger le moins possible,
2. appartenir à $K(t)$ à chaque instant.

Dans le cas étudié initialement par Moreau d'un espace de Hilbert H et d'une famille de convexes fermés, cette évolution prend la forme d'une inclusion différentielle, que l'on peut obtenir à partir d'une version discrétisée en temps du principe d'évolution (algorithme dit de rattrapage, ou *catching-up*). On se donne un pas de temps $\tau > 0$, on note q^n une approximation de la position au temps $n\tau$, et l'on construit une suite de positions successives en projetant la position courante sur l'ensemble admissible au pas de temps suivant :

$$q^{n+1} = P_{K((n+1)\tau)}(q^n).$$

La notion de sous-différentiel, qui généralise la notion de gradient pour des fonctions convexes non lisses, permet d'exprimer cette identité sous la forme d'une inclusion. Pour toute fonction convexe Ψ de H dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit

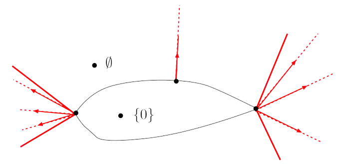
$$\partial\Psi(q) = \{v,\ \Psi(q) + v \cdot h \leqslant \Psi(q+h)\ \ \forall h\}. \qquad (1)$$

Dans le cas où Ψ est la fonction indicatrice I_K d'un convexe fermé K (qui vaut 0 en tout point dans K, $+\infty$ à l'extérieur), le sous-différentiel s'identifie au cône normal sortant à K pour tout point de la frontière, qui peut s'écrire

$$\partial I_K(q) = \{q' - q\,,\ \ q = P_K(q')\}.$$

La figure 1 représente ce cône normal sortant dans différentes situations : lorsque le point est intérieur, l'ensemble est réduit au singleton nul ; il est vide pour tout point n'appartenant pas à K ; pour tout point de la frontière on obtient la demi-droite des directions normales sortantes dans le cas lisse, et un cône fermé non trivial dans le cas d'un point anguleux.

Figure 1 – Cône normal sortant d'un convexe fermé



On vérifie ainsi immédiatement que l'étape de projection ci-dessus est équivalente à la condition

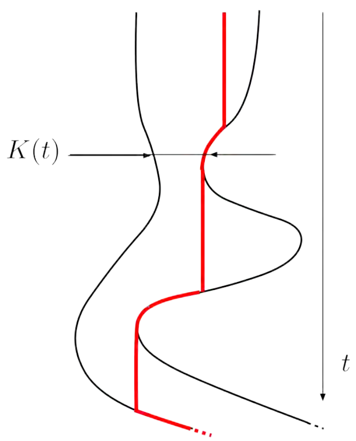
$$\frac{q^{n+1}-q^n}{\tau} \in -\partial I_{K((n+1)\tau}(q^{n+1}),$$

qui peut s'interpréter comme la discrétisation en temps (implicite) de l'inclusion

$$\frac{dq}{dt} \in -\partial I_{K(t)}(q).$$

C'est sous cette forme que le processus de raffle a été initialement introduit. Une interprétation imagée, proposée par Moreau lui-même, est la suivante : on identifie le temps à la variable verticale de l'espace physique, on considère que $K(t)$ correspond à la section variable d'un conduit qui s'enfonce dans le sol, et $q(t)$ représente la position (projetée sur le plan horizontal) d'un filet d'eau qui s'écoule sous l'action de la gravité, en glissant selon la ligne de plus grande pente lorsqu'il se trouve en contact avec les parois latérales (voir figure 2). Dans le cas où H est un espace de Hilbert général, un petit effort d'imagination permettra de se représenter la famille $(K(t))$ comme un puits de spéléologie creusé dans $H \times \mathbb{R}^+$, et la trajectoire recherchée comme un filet d'eau issu d'une source ponctuelle à l'entrée du puits, en $(q(0), 0)$, s'écoulant sous l'action de la « gravité » $(0_H, 1)$.

Figure 2 – Chute d'un filet d'eau



De nombreux travaux ont étendu cette démarche à des situations plus générales. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à la possibilité de supposer le point q animé d'un mouvement spontané décrit par une vitesse U. L'algorithme de rattrapage s'adapte immédiatement à cette nouvelle situation dynamique : à chaque étape une première position est prédite sans tenir compte des contraintes, puis projetée sur l'ensemble admissible

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{q}^{n+1} & = & q^n + \tau U^n \\ q^{n+1} & = & P_{K((n+1)\tau)}\left(\tilde{q}^{n+1}\right) \end{array}\right. \tag{2}$$

C'est à cette généralisation que nous nous intéresserons par la suite.

2. Description microscopique de foules

De façon assez inattendue ce cadre général, motivé initialement par la modélisation de matériaux plastiques, et développé ensuite comme sujet de recherche académique à part entière, s'applique assez directement à la modélisation de mouvements de foules fortement congestionnées. Considérons un ensemble de N individus représentés par des disques rigides de rayon r, centrés en des points q_1, ..., q_N du plan. Chaque individu est supposé animé d'une vitesse spontanée U_i. Dans le cas de l'évacuation d'un bâtiment, on prendra par exemple pour U_i la vitesse que souhaiterait avoir l'individu i cherchant à sortir au plus vite, s'il était seul. La congestion est prise en compte en interdisant les chevauchements : l'espace des configurations admissibles est

$$K = \left\{ q \in \mathbb{R}^{2N}, \ |q_j - q_i| \geqslant 2r \ \ \forall i \neq j \right\}.$$

Nous n'écrirons pas explicitement les contraintes liées aux murs, obstacles, etc. pour alléger les notations, mais il est bien sûr possible d'inclure ce type de contraintes dans K, y compris dans le cas d'une configuration en mouvement (porte qui s'ouvre ou se ferme, ou véhicule évoluant au sein d'une foule dense, par exemple).

L'application du cadre de Moreau à cette situation n'est pas immédiate, car K n'est pas convexe (si l'on exclut la situation hitchcockienne d'une personne unique dans une pièce convexe close, situation d'un intérêt pratique limité). Mais l'algorithme constructif présenté précédemment ne nécessite qu'une projection bien définie dans un voisinage de K. L'approche s'étend à des ensembles pour lesquels cette projection est localement bien définie, ensembles appelés prox-réguliers (voir [7]). On peut vérifier dans le cas présent que tout point q de $\mathbb{R}^{2N}$ à distance inférieure à un certain $\eta > 0$ de K se projette de façon unique sur K. Prenons l'exemple de 2 disques de rayon r, de centres q_1 et q_2 dans $\mathbb{R}^2$. Toute configuration avec recouvrement se projette de façon unique sur l'ensemble admissible (sans recouvrement), tant que les centres ne sont pas confondus. Une configuration avec les centres confondus est à distance $\sqrt{2}r$ de l'ensemble admissible K. Si l'on restreint la projection à l'ensemble K_η des configurations dont la distance à K est inférieure à $\eta < \sqrt{2}r$ (on se tient à distance des configurations à centres confondus), alors la projection est bien définie, il s'agit bien d'un ensemble prox-régulier. On notera que la constante de Lipschitz de cette projection tend vers $+\infty$ quand η tend vers $\sqrt{2}r$. La démonstration est plus technique lorsque le nombre de disques est quelconque, mais on peut établir ce caractère de prox-régularité en toute généralité ([3]).

L'algorithme est donc bien défini pour τ suffisamment petit, et l'on peut montrer (voir [3]) que la suite des trajectoires discrètes converge vers une solution d'une équation de type

$$\frac{dq}{dt} \in -\partial I_K(q) + U, \tag{3}$$

au prix d'une extension de la notion de sous-différentiel à des fonctions indicatrices d'ensembles non convexes. On parle alors de sous-différentiel de Fréchet, en demandant que la condition d'inégalité dans (1) soit vérifiée à un $o(h)$ près. Précisons que le η intervenant dans la condition de prox-régularité (épaisseur du voisinage de K dans lequel la projection est bien définie) dégénère, c'est-à-dire tend vers 0, lorsque le nombre de personnes N tend vers l'infini et leur taille r tend vers 0.

3. Modélisation macroscopique

Les modèles macroscopiques de mouvements de foule reposent sur une densité de personnes par unité de surface, que nous noterons $\rho(x,t)$. La description est donc eulérienne, contrairement au modèle microscopique précédent qui est lagrangien [1]. L'ingrédient central, comme dans le cas microscopique, est la donnée d'un champ de vitesse souhaitée U. Du fait du caractère eulérien de la description, nous nous limiterons ici au cas de personnes interchangeables en termes de comportement : le champ U ne dépend que de la position de la personne. Dans le cas qui nous intéresse de l'évacuation d'une salle (identifiée à un domaine Ω du plan), ce champ U pointe vers une sortie, et tend donc à concentrer les personnes. Nous considérerons que la densité ne peut dépasser une certaine valeur, que nous prendrons égale à 1. On suppose de plus la masse totale de personnes égale à 1, de telle sorte que, pour tout t, $\rho(\cdot,t)$ vit dans $\mathcal{P}(\Omega)$, espace des mesures de probabilité sur Ω. L'ensemble des densités admissibles est alors (en identifiant la mesure et sa densité associée)

$$\widehat{K} = \{\rho \in \mathcal{P}(\Omega)\,,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad p.p.\}. \tag{4}$$

L'équivalent macroscopique du modèle décrit dans la section précédente s'écrit de façon naturelle en choisissant une vitesse effective de la foule qui minimise la distance (au sens L^2) au champ de vitesse souhaitée, en préservant la contrainte d'appartenance à $\widehat{K}$. Informellement, cette vitesse ne doit donc pas augmenter la densité lorsque cette dernière est déjà maximale, i.e. la divergence du champ de vitesse doit être positive sur la zone saturée (zone sur laquelle on a $\rho = 1$). Une prise en compte par dualité [2] de cette contrainte conduit à un système introduit par Darcy au milieu du XIXe siècle dans le contexte très différent des écoulements fluides au travers de milieux poreux, de type assemblages statiques de grains rigides.

Il serait trompeur d'attribuer cette analogie à la prise en compte, dans le modèle de Darcy, de cette « matrice » de grains rigides, qui évoque les assemblages introduits précédemment dans la description du modèle microscopique : le système initialement introduit par Darcy décrit à l'échelle mésoscopique l'écoulement d'un fluide visqueux au travers des *pores* du réseau de grains, écoulement qui se produit dans le *complémentaire* de la phase solide ; il ne décrit aucunement le mouvement de

1. La description *lagrangienne* repose sur un suivi des entités dans leur mouvement, ainsi $t \longmapsto q_i(t)$ correspond à la position de l'individu i au cours du temps. A contrario, la description *eulérienne* (qui fonde l'écriture des équations aux dérivées partielles classiques), est basée sur l'observation de l'évolution en temps d'une quantité estimée en un point fixe de l'espace, comme $t \longmapsto \rho(x,t)$ pour x fixé.

2. Précisons, pour le lecteur peu familier avec ces notions, le principe général de l'approche dans le cas plus simple de contraintes d'égalité. Si u est minimiseur d'une fonctionnelle régulière J définie sur un espace de Hilbert, sous la contrainte linéaire $Bu = 0$, alors la condition d'optimalité implique $\nabla J \in (\ker B)^\perp$, d'où (si B est à image fermée), l'existence d'un p dans l'image de B tel que $\nabla J + B^\star p = 0$. Dans le cas qui nous intéresse ici la fonctionnelle J est simplement $\frac{1}{2}|v-U|^2$, et B est l'opérateur $v \mapsto -\nabla\cdot v$.

l'assemblage de grains, qui reste statique.

Ce système s'écrit ici

$$\left| \begin{array}{rcl} u+\nabla p & = & U \\ -\nabla\cdot u & \leqslant & 0 \end{array} \right. \qquad (5)$$

dans la zone saturée $\omega \subset \Omega$. La pression ci-dessus doit être positive (ce qui traduit le fait que les forces d'interactions ne peuvent être que répulsives), et nulle sur le bord de la zone saturée. Malgré la petite difficulté supplémentaire liée au fait que la contrainte est unilatérale (contrainte d'inégalité sur la divergence), on peut montrer sans difficulté le caractère bien posé de ce problème, qui définit sans ambiguïté la vitesse u à chaque instant comme projection de la vitesse souhaitée sur le cône des vitesses admissibles. Le problème d'évolution associé prend la forme d'une équation de conservation qui exprime le transport de la densité par la vitesse effective

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho u(\rho))=0,$$

mais la dépendance $\rho\mapsto u(\rho)$, en plus d'être non locale, est non lisse. En effet le modèle considéré, qui fait abstraction de toute tendance sociale à ne pas s'approcher de ses voisins, appréhende la foule comme un gaz sans pression : tant que la contrainte n'est pas saturée, i.e. tant que les gens ne sont pas en contact les uns avec les autres, ils n'interagissent pas du tout entre eux. En revanche, dès qu'une zone saturée se crée, des interactions non locales apparaissent, au travers de cette zone saturée. Par ailleurs, la régularité native en espace du champ de vitesse est L^2, ce qui exclut une utilisation directe des outils classiques pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution à ce type d'équation.

Montrons que le cadre du transport optimal permet de préserver une part de la description lagrangienne, inhérente au modèle microscopique, et de mettre en place un algorithme constructif du type de (2). Considérons deux mesures de probabilité sur $\overline{\Omega}$, supposées admettre des densités μ et ν. Leur distance de Wasserstein (voir [6, 8]), $W_2(\mu,\nu)$ est définie par

$$W_2(\mu,\nu)^2=\inf_{T_\sharp\mu=\nu}\int_\Omega |T(x)-x|^2\, d\mu(x),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des applications mesurables qui poussent μ vers ν, ce qu'on écrira $T_\sharp\mu=\nu$.

On peut établir un lien immédiat entre la description macroscopique de densités selon cette métrique et la description lagrangienne d'une collection de disques. À toute collection de N disques du plan sans recouvrement on peut associer la fonction caractéristique de l'ensemble associé (réunion des disques), que l'on suppose être de masse 1. Si l'on fait subir aux centres des disques un déplacement δq, on s'est éloigné dans $\mathbb{R}^{2N}$ de la norme euclidienne de δq. On peut vérifier aisément que, si le déplacement n'est pas trop grand, la distance W_2 entre la nouvelle densité et l'ancienne est aussi $|\delta q|$. Le T optimal dans l'expression ci-dessus est de façon évidente l'application qui translate chaque disque vers sa nouvelle position. On notera cependant que cette égalité des distances est invalidée si le déplacement est trop important. On peut alors avoir intérêt à appairer différemment les disques pour optimiser le coût de transport.

L'analogie (pour des petits déplacements) entre la distance euclidienne sur la description lagrangienne suggère une version macroscopique de l'algorithme (2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde\rho^{n+1} & = & (\mathrm{Id}+\tau U)_\sharp\rho^n \\ \rho^{n+1} & = & P_{\widetilde{K}}\left(\tilde\rho^{n+1}\right) \end{array} \right. \qquad (6)$$

où la première étape correspond à un transport de la densité courante par la vitesse souhaitée, la projection de la seconde étape étant entendue au sens de la distance de Wasserstein définie ci-dessus. Cette approche rentre dans le cadre très général des algorithmes de prédiction-correction, utilisés pour la discrétisation en temps de problème d'évolution sous contrainte. On retrouve ainsi le principe du schéma dit de projection pour les équations de Navier-Stokes, basé sur une première étape de prédiction de la vitesse sans prise en compte de l'incompressibilité, puis sur un calcul d'une pression dans une seconde étape, de façon à assurer le caractère conservatif de la nouvelle vitesse.

Dans le cadre microscopique, la projection sur l'ensemble admissible K des configurations de disques rigides sans recouvrement est bien définie dans un petit voisinage. Mais, comme nous l'avons indiqué, la taille de ce voisinage tend vers 0 lorsque le nombre de grains tend vers l'infini (et leur taille vers 0), ce qui laisse craindre des difficultés à définir proprement la projection dans ce contexte macroscopique (qui correspond formellement à la limite d'une infinité de grains infiniment petits). On peut pourtant se convaincre assez aisément qu'*il n'en est rien* : le problème consistant à projeter (pour la distance de Wasserstein) une mesure quelconque sur l'ensemble $\widehat{K}$ des mesures de probabilité admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue majorée par 1, s'avère être un problème bien posé.

Avant d'indiquer les grandes lignes de la démonstration de ce caractère bien posé, permettons-nous deux remarques sur le caractère paradoxal de ce résultat.

1) En premier lieu, dans un espace de Hilbert, la possibilité de définir sans ambiguïté une projection sur un ensemble donné va de pair avec la possibilité de « s'éloigner » de cet ensemble à partir du bord. En particulier, les ensembles sur lesquels la projection est partout bien définie sont les ensembles tels que, pour tout point du bord, on peut faire partir vers l'infini une demi-droite de points qui se projettent sur le point de départ. Les ensembles prox-réguliers évoqués précédemment sont des ensembles dont on peut s'écarter avec l'assurance de revenir sur ses pas par projection, *tant qu'on ne s'éloigne pas trop*. Dans le cas de l'espace de Wasserstein, si l'on considère une mesure admissible ρ qui sature partout la contrainte (fonction caractéristique d'un ensemble mesurable), il est naturel de se demander à quelle distance maximale de $\widehat{K}$ peut se situer une densité qui réaliserait sa distance à $\widehat{K}$ en ρ. Il apparaît immédiatement que cette distance maximale n'est pas minorée. On peut s'en convaincre en considérant, en dimension 1, une densité ρ qui est la somme de fonctions caractéristiques de petits intervalles de taille ε. La mesure la plus éloignée de $\widehat{K}$, tout en réalisant la distance en ρ, est la somme des masses de Dirac pondérées par ε, supportées par les centres des petits segments. On peut vérifier que la distance tend vers 0 avec ε, ce qui montre que $\widehat{K}$ n'est *pas* uniformément η-prox-régulier, aussi petit que soit $\eta > 0$. Une illustration plus parlante encore de cette non prox-régularité est donnée par une densité définie comme fonction caractéristique du complémentaire d'un ouvert dense de mesure petite : cet densité peut être vue comme saturant quasiment tout l'espace disponible, pourtant son support ne contient aucun ouvert, elle n'est donc la projection sur $\widehat{K}$ que d'elle-même. Ce résultat négatif est conforme avec la dégénérescence de la prox-régularité microscopique lorsque la taille des particules tend vers 0. Mais l'espace de Wasserstein se distingue ici très nettement de son cousin hilbertien : malgré les considérations précédentes, nous verrons plus loin que la projection sur $\widehat{K}$ est bien définie de façon unique, bien qu'un point de la frontière n'est (en général) projection d'aucun autre point que lui-même.

2) Une autre différence fondamentale entre la description microscopique lagrangienne-euclidienne et la description macroscopique dans le cadre Wasserstein est plus directement liée à la géométrie de ces espaces. On considère une mesure $\rho \notin \widehat{K}$ (i.e. dont le sup essentiel est strictement supérieur à 1), et deux densités μ_0 et $\mu_1 \in \widehat{K}$ qui réalisent la distance de ρ à $\widehat{K}$. On cherche à montrer qu'elle sont nécessairement confondues. La démarche usuelle, dans ce contexte, consisterait à considérer l'interpolée géodésique (dite de Mc Cann),

$$\mu_t = (\mathrm{Id} + t(T - \mathrm{Id}))_\sharp \mu_0,$$

où T est un transport optimal entre μ_0 et μ_1. Elle permet de construire une courbe de densités entre μ_0 et μ_1, dont on peut vérifier qu'elle est dans $\widehat{K}$. Mais la démarche est une impasse, car la fonctionnelle

$$\mu \longmapsto \frac{1}{2} W_2(\rho, \mu)^2,$$

contrairement au cas hilbertien, n'est *pas* géodésiquement convexe (en dehors de la dimension 1). On peut même vérifier que cette fonctionnelle n'est λ-convexe pour aucun λ, ce qui signifie qu'aucun ajout de fonctionnelle lisse convexe ne suffirait à la rendre convexe. Le contre-exemple proposé dans [1], page 162, repose sur des mesures qui sont sommes de 2 masses de Dirac. La fonction ci-dessus, suivie le long d'une géodésique, présente un point singulier (dérivées différentes à droite et à gauche en ce point), et l'on peut vérifier que ce phénomène correspond à une permutation de l'appariement entre les masses.

Une astuce permet de corriger le problème décrit ci-dessus, en considérant un autre type de géodésiques, dites généralisées, reposant sur une interpolation des applications de transport : si l'on note T_i un transport optimal de ρ vers μ_i, cette interpolation est définie par

$$\mu_t = ((1-t)T_0 + tT_1)_\sharp \rho.$$

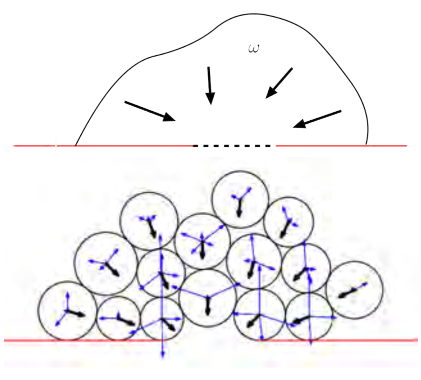
Dans le cas de l'espace plat (Hilbertien), une telle interpolée se confond avec la première, mais elle est différente dans l'espace de Wasserstein, et l'on peut vérifier que la fonction $W_2(\rho, \cdot)^2$ est strictement convexe le long de cette courbe, ce qui assure l'unicité de la projection par l'argument de contradiction classique.

Le caractère bien posé de cette projection permet de donner un sens précis à l'algorithme (2), sans limitation sur le pas de temps (contrairement au cas microscopique), et de construire une suite de trajectoires associées dont on peut montrer, au prix de quelques complications techniques (voir [5]), qu'elles convergent (à sous-suite extraite près), vers une solution du problème macroscopique.

4. Micro ≠ macro

Les considérations précédentes éclairent les analogies et différences entre la description microscopique d'une collection de disques sans chevauchement et son pendant macroscopique dans le cadre du transport optimal. Elles peuvent sembler anecdotiques puisque, finalement, on obtient des résultats théoriques analogues pour les deux modèles. Nous proposons dans la suite de montrer que la différence de nature entre les deux descriptions conduit à des comportements profondément divergents en termes de modélisation. Nous illustrerons cette divergence en nous focalisant sur un opérateur de type laplacien qui est formellement présent dans les deux modèles, sous-jacent à la prise en compte de la contrainte de congestion, mais ce laplacien présente des caractéristiques pathologiques au niveau discret. Comme nous le verrons, ce sont précisément ces caractéristiques pathologiques qui assurent la richesse, et d'une certaine manière la pertinence, du modèle.

Figure 3 – Bouchon macroscopique (haut) et microscopique (bas)



Au niveau macroscopique, le laplacien résulte simplement de l'élimination de la vitesse dans le problème de Darcy (5), qui définit la vitesse effective u des personnes à partir du champ de vitesses souhaitées U. Plus précisément, notons ω la zone saturée (sur laquelle la densité est égale à 1), et considérons la situation d'un champ de vitesses souhaitées qui tend à concentrer les personnes, i.e. $\nabla \cdot U < 0$, sur cette zone saturée. On aura alors saturation de la contrainte de divergence positive sur ω, et l'on obtient un problème de Poisson pour la pression :

$$-\Delta p = -\nabla \cdot U, \tag{7}$$

avec conditions de Dirichlet homogènes $p = 0$ sur le bord de la zone saturée ω. Ce problème elliptique traduit la présence d'effets non locaux au travers de la zone saturée, de la même manière que dans les fluides incompressibles l'information se propage à vitesse infinie. Cette forme particulière prise par le problème en pression permet de mettre simplement en évidence une propriété du modèle qui est cruciale sur le plan de la modélisation de phénomènes d'évacuation. Considérons l'évacuation d'une salle convexe au travers d'une porte unique. Le caractère concentrant de la vitesse va augmenter la densité dans les premiers instants de l'évolution, jusqu'à former une zone saturée immédiatement en amont de la sortie. Sur cette zone saturée, la pression est solution de l'équation de Poisson ci-dessus, avec un second membre positif, des conditions de Dirichlet homogènes sur la sortie et en arrière de la zone, et des conditions de flux nul (conditions de Neuman homogène) sur les murs latéraux (voir figure 3, haut). On en déduit immédiatement que la pression, positive sur la zone saturée par application du principe du maximum, a une dérivée normale sortante $\partial p/\partial n$ négative sur la porte. La vitesse effective des personnes au niveau de la sortie, qui s'écrit comme la vitesse souhaitée corrigée par le terme $-\partial p/\partial n$, est donc *supérieure* à leur vitesse souhaitée. Selon ce modèle, les personnes sur le point de sortir sont poussées par les personnes derrière elles, de telle sorte que la congestion accélère l'évacuation. Ce comportement est en contradiction avec la réalité observée, en particulier avec l'effet dit de *Capacity Drop* : on observe dans les faits une diminution du flux de sortie lorsque la densité en amont de la sortie dépasse une certaine valeur. Il est possible de corriger ce comportement en limitant le flux au travers de la porte, mais cette modification ne peut qu'être artificielle, et il faut bien reconnaître que ce modèle, dans cette situation particulière, reproduit un effet contraire à celui observé expérimentalement.

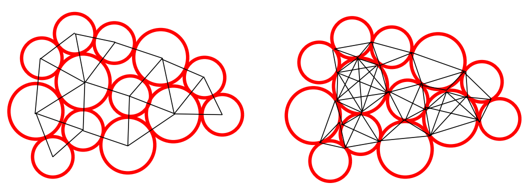
Comme nous allons le voir par une étude plus approfondie du modèle microscopique, ce mauvais comportement du modèle est lié à la description macroscopique elle-même, dont nous avons déjà évoqué certaines des propriétés précédemment. Sur le plan microscopique, une formulation particulière de l'équation d'évolution permet en premier lieu de retrouver un problème de type Darcy, très analogue formellement au problème de Darcy classique. Le problème (3) peut se reformuler de façon mixte, en introduisant une paramétrisation explicite du sous-différentiel impliqué. Les contraintes définissant l'ensemble admissible K portent sur les distances entre les centres, qui doivent rester supérieures au double du rayon. Les mouvements admissibles sont donc ceux qui augmentent au sens large toutes les distances entre grains déjà en contact. On en déduit assez directement une expression explicite du sous-différentiel

$$\partial I_K(q) = \left\{ -\sum_{i\sim j} p_{ij} G_{ij}\,,\;\; p_{ij} \geqslant 0 \right\},$$

où G_{ij} est le gradient de la distance $|q_j - q_i|$. Si l'on note p le vecteur des pressions relatives aux couples de particules en contact, et B la matrice dont chaque ligne exprime une contrainte sur la vitesse relative de deux particules en contact, c'est à dire $-G_{ij}\cdot u \leqslant 0$, la matrice transposée $B^\star$ encode la somme ci-dessus. On aboutit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u + B^\star p & = & U, \\ Bu & \leqslant & 0, \end{array} \right. \tag{8}$$

Figure 4 – Réseaux primal et dual



avec $p \geqslant 0$ (toutes les pressions d'interaction sont positives : elles correspondent à des forces de répulsion entre personnes en contact). La formulation mixte qui relie la vitesse effective des gens à leur vitesse souhaitée prend ainsi la forme du problème de Darcy (5), où B est la version discrète de l'opérateur de divergence (plus précisément de son opposé). Poursuivons l'analogie avec le problème macroscopique en considérant une situation fortement congestionnée où les vitesses souhaitées tendent à pousser les gens les uns contre les autres, i.e. $G_{ij}\cdot U < 0$ (ce qui correspond au cas d'une évacuation au travers d'une porte étroite vers laquelle tous les individus convergent). Si l'on considère l'ensemble des couples (i,j) de personnes en contact actif (avec une pression d'interaction strictement positive), le principe de complémentarité classique pour ces problèmes de minimisation sous contrainte implique que la contrainte est saturée pour chacun de ces couples, c'est-à-dire que $Bu = 0$. On peut alors, comme dans le cadre macro, éliminer la vitesse pour obtenir un problème de Poisson discret, qui est le pendant microscopique de (7) :

$$BB^\star p = BU. \tag{9}$$

La matrice $BB^\star$ peut être vue comme un laplacien discret associé à la configuration courante, qui agit sur les sommets du graphe *dual* associé au réseau de grains. C'est un graphe dont les sommets sont les points de contact entre les grains (représenté à droite de la figure 4); on notera qu'il est génériquement non planaire, contrairement au graphe primal des contacts (dont les sommets sont les centres des grains), qui est lui nativement planaire. La figure 5 présente un champ de pression calculé au cours de l'évolution d'une collection d'individus-grains évacuant une salle. La pression étant définie sur le graphe dual, elle est représentée sur la figure au niveau de chaque arête reliant deux personnes en contact (l'épaisseur de l'arête est proportionnelle à cette pression).

La matrice $BB^\star$ est le pendant discret du laplacien macroscopique mais présente un certain nombre de caractéristiques propres au cas microscopique.

1. En dehors de situations très structurées comme les réseaux périodiques carrés ou triangulaires, elle ne s'annule pas contre les champ de pression constants.
2. Dans les situations fortement congestionnées (on pourra penser à un réseau triangulaire de grains de même taille), le nombre de points de contact peut devenir (très) supérieur au nombre de degrés de liberté ($2N$). La matrice $B^\star$ est alors singulière, et admet un noyau de modes parasites en pression. Une conséquence en termes de modélisation est que, dans une telle situation, on ne peut pas inférer les forces d'interaction entre personnes à partir de la simple connaissance de la configuration et des vitesses souhaitées.
3. L'opérateur $BB^\star$ ne vérifie pas le principe du maximum. On peut plus précisément vérifier simplement que, si la matrice est à diagonale dominante, et de termes diagonaux positifs, certains termes extra-diagonaux sont

eux-même positifs (il ne s'agit pas de ce que les numériciens appellent une M-matrice).

L'absence de principe du maximum pour cet opérateur a une conséquence essentielle en termes de modélisation. Le principe du maximum vérifié par le laplacien standard nous avait permis de montrer au niveau macroscopique que, dans le cas d'une évacuation congestionnée, les gens sortent toujours *plus vite* qu'ils ne le souhaiteraient. Ce raisonnement n'est plus valide pour le modèle microscopique. De fait, on peut vérifier par le calcul numérique que les individus au niveau de la sortie avancent en général moins vite qu'ils ne le souhaiteraient, ce qui est conforme à la réalité. En outre, ce modèle microscopique peut donner lieu à des configurations complètement bloquées, bouchons statiques comme celui représenté sur la figure 3 (bas). Sur cette figure, les flèches noires représentent les vitesses souhaitées, et les flèches bleues les corrections induites par les forces de contact, de telle sorte que la vitesse résultante

$$u = U - B^\star p$$

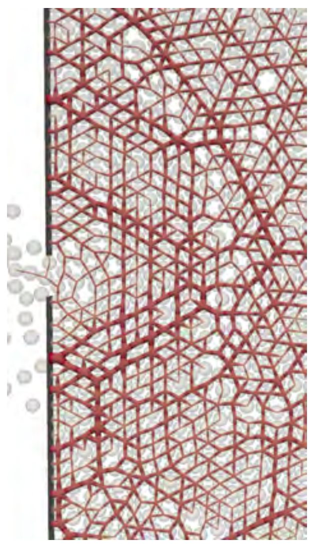
est exactement nulle en tout point. On peut vérifier (voir [2]) que ce bouchon est stable, et plus précisément qu'il est stabilisé par les personnes en amont qui continuent à pousser vers la sortie. On retrouve le principe architectural de l'assemblage de claveaux sans ciment (appelé *arc léger*), qui est stabilisé par le poids même des objets le constituant. Les remarques précédentes mettent en évidence le caractère essentiellement microscopique de cet effet, qui repose sur une collection d'objets indéformables de taille finie.

5. Remarques en conclusion

Nous espérons avoir montré comment le cadre du transport optimal et de la distance de Wasserstein permet de donner un cadre mathématique sain à des problèmes d'évolution non lisses portant sur de la matière en mouvement, en s'affranchissant de la description purement eulérienne sur laquelle se fondent les équations aux dérivées partielles. Ce cadre reproduit une part de la description lagrangienne qui est naturelle pour les systèmes microscopiques de particules, et permet de transposer certains outils existants au cas macroscopique. Mais ce caractère lagrangien n'est pas totalement respecté : la distance de Wasserstein est le pendant, pour les mesures, de la distance euclidienne pour les systèmes de particules *modulo les permutations*, ce qui induit des propriétés géométriques paradoxales au premier abord de l'espace de Wasserstein.

En termes de modélisation, la grande rigidité de la description microscopique, fondée sur des collections de sphères dures, s'oppose à la fluidité de la description macroscopique, qui autorise les déformations conservatives locales, entraînant une différence profonde de comportement des deux modèles. Il n'existe pas à notre connaissance de cadre macroscopique permettant de retrouver la richesse de la description microscopique pour les régimes fortement congestionnés. Un tel cadre ne saurait être fondé sur la seule prise en compte d'une densité locale, insuffisante à encoder la complexité des arrangements locaux entre grains, et l'élaboration de modèles macroscopiques adaptés aux collections de sphères dures au voisinage de la densité maximale est un domaine encore largement ouvert.

Figure 5 – Pression granulaire



© S. Faure

Références

[1] L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savare. *Gradient Flows: In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures.* Springer Science & Business Media, 29 oct. 2008. 333 p.

[2] S. Faure et B. Maury. « Crowd Motion from the Granular Standpoint ». *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **25** (03 2015), p. 463–493.

[3] B. Maury et J. Venel. « A Discrete Contact Model for Crowd Motion ». *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* **45**, nº 1 (2011), p. 145–168.

[4] J. J. Moreau. « Evolution Problem Associated with a Moving Convex Set in a Hilbert Space ». *Journal of Differential Equations* **26**, nº 3 (1er déc. 1977), p. 347–374.

[5] B. M.-A. Roudneff-Chupin-F et S.-J. Venel. « Handling Congestion in Crowd Motion Models ». *Journal: Net. Het. Media* **6**, nº 3 (2011), p. 485–519.

[6] F. Santambrogio. « Optimal Transport for Applied Mathematicians ». *Birkäuser, NY* (2015).

[7] L. Thibault. « Sweeping Process with Regular and Nonregular Sets ». *Journal of Differential Equations* **193**, nº 1 (2003), p. 1–26.

[8] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Soc., 2003.

Bertrand Maury

Université Paris-Sud

Bertrand.Maury@math.u-psud.fr

Après une thèse industrielle (Saint-Gobain Recherche) et un Post-Doc au Texas, Bertrand Maury a rejoint l'université Pierre et Marie Curie comme maître de conférences en 1997. Il est actuellement professeur au laboratoire de mathématiques d'Orsay, université Paris-Sud, et à l'École normale supérieure de Paris. Ses travaux portent sur le développement de méthodes numériques en mécaniques des fluides et des milieux granulaires, ainsi que sur la modélisation en sciences du vivant (système respiratoire et mouvements collectifs d'entités actives principalement). Il a été conférencier invité au Congrès Européen de Mathématiques en 2016, pour présenter ses travaux sur l'application d'outils de transport optimal à la modélisation de mouvements de foules.

L'auteur remercie chaleureusement I. Hartarski, J. Le Rousseau, et R. Tessera, pour leurs suggestions.

La force d'une idée simple

Hommage à Claude SHANNON à l'occasion du centenaire de sa naissance

• A. CHENCINER

De nombreuses fautes de frappe n'empêchent pas de reconnaître sans ambiguïté un texte pourvu que la forme altérée ressemble plus au texte initial qu'à tout autre texte admissible. Jointe à une utilisation systématique de la *loi des grands nombres* qui implique la *propriété d'équipartition asymptotique* (AEP), cette simple remarque est à la base de la découverte par Claude Shannon de la limite $H < C$ aux performances de tout *code correcteur d'erreurs* permettant une transmission fiable d'information par un canal « bruité » (i.e. « faisant des erreurs ») ainsi que de l'existence d'un code permettant d'approcher arbitrairement près de cette limite. Toutes deux de nature probabiliste, l'*entropie* H d'une source de messages et la *capacité* C d'un canal de transmission sont définies par Shannon dans l'article [14] qu'il publie en 1948 dans la revue des « Bell labs », l'année même où, dans les mêmes Bell labs, John Bardeen, Walter Brattain et William Shockley font la première démonstration du fonctionnement d'un transistor. Ainsi, des deux découvertes simultanées dont est né le monde d'information dans lequel nous vivons, l'une est de pure mathématique et même de la pire espèce, un théorème d'existence !

Les inventeurs du langage « Morse » avaient déjà compris l'intérêt qu'il y a, pour raccourcir le temps nécessaire à l'envoi d'un message, de représenter chaque lettre par un symbole d'autant plus court que la lettre est fréquente dans le langage utilisé, en l'occurrence l'anglais : E est par exemple représenté par un point alors que Z est représenté par 4 symboles, deux tirets suivis de deux points. C'est avant la lettre une utilisation de l'*entropie* de l'anglais et une illustration de l'idée maîtresse du texte fondamental [14] de Shannon, à savoir que *c'est la structure statistique*[1] *d'un ensemble de messages* et non la considération d'un message isolé et encore moins de son sens (exit toute considération de sémantique) qui va tenir le rôle principal lorsqu'on cherche à transmettre une suite de symboles de façon fiable et efficace. Je laisse aux historiens (voir en particulier [13]) le soin de décider de l'influence exacte sur Shannon, qui d'ailleurs le remercie explicitement dans une note de [14] (partie III, note 4, page 626), des idées de Norbert Wiener sur les *séries temporelles* et les *filtres* développées dans les années quarante mais classifiées et publiées seulement en 1949 dans le livre *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*[2]. Norbert Wiener qui se considérera lui-même comme le co-fondateur de la théorie de l'information, reconnaît cependant l'influence d'Andrei Kolmogorov et en particulier de sa note *Sur l'interpolation et l'extrapolation des suites stationnaires* publiée en 1939 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Ainsi, on ne s'étonnera pas que Kolmogorov, qui au début des années trente avait donné sa forme mathéma-

1. C'est-à-dire la fréquence relative des différents symboles ou des différentes suites de symboles composant un message.
2. *Cybernetics*, qui développe la représentation des phénomènes d'information et de régulation dans l'animal et la machine, paraît en 1948, l'année même de publication de l'article de Shannon.

tique actuelle à la théorie des probabilités et qui au milieu des années cinquante introduira l'entropie métrique d'un système dynamique ([11, 8]), ait été l'un des premiers sinon le premier mathématicien à comprendre l'importance fondamentale du travail de Shannon [3].

Une illustration simple (et même simpliste) d'une telle structure statistique est le jeu de pile ou face : les 26 lettres de l'alphabet sont remplacées par les deux symboles 0 et 1 et l'écriture d'un message de N lettres par celle d'une suite $a_1 a_2 \cdots a_N$ obtenue à partir de N lancers d'une pièce de monnaie en posant que $a_i = 0$ ou 1 suivant qu'au i-ième lancer la pièce est retombée sur pile ou sur face. Si N est assez grand, si la pièce est bien équilibrée et si chaque lancer est indépendant des autres, la *loi des grands nombres* affirme qu'avec une probabilité d'autant plus grande que N est grand, la suite obtenue contiendra approximativement autant de 0 que de 1. Si maintenant la pièce est biaisée, avec les probabilités respectivement p et $q = 1 - p$ de retomber sur pile ou sur face, le rapport entre le nombre de 0 et le nombre de 1 dans la suite obtenue aura, dans les mêmes conditions, de très grandes chances d'être proche de p/q ; plus précisément, le nombre α de 0 et le nombre β de 1 seront de la forme $\alpha = pN + r, \beta = qN - r$ où r est un $o(N)$ lorsque N tend vers l'infini. De telles suites sont dites *typiques*. D'autre part, la probabilité du résultat du i-ième lancer étant indépendante de i, la probabilité d'obtenir α fois 0 et β fois 1 à des positions prescrites au bout de N lancers est $p^\alpha q^\beta$. Les suites typiques produites par un grand nombre N de lancers, celles donc que l'on est presque certain d'obtenir, ont donc toutes à peu près la même probabilité $\Pi^N_{p,q}$ d'être réalisées, probabilité dont le logarithme est de la forme

$$\ln \Pi^N_{p,q} = \ln(p^{pN+r} q^{qN-r}) = N(p \ln p + q \ln q) + o(N).$$

Les suites non typiques ayant une probabilité négligeable dès que N est assez grand, le nombre total $\mathcal{T}^N_{p,q}$ de suites typiques est environ l'inverse de cette probabilité ; autrement dit,

$$\ln \mathcal{T}^N_{p,q} = N(p \ln \frac{1}{p} + q \ln \frac{1}{q}) + o(N).$$

La limite lorsque N tend vers l'infini,

$$H = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \mathcal{T}^N_{p,q} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{\Pi^N_{p,q}} = p \ln \frac{1}{p} + q \ln \frac{1}{q},$$

est l'*entropie de Shannon* [4]. Elle tend vers 0 lorsque le résultat du lancer est certain ($(p, q) = (1, 0)$ ou $(0, 1)$), c'est-à-dire dire si un lancer de la pièce ne nous apporte aucune *information* (i.e. ne nous apprend rien) ; elle est maximale (égale à 1 si les logarithmes sont en base 2) si 0 et 1 sont équiprobables ($(p, q) = (1/2, 1/2)$), auquel cas un lancer de la pièce nous donne une information maximale puisqu'aucun pronostic ne pouvait être fait a priori (voir la figure 7 de [14]). La propriété qui vient d'être mise en évidence, encore appelée *équipartition asymptotique de la probabilité*, est fondamentale. On peut la paraphraser ainsi : dans un jeu de pile ou face sans mémoire où p et q représentent respectivement les probabilités de pile (0) et face (1), sur les 2^N résultats possibles d'une suite de N lancers, seuls environ [5] 2^{NH} *suites typiques* ont une chance non infime d'apparaître ; de plus, ces suites typiques ont chacune approximativement la même probabilité 2^{-NH} d'être obtenue. Si par exemple $p = 0.9$ et donc $q = 0.1$, une suite typique contiendra environ 9 fois plus de 0 que de 1 et l'entropie est proche de 1/2. Le nombre des suites typiques est donc la racine carrée du nombre total de résultats a priori possibles : si $n = 13$, seules environ 90 suites parmi les $2^{13} = 8192$ sont typiques.

Un codage économique de l'ensemble de ces suites attribuera les codes les plus courts aux suites typiques *(il faudra donc environ NH « bits » pour coder une suite (un message) de longueur N)* et des codes quelconques aux autres suites qui, en pratique, pourront être oubliées [6].

Le passage du jeu de pile ou face, c'est-à-dire d'un alphabet de deux lettres 0 et 1 muni d'une loi de probabilité (p, q), où $p \geqslant 0, q \geqslant 0, p+q = 1$, à un alphabet $A = \{A_1, \cdots, A_r\}$ de r lettres muni d'une loi de probabilité $(p_1, \cdots, p_r)$, où $p_1 \geqslant 0, \cdots, p_r \geqslant 0, \sum_{j=1}^r p_j = 1$, est immédiat : l'entropie est alors définie par

$$H(p_1, \cdots, p_r) = \sum_{j=1}^{r} p_j \ln \frac{1}{p_j}.$$

3. ... puis à s'en distinguer en introduisant dans les années 60, en même temps que Solomonov et Chaitin, la *théorie algorithmique de l'information* reposant non sur la structure statistique d'un ensemble d'objets mais sur la longueur minimale d'un programme décrivant un objet donné prise comme caractéristique de l'information que contient ce dernier ([10]).

4. Précisément l'entropie par symbole, mesurée en *bits par symbole*.

5. Rigoureusement, c'est le logarithme de ce nombre qui est « équivalent à NH lorsque N tend vers l'infini. »

6. Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème du codage de source* (Source coding theorem) ou *Théorème du codage en l'absence de bruit* (Noiseless channel coding theorem) ou simplement *Premier théorème de Shannon*. On en trouvera des illustrations dans [12].

Cette fonction H, dont Shannon rappelle que c'est celle même (à la multiplication près par une célèbre constante) du fameux *théorème H* de Boltzmann [7], s'annule dans les cas de certitude (une seule des probabilités p_j égale à 1, les autres égales à 0) et atteint son maximum $\ln r$ en cas d'équiprobabilité ($p_1 = \cdots = p_r = 1/r$).

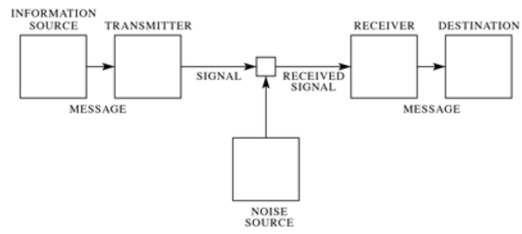
Nous retenons de ceci qu'étant donné un alphabet $A = \{A_1, \cdots, A_r\}$ muni d'une loi de probabilité $(p_1, \cdots, p_r)$, parmi les $2^{N \ln r}$ messages formés de N lettres tirées au hasard et de façon indépendante suivant cette loi de probabilité, seuls $2^{NH(p_1,\cdots,p_r)}$ messages « typiques » ont, dès que N est assez grand, une chance non infime d'être rencontrés et de plus, le probabilité de chacun de ces messages typiques est à peu près la même, égale à $2^{-NH(p_1,\cdots,p_r)}$. Les messages non typiques peuvent ainsi être oubliés.

On peut à ce point remarquer que la définition que donne Shannon de l'entropie se réduit, *si l'on ne prend en compte que les messages typiques*, au quotient par la longueur N des messages du logarithme du nombre total de ceux-ci, c'est-à-dire au quotient par la longueur N des messages du logarithme de l'inverse de la probabilité de chacun... qui n'est autre que la définition que Ralph Hartley avait donnée 20 ans auparavant de l'information fournie par le choix d'un message parmi un ensemble de messages supposés équiprobables!

Shannon considère également le cas plus réaliste [8] de sources de messages markoviennes dans lesquelles la probabilité d'une nouvelle lettre dépend de la lettre qui précède. Les formules sont plus compliquées mais la théorie est la même.

La deuxième idée introduite par Shannon est son *diagramme schématique d'un système général de communication* représenté dans la figure 1 au tout début de [14].

Figure 1 – Schematic diagram of a general communication system



On sous-estimerait facilement aujourd'hui la nouveauté d'une telle conceptualisation du problème, directement issue d'un article écrit pendant la guerre sur la cryptographie [9] : les messages issus d'une *source* sont envoyés (c'est le *codage*) dans un transmetteur (l'*entrée*), puis transmis à travers un *canal* – nom général désignant aussi bien un télégraphe qu'un téléphone, un réseau Wifi, un tam-tam ou tout autre moyen de communication – jusqu'à un récepteur (la *sortie*) et enfin interprétés (le *décodage*). De plus, une source de bruit interfère avec les messages transitant par le canal : en effet, comme tout intermédiaire matériel, le canal ne peut être parfait et la transmission des messages est nécessairement entachée d'une certaine proportion d'erreurs.

À la source et au canal sont associés des alphabets $A = \{A_1, \cdots, A_r\}$ pour la source, $X = \{X_1, \cdots X_a\}$ pour l'entrée (i.e. pour les messages codés que l'on veut envoyer) et $Y = \{Y_1, \cdots, Y_b\}$ pour la sortie (i.e. pour les messages reçus qu'il faudra décoder). Pour la prise en compte des erreurs, Shannon se place là encore sur le terrain probabiliste, ne retenant comme seule caractéristique du canal, en dehors des alphabets d'entrée X et de sortie Y, que les *probabilités conditionnelles* $p(y_1 \cdots y_N | x_1 \cdots x_N)$, symbole qui se lit « probabilité de $y_1 \cdots y_N$ si $x_1 \cdots x_N$ » et désigne la probabilité que le message $y_1 \cdots y_N$ soit reçu si le message $x_1 \cdots x_N$ est envoyé [10]. Faisant l'hypothèse simplificatrice que les lettres suc-

7. Où elle quantifie (asymptotiquement via la formule de Stirling) le degré d'ignorance (précisément le log du nombre) des micro-états correspondant à un macro-état donné (voir [1]). D'après [7], c'est Gibbs qui, le premier, écrit explicitement la formule probabiliste ci-dessus. La relation de la notion d'information à l'entropie thermodynamique et au second principe, proposée dès 1929 par Leo Szilard pour expliquer l'expérience de pensée du *démon de Maxwell (1867)*, est l'objet du livre *Science and Information Theory* que Léon Brillouin publie en 1956. Le thème en est l'identification entre information liée à la structure d'un système physique et *néguentropie*, c'est-à-dire une quantité qui se soustrait à l'entropie totale du système. À ce sujet, voir dans [4] la passionnante conférence où Sergio Ciliberto, illustrant le *principe de Landauer* qui, en 1961, précisait la nature physique de l'information, montre comment les expérimentateurs « dansent aujourd'hui avec le démon de Maxwell ».

8. Éloquemment illustré au début de [14] par l'exemple de la langue anglaise.

9. *A Mathematical Theory of Cryptography* écrit en 1945 mais classifié jusqu'en 1949, date à laquelle il est publié sous le nouveau titre *Communication Theory of Secrecy Systems*.

10. La suite $x_1 \cdots x_N$ est une suite d'éléments de X, c'est-à-dire un élément de X^N ; autrement dit, elle est de la forme $X_{j_1} \cdots X_{j_N}$. De même, la suite $y_1 \cdots y_N$, qui est un élément de Y^N, est de la forme $Y_{k_1} \cdots Y_{k_N}$.

cessivement envoyées sont perturbées par le bruit indépendamment les unes des autres (i.e. seule la i-ième lettre envoyée x_i influe sur la i-ième lettre reçue y_i), ces probabilités conditionnelles vérifient

$$p(y_1 \cdots y_N | x_1 \cdots x_N) = \Pi_{i=1}^{N} p(y_i | x_i).$$

Elles sont donc parfaitement définies par les probabilités $p(Y_k | X_j)$ de recevoir la lettre Y_k si la lettre X_j est envoyée.

À cette donnée sont attachées des entropies : en effet, envoyer la lettre $x = X_j$ définit sur l'alphabet de sortie Y une loi de probabilité $y \mapsto p(y|x)$ ainsi donc qu'une entropie

$$H(Y|x) = \sum_{y \in Y} p(y|x) \ln \frac{1}{p(y|x)} = \sum_{k=1}^{b} p(Y_k|X_j) \ln \frac{1}{p(Y_k|X_j)}\,.$$

Shannon introduit à ce point une nouvelle idée fondamentale : supposant l'alphabet d'entrée $X = \{X_1, \cdots, X_a\}$ muni d'une loi de probabilité $p(x)$

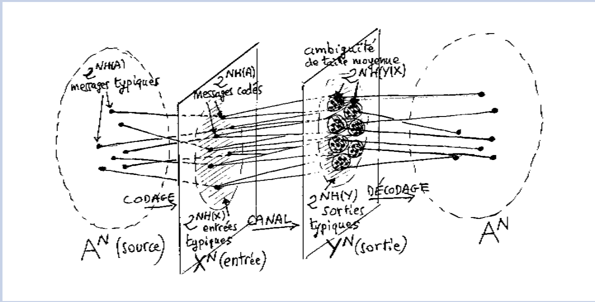
$$p_1 = p(X_1), \cdots, p_a = p(X_a),$$

il définit l'*entropie conditionnelle* $H(Y|X)$ comme la moyenne [11] des entropies $H(Y|x)$:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{x \in X} p(x) H(Y|x) = \sum_{j=1}^{a} p_j H(Y|X_j) \\ &= \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} p(X_j) p(Y_k|X_j) \ln \frac{1}{p(Y_k|X_j)}\,. \end{aligned}$$

Il montre alors que sous les hypothèses d'indépendance qui ont été faites, un long message $x_1 \cdots x_N$ envoyé dans le canal aura *en moyenne* une égale probabilité de donner à la réception l'un parmi $2^{NH(Y|X)}$ messages $y_1 \cdots y_N$. La figure 10 de [14], qui ne retient que les messages typiques, résume parfaitement la situation : les probabilités conditionnelles y sont représentées comme un cône dont le sommet $x_1 \cdots x_N$ appartient à l'ensemble X^N des messages (et même à celui des messages typiques) de N lettres écrits dans l'alphabet d'entrée X et dont la base, contenue dans l'ensemble Y^N des mots de N lettres $y_1 \cdots y_N$ écrits dans l'alphabet de sortie Y, est formée des $y_1 \cdots y_N$ typiques [12] pouvant être reçus.

Le problème du codage, une fois cette moyenne effectuée, y apparaît comme un problème d'empilement d'oranges dans une boîte de taille fixée, ce que tente de représenter la figure ci-dessous :



Étant donnée une source de messages A et un canal $(X \to Y)$, comment coder les $2^{NH(A)}$ messages typiques de façon à ce que chacun des sous-ensembles de taille (moyenne) $2^{NH(Y|X)}$ pouvant provenir de chacun des $2^{NH(A)}$ messages codés envoyés soient disjoints, sachant que l'ensemble est contenu dans la boîte des messages typiques dans Y^N, de contenance $2^{NH(Y)}$? Une condition nécessaire est évidemment que $2^{NH(A)} \times 2^{NH(Y|X)} < 2^{NH(Y)}$, c'est-à-dire $H(A) < H(Y) - H(Y|X)$. Le même raisonnement peut être tenu en échangeant les rôles de l'entrée et de la sortie, c'est-à-dire en raisonnant sur les probabilités conditionnelles $p(x|y)$ qu'ayant reçu y on ait envoyé x : les « oranges » représentant l'ambiguïté moyenne (en anglais « equivocation ») sont maintenant du côté de l'entrée et représentent pour chaque message reçu $y_1 \cdots y_N$ le nombre moyen, de l'ordre de $2^{NH(X|Y)}$, de messages susceptibles d'avoir été envoyés. Interprétée en termes de distance au centre des oranges, la condition de disjonction, qui est maintenant $2^{NH(A)} \times 2^{NH(X|Y)} < 2^{NH(X)}$, c'est-à-dire $H(A) < H(X) - H(X|Y)$, n'est pas sans rapport avec le fait que de nombreuses fautes de frappe n'empêchent pas de reconnaître sans ambiguïté un texte pourvu que la forme altérée ressemble plus au texte initial qu'à tout autre texte admissible.

Il se trouve que les conditions de disjonction à la sortie ou à l'entrée coïncident et fournissent à Shannon sa définition de l'*information mutuelle* :

$$\begin{aligned} I(Y,X) &= H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) = I(X,Y) \\ &= \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \pi(X_j, Y_k) \ln \frac{\pi(X_j, Y_k)}{p(X_j) q(Y_k)}\,. \end{aligned}$$

11. Dans le langage des probabilités l'*espérance de la variable aléatoire* $x \mapsto H(Y|x)$.

12. Pour donner un sens à cette dernière assertion, il faut remarquer que la donnée de la loi de probabilité $p(x)$ sur X et des probabilités conditionnelles $p(y|x)$ caractérisant le canal définit sur Y une loi de probabilité $q(y) = \sum_{x \in X} p(x) p(y|x)$ et donc une entropie $H(Y)$.

Le numérateur $\pi(X_j, Y_k) = p(X_j)p(Y_k|X_j)$ du logarithme est la probabilité de l'événement conjoint « avoir envoyé X_j et reçu Y_k » alors que le dénominateur $p(X_j)q(Y_k)$ est cette même probabilité conjointe dans le cas où l'entrée et la sortie seraient indépendantes (i.e. n'auraient aucune relation de causalité). Cette formule est interprétée aujourd'hui comme l'*entropie relative de Kullback-Leibler*[13] de ces deux lois de probabilité sur l'espace produit $X \times Y$.

Notons le rôle crucial de la moyenne dans la définition de $H(Y|X)$: alors que l'entropie conditionnelle $H(Y|X)$ est toujours inférieure ou égale à $H(Y)$, autrement dit que l'information mutuelle est toujours positive ou nulle[14], ne s'annulant que si X et Y sont indépendants, il se peut que pour un x donné, $H(Y|x)$ soit supérieure à $H(Y)$, par exemple lorsque la loi de probabilité $p(y|x)$ rend équiprobables tous les éléments y de Y et donc maximale l'entropie $H(Y|x)$.

D'autres notions d'information avaient précédé celle de Shannon, en particulier celle, locale dans l'espace des densités de probabilité, définie par Ronald Fisher au milieu des années vingt comme outil d'estimation statistique de la pertinence d'un modèle. C'est d'ailleurs à cette problématique que se rattache l'entropie de Kullback-Leibler que nous venons d'évoquer.

Il ne reste plus qu'à définir la capacité C du canal comme le sup des informations mutuelles pour toutes les lois de probabilité sur l'alphabet X, ce qui conduit à la célèbre condition[15] $H(A) < C$: entropie de la source inférieure à la capacité du canal, qui rassemble le *théorème du codage de source* et le *théorème du codage en présence de bruit* (Noisy channel coding theorem).

Il est remarquable que cette condition nécessaire soit également suffisante pour qu'il existe un code permettant de transmettre des messages avec une probabilité d'erreur arbitrairement petite pourvu que les messages soient assez longs (N assez grand).

L'idée de la démonstration, donnée par Shannon, précisée et généralisée aux sources ergodiques par ses successeurs, Robert Fano, Amiel Feinstein, Brockway MacMillan, Leo Breiman, Alexandre Khinchine (voir [9, 3]), … et dont le meilleur exposé se trouve dans le livre [5], est un remarquable calcul de moyenne des probabilités d'erreurs sur un ensemble de codes *choisis au hasard*.

En voici une esquisse : fixons la longueur N des messages provenant de la source ainsi qu'un *canal stationnaire sans mémoire*, c'est-à-dire un ensemble d'entrées[16] X^N muni de probabilités $p(x_1 \cdots x_N) = \Pi_{i=1}^N p(x_i)$, un ensemble de sorties Y^N et des probabilités conditionnelles $p(y_1 y_2 \cdots y_N | x_1 x_2 \cdots x_N) = \Pi_{i=1}^N p(y_i|x_i)$, donc des probabilités

$$q(y_1 \cdots y_N) = \Pi_{i=1}^N q(y_i) = \Pi_{i=1}^N \Big(\sum_{x \in X} p(x) p(y_i|x)\Big)$$

sur Y^N. Nous ne nous intéresserons qu'aux messages typiques issus de la source c'est-à-dire, en négligeant les epsilons, à $2^{NH(A)}$ messages que l'on peut considérer comme équiprobables. Un code est un plongement quelconque dans X^N de ces $2^{NH(A)}$ messages, c'est-à-dire un ensemble de $2^{NH(A)}$ messages codés formant les lignes d'une matrice

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \cdots & x_N(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1(2^{NH(A)}) & x_2(2^{NH(A)}) & \cdots & x_n(2^{NH(A)}) \end{pmatrix}.$$

1) On munit l'ensemble de ces codes de la loi de probabilité

$$Pr(\mathcal{C}) = \prod_{w=1}^{2^{NH(A)}} \prod_{i=1}^{N} p\big(x_i(w)\big),$$

ce qui implique que, choisissant au hasard un tel code, la probabilité est grande que tous les messages codés appartiennent au sous-ensemble typique de X^N et, étant donné la définition de la probabilité sur la sortie Y^N, que tous les messages transmis appartiennent à l'ensemble typique de Y^N. Ici aussi, nous ne nous préoccuperons pas des epsilons et oublierons les codes improbables n'ayant pas cette propriété, ce qui nous laisse avec environ $2^{NH(X)}$ entrées et $2^{NH(Y)}$ sorties.

2) Le code choisi et les caractéristiques du canal sont supposés connus de l'envoyeur et du destinataire.

3) Un message reçu $y_1 \cdots y_N$ est décodé comme provenant de w si ce dernier est l'unique message source tel que la paire $(x(w), y)$ soit *conjointement*

13. Introduite au début des années cinquante par deux cryptanalystes américains Solomon Kullback et Richard Leibler qui travaillaient pour la NSA.

14. C'est l'*inégalité de Shannon*, conséquence de la convexité de la fonction $x \mapsto \ln \frac{1}{x}$.

15. Les quantités sont exprimées en bits par symbole ou bien, multipliées par le nombre de symboles transmis par seconde, en bits par seconde.

16. Choisir pour les messages codés la même longueur N que celle des messages source n'est pas important mais simplifie les notations. En pratique, une « lettre » de l'alphabet X pourra être un « mot » formé par exemple de 0's et de 1's.

typique, ce qui signifie d'une part que $x(w)$ et y sont typiques, respectivement dans X^N et Y^N, et que le couple est typique dans $X^N \times Y^N$ muni de la loi de probabilité

$$p(x_1 \cdots x_N, y_1 \cdots y_N) = p(x_1 \cdots x_N) p(y_1 \cdots y_N | x_1 \cdots x_N).$$

Dans tous les autres cas, il est interprété comme une erreur. Un calcul simple montre alors que, calculée à la fois sur l'ensemble des messages et l'ensemble des codes, l'espérance de la probabilité d'erreur tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini dès que $H(A) < I(X, Y)$, ce qui montre l'existence lorsque cette condition est remplie d'un code ayant une probabilité d'erreur moyenne arbitrairement petite. La conclusion s'ensuit facilement

Heuristiquement, le fait que le codage se fasse au hasard implique la non-corrélation (au sens probabiliste) de 2 messages reçus provenant de 2 messages codés distincts, ce qui rend improbable leur coïncidence dès qu'il y a suffisamment de place à la sortie (i.e. dès qu'il y a effectivement la place d'empiler toutes les oranges).

Remarquons pour finir que ce n'est pas la condition $H(A) < C$ qui est la plus souvent citée comme représentant le résultat principal de Shannon mais son avatar « continu » pour un bruit gaussien

$$C = W \ln\left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

décrit dans le chapitre IV de [14] (W est la largeur de bande passante du canal et P/N le rapport signal sur bruit). Or cette formule apparaît – mais sans l'appareil théorique qui fait toute la force du travail de Shannon – dans un certain nombre de travaux contemporains, tels ceux de Norbert Wiener, William G. Tuller, H. Sullivan mentionnés par Shannon, mais aussi Stanford Goldman, Charles W. Earp, et deux ingénieurs français André G. Clavier et Jacques Laplume (voir [6] et la conférence d'Olivier Rioul dans [4]).

Restée longtemps théorique [17], la limite de Shannon est aujourd'hui pratiquement atteinte par les turbocodes développés dans les années 1990 par Claude Berrou et son équipe : l'art de la construction d'un code correcteur consiste en la recherche de la façon la plus efficace d'introduire la *redondance* minimale qui permette de décoder les messages avec une très faible probabilité d'erreur. Dans [2], Claude Berrou explique qu'entrelaçant deux petits « codes convolutifs », les turbocodes ont une certaine analogie avec les grilles de mots croisés : c'est en reprenant successivement et plusieurs fois définitions horizontales et définitions verticales que l'on finit par lever l'ambiguïté [18].

Il est un cas cependant où le code le plus simple s'approche de la borne optimale : dans une courte note de 1949 intitulée *A case of efficient coding for a very noisy channel*, Shannon montre en effet que le code consistant en la répétition un grand nombre K de fois de chaque lettre du message source (précisément, $A = \{0, 1\}, X = Y = \{0, 1\}^K$), assorti d'un décodage à la majorité dans chaque groupe de K symboles reçus, est proche d'être optimal lorsque la probabilité d'erreur est proche de $1/2$. Au contraire, si cette probabilité est faible, un tel codage n'est plus du tout optimal.

Il n'aura pas, je pense, échappé aux lecteurs que sans de tels codes correcteurs la majorité des instruments que nous utilisons tous les jours n'existeraient tout simplement pas. Une évocation de l'histoire et un état des lieux des recherches actuelles [19] se trouve dans les conférences du colloque organisé à Paris pour célébrer le centenaire de la naissance de Claude Shannon [4]. Bel exemple d'un théorème de pure mathématique dont la prédiction (il existe un code...) se réalise cinquante années après son énoncé.

Références

[1] R. Balian. *Du Microscopique au Macroscopique*. Cours de l'École Polytechnique, Ellipse 1982. Traduction anglaise sensiblement modifiée From Microphysics to Macrophysics, Springer 1991.

17. Shannon remarque explicitement que construire un code proche de l'optimal en suivant la démonstration d'existence est impraticable en raison de la taille de N.

18. C'est bien l'effet « turbo » qui consiste en une réutilisation d'une partie de l'énergie cinétique contenue dans les gaz d'échappement d'un moteur pour faire tourner un compresseur servant à augmenter l'apport d'oxygène dans la chambre de combustion et donc également la puissance.

19. À l'importante exception près de tout ce qui concerne l'*information quantique* où l'existence de l'*intrication* (entanglement) joue un rôle fondamental : en particulier, l'*entropie de Von Neumann* remplaçant celle de Shannon, l'entropie conditionnelle peut être négative !

[2] C. Berrou. *Les Turbocodes*. url : `http://www.futura-sciences.com/magazines/high-tech/infos/dossiers/d/telecoms-turbocodes-366/`.

[3] P. Billingsley. *Ergodic Theory and Information*. John Wiley & Sons, 1965.

[4] *Colloque Shannon 100, IHP, 26 au 28 octobre 2016*. url : `https://www.youtube.com/playlist?list=PL9kd4mpdvWcDMCJ-SP72HV6Bme6CSqk_k`.

[5] T. M. Cover et J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 1991.

[6] P. Flandrin et O. Rioul. *Laplume sous le masque. Académie des Sciences*. Oct. 2016. url : `http://www.academie-sciences.fr/fr/Evolution-des-disciplines-et-histoire-des-decouvertes/laplume-sous-le-masque-patrick-flandrin-et-olivier-rioul.html`.

[7] E. T. Jaynes. « Gibbs vs Boltzmann entropies ». *American Journal of Physics* **33**, nº 5 (1965), p. 391–398.

[8] A. Katok. « Fifty years of entropy in dynamics: 1958–2007 ». *J. Mod. Dyn.* **2**, nº 4 (2007), p. 545–596.

[9] A. Khinchin. *Mathematical Foundations of Information Theory*. Dover, 1957.

[10] A. N. Kolmogorov. « Combinatorial foundations of information theory and the calculus of probabilities ». *Uspekhi Mat. Nauk* **38**, nº 4 (1983). qui est la rédaction de la conférence faite à Nice en 1970 au Congrès international des mathématiciens.

[11] A. N. Kolmogorov. « A new metric invariant of transitive dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces ». In : *Dokl. Akad. Nauk SSSR (NS)*. Vol. 119. 861-864. 1958.

[12] G. Peyré. *Claude Shannon et la compression des données, Images des maths*. Sept. 2016. url : `http://images.math.cnrs.fr/Claude-Shannon-et-la-compression-des-donnees.html`.

[13] J. Segal et A. Danchin. *Le zéro et le Un, Histoire de la motion scientifique d'information au XXe siècle*. Syllepse Paris, 2003.

[14] C. E. Shannon. « A Mathematical Theory of Communication ». *The Bell System Technical Journal* **27**, nº 3 (juil. 1948), p. 379–423, 623–656.

Alain Chenciner

Observatoire de Paris, imcce (umr 8028) & Département de mathématiques, université Paris Diderot
`alain.chenciner@obspm.fr`

Merci à Qiaoling Wei pour de nombreuses discussions lors de la préparation d'une conférence sur Shannon au Musée des Sciences et Techniques de Pékin, à Nathan Hara pour son intérêt constant et ses questions provocantes, à Frédéric Barbaresco pour la référence [6], à Daniel Bennequin pour la référence [7], des précisions sur l'information de Fisher et ses amicales corrections, à Marc Serrero pour la référence [1] et de non moins amicales remarques. Merci enfin à Sébastien Gouezel pour sa lecture critique et constructive d'une première version.

Platonismes

• M. Panza

Chers lecteurs,

Suite à un problème technique, de nombreuses erreurs se sont glissées dans la bibliographie du texte de Marco Panza publié dans la version papier de la Gazette. *Comptant sur votre indulgence, nous en publions ici une version correcte. Nous vous présentons nos excuses, ainsi qu'à l'auteur, pour ce désagrément.*

La rédaction

1. Introduction, ou du platonisme naïf

Selon la vulgata philosophique, le platonisme concernant un certain domaine de recherche est la thèse affirmant que ce domaine porte sur des objets qui lui sont propres, dont l'existence est indépendante de l'activité cognitive humaine. Souvent, dans la même vulgata, on parle aussi de platonisme pour se référer à une thèse un peu différente, d'après laquelle ce qu'on dit concernant ce domaine est vrai ou faux indépendamment de toute justification ou réfutation que l'on puisse apporter. Naturellement, si parmi les énoncés ayant trait à ce domaine, il y en a qu'on peut prendre comme particulièrement sûrs du fait d'en avoir une justification ou confirmation particulièrement convaincante, on dira alors que le platonisme dont il est question affirme que ces énoncés sont vrais, et qu'ils le sont indépendamment de cette justification ou confirmation, qui ne servira, ainsi, qu'à nous convaincre de leur vérité.

Pour ce qui est des mathématiques, ceci revient à présenter le platonisme soit comme la thèse que

P.1. les mathématiques portent sur certains objets qui leur sont propres – les objets mathématiques, comme on les appelle d'habitude – généralement conçus comme des objets abstraits, qui existent indépendamment de toute activité humaine,

soit comme la thèse que

P.2. les énoncés mathématiques sont vrais ou faux indépendamment de leur justification, et, en particulier, que les théorèmes mathématiques attestés sont vrais indépendamment de leur preuve, qui ne sert qu'à nous convaincre qu'ils le sont.

Naturellement, en parlant d'énoncés mathématiques en (P.2), on se réfère seulement à des énoncés appartenant à un langage exclusivement mathématique, des énoncés mathématiques purs, comme l'on dit souvent. Un énoncé tel que

> « la tour Eiffel s'appuie sur quatre pieds »

n'est évidemment pas vrai indépendamment de toute activité humaine, alors qu'affirmer qu'un énoncé tel

> « la molécule de l'eau contient deux atomes d'hydrogène et un d'oxygène »

l'est et ne relève certes pas du platonisme mathématique. Les énoncés dont il est question sont comme ceux-ci :

> « la limite d'une série convergente de fonctions continues définies sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur cet ouvert » ;

> « la matrice hessienne d'une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ deux fois dérivable en un point a de cet ouvert est symétrique en a ».

Pour le platoniste, la fausseté du premier ne tiendrait pas au fait que, *pace* Cauchy, il n'est pas démontrable, mais plutôt au fait que, indépendamment de Cauchy, Fourier, Abel et tout autre mathématicien, il admet des contre-exemples, alors que la vérité du second ne dépendrait pas de la preuve qu'en a donné H. Schwarz, ou de celles que d'autres mathématiciens continuent à lui donner, mais plutôt des propriétés des nombres réels, de leurs intervalles et des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Ces deux exemples devraient suffire à suggérer que les deux thèses (P.1) et (P.2) sont strictement liées, au sens qu'établir l'une des deux peut servir à établir l'autre. Ceci fait qu'elles soient souvent prises comme devant être admises ou rejetées ensemble. Mais, si l'on voulait être plus précis, l'on devrait observer qu'elles ne sont nullement équivalentes : accepter l'une n'oblige nullement à accepter l'autre ; si l'on voulait être platoniste (au second sens) quant aux thèses philosophiques, on pourrait supposer que l'une est vraie, alors que l'autre est fausse.

Certes, l'on pourrait plausiblement penser qu'il serait fort étrange qu'il en soit ainsi (et même que des thèses philosophiques soient vraies ou fausses), mais ceci ne ferait que suggérer que les thèses (P.1) et (P.2) sont strictement liées entre elles, mais pas qu'elles sont équivalentes.

De plus, les philosophes s'accordent souvent à accepter une thèse supportée par un argument qu'ils tiennent pour correct, de telle sorte qu'il est fort possible qu'ils se trouvent dans la situation d'accepter une thèse pour vraie, sans avoir une idée bien claire de ce qui fait que les choses sont comme cette thèse le dit. Celle-ci pourrait être, par exemple, la situation de quelqu'un qui accepterait quelque version de l'argument dit « d'indispensabilité ». En voici une, en simplifiant (pour d'autres versions et des formulations plus précises, cf. [26]) : comme c'est un fait que des théories mathématiques sont indispensables pour des théories scientifiques (tenues pour) vraies, ses théorèmes ne peuvent, à leur tour, qu'être (tenus pour) vrais. Si accepté, cet argument établit que les théorèmes de ces théories mathématiques sont vrais, et il suggère qu'ils le sont indépendamment de leur preuve, mais il ne dit rien à propos de ce qui les rend vrais (la littérature récente sur les arguments d'indispensabilité est assez large, mais pour des raisons d'espace on se contentera ici de cette mention rapide). On pourrait aussi imaginer des arguments, apparemment corrects, qui supportent ou réfutent l'une des deux thèses (P.1) et (P.2), mais qui n'établissent rien à propos de l'autre. Très récemment il m'est arrivé, par exemple, d'écouter un exposé (très brillant) de H. Field, un des opposants les plus persuasifs du platonisme, où la thèse générale qu'il s'agissait de défendre a été présentée ainsi :

> même s'il y a des objets mathématiques, il n'y a pas d'objectivité mathématique (au sens que ce n'est pas un fait objectif que certains énoncés mathématiques sont « corrects » et d'autres pas), et ceci est tout ce qui importe

(exposé tenu à la Columbia University, New York, le 23 avril 2016).

Il convient donc de distinguer les thèses (P.1) et (P.2), même si, comme on le verra, elles ou leurs négations vont souvent ensemble. On notera aussi que le terme « réalisme » et ses dérivés sont également bien souvent employés pour dénoter ces thèses : plus souvent (P.2) que (P.1), pour laquelle l'appellation « platonisme » est la plus commune. On pourrait ainsi décider d'appeler la thèse (P1) « platonisme », et la thèse (P.2) « réalisme ». C'est ce qu'avec mon coauteur A. Sereni, nous avons suggéré dans notre *Introduction à la Philosophie des mathématiques* (2012 ; le lecteur est renvoyé à cet ouvrage pour des clarifications et/ou compléments à ce que je dirai par la suite). Mais ici, il n'est pas question de bien fixer des noms pour un usage futur, mais de donner un panorama (forcément sommaire et incomplet) des conceptions que l'on pourrait trouver mentionnées sous le terme « platonisme ». Il convient, donc, de garder le spectre sémantique de ce terme le plus large possible. Convenons, donc, d'appeler (P.1) « platonisme naïf des objets » et (P.2) « platonisme naïf de l'objectivité » (les deux labels « platonisme ontologique » et « platonisme sémantique » sont aussi souvent respectivement employés pour dénommer ces thèses ou d'autres plus ou moins proches de celles-ci, mais je préfère ici les éviter pour ne pas donner l'impression de vouloir ancrer ma discussion dans une distinction établie entre ontologie et sémantique, que le lecteur devrait prendre comme étant acquise).

Mais pourquoi « naïf » ? Parce que, si l'on regarde de près autant l'histoire de la philosophie (des mathématiques) que la discussion philosophique contemporaine sur les mathématiques, on se rend compte que ces deux thèses n'ont pratiquement jamais été défendues, dans leur simple (ou plutôt simpliste) radicalité. Bien sûr, elles ont été très souvent mentionnées comme sortes de paradigmes ou slogans, pour introduire le sujet, ou pour se réclamer d'une attitude ou vue philosophique identifiée en général. Et elles ont très souvent fait aussi l'objet d'une critique, plus ou moins dévastatrice, et ont été rejetées au nom de plusieurs arguments négatifs, principes généraux, conceptions métaphysiques, évidences venant de la pratique ou de l'histoire des mathématiques. Mais s'il en a été ainsi, c'est justement du fait d'un vieux (et très souvent appliqué) principe de dialectique (au sens aristotélicien d'art de la discussion) suggérant de présenter une thèse dans la forme la plus simpliste et aisément réfutable, si l'on veut s'y opposer. Mais même si je voulais me servir de cette astuce, il resterait que mon but n'est nullement de réfuter le platonisme, mais d'exposer des idées qui s'y rapportent. Il convient donc de laisser jouer à ces thèses le rôle d'idéaltypes dépourvus d'une opérativité effective dans la discussion qui nous intéresse, servant seulement à introduire les remarques qui suivent.

2. Platon

Le premier à ne pas admettre les thèses (P.1) et (P.2) dans leur simplicité radicale a été Platon lui-même, bien que le terme « platonisme » soit évidemment inspiré de sa philosophie, en particulier de ses théories des idées. Il n'y a pas de doute que :

1. Platon a soutenu que les objets sensibles ne sont que des copies d'idées éternelles formant une réalité première et parfaitement indépendante de nous, à laquelle toute autre réalité se rapporte comme une image se rapporte à ce dont elle est l'image ;
2. que ces idées n'ont aucune affinité avec ce qu'on a plus tard appelé « concepts », en étant bien plus proches de ce qu'on conçoit aujourd'hui comme des objets abstraits.

Il est donc parfaitement naturel d'appeler « platonisme » toute thèse philosophique qui a trait à l'existence indépendante d'objets abstraits. Le problème est, cependant, à l'instar de Platon, que ce qu'on devrait prendre comme des idées (ou des objets) mathématiques est loin d'être clair.

Dans un passage bien connu de la *République*, Platon semble vouloir dénigrer la pratique des mathématiciens en la traitant de corrompue en comparaison à une connaissance éternelle et parfaite qui constituerait les vraies mathématiques (*La République*, 527*a-b* ; traduction de G. Leroux, légèrement modifiée, in : Platon, *Œuvres complètes*, Flammarion, Paris, 2011) :

> Or, le point suivant [...], même ceux qui ne possèdent qu'une expertise réduite de la géométrie ne nous le disputeront pas : cette connaissance est entièrement à l'opposé de ce qu'en disent ceux dont elle constitue le domaine. [...] Ils parlent de manière très ridicule et forcée, comme des praticiens, soucieux d'abord de leur pratique, et ils parviennent à toutes leurs propositions, en parlant de mettre au carré, ou alors d'appliquer et d'additionner, et en formulant tous leurs énoncés de cette manière, alors que toute la discipline vise la connaissance. [...] on étudie la géométrie en vue de la connaissance de ce qui est toujours, et non de ce qui se produit à un moment donné puis se corrompt.

Une bonne partie de l'interprétation de ce passage dépend de la manière d'entendre les deux adjectifs « ridicule » et « forcé », « γέλοιως » et « ἀναγκαίως », en grec. Burnyeat [6, p. 129], a suggéré de les prendre comme exprimant, respectivement, la nature métaphorique du langage des géomètres et l'inévitabilité de leur recours à un tel langage. C'est une interprétation que je partage. Loin de dénigrer la pratique des géomètres, Platon nous dirait ici qu'ils ne sauraient traiter des véritables objets de la géométrie qu'à l'aide d'un discours et des procédures qui en contredisent la nature d'objets éternels, immuables et purement intelligibles, en les représentant à l'aide d'objets temporels, muables, et sensibles. On retrouverait alors ici la même opposition entre deux conceptions, ou, pour dire mieux, deux modalités de la connaissance : la connaissance parfaite du *Théétète*, qui resterait inatteignable par nous les hommes, du fait de sa transcendance ; et celle autant imparfaite que provisoire du *Ménon*, consistant d'opinions que les hommes connectent les unes aux autres par un discours qui, les liant entre elles, leur donne stabilité, et fait de leur système une science.

En d'autres termes, Platon opposerait ici deux conceptions des mathématiques : les mathématiques premières, conçues comme un système de vérités éternelles ; les mathématiques secondes, conçues comme une pratique humaine donnant lieu à un système de résultats dont l'apparence de vérité ne dépend que de leur stabilité. On pourrait insister sur le pessimisme du *Théétète*, où la quête d'une caractérisation de la connaissance se termine par l'aveu d'un échec, pour souligner que les premières restent inatteignables par l'homme. Mais on pourrait aussi relire l'optimisme du *Ménon* à la lumière de la métaphore de *Phèdre* – où Platon nous raconte que les âmes, ou du moins certaines d'entre elles, peuvent contempler les idées lors d'un voyage au-delà des cieux qui précède leur chute dans les corps mortels –, pour en conclure que les secondes doivent être conçues comme de bonnes copies des premières, aussi bonnes que les hommes peuvent les avoir. Au fond, c'est bien dans le *Ménon* que Platon illustre sa théorie de la réminiscence par la parabole de l'esclave qui, par une démarche maïeutique, est amené à retrouver tout seul un cas particulier du théorème de Pythagore : si un bon maître peut, du moins apparemment, faire retrouver à un esclave trace d'une connaissance que son âme a perdu lors de la chute, le maître lui-même ne devrait pas être si loin de pouvoir retrouver une bonne partie de cette connaissance par son travail et son étude.

Que reste-t-il dans ce cadre des thèses (P.1) et (P.2) ? Il ne semble pas y avoir de doute que pour Platon, il y a des objets mathématiques, qu'ils sont abstraits et qu'ils existent de manière éternelle et immuable, et qu'ils sont donc indépendants de notre activité cognitive. Ce sont les idées qui ont trait aux mathématiques. Certes, mais de quels objets (idées) s'agit-il ? Les mathématiques auxquelles ces objets ont trait ne peuvent être, par définition même de ces objets, que les premières. Mais s'il en est ainsi, rien ne peut nous assurer que ces objets sont exactement ceux sur lesquels semblent porter les énoncés ayant trait aux secondes. D'un côté, même si l'on s'accordait pour nier que le(s) langage(s) de celles-ci soi(en)t métaphorique(s) (par exemple en insistant sur le fait que les choses aujourd'hui ont profondément changé et que l'on n'est plus, dans les mathématiques modernes, au caractère proto-empirique de la géométrie grecque), il resterait que rien ne peut nous assurer que ce(s) langage(s) reflètent exactement la structure des mathématiques premières. La définition même de celles-ci fait qu'il est impossible d'obtenir cette garantie.

Pour comprendre le problème il n'est pas nécessaire de se demander, par exemple, si dans les mathématiques premières on retrouve des ensemble ou des flèches. Déjà Platon l'avait vu.

Dans la *Septième Lettre* (342*a*-*d*), il distingue cinq facteurs dans l'acquisition de la connaissance d'un « être » : le nom de celui-ci ; sa définition ; son image ou représentation ; la connaissance elle-même ; et l'être lui-même. L'exemple qu'il prend est tiré de la géométrie : l'être est le cercle ; « cercle » est son nom ; « ce dont les extrêmes sont tous équidistants du centre » est sa définition ; un diagramme est son image ; ce qu'il y dans l'âme à propos de celui-ci est la connaissance. Il est difficile de penser que le nom et la définition en question sont ceux d'un cercle parmi d'autres. Ce dont Platon veut parler ne semble pas être un cercle, mais le cercle. Mais il est clair, alors, qu'aucun théorème de géométrie ne traite de ceci dans sa singularité d'objet. Ou bien on pense ces théorèmes comme tels à caractériser le concept (unique) de cercle ; ou bien on les pense comme traitant des cercles dans leur pluralité, quelle que soit la manière dans laquelle cette pluralité est conçue. Quels sont, donc, les objets de la géométrie ? Le cercle, ou les cercles ? Le triangle ou les triangles ? Ou peut-être le polygone, ou les différentes sortes de polygones, ou la pluralité des polygones individuels ? Donc, ou bien le quatrième facteur n'est pas la connaissance du *Ménon*, mais celle du *Théétète*, et alors on ne la retrouve pas dans les traités de géométrie et on ne saurait rien dire de la manière dans laquelle elle est faite ; ou bien ce quatrième facteur est bien la connaissance du *Ménon*, celle qu'on retrouve dans ces traités, mais alors, ses objets ne sont pas ceux dont elle nous semble parler, si l'on reste, du moins, à la forme superficielle de ses énoncés.

On pourrait penser que le cas de la géométrie est particulièrement difficile, du moins si l'on reste au cadre de la géométrie des *Éléments*, où, en absence de toute structure de l'espace, ainsi que de toute forme de définition implicite venant d'une axiomatisation, la distinction entre ce qui vaut comme un terme et ce qui vaut comme un prédicat reste fort imprécise. Mais les choses ne vont pas mieux, chez Platon, pour ce qui est du cas bien plus simple, sous cet aspect, de l'arithmétique des nombres entiers positifs. Autant dans le *Philèbe* (56*d*-*e*) que dans le *Théétète* (195*e*-196*a*), il distingue entre arithmétique pratique et pure, en les présentant comme celles dans lesquelles les unités respectivement diffèrent entre elles – ainsi que, de deux bœufs, un diffère de l'autre –, et ne diffèrent pas entre elles. C'est une manière assez naturelle de penser cette distinction, si on la rapporte à la définition des nombres (entiers positifs) qu'Euclide codifiera un peu plus tard dans les *Éléments*, d'après laquelle un nombre est une « pluralité d'unités » (def. VII.2), et une unité est « ce en vertu de quoi tout être est dit un » (def. VII.1). Mais elle n'est pas sans suggérer que pour Platon l'arithmétique n'a que l'unité comme son objet. Dans le *Gorgias* (451*a*-*c*), Platon distingue l'arithmétique pure de la logistique, elle aussi pure, en observant que toutes les deux traitent du pair et de l'impair, mais la seconde tient à leurs grandeurs relatives. On pourrait comprendre, en modernisant, que la logistique calcule avec les nombres, alors que l'arithmétique se limite à étudier leur succession. Mais il reste que ce que Platon semble suggérer ici est que les seuls objets de l'arithmétique sont le pair et l'impair, conçus, on peut l'imaginer, comme deux formes distinctes de symétrie en une collection linéaire d'unités. Encore une fois, il serait difficile de retrouver ces objets traités comme tels en un traité d'arithmétique, du moins si l'on reste à la surface de son langage.

La difficulté à identifier les objets mathématiques conduit à une difficulté similaire à caractériser les vérités mathématiques. Certes, pour Platon, ce sont les mathématiques premières qui décident de ce qui est vrai et ce qui est faux ; c'est seulement en tant qu'ils reflètent, d'une forme ou d'une autre, les premières que les énoncés des secondes sont vrais. Mais ce que l'on vient de dire sur les objets mathématiques rend clair que rien ne peut nous assurer non seulement que ces énoncés sont vrais ou faux, mais aussi que leur vérité tient à leur forme superficielle, que ce qui fait qu'ils sont vrais soit que dans les mathématiques premières les choses sont ainsi que ces énoncés semblent dire qu'elles sont, si l'on reste à leur forme superficielle.

Plus qu'énoncer des thèses quant aux mathématiques, Platon semble ainsi nous poser un problème : comment peut-on espérer regarder les mathématiques secondes, la pratique mathématique, on dirait aujourd'hui, si l'on veut être capable d'y retrouver un réflexe des mathématiques premières ? Comment doit-on penser et identifier les objets mathématiques ? Quelle structure doit-on assigner aux théorèmes mathématiques si l'on veut en faire des vérités ?

La difficulté du problème tient au fait qu'il trouve son origine dans la tentative de satisfaire à deux exigences difficiles à concilier : celle de rendre compte de l'apparente exactitude et incontestabilité des mathématiques en les regardant comme un système de vérités éternelles, décrivant un monde immuable d'objets transcendants soustraits à la corruptibilité et au désordre des choses humaines ; celle de rendre compte aussi du rôle actif du mathématicien, de sa pratique quotidienne, de l'effort de produire des preuves et d'édifier des théories, en regardant les mathématiques comme (le résultat d') une pratique humaine, soumise aux limitations et aux imperfections de toute pratique humaine. Quiconque a fait l'expérience des mathématiques d'une forme ou d'une autre ne peut que ressentir ces deux exigences. Les concilier est le problème principal que la philosophie des mathématiques rencontre, et l'importance de Platon pour cette dernière tient justement au fait d'avoir identifié cette difficulté.

3. Platonisme et pratique mathématique

Avant de continuer, il est bien de s'arrêter un instant sur un point important.

Pour un philosophe, concilier ces deux exigences signifie fournir un compte-rendu plausible des mathématiques (soit en tant que système de vérités ou résultats attestés, soit en tant qu'activité) capable d'expliquer comment leurs apparentes exactitude et incontestabilité s'accommodent avec le rôle actif du mathématicien et de sa pratique quotidienne (tout en admettant, évidemment, qu'un mathématicien est un être humain, sujet aux limitations cognitives de tout être humain). La difficulté du problème est celle de fournir ce compte-rendu et de faire en sorte qu'il soit plausible.

Mais il pourrait y avoir d'autres manières de concilier les deux exigences. L'une, très courante parmi les mathématiciens, consiste à moduler leur pratique en accord avec la supposition que celle-ci a trait à un système de vérités éternelles, décrivant un monde immuable d'objets donnés de manière indépendante, et que son but est de découvrir ces vérités, de sorte à parvenir à décrire ce monde de manière de plus en plus complète et fidèle. Cette modulation peut s'accompagner d'une justification méthodologique raffinée, se réclamant d'un compte-rendu du même type que celui que les philosophes cherchent à obtenir. Dans ce cas, le mathématicien joue le même jeu que le philosophe. Mais rien n'oblige que ce soit ainsi. Cette modulation peut aussi s'accompagner d'une justification plus sommaire, ne se réclamant, par exemple, que des thèses (P.1) et (P.2), ou même être spontanée, comme on le dit souvent (en parlant de platonisme spontané des mathématiciens) : elle peut éviter toute justification autre que celle qui vient des succès obtenus en adoptant une certaine attitude.

Il y a plusieurs exemples typiques de cette modulation.

L'un d'eux est l'admission inconditionnée des preuves indirectes fondées sur l'élimination de la double négation ou (de façon équivalente), sur le principe du tiers exclus. Plus généralement, il s'agit d'admettre que l'argumentation mathématique se conforme à la logique classique et en hérite toute la puissance déductive. On pourrait penser que ceci n'est pas, à proprement parler, un choix positif, mais tout simplement le refus de se soumettre à toute limitation de cette puissance déductive requise par les partisans d'une logique non-classique, tels les intuitionnistes de différentes sortes, les constructivistes, les finitistes plus ou moins stricts, les prédicativistes, etc. Mais si l'on peut soutenir (en faisant preuve, d'ailleurs, d'approximation, sinon de superficialité historique) que la logique classique a une origine très ancienne, alors que les logiques non-classiques n'ont été conçues et ne se sont développées comme telles, qu'à partir de la première moitié du siècle dernier (et, pour plusieurs, bien plus récemment), il est aussi loin d'être certain que les mathématiques d'avant la seconde moitié du XIXe siècle aient *de facto* adopté toute la puissance déductive de la logique classique. Celle-ci a été conçue (du moins initialement) comme une logique du vrai et du faux, considérés comme des valeurs de vérité opposées et complémentaires, et rien n'assure que les mathématiciens de toutes les époques auraient accepté de penser leur pratique comme ayant trait au vrai et au faux considérés de cette manière. Détailler cette remarque requerrait une enquête historique subtile qu'ici on ne peut même pas évoquer. Il suffira d'observer qu'il est bien difficile de trouver avant le XIXe siècle des preuves par l'absurde employant (consciemment ou pas) l'élimination de la double négation. Dans les *Éléments* d'Euclide, par exemple, les théorèmes prouvés par l'absurde sont généralement énoncés en forme négative, ou dérivés de négations appropriées. Par exemple, pour montrer l'existence d'une parallèle (prop. I.27), Euclide prouve que deux segments qui forment avec un troisième des angles alternes internes égaux ne se rencontrent pas si prolongés, car si c'était ainsi un théorème précédent serait contredit. La forme de la preuve est donc la suivante

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \neg C \\ \hline \neg A \end{array}$$

qui n'utilise que le *modus tollens*.

Un autre exemple typique tient à l'admission que les énoncés indécidables des théories mathématiques incomplètes sont vrais ou faux, pourvu, naturellement, que les théories en question fournissent une description fidèle (encore que partielle) du monde des objets mathématiques. Il s'ensuit que si ces énoncés sont mathématiquement intéressants (c'est-à-dire, typiquement, qu'ils ne sont pas gödéliens), ils appellent à une extension de la théorie permettant de les décider, quitte à devoir en conclure qu'elle ne fournit pas une description fidèle du monde des objets mathématiques. Un cas bien connu est celui de l'hypothèse du continu et de sa généralisation. Si ZFC fournit une description fidèle du monde des objets mathématiques, c'est-à-dire que ce monde est fait par (ou inclut) des ensembles satisfaisant aux axiomes et définitions de cette théorie, alors CH doit être soit vraie, soit fausse et de même pour GCH. Il faut donc chercher à compléter ZFC avec de nouveaux axiomes non *ad hoc*, permettant de prouver soit CH soit ¬CH, et soit GCH soit ¬GCH. La difficulté de cette tâche pourrait n'être un symptôme que de la nature très complexe du monde des objets mathématiques, ou de notre extrême difficulté à la saisir. Mais si l'on commençait à douter que ceci est possible, on devrait en conclure que ZFC ne fournit pas une description fidèle du monde des objets mathématiques.

Plusieurs autres exemples seraient possibles. On pourrait mentionner l'acceptation inconditionnée des définitions imprédicatives, la confiance sans faille dans les logiques d'ordre supérieur, ou l'absence de tout scrupule à accepter des preuves transcendantes (des preuves prouvant un énoncé propre au langage d'une certaine théorie à l'aide d'autres théories), telles la preuve de A. Wiles du dernier théorème de Fermat, etc. Mais on devrait aussi observer que ces attitudes ne sont pas nécessairement la conséquence de l'acceptation, consciente ou pas, d'une forme de platonisme, et encore moins du platonisme naïf des objets et/ou de l'objectivité. Des justifications non platonistes, ou relevant de formes plus sophistiquées ou moins radicales de platonisme sont imaginables pour eux.

4. Le Dilemme de Benacerraf

Ceci dit, revenons au fil principal de notre discours concernant la conciliation philosophique entre les deux exigences mentionnées à la fin du §2. Une formulation moderne de ces exigences et des raisons qui rendent leur conciliation difficile tient à ce que les philosophes contemporains appellent « dilemme de Benacerraf » [2].

La première exigence est présentée comme étant celle qu'« une théorie de la vérité mathématique soit conforme avec une théorie générale de la vérité » (*ibid.*, p. 666). On pourrait douter qu'une telle théorie générale de la vérité soit possible ou souhaitable. Le point clef de la question n'est pourtant pas là. Au fond, ce que Benacerraf considère comme souhaitable est qu'on rende possible d'appliquer aux énoncés mathématiques une sémantique structurellement équivalente à celle des énoncés du langage ordinaire, et d'admettre une distinction entre vérité et justification. Pour revenir à Platon, c'est la possibilité de traiter les énoncés mathématiques comme des descriptions putatives d'un monde d'objets dont l'existence et les propriétés sont indépendantes de toute manière de valider ces descriptions, ce qui ferait, justement, que ces énoncés soient vrais ou faux indépendamment de leur justification. L'exemple de Benacerraf est simple. Considérons les deux énoncés suivants :

> « il existe au moins trois nombres parfaits plus grands que 17 » ;
>
> « il existe au moins trois villes plus anciennes que New York ».

La première exigence est satisfaite si l'on est en mesure d'assigner au premier énoncé la même structure sémantique qui est naturellement assignée au second de sorte que, comme le second, le premier puisse aussi être considéré comme vrai en raison de l'existence indépendante de trois objets satisfaisant à la condition relevante : dans le premier cas, celle d'être des nombres parfaits et d'être plus grands que 17.

La seconde exigence est présentée comme étant celle de se doter d'une explication plausible de la connaissance mathématique comme connaissance de ce que qui rend les énoncés mathématiques vrais : « puisque notre connaissance est une connaissance de vérités, ou peut être conçue comme telle » , écrit Benacerraf « un compte-rendu des vérités mathématiques [...] doit être articulable avec la possibilité d'avoir une connaissance mathématique » (*ibid.*, p. 667). À première vue, c'est une exigence facile à satisfaire, du moins si l'on pense classiquement la connaissance comme une croyance vraie justifiée. Ce qui complique les choses est une condition supplémentaire, devenue claire à la suite d'un célèbre argument de Gettier [13], sur lequel il serait impossible ici de revenir (mais qui a fait et fait objet d'une littérature philosophique immense). Benacerraf formule cette condition comme suit : on sait que p seulement si la croyance que p « est liée causalement de façon appropriée à ce qui fait que p est vraie » (Benacerraf [2]). Comme il a été souvent observé, la requête que le lien en question soit causal pourrait être omise, et Benacerraf lui-même est plus libéral peu après : « il doit être possible d'établir une sorte appropriée de connexion entre les conditions de vérité de p [...] et les raisons pour lesquelles p est dit être connue » (*ibid.*), c'est-à-dire, entre ce qui fait que p est vraie, ou simplement que p, et la justification qu'on a pour croire (et affirmer) p.

La discussion sur cette seconde exigence s'est concentrée sur ce qui pourrait faire que la justification de p soit fiable (*reliable*), dans les cas d'une justification d'un énoncé mathématique, pourvu que les énoncés mathématiques soient conçus comme la première exigence le prescrit. Mais je crois que c'est une erreur. Les mathématiques admettent des justifications d'une nature standard : les preuves et les arguments usuellement portés en faveur de l'admission d'un axiome ou d'une autre sorte de supposition liminaire. Si ces justifications ne sont pas fiables, rien ne l'est en mathématiques. La question est plutôt si ces justifications peuvent vraiment être prises comme des justifications de p, pourvu que p soit le contenu d'un énoncé mathématique au sens prescrit par la première exigence (p est ici une proposition, ce qui fournit le contenu d'un énoncé : ce que l'énoncé dit avoir cours). Il ne devrait pas être difficile de voir le problème : si un énoncé mathématique est une description putative d'un monde d'objets, alors une justification mathématique standard n'est une justification de cet énoncé (de son contenu) qu'à condition qu'elle tienne à ce monde d'objets, c'est-à-dire qu'elle soit apte à nous révéler comment ce monde est fait. Mais si l'existence et les propriétés des objets de ce monde sont indépendantes de toute manière de valider nos descriptions de ceci, comment peut-on être certain qu'il en est ainsi ? On sait certainement prouver en ZFC que tout ensemble peut être bien ordonné (ou en ZF que le principe du bon ordre est équivalent à l'axiome du choix), mais si ce que l'énoncé « tout ensemble peut être bien ordonné » nous dit est que tout habitant du monde des objets mathématiques qui a la propriété intrinsèque d'être un ensemble a aussi la propriété intrinsèque que tout autre habitant de ce monde qui en est un sous-ensemble non vide a un élément minimal, alors il semble bien difficile de comprendre comment notre preuve en ZFC puisse établir qu'il en est vraiment ainsi. Cette preuve semble nous dire quelque chose de ZFC ; mais pourquoi devrait-elle nous dire quelque chose du monde des objets mathématiques ?

Qu'un mathématicien, quelle que soit sa compétence en théorie des ensembles (certainement énormément plus grande que la mienne), ne proteste pas. En tant que mathématicien il n'est aucunement en une position privilégiée pour nous assurer qu'il en est ainsi, car le problème est justement ici celui de comprendre pourquoi la pratique argumentative des mathématiciens devrait leur permettre d'accéder à un monde qui leur est par définition transcendant. C'est ce que les philosophes modernes appellent « problème de l'accès ». Une forme de platonisme non naïf se doit de donner une réponse à ce problème, qui n'est, au fond, qu'une version modernisée de celui posé par Platon.

5. L'intuition mathématique

Mais la protestation pourrait continuer. Les mathématiciens, on pourrait dire, ont, ou du moins cultivent, une faculté spéciale, que les autres êtres humains n'ont pas, ou ne cultivent pas, l'intuition mathématique. Beaucoup de mathématiciens et philosophes ont fait et font une part importante à cette faculté : les noms de Poincaré, Brouwer et Gödel, pour ne pas mentionner Kant, ne sont que les premiers qui viennent à l'esprit. Mais la question ici n'est pas de discuter si l'intuition a ou n'a pas un rôle crucial à jouer en mathématiques, et ce n'est pas non plus de se demander comment elle fonctionne, au juste. Il s'agit plutôt de se demander si l'on peut répondre au problème soulevé par Platon, et repris par Benacerraf, en se limitant à postuler que les mathématiciens possèdent une telle faculté, conçue non pas comme celle de trouver rapidement la solution d'un problème ou la preuve d'un théorème, ou celle de survoler d'un seul coup les différents passages d'une démonstration, ou d'être à même de se réclamer d'une image (physique ou pas) pour remplacer un raisonnement complexe ou ennuyeux, mais plutôt comme une faculté qui permet de saisir le monde des objets mathématiques, sinon de manière complète, du moins de manière suffisante à garantir que les théories mathématiques en fournissent une description fidèle, encore que possiblement incomplète.

Personnellement, je n'ai pas cette faculté, et je n'ai pas la moindre idée de comment elle peut fonctionner. Mais cela n'est pas surprenant, car je ne suis pas un mathématicien. Il se peut que d'autres l'aient, et qu'elle fonctionne très bien chez eux. Admettre ceci ne règlerait pas le problème, cependant. Car, si d'un côté il est parfaitement naturel de supposer que, si elle a lieu d'être, cette faculté est indissociable d'une pratique mathématique suivie, de l'autre côté il devrait être clair que sa postulation ne pourrait fournir une solution au dilemme de Benacerraf qu'à condition qu'on soit prêt à admettre que ce n'est pas à cette pratique qu'on doit sa survenance. Car on ne peut pas espérer expliquer comment cette pratique puisse permettre d'accéder au monde des objets mathématiques en postulant qu'elle conduit à la survenance d'une faculté qui garantit cet accès. Ceci serait tout simplement circulaire. Pour éviter toute circularité, sans vouloir dissocier, pour autant, intuition et pratique mathématiques, il ne resterait alors qu'à supposer soit que certains reçoivent cette faculté en cadeau et deviennent mathématiciens de ce fait, soit que certains l'ont un jour reçue et ceci leur a permis d'accéder à ce monde et d'inaugurer une pratique qui a, ensuite, favorisé la survenance d'une faculté similaire chez d'autres, et ainsi de suite. Rien ne peut naturellement nous assurer qu'il n'en soit pas ainsi, mais il reste que répondre au dilemme de Benacerraf en faisant cette supposition serait comme expliquer un phénomène naturel par la survenance d'un miracle.

Malgré ceci, il est encore courant de penser qu'une théorie de l'intuition à la Gödel puisse fournir au platoniste une possibilité de répondre à ce dilemme. Encore que la notion d'intuition n'est certes pas la même chez Kant, Poincaré ou Brouwer, il reste que pour eux tous, ainsi que pour toute sorte d'intuitionniste, celle-ci est pensée comme une faculté active. Elle rend possible des constructions ou garantit la possibilité d'une répétition indéfinie de certains actes, en donnant ainsi origine aux objets, ou du moins aux contenus mathématiques. Pour Gödel, il ne semble pas que ce soit ainsi : l'intuition semble justement conçue comme ce qui permet de saisir quelque chose qui est déjà là. Voici ce qu'il écrit dans un célèbre article consacré à la philosophie de B. Russell [14, p. 133] :

> Les classes [...] peuvent bien être [...] conçues comme des objets réels, [...] comme des « pluralités de choses » ou des structures consistant en une pluralité de choses [...]. Il me semble que la supposition de tels objets est tout aussi légitime que la supposition des corps physiques et qu'il y a tout autant de raisons de croire en leur existence. Ils sont tout aussi nécessaires pour obtenir un système des mathématiques satisfaisant que les corps physiques sont nécessaires pour obtenir une théorie de la perception des sens qui soit elle-même satisfaisante.

Et quelques années plus tard dans un autre article, aussi célèbre, consacré à l'hypothèse du continu [15, pp. 483-484] :

> Malgré leur étrangeté à la perception des sens, nous avons quelque chose comme une perception des objets de

> la théorie des ensembles, et l'on peut s'en rendre compte en constatant que les axiomes exercent une certaine force sur nous du fait de leur vérité. Je ne vois pas pourquoi nous devrions être moins confiants à l'égard de ce type de perception, c'est-à-dire de l'intuition mathématique, qu'à l'égard de la perception des sens.

Pour éviter la circularité signalée plus haut, sans se réclamer d'une sorte de miracle, il faut cependant aller bien au-delà d'une déclaration de principe comme celle-ci : il faut immerger la notion d'intuition en un compte-rendu plus complexe, où l'appel à celle-ci n'apparaît plus comme la seule réponse au problème, mais plutôt comme un ingrédient d'une réponse plus complexe. C'est le cas, par exemple, des théories de l'intuition de Parsons [28] et de Heinzmann [19]. Je reviendrai plus loin brièvement sur la première, mais pas sur la seconde, car elle pourrait difficilement s'encadrer dans une sorte de platonisme.

6. Logicisme et néo-logicisme

Une réponse totalement différente vient de Frege [11, 12] et des versions plus récentes de son programme logiciste. En 1903, quand il publia le second volume de son œuvre majeure, les *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege savait déjà que, dans sa forme originale, sa réponse était viciée par une contradiction. Celle-ci avait été découverte par Russell, qui la lui avait communiqué peu avant. On connaît différentes manières pour éviter la contradiction, dont une avancée par Russell lui-même, en collaboration avec A. N. Whitehead [31]. Le problème est de savoir si ceci est faisable sans perdre la possibilité de présenter le système qui en résulte comme la pierre angulaire d'une solution du problème de Platon. Malgré ceci, et malgré la grande différence entre la thèse de Frege et le platonisme naïf, la position de Frege est souvent considérée comme l'archétype du platonisme mathématique. Ceci tient en une large mesure à une sous-évaluation de plusieurs de ses ingrédients principaux, ceux, en particulier, qui font sa spécificité.

Le principal tient au fait que cette réponse ne concerne que l'arithmétique des nombres naturels, et n'est nullement généralisable à d'autres branches des mathématiques, y compris la théorie des ensembles. Frege envisagea de suivre un parcours similaire pour les nombres réels (et complexes), mais, comme on le verra, celui-ci aurait dû dépendre d'une transformation importante qui, même indépendamment de la contradiction de Russel et des transformations qu'elle requiert, aurait pu mettre en doute la possibilité de fournir une solution du problème de Platon.

L'idée fondamentale de Frege est que les nombres naturels sont des objets abstraits qui existent indépendamment de nous, car leur existence est indispensable pour faire en sorte que certaines vérités logiques soient des vérités. Nous accédons donc à ces objets moyennant la découverte de ces vérités, ce qui tient à des preuves formelles au sein d'un système axiomatique qui révèle, de ce fait, la nature profonde de l'arithmétique. Ce qui est essentiel ici est que Frege prend ce système comme un système logique. S'il comporte des axiomes et des règles d'inférence, ceux-ci ne requièrent, donc, d'après lui, aucune justification spécifique autre que des arguments informels servant à en dévoiler la nature logique. Il s'ensuit que les nombres naturels ne sont pas seulement, pour lui, des objets abstraits ; ils sont des objets logiques, et ceci fait que leur non-existence, ou leur existence sous une forme différente, ne sont simplement pas envisageables, de même qu'il n'est pas envisageable que ce qu'on démontre (ou on postule) en logique ne soit pas vrai. Le travail du logicien, prenant de ce fait la place de l'arithméticien, ne consiste, alors, qu'à dévoiler ce qui ne pourrait pas ne pas exister ou exister différemment, en démontrant des vérités logiques appropriées.

On ne peut pas, ici, entrer dans des détails. Il suffira de dire que pour Frege la logique est la théorie générale des objets et des concepts et se fonde toute entière sur la distinction entre objets et fonctions et sur l'admission de l'existence de deux objets particuliers, distincts entre eux : le Vrai et le Faux. Une fonction doit être pensée comme une matrice admettant une ou plusieurs places vides. Quand toutes ses places vides sont remplies, – soit par des objets, pour une fonction de premier niveau, soit par d'autres fonctions, pour une fonction de niveau supérieur – elle acquiert une valeur qui est à son tour un objet. Un concept est une fonction à un argument (i. e. comportant une seule place vide) qui ne peut prendre comme valeur que le Vrai ou le Faux. Si la valeur d'un concept (de premier niveau) pour un certain objet comme argument est, respectivement, le Vrai ou le Faux, alors on dit que cet objet tombe ou ne tombe pas sous ce concept. Parmi les objets, il y en a d'un type particulier. Ce sont les extensions. Elles sont intimement liées aux concepts : toute extension est l'extension d'un concept, et deux concepts du premier niveau ont la même extension si et seulement si exactement les mêmes objets tombent sous eux : c'est la célèbre loi V de Frege, ou, pour être plus précis, un cas particulier de celle-ci (dit entre parenthèse : la contradiction découverte par Russel vient, en dernière instance, justement d'admettre ceci en même temps que de considérer que tout objet tombe ou ne tombe pas sous tout concept de premier niveau, c'est-à-dire qu'en tant que fonctions, ces concepts ont un domaine qui coïncide avec la totalité des objets).

Soit, alors, $[x : x \neq x]$ le concept sous lequel un objet tombe si et seulement s'il est distinct de lui-même. Sous ce concept aucun objet ne tombe. L'extension du concept $[z : \exists X[z = ext(X) \wedge X \approx [x : x \neq x]]]$ sur lequel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équi-numériques avec $[x : x \neq x]$ est naturellement un objet (deux concepts sont équi-numériques si et seulement si les objets qui tombent respectivement sous eux peuvent être mis en bijection). D'après Frege, il est le nombre 0. Soit $[x : x = 0]$ le concept sous lequel ne tombe que 0. L'extension du concept $[z : \exists X[z = ext(X) \wedge X \approx [x : x = 0]]]$ sur lequel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équi-numériques avec $[x : x = 0]$ est le nombre 1. Soit $[x : x = 0 \vee x = 1]$ le concept sous lequel ne tombent que 0 et 1. L'extension du concept $[z : \exists X[z = ext(X) \wedge X \approx [x : x = 0 \vee x = 1]]]$ sur lequel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équi-numériques avec $[x : x = 0 \vee x = 1]$ est le nombre 2.

Il serait facile de continuer indéfiniment. Mais Frege fait plus que cela. En simplifiant un peu :

i) il définit en général le nombre (cardinal) $\#P$ d'un concept P comme étant l'extension du concept $[z : \exists X[z = ext(X) \wedge X \approx P]]$ sur lequel tombent toutes (et seulement) les extensions des concepts équi-numériques avec P (de telle sorte que $0 = \#[x : x \neq x]$, $1 = \#[x : x = 0]$, $2 = \#[x : x = 0 \vee x = 1]$, ...);

ii) il définit la relation de succession entre deux objets, en établissant que y est le successeur de x si et seulement si $\exists X \exists z[Xz \wedge y = \#X \wedge x = \#X^{-z}]$, c'est-à-dire qu'il existe un concept X et un objet z, tels que z tombe sous X, y est le nombre de X, et x est le nombre du concept d'être un objet distinct de z qui tombe sous X;

iii) pour toute relation binaire R, il définit l'ancestrale faible de R, ce qui est à son tour une relation binaire, disons $R^{*=}$, telle que $xR^{*=}y$ si et seulement si, pour tout concept X qui se transmet par R (c'est-à-dire tel que z tombe sous X si wRz et w tombe sous x), y tombe sous X si x le fait;

iv) enfin, il identifie les nombres naturels aux objets qui sont avec 0 dans l'ancestrale faible de la relation de successeur, et il prouve que ces objets satisfont à des conditions correspondantes aux axiomes de Peano (au second ordre).

L'existence indépendante des nombres naturels en tant qu'objets logiques est ainsi assurée par leur identification avec des objets dont l'existence est assurée par les lois de la logique, qui nous permettent aussi d'accéder à ces objets en prouvant leurs propriétés.

Pour les nombres réels, aucune démarche similaire n'est possible, simplement car ils ne sont pas dénombrables. Frege aurait pu parvenir, bien sûr, à définir ces nombres par le truchement d'une extension appropriée du domaine des naturels, mais il préfère une autre stratégie, s'accordant avec ce qui pour lui est un fait : que les nombres réels ne sont pas des cardinaux, mais des mesures de grandeurs. Il étend la notion d'extension d'un concept à celle d'extension d'une relation binaire (si $[x, y : \phi(x, y)]$ est une telle relation, $ext_x[x, y : \phi(x, y)]$ est un concept et $ext_y(ext_x[x, y : \phi(x, y)]) = ext[x, y : \phi(x, y)]$ est l'extension de cette relation) et se réclame de conditions logiques appropriées pour définir, parmi les extensions des ces relations, les extensions des permutations sur un domaine d'objets. Il impose ensuite à celles-ci d'autres conditions, et identifie les domaines de ces extensions satisfaisant à ces conditions avec des domaines de grandeurs (ce qui, *mutatis mutandis* revient à demander qu'un tel domaine est un groupe additif totalement ordonné, dense et Dedekind-complet). Enfin, il suggère d'identifier les nombres réels avec les rapports (définis par une version appropriée de la définition V.5 des *Éléments* d'Euclide) sur un domaine de grandeurs, en montrant que ces rapports forment des structures isomorphes quel que soit le domaine de grandeur sur lequel ils sont définis.

Même aux yeux de Frege, cette définition ne fournit, cependant, aucune garantie que les nombres réels existent. Pour le prouver à l'aide de la seule logique, c'est-à-dire sans se réclamer de la supposition de l'existence d'un domaine de grandeurs non logiques, celui-ci suggère de construire un tel domaine de grandeurs à partir des nombres naturels, en supposant que la construction sauvegarde la nécessité de l'existence : pourvu que les nombres naturels existent nécessairement, aussi les rapports qu'on obtient de cette manière devraient, d'après lui, exister nécessairement. C'est très astucieux (et en ligne avec une longue tradition historique opposant nombres et grandeurs), mais on peut douter que cette définition ait les mêmes propriétés de logicalité que celle des nombres naturels, et qu'elle permette ainsi de répondre au problème de Platon de la même manière que cette dernière.

Si la loi V n'est pas restreinte et si l'on se donne la liberté de former des concepts $[x : \phi(x)]$ (et relations $[x,\ldots,y, : \phi(x,\ldots,y)]$) à partir de toute formule du langage, ce qui équivaut à admettre un schéma de compréhension non restreint, le système de Frege génère des contradictions, car, s'il en est ainsi, cette loi assure l'existence de l'extension de tout concept ainsi formé, et donc aussi, par exemple, de l'extension du concept sous lequel sont censées tomber (toutes) les extensions d'un concept qui ne tombent pas sous ce dernier concept (et seulement ces extensions). Mais il n'est pas facile de comprendre comment la loi V et/ou le schéma de compréhension peuvent être restreints de sorte à éviter toute contradiction et à sauvegarder en même temps la possibilité de définir les nombres naturels et réels d'une manière analogue à celle de Frege.

L'idée de Russell et Whitehead fut de hiérarchiser le système moyennant une partition en types et ordres. Mais cela ne permet de retrouver les définitions de Frege qu'à l'aide d'axiomes dont la nature logique est largement questionnable, ce qui conduit à perdre la nature logique de la définition. On pourrait penser que cela n'est pas grave. Et mathématiquement, il ne l'est sans doute pas. Mais si la définition des nombres naturels et réels qui en résulte ne peut plus être traitée de logique, l'argument de Frege pour assurer que ces nombres existent indépendamment de nous et que pouvons y accéder par notre théorie s'écroule (à supposer qu'il tient dans sa forme originale), et la réponse au problème de Platon tombe à l'eau. À plus forte raison ceci est naturellement le cas si le système logique de Frege – qui, en modernisant, est assimilable à une logique du second ordre avec compréhension pleine – est remplacé par la théorie des ensembles en une de ces formes. Dans ce cas, la consistance est (vraisemblablement) assurée, mais les nombres natures et réels se trouvent à être identifiés avec des ensembles formant une structure appropriée, ce qui fait qu'ils perdent toute apparence d'objets logiques.

Sur ce point une clarification est peut-être nécessaire : le point ici ne tient pas aux difficultés inhérentes à la théorie des ensembles évoquées à la fin de la section 3 ; il tient simplement au fait qu'il serait fort difficile d'argumenter en faveur de la nature logique de cette théorie (ce que, d'ailleurs, personne n'a jamais fait, à ma connaissance), ce qui rend clair d'emblée que cette théorie n'a aucune chance de se soustraire au problème de Platon, et de servir donc de point d'ancrage pour une solution de ce problème similaire à celle proposée par Frege.

Une nouvelle espérance pour un platonisme arithmétique à la Frege est, par contre, apparue lorsque C. Wright [33] a observé que la définition de Frege des nombres naturels peut être répétée, *mutatis mutandis*, sans se réclamer de la notion d'extension d'un concept, et par conséquent, de la loi V. Il suffit de remplacer cette loi avec une autre du même type, dite (pour des raisons qu'il serait long d'expliquer) « principe de Hume », et que Frege prouve à partir de la première. Une fois ce principe prouvé, la loi V ne joue plus aucun rôle essentiel dans sa définition. Ce principe affirme que le nombre (cardinal) $\#P$ d'un concept P est le même objet que le nombre $\#Q$ d'un concept Q si et seulement si P et Q sont équi-numériques. Comme la condition d'équi-numéricité est exprimable par une formule de la logique du second ordre (sans appel au schéma de compréhension), ce principe peut être ajouté à cette logique comme un nouvel axiome, fournissant une définition implicite des nombres des concepts. Ceci permet de définir les nombres naturels successifs juste à la manière de Frege (directement par $0 = \#[x : x \neq x]$, $1 = \#[x : x = 0]$, $2 = \#[x : x = 0 \vee x = 1], \ldots$) et d'utiliser la définition précédente de la relation de succession, dès son ancestral faibles et de la propriété d'être un tel nombre, pour obtenir une théorie, dite « Arithmétique de Frege », dont il est facile de prouver l'équi-consistance avec l'arithmétique de Peano (la littérature sur cette théorie et sur ces implications philosophiques est très large ; je me limite à signaler ici : Boolos [5] ; Hale & Wright [16] ; Heck [17] ; et, pour les lecteurs de la *Gazette*, Égré [8].) Dans cette théorie, il est aussi facile de retrouver comme des théorèmes les axiomes de Peano (naturellement au second ordre) et les définitions usuelles de l'ordre, de l'addition et de multiplication, en ne réclament que d'un schéma de compréhension Π_1^1 (ou Σ_1^1).

Plus récemment d'autres auteurs ont montré qu'il y a aussi manière de restreindre et/ou reformuler la loi V de Frege et/ou le schéma de compréhension, de telle manière à obtenir d'autres théories du second ordre, aussi équi-consistantes avec l'arithmétique de Peano, où la définition des nombres naturels de Frege peut être répétée en restant encore plus proche de l'original. Je ne mentionnerai que la suggestion très récente de F. Ferreira [9]. Heck [18] a montré que si la loi V de Frege est laissée telle quelle, mais le schéma compréhension est restreint à des formules Δ_0^1 (des formules sans quantificateurs du second ordre), le système de Frege devient consistant. Mais ce nouveau système est très faible, au sens qu'il ne permet d'interpréter que de petits fragments de l'arithmétique de Peano. Il suffit cependant d'ajouter au langage de ce système une seconde sorte de variables prédicatives monadiques et d'admettre un schéma de compréhension non restreint pour ces variables, tout en limitant la loi V à des variables de la première sorte, pour obtenir un système bi-sortal équiconsistant avec l'arithmétique de Peano, dans lequel on peut reformuler toutes les définitions de Frege et retrouver tous ses résultats. En d'autres termes, il suffit d'une assez petite correction de la théorie de Frege pour dépasser l'objection meurtrière de Russell.

Est-ce qu'il suffit de se réclamer de ce système ou de l'arithmétique de Frege pour retrouver une solution plausible du problème de Platon pour ce qui est de l'arithmétique des nombres naturels, et, donc, une version acceptable du platonisme arithmétique ? Alors que Ferreira ne le prétend nullement, pour ce qui est de son système, C. Wright et son plus étroit collaborateur, B. Hale pensent que c'est ainsi pour l'arithmétique de Frege. D'après eux, le principe de Hume est, en effet, une vérité analytique (tout en n'étant pas, *pace* Frege, un axiome logique), et ceci suffit pour s'assurer que les nombres naturels existent indépendamment de nous, en tant que cardinaux finis, et que nous pouvons les connaître en prouvant des théorèmes au sein de cette théorie. Cette thèse a donné et continue à donner lieu à une discussion vivace parmi les philosophes des mathématiques dont le point essentiel est de décider si l'arithmétique de Frege a ou non un avantage essentiel sur celle de Peano, permettant de la considérer non pas comme une version de l'arithmétique parmi d'autres, mais comme la véritable théorie des nombres naturels existant en dehors de nous. Personnellement, je le ne crois pas, ainsi que je ne crois pas non plus que l'arithmétique de Frege puisse en quelque sorte se soustraire au problème de Platon, et fournir ce point d'ancrage pour une solution de ce problème, qui, comme on l'a remarqué ci-dessus, ne peut certes pas être fournie par la théorie des ensembles. Sur ce point, cependant, je ne peux ici que laisser le lecteur se faire son idée.

7. Structuralismes

Un des aspects cruciaux du platonisme arithmétique de Frege qui reste intact dans sa version moderne de Hale et Wright est qu'il se fonde sur l'identification des nombres naturels avec des objets abstraits d'une nature particulière qui sont supposés être donnés avant (et indépendamment de) l'arithmétique elle-même. Pour Frege, ces nombres sont des extensions, en particulier les extensions de certains concepts. Il suffit de remarquer que les définitions mentionnées plus haut pour 1, 2, ... peuvent être réécrites ainsi $1 = \#[x : x = \#[x : x \neq x]]$, $2 = \#[x : x = \#[x : x \neq x] \vee x = \#[x : x = \#[x : x \neq x]]]$, ... pour comprendre que ces définitions sont, dans l'essentiel, indépendantes entre elles : selon ces définitions, la nature intrinsèque du nombre 37 ne dépend nullement de celle des nombres qui le précèdent dans l'ordre usuel ; ce n'est que notre commodité d'exposition qui fait que nous le définissons à l'aide d'eux ; cette définition ne dépend nullement de la relation d'ordre définie sur ces nombres. En passant à la proposition de Hale et Wright, les choses ne changent pas sur le fond. Ce n'est que l'image intuitive (ou informelle) que nous pouvons avoir de ce qui est le nombre (cardinal) d'un concept qui peut nous faire penser qu'un tel nombre est déjà défini comme un objet arithmétique. En réalité, il n'est rien d'autre qu'un objet associé à un concept par un principe qui ne dépend aucunement d'une structure d'ordre, additive ou multiplicative. Cela montre que selon ces deux conceptions, les nombres naturels sont conçus comme des objets donnés indépendamment non seulement de l'arithmétique, mais aussi les uns des autres. C'est en regardant leurs propriétés intrinsèques que nous découvrons (et montrons) qu'ils satisfont à une ou plusieurs structures.

Cela est une des choses qui font que le platonisme de Frege et de Hale et Wright est proche du platonisme entendu de manière traditionnelle, encore que bien plus sophistiqué que sa version naïve. Mais c'est aussi ce qui le rend vulnérable à une attaque difficilement parable. Une manière de le lancer est de se réclamer d'un autre argument de Benacerraf [3] : pourvu qu'autant l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$ que l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}$ puissent être dotés d'une relation d'ordre, d'une addition et d'une multiplication leur permettant de satisfaire aux axiomes de Peano (au premier ordre), il est naturel de se demander si les éléments de l'un de ces ensembles ne seraient pas les nombres naturels. Si la réponse est positive, il faudra dire si les nombres naturels sont les éléments du premier ou du second ensemble. Si elle est négative, il faudra dire pourquoi ils ne le sont pas, et pourquoi ceux d'un autre ensemble le sont. Il est clair qu'aucun argument, remarque, considération venant de notre pratique arithmétique ne peut nous aider à donner une réponse. Il semble donc que tout choix qu'on pourrait faire d'identifier les nombres naturels avec des objets particuliers, donnés avant (et indépendamment de) l'arithmétique, y compris ceux de Frege et de Hale et Wright, est arbitraire, du moins du point de vue de la pratique arithmétique. Ce n'est pas surprenant, au fond car c'est justement ce que le problème de Platon signale. Mais cela suffit à montrer que les réponses de Frege et de Hale et Wright à ce problème ne tiennent pas, si elles ne sont pas accompagnées autant d'une justification extra-arithmétique pour les choix dont elles dépendent, que d'une justification du fait d'accepter une justification extra-arithmétique (et probablement aussi extra-mathématique, *tout court*) pour un tel choix.

La réplique de Hale et Wright fait écho à celle que Frege lui-même aurait pu avancer : dans son essence le concept d'un nombre naturel est le concept du cardinal d'un concept (ou ensemble). Mais en est-il vraiment ainsi ? Et pourquoi ? Et ce concept a-t-il vraiment une essence spécifique ? Un passage célèbre tiré de *Was sind und was sollen die Zahlen ?* de Dedekind [7, §73], suggère qu'il n'en est pas ainsi :

> Si en considérant un système simplement infini N [ce qu'on appellerait aujourd'hui « une progression »], ordonné par une représentation [ce qu'on appellerait aujourd'hui « une application »] φ on fait totalement abstraction de la nature particulière des éléments, que l'on ne retient simplement que le fait qu'ils sont différents et ne considère que les relations établies entre eux par la représentation φ qui définit l'ordre, alors ces éléments s'appellent « nombres naturels » ou « nombres ordinaux », ou encore tout simplement « nombres », et l'élément fondamental 1 [dans le système de Dedekind les nombres naturels n'incluent pas le zéro ou élément neutre de l'addition], s'appelle « le nombre fondamental de la suite N des nombres ».

Dedekind continue en qualifiant les nombres naturels ainsi conçus de « libre création de l'esprit humain » , ce qui semble bien loin de l'esprit du platonisme. Mais ce n'est pas ce qui intéresse au présent. Le point est plutôt que ce que Dedekind suggère ici est que les nombres naturels (et, vraisemblablement, pour lui, toute autre entité mathématique) n'ont pas des propriétés intrinsèques, ne sont pas des objets particuliers sur lesquels on définit une structure, mais sont les places mêmes d'une structure, indépendamment de toute possible exemplification que cette structure puisse avoir. L'argument de Benacerraf semble supporter cette conception, comme Benacerraf lui-même l'observe : il arrive même à soutenir que les nombres naturels ne sont certainement pas des objets, car tout objet a une nature particulière et les nombres naturels ne l'ont pas. C'est le point de vue usuellement dit « structuraliste » : les mathématiques ne traitent pas d'objets, mais de structures (pourvu que l'on puisse traiter des secondes sans traiter des premiers).

Les versions du structuralisme en philosophie des mathématiques sont plusieurs et très différentes entre elles. Ici on ne saurait même pas les lister. Je me limiterai à une question : le structuralisme en philosophie des mathématiques est-il nécessairement opposé au platonisme ? Aussi étrange que cela puisse paraître à première vue, la réponse pourrait être négative. Je vais considérer deux exemples.

Le premier concerne le « structuralisme *ante rem* » de S. Shapiro [32] ; mais, pour une vue similaire, cf. aussi Resnik [30]. Selon Shapiro (*ibid.*, pp. 74-83), « une structure est la forme abstraite d'un système » et un système est « une collection d'objets ayant certaines relations ». Une structure est donc pensée comme un réseau connectant entre elles des places vides qui sont censées être occupées par des objets donnés entretenant certaines relations les uns avec les autres. Quand cela se réalise, le système formé par ces objets exemplifie la structure et celle-ci fournit au système sa forme.

Mais non seulement la structure persiste lorsqu'un système qui l'exemplifie est supprimé, ou oublié (comme le propose Dedekind); elle existe aussi avant et indépendamment de tout système l'exemplifiant. Et ses places – les places elles-mêmes, non pas les objets qui les occupent ou pourraient les occuper – sont les objets mathématiques, d'après Shapiro. Ceux-ci existent, donc, du fait de l'existence d'une structure. C'est une forme de platonisme structuraliste, comme Shapiro le revendique explicitement. Si l'on admet qu'une structure existe indépendamment de nous, ses places aussi, et donc les objets mathématiques, existent indépendamment de nous, et nous pouvons y avoir accès en étudiant la structure elle-même. Cette idée requiert une explication de ce que que cela pourrait bien signifier pour une structure d'exister non seulement avant et indépendamment de tout système l'exemplifiant, mais aussi indépendamment de nous. On pourrait dire, en suivant Shapiro, qu'une structure est définie par un système consistant et catégorique d'axiomes, et que le fait même que ce système est établi permet à la structure d'exister avant et indépendamment de tout modèle qu'elle puisse avoir. Mais une telle structure n'existe pas, alors, indépendamment de nous, car il est difficile de penser qu'un système d'axiomes puisse être établi autrement que par des hommes qui le conçoivent et le proposent.

Pour mieux préciser sa notion de structure, Shapiro présente une théorie des structures, inspirée par la théorie des ensembles, en particulière par ZF. Mais si une structure existe du fait des conditions fixées par cette théorie, elle ne semble pas non plus exister indépendamment de nous, non plus que les individus implicitement définis par une théorie axiomatique n'existent pas comme tels avant cette théorie. On pourrait penser, alors, que le structuralisme *ante rem* est une forme de platonisme qui ne demande pas que les objets mathématiques existent indépendamment de nous. Soit. Mais ce n'est pas tout, car il semble aussi nier que les objets mathématiques existent indépendamment des théories qui traitent d'eux, au moins si ces théories sont identifiées avec les systèmes axiomatiques qui définissent la structure dont ces objets sont des places. Si c'est ainsi, le problème de Platon est certainement résolu, mais au prix de renoncer bel et bien au première volet du dilemme de Benacerraf. Peut-être que le structuralisme *ante rem* est un compte-rendu approprié des mathématiques, en particulier, comme le souligne Shapiro lui-même, des mathématiques modernes, mais, *pace* Shapiro, on pourrait douter, alors, qu'il s'agisse d'une forme de platonisme : on connaît plusieurs formalisations de l'arithmétique admettant des modèles non isomorphes; il serait difficile d'admettre qu'elles définissent la même structure; donc elles ne traitent pas des mêmes objets, au sens de Shapiro, et il y aurait, ainsi, différentes sortes de nombres naturels, selon s'ils sont les places d'une de ces structures ou d'une autre : très mauvaise nouvelle pour un platoniste.

Mais il y a plus [22]. Considérons une structure S admettant un automorphisme non trivial $g : \mathsf{S} \to \mathsf{S}$ et supposons que a et b soient des éléments de S, tels que $g(a) = b$. Il est clair que ces éléments ont exactement les mêmes propriétés structurelles. On devrait donc les prendre comme étant la même place dans la structure, et donc le même objet. Il suivrait, par exemple que $i = -i$, ce qui est évidement contraire à toute théorie des nombres complexes. On peut répondre que pour un structuraliste *ante rem*, le seul fait que dans une telle théorie, l'on prouve que $i \neq -i$ suffit pour établir que i et $-i$ ne sont pas le même objet. Mais alors, un objet mathématique doit être quelque chose de plus qu'une simple place dans une structure. Mais quoi au juste ?

Le deuxième exemple que je vais considérer donne, entre autres, une réponse à cette question. C'est le structuralisme de C. Parsons [28]. Celui-ci s'accorde avec Shapiro sur le fait que les mathématiques modernes traitent d'objets structuraux, c'est-à-dire de places dans des structures conçues comme des objets, mais il observe que certains de ces objets sont fixés avant l'établissement de la structure, et que, au contraire, celle-ci est justement conçue pour étudier ces objets en tant que ces places. Il s'agit, certes, d'objets abstraits, mais d'un type très particulier : Parsons les appelle « objets quasi-concrets ». Ils se caractérisent par le fait d'être intimement liés, par une relation que Parsons appelle « représentation » à des objets concrets qui participent à leur détermination et sont aussi essentiels pour leur identification.

Il y a plusieurs exemples non mathématiques de ce type d'objets. Un exemple assez parlant tient aux phonèmes. Un phonème est sans doute un objet abstrait, mais on ne saurait pas l'identifier autrement que par un son concret (ou un symbole qui renvoie à ce son).

Dans ce cas, et dans la plupart des cas nonmathématiques, il semblerait cependant que la relation entre un objet quasi-concret et son représentant concret n'est que celle d'un *type* à un *token* (c'est-à-dire, par exemple, d'une nouvelle, telle *Madame Bovary,* à une copie de cette nouvelle). Dans les cas des objets quasi-concrets mathématiques, les choses sont un peu plus compliquées. L'exemple principal de Parsons concerne les nombres entiers positifs représentés, à la manière de Hilbert [20, 21] par des collections de traits : |, ||, |||... Si l'on considère, par exemple que ||| et ||| ne sont que deux manifestations de la même collection, alors une collection de traits est un *type* et il est, à son tour un objet quasi-empirique. Mais si l'on considère qu'elles sont deux collections équivalentes, alors une collection de traits est un *token* de ce *type*, et il est donc un objet concret. Mais pour prendre une collection de traits comme un nombre entier, il ne suffit pas seulement de la prendre comme *type*, il est aussi nécessaire de définir la bonne relation d'équivalence sur ses *token*, et d'établir quelles sont les manipulations et observations qu'on peut faire sur ceux-ci qui correspondent à des opérations et des démonstrations sur les nombres. Une fois qu'on l'aura fait, on disposera d'une théorie élémentaire (et finitaire) des nombres entiers positifs, dans laquelle les théorèmes seront prouvés en observant et en travaillant sur des collections de traits, ce qui manifeste, selon Parsons, une forme d'intuition ayant trait aux mathématiques. Cette théorie, quasi-empirique et intuitive, n'est certainement pas l'arithmétique de Peano dans toute son extension et sa puissance déductive, mais l'on peut penser que la première est à l'origine de la seconde, au sens que la seconde traite de la structure que la première exhibe, tout en la complétant de manière appropriée.

Les mathématiques grandiraient, ainsi, en passant de structure en structure : au stade le plus avancé, ses structures fonctionneraient comme celles du structuralisme *ante rem*, au sens où les objets mathématiques ne seraient que leurs places prises en tant que telles, mais autant ces structures que leurs places garderaient, pour ainsi dire, le souvenir d'autres structures, plus rudimentaires, qui ne seraient que des formes de systèmes d'objets quasi-concrets dont nous avons l'intuition. La différence entre i et $-i$ pourrait alors remonter à l'origine de la théorie des nombres complexes. On a là, sans doute, une forme de platonisme, du moins du platonisme des objets, car, d'après ce compte-rendu, les mathématiques traitent d'objets abstraits. Mais l'existence indépendante de ces objets semble fort douteuse. Tout au plus on pouvait considérer les représentants concrets des objets quasi-concrets comme des artefacts qui, une fois produits, ne dépendent plus de ceux qui les ont produits. Mais il resterait que les objets quasi-concrets eux-mêmes, ainsi que leurs théories n'apparaîtraient qu'une fois que des hommes auraient décidé de la manière de regarder ces artefacts et de travailler avec eux.

8. Conclusions

On est certainement loin d'avoir mentionné toutes les versions du platonisme qui peuplent la philosophie contemporaine des mathématiques. Pour ne rester qu'à celles le plus souvent discutées, on aura aussi pu traiter des applications aux mathématiques de l'*Object Theory* de E. Zalta [34], [35], et [23], ce qu'on pourrait considérer, à son tour, comme une forme de platonisme structuraliste, du « procéduralisme » de K. Fine [10], du tout récent « trivialisme » de A. Rayo [29], ou des plus classiques « platonisme pur sang » de M. Balaguer [1] et « platonisme physicaliste » de P. Maddy [24, 25]. Pour ce faire d'une manière appropriée, encore que sommaire, il faudrait, cependant, disposer d'un espace que je n'ai pas. Le lecteur intéressé pourra consulter directement les ouvrages de référence. Je voudrais en revanche terminer sur une note plus personnelle.

Ce qui me semble essentiel dans la position platoniste est le platonisme des objets, et, en particulier, la thèse que les théories mathématiques traitent d'objets (abstraits) qui en sont indépendants, de sorte que des théories différentes (et non équivalentes) peuvent traiter des mêmes objets. Cette thèse n'implique pas que ces objets existent indépendamment de notre activité cognitive. Au sens habituel du verbe « exister » – ce pour lequel l'on peut dire, avec Kant, que « existant » n'est pas un prédicat – elle n'implique même pas que ces objets existent. Tout ce qu'elle implique est que ces objets soient fixés indépendamment des théories qui en traitent. Si l'on veut en tirer la conclusion qu'ils existent, et, même qu'ils existent indépendamment de ces théories, alors on devra accepter que « exister » signifie ici quelque chose d'assez particulier qu'il s'agira de clarifier. Mais pour notre but présent, très limité, on peut laisser ce point de côté. Il suffira de dire qu'un objet abstrait est, à mon esprit, un contenu intellectuel fixé, auquel on peut se référer dans notre langage, et auquel on peut accéder par nos pensées, et pour lequel on peut dire (en donnant à ceci un sens précis, qui pourra changer d'un domaine à l'autre) que différents sujets épistémiques peuvent se référer et/ou accéder au même contenu.

C'est, par exemple, le cas de Emma Bovary, ou de son mari Charles. Je viens de me référer à eux par des noms propres. Et ce que je dis, quand j'affirme que si je parle de Emma Bovary et de son mari Charles, et que vous le faites aussi, l'on parle des mêmes choses, me semble très clair. De plus, il me semble que cette affirmation est vraie, du moins dans des circonstances habituelles et par rapport à une communauté intellectuelle qui partage les éléments fondamentaux de la littérature française. Est-ce que cela suffit pour en conclure que Emma Bovary et son mari Charles sont des objets ?

Si l'on voulait répondre que oui, je ne m'y opposerais pas. Mais j'ajouterais alors qu'un objet mathématique est quelque chose de différent, je dirais plus, qu'un objet au sens dans lequel Emma Bovary en est un. Car, le nombre 28, par exemple, n'est pas seulement quelque chose auquel je me réfère par le numéral que je viens d'écrire, et duquel je peux parler ainsi que vous le faites. Il est aussi un contenu que je peux prendre comme ayant étant fixé avant de dire de lui, ou même de découvrir, qu'il est un nombre parfait, et qu'il est le plus grand des nombres parfaits plus petits que 100 et le plus petit de ceux plus grands que 10. Il n'en est pas de même pour Madame Bovary. Toute propriété qu'on peut lui attribuer (non arbitrairement) lui est essentielle au sens que la lui attribuer fait partie de l'acte de fixer le contenu intellectuel qui porte ce nom. Certes, je peux avoir oublié, ou ne jamais avoir su qu'elle fréquentait le *Lion d'Or*, mais Flaubert n'aurait pas fixé ce même contenu intellectuel s'il n'avait pas établi qu'elle le faisait. On pourrait protester : on pourrait aussi dire que 28 ne serait pas la même chose que ce qu'il est s'il n'était pas un nombre parfait. On peut certes le dire. Mais cela me semble faux. Prenez les axiomes de l'arithmétique de Peano au second ordre. Il me semble suffisant de leur ajouter quelques définitions explicites du type « $m =_{df} n'$ » pour fixer ce contenu que nous dénotons par « 28 ». Mais cela ne suffit pas encore pour établir si ce nombre est parfait ou pas. Pour ce faire, il faut encore définir une addition et une multiplication sur l'ensemble des individus qui forment le domaine des variables individuelles qui interviennent dans ces axiomes. C'est sur ces individus qu'on définit ces opérations, ce qui est bien différent de dire que la définition de ces opérations participe à la fixation de ces individus.

Les philosophes distinguent une attitude propositionnelle *de re* qui a lieu quand de x l'on dit qu'il est P, d'une attitude propositionnelle *de dicto*, qui a lieu quand l'on dit que x est P. En généralisant, je dirais alors que lorsqu'on définit l'addition et la multiplication sur les nombres naturels au sein de l'arithmétique de Peano au deuxième ordre, on accède à ces nombres *de re*, non pas *de dicto* : on les prend comme étant là avant que la définition ne soit donnée.

Ceci étant dit, revenons sur un point mentionné ci-dessus. On a dit que ce qui est essentiel dans la thèse platoniste est que les théories mathématiques traitent d'objets (abstraits) qui leur sont indépendants, et que cela implique que ces objets sont fixés indépendamment des théories qui en traitent. Doit-on en convenir ? Je crois qu'il faut faire une distinction. Ce qui est d'après moi caractéristique de cette activité intellectuelle qu'on appelle « mathématiques » est qu'elle a trait à des théories qui traitent d'objets fixés indépendamment d'elles. Mais cela n'implique pas qu'il en soit ainsi pour toute théorie mathématique. Certaines – les plus élémentaires, en un sens qu'il s'agirait de mieux éclairer – accomplissent plutôt la tâche de fixer des objets dont d'autres traitent aussi. On pourrait avancer, par exemple, que c'est le cas de l'arithmétique de Peano au deuxième ordre, dépourvue des définitions explicites de l'ordre, de l'addition et de la multiplication. Je ne m'engage pas sur ceci. Ce qui m'importe est qu'on me concède que ces nombres sont fixés de manière indépendante de beaucoup de théories qui sont censées traiter d'eux. Par exemple de l'arithmétique de Peano au premier ordre, que je ne vois que comme ce qui résulte de l'effort d'étudier ces objets (de manière nécessairement imprécise) à l'aide des seules ressources d'un langage du premier ordre. À son tour, on pourrait penser l'arithmétique de Peano au deuxième ordre comme une manière de préciser et généraliser ce dont on parle dans l'arithmétique quasi-empirique et intuitive de Hilbert, de sorte à permettre des quantifications (univoques) sur ces objets qui dans cette dernière arithmétique n'auraient simplement pas de sens (car dans celle-ci les seules quantifications possibles sont métalinguistiques). Les mathématiques me semblent donc procéder par des fixations successives, de plus en plus précises, de contenus que nous sommes bien légitimés à traiter d'objets, car c'est bien de ces mêmes objets qu'on continue à traiter en faisant des mathématiques plus avancées (encore, en un sens qu'il s'agirait de clarifier).

Soutenir qu'il en est ainsi, c'est, à mon sens, épouser une version du platonisme des objets qui, tout en requérant encore beaucoup de clarifications, ne semble pas souffrir du problème de Platon. Mais, *quid*, alors, du platonisme de l'objectivité. C'est une question plus complexe, car pour l'aborder il faudrait rendre clair ce que « vrai » et « faux » signifient au juste en mathématiques. Laissez-moi avouer que mes idées sur ce point sont encore trop confuses pour pouvoir indiquer une ligne de réflexion possible, même de la manière très vague et programmatique dans laquelle je viens de le faire pour le platonisme des objets. Pour paraphraser, en le renversant, le slogan de Field, cité dans l'Introduction, mon but n'est, par ces brèves remarques conclusifs, que de suggérer cette thèse : même si les mathématiques ne sont pas objectives (et il est plausible de croire qu'elles ne le soient pas, complètement), il y a certainement des objets mathématiques (et ceci devrait permettre d'établir que les mathématiques sont au moins partiellement objectives).

Références

[1] M. Balaguer. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, New York, 1998.

[2] P. Benacerraf. « Mathematical Truth ». *The Journal of Philosophy* **70**, nº 19 (1973), p. 661–679.

[3] P. Benacerraf. « What Numbers Could not Be ». *The Philosophical Review* **74**, nº 1 (1965), p. 47–73.

[4] P. Benacerraf et P. Putnam, éds. *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.), 1964 : IIème édition 1983, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] G. Boolos. *Logic, Logic, and Logic*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1998. 458 p.

[6] M. F. Burnyeat. « Platonism and Mathematics: A Prelude to Discussion ». In : A. Graeser. *Mathematics and Metaphysics in Aristotle*. Haupt, Bern et Stuttgart, 1987, p. 213–40.

[7] R. Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg, 1888, p. 1–47. Traduction française, par H. Benis Sinaceur: « Que sont et à quoi servent les nombres », in R. Dedekind, *La création des nombres*, Vrin, Paris, 2008, p. 91-216.

[8] P. Égré. « Le Raisonnement par récurrence : quel fondement ? » *La Gazette des mathématiciens*, nº 146 (2015), p. 27–37.

[9] F. Ferreira. « Zigzag and Fregean Arithmetic ». À paraître. MS présenté au work-shop *Ontological Commitment in Mathematics. In Memoriam of Aldo Antonelli*. IHPST, Paris, (14-15 déc. 2015).

[10] K. Fine. « Our Knowledge of Mathematical Objects ». In : T. S. Gendler et J. Hawthorne. *Oxford Studies in Epistemology*. Vol. 1. Clarendon Press, Oxford, 2005, p. 89–109.

[11] G. Frege. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Koebner, Breslau, 1884.

[12] G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik*. Pohle, Jena, 1893-1903 (2 vol.)

[13] E. L. Gettier. « Is Justified True Belief Knowledge? » . *Analysis* **23**, nº 6 (1963), p. 121–123.

[14] K. Gödel. « Russell's Mathematical Logic ». In : P. A. Schlipp. *The Philosophy of Bertrand Russell*. Northwestern University Press, Evanston (Ill.), 1944, p. 125–153.

[15] K. Gödel. « What Is Cantor's Continuum Problem ? » In : P. Benacerraf et P. Putnam. 1964-1983, p. 258–273. Ière éd. ; 470-485, IIème éd.

[16] B. Hale et C. Wright. *The Reason's Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 2001.

[17] R. G. Heck. *Frege's Theorem*. Clarendon Press, Oxford, 2011.

[18] R. G. Heck. « The consistency of predicative fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik* ». *History and Philosophy of Logic* **17** (1996), p. 209–220.

[19] G. Heinzmann. *L'intuition épistémique : une approche pragmatique du contexte de compréhension et de justification en mathématiques et en philosophie*. Vrin, Paris, 2013.

[20] D. Hilbert. « Neubegründung der Mathematik : Erste Mitteilung ». *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, nº 1 (1922), p. 157–177.

[21] D. Hilbert. « Über das Unendliche ». *Math. Ann.* **95** (1926), p. 161–190.

[22] J. Keränen. *The Identity Problem of Realist Structuralism, Philosophia Mathematica*. Series III, IX, 3, p. 308–330.

[23] B. Linsky et E. N. Zalta. « Naturalized Platonism versus Platonized Naturalism ». *The Journal of Philosophy* **92**, nº 10 (1995), p. 525–555.

[24] P. Maddy. « Physicalistic Platonism ». In : A. D. Irvine. *Physicalism in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers, 1990, p. 259–289.

[25] P. Maddy. *Realism in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, New York, 1990.

[26] M. Panza et A. Sereni. *Introduction à La Philosophie Des Mathématiques*. Flammarion. Paris, 2013.

[27] M. Panza et A. Sereni. « The Varieties of Indispensability Arguments ». *Synthese* **193**, nº 2 (2016), p. 469–516.

[28] C. Parsons. *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[29] A. Rayo. *The Construction of Logical Space*. Oxford University Press, Oxford, 2013.

[30] M. D. Resnik. *Mathematics As A Science of Patterns*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[31] B. Russel et A. N. Whitehead. *Principia Mathematica*. 3 vol. Cambridge, Cambridge University Press.

[32] S. Shapiro. *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. Oxford University Press, Oxford, 1910-13, New York, 1997.

[33] C. Wright. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, Aberdeen, 1983.

[34] E. Zalta. *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*. D. Reidel, Dordrecht, 1983.

[35] E. N. Zalta. « Natural Numbers and Natural Cardinals as Abstract Objects: A Partial Reconstruction of Frege's *Grundgesetze* in Object Theory ». *Journal of Philosophical Logic* **28**, nº 6 (1999), p. 619–660.

Marco Panza

Institut d'histoire et philosophie des sciences et des techniques (cnrs et université Paris 1, Panthéon-Sorbonne), Chapman University, Orange (CA).

Marco Panza est directeur de recherche. Il est aussi professeur invité à la Chapman University, Orange (CA). Ses recherches et publications portent sur l'histoire et la philosophie des mathématiques, avec une attention particulière aux mathématiques à l'âge moderne, au logicisme de Frege, et à la question du platonisme en philosophie des mathématiques.

Je remercie Jean-Pierre Ferrier, Damien Gayet, Gerhard Heinzmann, Daniele Struppa, les organisateurs et participants au MathCS Seminar à Chapman University, et un rapporteur anonyme pour leur aide et leurs commentaires à une première version de mon texte.

Analysis situs Topologie algébrique des variétés

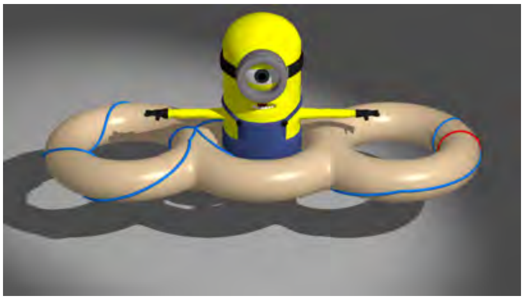
• H. P. de Saint-Gervais

Un site de mathématiques, des textes classiques, des textes modernes, plus de 200 vidéos. Cet article fait l'objet d'un partenariat avec le site Images des Maths. Une version électronique avec des liens vers les rubriques citées sera ainsi mise en ligne à l'adresse suivante : `http://images.math.cnrs.fr/Topologie-algebrique-des-varietes.html`

Entre 1895 et 1904, Henri Poincaré fonde la topologie algébrique, alors appelée *Analysis Situs*, en publiant une série de six mémoires révolutionnaires. Ces textes fondateurs sont écrits dans le style inimitable de Poincaré : les idées abondent et... côtoient les erreurs. L'ensemble représente un peu plus de 300 pages de mathématiques exceptionnelles. Plus d'un siècle plus tard, les concepts mathématiques introduits dans ces mémoires restent d'actualité et constituent un passage obligatoire pour tout apprenti topologue.

Le site `http://analysis-situs.org` que nous présentons dans cet article a pour but de proposer un « objet pédagogique » d'une nature nouvelle permettant au lecteur d'apprendre les bases du sujet à travers une approche historique.

Un minion qui se lance dans la topologie



1. Je m'présente, je m'appelle Henri Paul

Henri Paul est né dans le village de Saint-Gervais-la-Forêt, à quelques kilomètres au sud de Blois en juin 2007. Sa naissance a été célébrée par un groupe de quinze mathématiciens sous les bons auspices de quelques géants du XIX^{e} siècle dont Gauss, Abel, Jacobi, Riemann ou Weierstrass. Saurez-vous les retrouver dans l'image de groupe ci-après ?

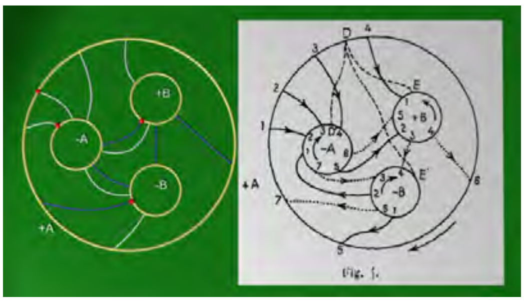
Les amis de Saint-Gervais (Saint-Gervais-la-Forêt, juin 2007)

Le faire-part de naissance paraît chez ENS *éditions* en 2011, puis en anglais dans la collection *Heritage of European Mathematics* de l'EMS, en 2016. Il suggère que pour mieux cerner le prénom du nouveau-né, il faut remonter un siècle avant sa naissance, en 1907, année où Henri Poincaré et Paul Koebe ont finalement prouvé la version la plus générale du théorème d'uniformisation.

Les éditions françaises et anglaises du premier livre d'Henri Paul

En novembre 2012, encore jeune, Henri Paul assiste au Colloque International Poincaré 100 qui célèbre un autre centenaire : celui de la mort de son vieux maître. Lors de la conférence de David Gabai, *Poincaré's work on topology*, il est particulièrement dissipé car très excité. Il lui prend en effet l'envie de réunir quelques-uns de ses vieux amis et quelques nouveaux [1] pour se plonger avec eux dans l'étude des six mémoires dans lesquels Henri Poincaré fonde la topologie algébrique. Mais cette fois-ci, il ne veut plus un simple faire-part. Il veut un objet multiforme, une introduction à la topologie algébrique où les textes originaux dialogueraient avec une vision plus moderne du sujet.

Deux représentations d'un diagramme de Heegaard de la sphère d'homologie de Poincaré



Surtout, puisqu'il s'agit de topologie, il aimerait qu'il y ait beaucoup d'images et même des animations et des vidéos. L'équipe est vite rejointe par Jos Leys, qui sait réaliser les animations dont Henri Paul rêve, et Marc Monticelli, du Laboratoire J.-A. Dieudonné (université Nice Sophia Antipolis), qui s'attèle à la conception d'un site web, format adapté à ses désirs.

Deux grosses réunions de travail, au Moulin du Crotet et à la Fondation des Treilles, permettent à son projet de bien démarrer et de se préciser.

Après quatre ans de travail, Henri Paul estime que son but est atteint, ou au moins qu'il est temps qu'il s'arrête. Après tout, il n'est pas Nicolas Bourbaki et il ne cherche pas à écrire une encyclopédie. Disons-le même clairement : le contenu du site n'est pas totalement ordonné, le style n'y est pas uniforme et surtout Henri Paul fait certainement beaucoup plus de fautes que Nicolas Bourbaki, mais c'est comme ça ! Le 16 janvier 2017, à minuit, Henri Paul rend son travail public.

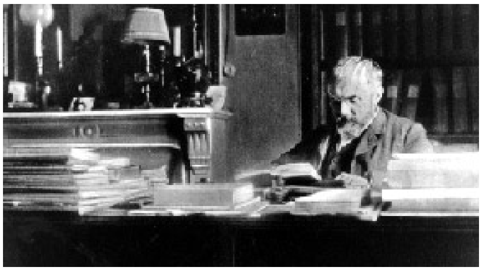
Henri Paul au travail au Moulin du Crotet et à la Fondation des Treilles

1. En pratique, ce nouveau groupe est constitué d'Aurélien Alvarez, François Béguin, Nicolas Bergeron, Michel Boileau, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Hélène Eynard-Bontemps, Charles Frances, Damien Gaboriau, Étienne Ghys, Grégory Ginot, Anne Giralt, Antonin Guilloux, Julien Marché, Luisa Paoluzzi, Patrick Popescu-Pampu, Nicolas Tholozan et Anne Vaugon.

Henri Paul à la Fondation des Treilles

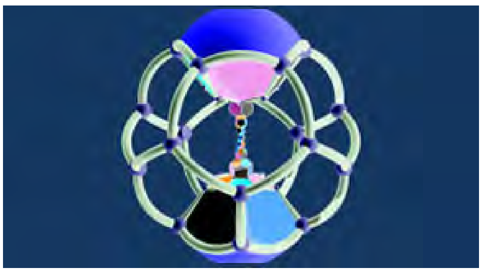
2. Un site web, trois portes d'entrée

La page d'accueil du site que nous avons réalisé propose trois portes d'entrée principales :



Par les œuvres

propose de commencer l'exploration de la topologie algébrique par les textes originaux de Poincaré, nos commentaires de ces textes ou nos discussions sur le contexte historique dans lesquels ils se placent.



Par les exemples

propose de plutôt commencer par un choix d'exemples, d'abord de dimension 2, puis de dimension 3 et enfin de calculs de groupes fondamentaux. Nous détaillons en particulier les nombreux exemples dont Poincaré émaille ses mémoires.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d] \\ B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \end{tikzcd}$$

Cours moderne

propose un véritable cours moderne de topologie, niveau master, regroupé en trois thèmes majeurs : Groupe Fondamental, Homologie et Théorie de Morse, et trois thèmes secondaires : Topologie des variétés de dimension 3, Surfaces complexes et Triangulation des variétés.

Le cours suit le même « plan » – ou la même anarchie – que l'œuvre de Poincaré, mais la présentation, le style, les démonstrations et les méthodes employées sont celles du xxi^e^ siècle.

Ces trois parcours sont évidemment intimement liés et nous recommandons de se laisser dériver au fil des nombreux liens. Nous donnons maintenant quelques exemples de ce que l'on peut trouver au fil de ces pages.

3. Ainsi parlait Poincaré

En premier lieu, nous avons transcrit en textes lisibles en ligne les six mémoires sur l'*Analysis Situs* publiés par Poincaré entre 1895 et 1904, ainsi que les cinq Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences annonçant certains d'entre eux. Et à chacun des paragraphes des six mémoires sont attachés de longs commentaires originaux qui forment une véritable exégèse du texte de Poincaré.

Voici par exemple, entre guillemets, le tout début de l'introduction du mémoire fondateur de 1895, intitulé simplement « *Analysis Situs* » et, entre les citations, en plus petits caractères, quelques extraits de nos commentaires sur cette introduction :

« La Géométrie à n dimensions a un objet réel ; personne n'en doute aujourd'hui. »

En 1895, Henri Poincaré n'est plus un débutant, comme cela transparaît d'ailleurs assez clairement sur la photographie ci-après, qui date de cette période. Il est alors un mathématicien accompli qui a une vision panoramique de toutes les mathématiques et la physique de son temps. Il a déjà produit une quantité impressionnante de résultats dans des domaines extrêmement variés. [...]

Le mot clé de la première phrase de l'introduction est bien entendu « réel ». La quatrième dimension, et son étude mathématique, n'est apparue qu'au cours du XIXe siècle, très progressivement. Pour la majorité des géomètres, et pour la quasi-totalité de la population, il ne s'agissait que d'élucubrations futiles, ayant même un caractère mystique. Il était nécessaire pour Poincaré de se démarquer immédiatement de cet aspect non mathématique.

« Les êtres de l'hyper-espace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. »

Les mots de Poincaré sont choisis avec soin. Suffit-il de donner une « définition » pour créer un « être mathématique » ? Quel est donc le statut ontologique de ces êtres auxquels les mathématiciens font sans cesse allusion, sans trop y réfléchir ? Le verbe « concevoir » nous fait sortir du monde de l'expérience physique et entrer dans le monde de l'imagination. C'est sans doute le premier message de Poincaré : l'*Analysis Situs* va demander de la part de l'étudiant qu'il fasse preuve d'imagination !

Sans entrer dans une discussion philosophique, on peut en effet distinguer deux approches différentes pour la géométrie. L'*approche analytique* qui consiste à écrire des équations et l'*approche synthétique* qui fait appel à l'imagination, à l'analogie.

La proposition de Poincaré est de ne pas se limiter à l'approche analytique, *a priori* pourtant la plus sûre et la moins sujette aux erreurs.

« Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis ; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles. »

Penser par analogie, c'est bien le point fort de la méthode topologique. […]

Henri Poincaré en 1895

Un premier avantage de notre transcription des textes originaux, par rapport aux versions scannées disponibles en ligne, est que les références internes aux mémoires deviennent des liens hypertextes. Nous avons également ajouté quelques notes de bas de page et surligné quelques mots dont la signification moderne est différente. Passer la souris sur les mots surlignés permet alors d'en avoir la traduction moderne. Mais surtout, cela permet un véritable dialogue entre le texte de Poincaré, nos commentaires et le cours moderne : dans tout le site des liens hypertextes renvoient le lecteur à l'endroit concerné des textes originaux. Et, dans la parcours *Par les œuvres*, la colonne de gauche permet de naviguer facilement entre les différents commentaires et les chapitres de l'*Analysis Situs*.

Pour certains des commentaires, nous avons pu profiter d'un travail préliminaire, non publié, que Karanbir Sarkaria a gentiment mis à notre disposition.

4. Quelques perspectives historiques

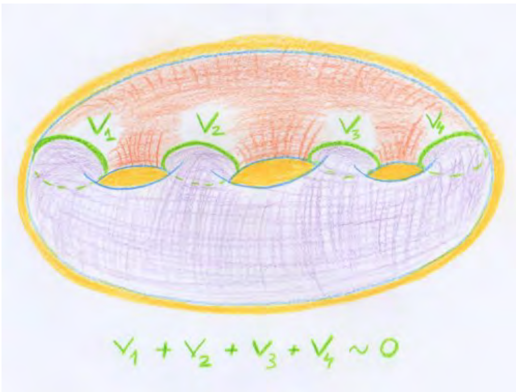
Afin de pleinement apprécier la créativité de Poincaré, il est nécessaire de la replacer dans son contexte historique. Pour cette raison, nous avons choisi d'examiner certains textes dans lesquels nous pouvons reconnaître grâce à notre recul historique des précurseurs de l'homologie, du groupe fondamental et de la théorie de Morse, ainsi que de l'étude des variétés de petite dimension réalisée grâce à ces outils. Cela fait l'objet de neuf articles :

- Comment Poincaré présentait l'Analysis Situs au « grand public ».
- La genèse du groupe fondamental chez Poincaré.
- Les idées de Riemann sur l'Analysis Situs en dimension quelconque.
- Les discussions entre Riemann et Betti sur l'Analysis Situs.
- Approches de l'homologie chez Poincaré.
- Poincaré et les résidus des intégrales doubles.
- Des diagrammes de Listing à ceux de Heegaard.
- L'article de Cayley sur les lignes de niveau et de plus grande pente.
- La théorie de Morse, de la topographie à la conjecture de Poincaré en grande dimension.

5. Un cours original ?

La topologie algébrique confronte l'enseignant à des choix douloureux. Un concept central comme l'homologie a une base intuitive, mais celle-ci est difficile à développer précisément.

Une homologie



Il a donné naissance à plusieurs théories « concurrentes ». Ces théories ont toutes leurs avantages et leurs inconvénients, et sont plus ou moins efficaces suivant les situations. Il existe cependant aussi un cadre axiomatique qui prouve que toutes ces théories conduisent *in fine* aux mêmes invariants. Que faire ? Privilégier une théorie, au prix de rendre certaines propriétés obscures ? En développer plusieurs en parallèle, au risque d'ajouter à la confusion ? Commencer par le cadre axiomatique, au péril d'occulter complètement les idées géométriques qui sont à l'origine du concept ?

Quand on lit Poincaré, on s'aperçoit qu'il aborde souvent un concept par plusieurs voies. La manipulation de nombreux exemples et de (pseudo-)définitions lui permettent de se convaincre que ces diverses voies mènent bien au même objet. Notre site cherche à profiter du caractère non linéaire d'internet pour retrouver cet esprit. L'étudiant n'est pas invité à suivre des chapitres dans un certain ordre. Au contraire, nous l'encourageons à papillonner d'article en article, dans l'ordre qu'il souhaite, en tentant d'acquérir toutes les théories en même temps, selon ses propres préférences, tout en prenant conscience qu'il n'y en a qu'une !

Modèles de la collection de l'IHP

Nous proposons par exemple d'aborder l'étude du groupe fondamental de deux manières :

– par les revêtements
– **et** par les lacets.

Certains lecteurs préfèreront commencer par la première et d'autres par la seconde. Quel que soit le choix, il est important de connaître les deux approches. D'ailleurs, la présentation originale de Poincaré naviguait en permanence entre les deux points de vue.

De la même manière, nous proposons simultanément plusieurs manières d'aborder l'homologie. D'une part, deux approches intuitives mais semées d'embûches : *via* le bordisme et à la Poincaré ; d'autre part, des approches classiques, notamment les Homologies polyédrale et simpliciale et l'Homologie singulière. L'accent est mis sur les calculs et les exemples.

6. Ce que vous ne trouverez pas ailleurs

Nous ne sommes pas sûrs d'être partout parvenus à faire dialoguer les idées originales, les exemples et les définitions abstraites. Nous sommes toutefois fiers d'un certain nombre de choses que vous ne trouverez pas ailleurs. Voici une liste, que nous espérons non exhaustive, de quelques-unes de ces originalités.

– Une initiation accessible à un niveau de première année universitaire à l'Analysis Situs par les surfaces.
– Trois démonstrations en images du théorème de classification des surfaces fermées : en quelques mots et deux animations pour les surfaces triangulées, la « ZIP proof » de

Conway en 3D et la classification par la théorie de Morse en trois cours filmés.

- Une démonstration *purement visuelle* du Théorème de van Kampen.
- Une étude exhaustive, mélangeant animations et cours filmés, des divers recollements du cube.
- Six présentations différentes de la variété dodécaédrique de Poincaré avec de multiples animations et cours filmés et une démonstration originale de l'équivalence entre les six définitions.
- Une introduction visuelle aux scindements de Heegaard et aux opérations élémentaires sur les diagrammes de Heegaard.
- La reconstruction topologique d'un pinceau de Lefschetz, c'est-à-dire d'une variété topologique de dimension 4 homéomorphe à l'espace total d'une fibration de Lefschetz.
- Une série d'animations aboutissant à la construction d'une variété hyperbolique qui fibre sur le cercle.

Les prérequis pour lire ces articles varient beaucoup. Ce site est destiné en priorité à des mathématiciens, étudiants débutants ou confirmés, ou enseignants-chercheurs. Toutefois, certains articles ou certaines animations sont « élémentaires » et nous espérons qu'ils pourront également motiver un public plus large. En guise d'indication nous avons attribué une couleur à chaque article.[2]

Les « articles verts » ▲ sont les plus élémentaires. Certains peuvent être lus, ou regardés, sans connaissance préalable. Parfois les images, ou les animations, même si on ne les comprend pas complètement, peuvent donner une idée de la topologie algébrique. Les « articles verts » nous semblent notamment compréhensibles par les étudiants des trois années de licence.

Les « articles bleus » ■ présentent des notions et résultats qu'on trouve typiquement dans un cours d'introduction à la topologie algébrique au niveau Master première année. Il s'agit donc de connaissances qui peuvent être utiles à tout étudiant en mathématiques, même s'il n'envisage pas de se spécialiser en topologie algébrique.

Les « articles rouges » ⬣ présentent des notions et résultats que l'on enseigne généralement au niveau Master deuxième année. À ce niveau, les étudiants ont déjà fait un choix de spécialisation et envisagent peut-être de continuer leurs études par un doctorat relié de près ou de loin à la topologie.

Les « articles noirs » ● sont plus précisément destinés aux doctorants et aux enseignants-chercheurs. Ils présentent des résultats moins classiques ou proposent une approche différente des textes classiques.

Le logo 🄷 indique des textes de nature historique et correspond aux lecteurs qui s'intéressent à l'histoire du développement de la topologie algébrique. Il est souvent couplé avec une couleur.

Bien évidemment, un enseignant-chercheur spécialisé en topologie algébrique pourra probablement tirer profit des articles verts, bleus ou rouges... Souvent la présentation n'est pas classique et un point de vue nouveau pourra intéresser les spécialistes.

7. Des images, des animations et une chaîne YouTube

Notre site contient toutes sortes d'images... certaines farfelues...

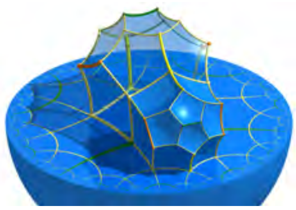
Vu au musée des Confluences à Lyon

2. Insistons sur le côté subjectif et artificiel de ce type de cotation : ce qui est difficile pour l'un ne le sera pas pour l'autre. Prenez donc ces couleurs pour ce qu'elles sont : juste une indication.

certaines en 3D réalisées par Jos Leys,

Complémentaire du nœud de trèfle dans $\mathbb{S}^3$

Paver l'espace hyperbolique par des dodécaèdres à angles droits

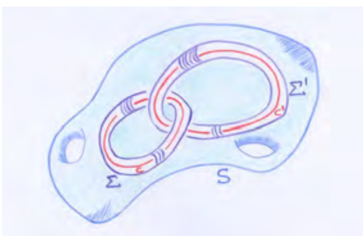


certaines très farfelues...

En marge des mathématiques, J.H.C. Whitehead avait un hobby : il aimait élever des porcs

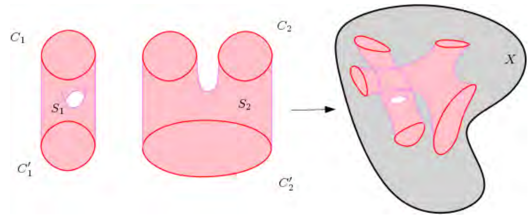
de jolis dessins faits à la main,

Deux courbes fermées dans un corps en anses



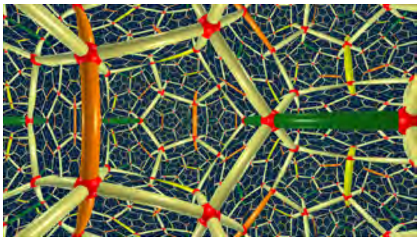
d'autres plus classiques,

Relations de bordisme



en fait plein de chouettes images !

À l'intérieur du pavage de l'espace hyperbolique par des dodécaèdres à angles droits



Mais surtout, notre site contient près de 200 animations 3D toutes réalisées par Jos Leys et plus de 30 vidéos de cours filmés par Daniel Tanasijevic du service média de l'université Pierre et Marie Curie. Toutes ces vidéos sont rassemblées sur une chaîne YouTube accessible d'un clic depuis la page d'accueil du site. N'hésitez pas à utiliser ces vidéos pour vos cours !

8. Une bibliographie commentée

Nous espérons que les divers articles et vidéos de ce site donneront envie à nos lecteurs de continuer à explorer la topologie algébrique ou géométrique, ainsi que son histoire.

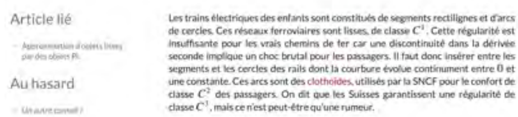
Afin de faciliter leur orientation dans la vaste littérature consacrée à ces domaines des mathématiques, nous leur proposons une bibliographie commentée. Elle est accessible depuis la page d'accueil en cliquant sur l'onglet ci-dessous et est constituée de quatre listes de références commentées :

– des références de manuels ou monographies de topologie algébrique ou géométrique, ainsi que de sujets proches ;
– des références d'articles fondateurs, ainsi que d'articles de survol dans des sujets reliés au contenu de notre site ;
– des références de livres ou d'articles d'histoire des mathématiques, liés aussi au contenu de notre site ;
– les adresses de quelques sites web ou blogs qui traitent de sujets proches de l'Analysis Situs.

9. Des conseils et anecdotes

En haut à gauche de nombreux articles et rubriques du site, le sigle ci-dessous signale un conseil ou une anecdote. Les « belles histoires de l'oncle Paul » rappellent en effet des souvenirs d'enfance à Henri Paul. En suivant l'exemple de cet « oncle Paul », nous avons donc émaillé de quelques « bons conseils » quelques articles de ce site.

Si vous ne savez pas par quel bout aborder les cours ou exemples du site, ou si vous voulez juste vous laisser porter comme un papillon, un simple clic sur l'icône en page d'accueil vous donnera accès à un florilège de « bons conseils de l'oncle Henri Paul » tirés au hasard comme celui-ci [3] :



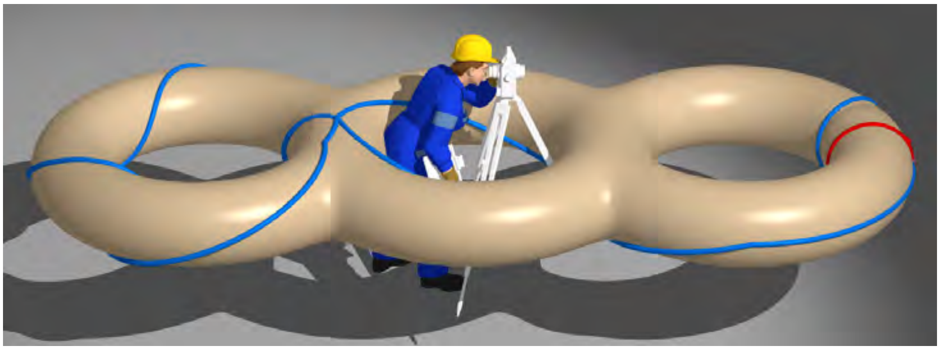
Article lié

Au hasard

Les trains électriques des enfants sont constitués de segments rectilignes et d'arcs de cercles. Ces réseaux ferroviaires sont lisses, de classe C^1. Cette régularité est insuffisante pour les vrais chemins de fer car une discontinuité dans la dérivée seconde implique un choc brutal pour les passagers. Il faut donc insérer entre les segments et les cercles des rails dont la courbure évolue continument entre 0 et une constante. Ces arcs sont des clothoïdes, utilisés par la SNCF pour le confort de classe C^2 des passagers. On dit que les Suisses garantissent une régularité de classe C^3, mais ce n'est peut-être qu'une rumeur.

10. Conclusion

Nous espérons vous avoir donné envie de visiter notre site et de le signaler à vos étudiants. Vos remarques (bienveillantes :)) seront plus que bienvenues ! Pour l'heure, nous avons décidé de mettre un point final à cette aventure mais (qui sait ?) la prochaine étape sera peut-être d'ouvrir le site à tous les contributeurs de bonne volonté. Reste à savoir comment procéder au mieux...



`http://analysis-situs.org`

3. La colonne de gauche permet d'accéder à l'article qui lui est attaché et de commencer votre papillonnage.

Comment parler de sciences aux jeunes

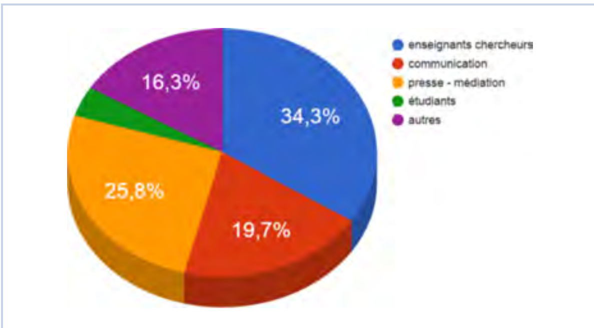
Journée Sciences et médias 2016

Le 1er février 2016 s'est tenue à la préfecture de Paris et d'Île-de-France [1] la 3e journée Sciences et médias. Ces journées sont organisées tous les deux ans par des sociétés savantes scientifiques. Se sont associées cette année la société chimique de France (SCF, la Société Française de Physique (SFP), la Société Française de Statistique (SFdS), la Société Informatique de France (SIF), la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et la Société Mathématique de France (SMF). Le but de ces journées est de participer à la réflexion sur la façon dont les médias se saisissent des questions scientifiques.

Le thème retenu cette année concernait « les jeunes », et plus précisément les enfants et les adolescents. La formation à la science, y compris à la démarche scientifique, constitue un élément important de la construction intellectuelle des jeunes citoyens, en particulier à notre époque où sciences et technologie évoluent rapidement et prennent une place grandissante dans le débat public. L'information via les médias vient en complément de l'école, elle permet d'aborder les sciences avec un rythme différent, d'en donner le goût et de favoriser des vocations. Elle est également utile aux enseignants et formateurs.

Le programme de la journée était construit dans le but de répondre par exemple aux questions suivantes : Comment communiquer selon les âges ? Comment prendre en compte la transition enfance/adolescence ? Quels médias, quels contenus sont les plus adaptés ? Comment les jeunes s'approprient-ils les médias ? Comment lutter contre les stéréotypes (genrés, sociaux...) qui constituent des freins à l'intérêt de tous, et en particulier des jeunes filles, pour les sciences ?

Le public était venu nombreux ce lundi 1er février assister à la dizaine d'interventions / échanges. Pas moins de 219 inscrits (voir la répartition ci-dessous), auxquels il faut rajouter 90 connexions sur la page où était diffusé le direct. Dans ce dernier chiffre, n'apparaissent bien sûr que les personnes qui se sont connectées pendant le direct, et on ne compte qu'une fois les adresses IP. On peut donc estimer à plus de 300 le nombre de personnes qui ont assisté à au moins une partie de la journée.



Chaque intervention d'une vingtaine de minutes était suivie d'un échange avec le public. Elles peuvent toutes être visionnées en intégralité sur le site `http://sciencesetmedia.org/`.

Les intervenants étaient : Clémence Perronnet, sociologue au centre Max Weber à Lyon, Jean Lopez, rédacteur en chef de *Sciences et Vie Junior* (SVJ), Marie-Agathe Le Gueut, éditrice jeunesse au

1. 5 rue Leblanc, 75015 Paris.

Pommier, Laurence Bordenave du collectif *Stimuli*, Emmanuelle Sudre, rédactrice en chef de l'émission « On n'est pas que des cobayes », l'astrophysicien Pierre Léna de l'association « La main à la pâte », Fred Courant du site « L'esprit sorcier », Daniel Tron, enseignant en anglais et cinéma, Laurence Broze de l'association *femmes & mathématiques*, Olivier Lapirot, rédacteur en chef adjoint de *Nord Êka !* accompagné de Corentin Aernouts, et enfin Martin Andler, président de l'association *Animath*.

Parmi eux un certain nombre de rédacteurs en chef de différents médias avaient répondu présents : celui d'un magazine à grand tirage, celle d'une maison d'éditions, d'une émission de télévision, d'un magazine régional ou encore d'un site dédié à la médiation. Étaient aussi présentes une sociologue et la présidente d'une association, toutes deux en pointe sur les questions de genre. Deux responsables d'associations nationales établies dans le paysage de la médiation scientifique depuis plusieurs décennies ont également apporté leur témoignage.

Samuel Guibal, qui est Délégué adjoint à la Délégation Régionale de la Recherche et à la Technologie au sein de la Préfecture de Paris Île-de-France, nous accueille pour la journée au nom de la Préfecture. En réponse aux questions sous-jacentes à cette journée « pourquoi faut-il parler de sciences aux jeunes ? » et « pourquoi est-ce une question d'actualité ? », il rappelle l'importance de l'enjeu économique lié au développement scientifique, mais aussi la valeur culturelle historique de la science, et le fait que la démarche scientifique est porteuse de valeurs humaines fortes.

La première intervention est celle de la sociologue Clémence Perronnet [2] sur le rapport des enfants à la science. Le biais lié au genre est bien identifié par la sociologie et il est communément admis qu'il se construit dès la petite enfance. Mais où se cachent les stéréotypes dans les supports de la culture scientifique enfantine ? Par exemple dans la couverture des magazines de sciences, nous dit Clémence Perronnet, où ce sont presque toujours des hommes qui figurent. Mais aussi dans les illustrations des encyclopédies, de la presse, des manuels etc. Ils se cachent aussi dans ce qui est présenté : par exemple un homme qui montre sa force, en regard d'une femme qui danse. Ou encore dans l'offre de jouets : des petits garçons sur les boîtes de chimie et une boîte rose, pour les produits de beauté.

Outre le biais lié au genre, c'est l'image des scientifiques transmise en particulier aux jeunes dans les médias tels que les livres et magazines spécialisés, les émissions de télévision ou audio qui est aussi préoccupante : celle d'un homme, seul, fou, qui fait courir le monde à la catastrophe.

Le rédacteur en chef du magazine « Sciences et Vie Junior » [3], Jean Lopez, a ensuite pris la parole. Cela fait 30 ans qu'il parle de sciences aux jeunes. Ce magazine, créé en 1989, a tout de suite connu un énorme succès, qui ne faiblit pas avec 455 000 abonnés aujourd'hui. Et le profil du lectorat n'a pas bougé au cours des années : ce sont à 80% des CSP+ et au 2/3 des garçons. Le texte est aussi travaillé que l'image, qui a gagné petit à petit de plus en plus de place dans le journal. Le choix des sujets est un autre point très important : il est plus facile de parler d'évolution à quelqu'un de 15 ans qu'à quelqu'un de 11 ans, plus réceptif par exemple à l'éthologie. Par ailleurs, c'est l'actualité scientifique qui guide la ligne éditoriale et le journal s'attache à garder un équilibre entre les différentes matières. L'important courrier des lecteurs conforte le journal dans son choix de favoriser tout particulièrement deux thèmes : l'environnement et le monde numérique. La réussite de ce journal montre l'intérêt que portent les jeunes à la Science, du moins jusqu'à l'adolescence : les abonnements à SVJ sont là pour témoigner du désintéressement progressif à partir du lycée.

Marie-Agathe Le Gueut [4] est éditrice jeunesse aux éditions « Le Pommier ». Pour donner envie de sciences aux enfants de 4 à 13 ans, cette maison d'édition de vulgarisation scientifique s'est dotée de plusieurs collections. Toutes cherchent à rendre accessible le savoir scientifique, à éveiller la curiosité et l'esprit critique. Toutes impliquent des scientifiques dans la conception des ouvrages. Chacune a, néanmoins, un processus de création et un cœur de cible qui lui sont propres. Les « minipommes » sont un bel exemple de science participative : chaque volume est le fruit d'un échange entre une éditrice, un scientifique et une classe. Les « math'attak' » et les « expériences » mettent en avant le côté ludique des sciences. Les « tout sur... », avec leur présentation aérée, cherchent à intéresser des enfants peu friands de lecture. À l'opposé, les « Romans & plus junior » emportent les lecteurs dans des enquêtes policières, discrètement émaillées d'infor-

2. http://www.centre-max-weber.fr/Clemence-Perronnet
3. http://junior.science-et-vie.com/
4. http://www.editions-lepommier.fr/

mations scientifiques. Les plus jeunes ne sont pas oubliés : avec « Les petits dégoûtants », ils développent leur sens de l'observation et découvrent sous un autre jour des petits animaux souvent méprisés mais utiles, comme l'araignée, la limace, le ver ou le crapaud. Enfin, les enfants sont également invités à se hisser « Sur les épaules des savants » pour découvrir avec eux les horizons qui restent à explorer. Souvent avec humour, toujours avec passion, les éditions « le Pommier » accompagnent les enfants (et les adultes) dans la découverte des sciences.

Laurence Bordenave est fondatrice du collectif *Stimuli*[5]. Ce collectif vise à transmettre des grains de sciences grâce à la bande dessinée. Pour ce faire, il regroupe des scientifiques, des médiateurs scientifiques, des didacticiens et des auteurs de BD. Il développe trois grands types d'actions : conception de dispositifs de médiation, création de BD ludo-éducatives et formation à la transmission des sciences par la BD. Une de ses actions phare en médiation repose sur l'idée que pour créer une planche de BD parlant de sciences, l'auteur doit lui-même avoir acquis des connaissances scientifiques. Il propose donc à des jeunes à partir de 11 ans de travailler en atelier pendant plusieurs semaines avec un scientifique (souvent un doctorant), un auteur de BD et un médiateur pour concevoir leurs propres planches autour de la discipline du scientifique. Ces ateliers peuvent être organisés dans différents contextes (médiathèques, CCSTI, librairies...). Ils sont un lieu de mise en scène de la science mais aussi de nombreuses discussions qui vont bien audelà. Ils se concluent par une exposition au cours de laquelle chacun des jeunes auteurs peut présenter sa création. Toutes les créations sont par la suite mises en ligne. Pour pouvoir diffuser plus largement ce dispositif, le collectif s'implique dans des projets de recherche en didactique.

Emmanuelle Sudre est rédactrice en chef de l'émission « On n'est pas que des cobayes »[6], sur France 5. L'émission, qui existe depuis 5 ans, est un programme familial, d'écoute conjointe enfants et parents. La moyenne d'âge des téléspectateurs est de 39 ans, et l'émission est conçue en conséquence. L'émission se fonde sur l'expérimentation : pour cette raison, les sujets ne répondent pas à un « pourquoi », mais se proposent de relever un défi. Le journaliste qui se voit attribuer un sujet dispose de quatre semaines pour enquêter, recruter des scientifiques (du doctorant au retraité) et créer des expériences, qui pourront être spectaculaires mais avant tout pertinentes. Le scénario doit raconter une histoire, montrer la démarche par essais erreurs et les échecs éventuels. Le tournage s'étale sur 5 jours, et le montage sur 12 jours. Tout ce qui est montré est validé par les experts scientifiques, y compris après le tournage. L'émission était suivie par 500 000 téléspectateurs en prime time le vendredi, ce qui représente 2% de part de marché (France 5 tourne aux alentours de 3,5% en moyenne). L'émission s'est arrêtée quelques mois après la journée Sciences et Médias, à l'été 2016.

L'intervenant suivant est Pierre Léna[7], astrophysicien et président de la fondation « La main à la pâte ». Pour lui, la science est une aventure et la jeunesse aime les récits d'aventure. Jules Verne l'avait bien compris. La passion pour la science existe chez les jeunes, mais cette passion s'atténue quand la science est transmise par l'école. Une étude récente de l'université d'Oslo a analysé la demande de sciences à l'école pour les écoliers de 15 ans dans différents pays, en fonction de leur richesse. De façon extrêmement claire cette demande est à l'inverse de la richesse du pays. Ce paradoxe doit être creusé. Il faut « apprendre à voir », faire apprendre à voir, suivre en ce sens l'exemple de Galilée que l'observation attentive des petites oscillations d'un pendule a conduit à comprendre l'isochronisme, si essentiel ensuite pour la conception des horloges, ou l'abbé Häuy lorsqu'il observe au microscope des cristaux de calcite. C'est ce qu'il faut apprendre aux enfants, nous dit Pierre Léna. « Mais voir ne suffit pas. Il faut aussi parler. Et le métier des médias, c'est de montrer, mais aussi de dire. C'est un difficile exercice que celui de mettre la science en mots. » Les petits enfants adorent les exercices de pensée, nous dit-il. Et Pierre Léna défend avec passion l'expérience de la Main à la pâte, si différente de la démarche du collège. Il faut « comprendre pour comprendre, comprendre pour faire, comprendre avant d'apprendre », nous dit-il, et il l'illustre de l'exemple fascinant d'enfants qui observent une souris dans un labyrinthe*[8].

Fred Courant est cofondateur de « l'Esprit Sorcier ». Cette plate-forme internet[9] poursuit l'aven-

5. `http://www.stimuli-asso.com/`
6. `http://www.france5.fr/emissions/on-n-est-pas-que-des-cobayes`
7. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Léna`
8. `http://chercheursenherbe.crdp-lorraine.fr`
9. `http://www.lespritsorcier.org/`

ture de l'émission TV « C'est pas sorcier », émission créée en 1993 sur France3 par Jamy Gourmaud et lui-même. C'était une émission de sciences pour les jeunes, supprimée en 2013. Pour Fred, le succès rencontré par l'émission TV et la plateforme internet montre que les jeunes sont passionnés par la science, toute la science (pour l'essentiel, les orateurs de la journée sont d'accord avec cette affirmation en la restreignant aux jeunes de moins de 15 ans). L'accès de « l'Esprit sorcier » est libre, gratuit, sans publicité. L'essentiel du financement vient de subventions institutionnelles (conseil régional d'Ile-de-France), plateforme de crowd funding « kisskissbankbank »... L'équipe de « l'Esprit sorcier » est composée d'une quinzaine de personnes. Un sujet par semaine est présenté. Quelques questions en fin de sujet pour alimenter la discussion, qui est très animée sur internet (avec parfois un peu de dérive...).

Daniel Tron [10] est enseignant-chercheur à l'université de Tours. Il s'intéresse à la science-fiction dans la littérature et le cinéma. Le terme SF recouvre plusieurs genres littéraires. Le space opéra (par exemple la saga Star Wars), issu du roman d'aventures, n'a pas grand-chose de scientifique : la science y est assujettie à la morale. À l'opposé, la « hard SF » est une extrapolation cohérente à partir des connaissances scientifiques et techniques de notre époque, c'est une expérience de pensée. Daniel Tron plaide pour une réconciliation entre littérature et science à l'école. On peut faire beaucoup avec la SF : avant même de faire de la science, on peut créer un désir de science. L'envie de science vient avec la curiosité, et cette curiosité-là naît si on lui donne des histoires. Au-delà même de la science, n'est-il pas plus facile d'amener un enfant à la lecture par Jules Verne plutôt que par Balzac ou Montesquieu ? Des extraits de films illustrent ces propos. Un premier extrait montre Woody Woodpecker qui, en 1950, explique les conditions technoscientifiques de l'exploration lunaire : le film est projeté devant un parterre de généraux et de politiciens. Notons aussi un extrait de « Seul sur Mars », où Matt Damon s'adresse à son journal vidéo : « Je suis botaniste. Mars finira par avoir peur des pouvoirs des botanistes ». La science héroïque pour réconcilier les enfants avec la culture scientifique !

Laurence Broze, présentée comme une travailleuse infatigable de la cause de l'égalité hommes-femmes, revient sur les stéréotypes qui veulent, par exemple, que les filles doivent réaliser leurs rêves, les garçons leurs ambitions. Stéréotypes qui peuvent ne convenir ni aux unes, ni aux autres. Les mathématiques sont particulièrement concernées, elles qui « dessèchent le cœur », écrit Flaubert, et de fait les filles vont plus naturellement vers les sciences de la vie, la médecine et tout ce qui touche au soin. L'Association *femmes & mathématiques* [11], que préside Laurence Broze, organise diverses actions, dont les journées « Filles et Maths : une équation lumineuse ! », où la séance de théâtre forum, qui permet de sortir sans barrières tous les stéréotypes possibles, connaît toujours un franc succès. Laurence Broze insiste sur l'importance de modèles féminins et se réjouit que la médaille Fields ait été attribuée à une femme, Maryam Mirzakhani, pour la première fois en 2014. Faut-il parler de sciences de la même manière aux filles et aux garçons ? Doit-on parler à l'avance aux filles des difficultés qu'elles vont rencontrer ? Les questions sont ouvertes. Dans la discussion qui suit Martin Andler parle des efforts considérables vers l'égalité que font diverses grandes institutions étrangères.

Olivier Lapirot est rédacteur en chef adjoint de *Nord Êka !* [12]. Il est accompagné de Corentin Aernouts, lycéen au lycée Baggio, à Lille. *Nord Êka !* est un projet de média scientifique de la région Nord Pas-de-Calais pour les 15-25 ans, intégrant une dimension participative. Lancé il y a deux ans, il est piloté par le Forum départemental des sciences, à Villeneuve d'Ascq. Il a pour objectifs d'intéresser les jeunes à la science, de promouvoir les sciences et la recherche régionale, et rapprocher les jeunes et les chercheurs, en les faisant se rencontrer. *Nord Êka !* est un magazine et un blog. Le magazine, constitué de 8 pages, paraît 4 fois par an, et est imprimé à 100 000 exemplaires distribués essentiellement dans les lycées de la région. Au cœur de ce magazine, un dossier de 4 pages, dont une est rédigée par des lycéens de l'atelier scientifique du lycée Baggio. Au rythme d'une heure par semaine, les lycéens, accompagnés de leurs enseignants de physique, math, bio et philosophie, construisent leur article en rencontrant des chercheurs et en interagissant avec Olivier Lapirot. Pour ces élèves de la filière S, les principales difficultés rencontrées sont d'ordre rédactionnel plutôt que scientifique. Corentin Aernouts suggère d'ailleurs d'intégrer dans le

10. http://www.univ-tours.fr/m-tron-daniel-251673.kjsp
11. http://www.femmes-et-maths.fr/
12. http://nord-eka.fr/

programme de sciences « de la méthodologie rédactionnelle, en demandant par exemple que dans un devoir, un exercice soit intégralement rédigé ».

Faut-il s'étonner de cette journée ? s'interroge le président de l'association *Animath*[13], Martin Andler. Cette association d'envergure nationale œuvre depuis de nombreuses années « au développement d'activités mathématiques dans les écoles, collèges et lycées », et à la participation du plus grand nombre, filles et garçons, riches et pauvres. Elle fédère aussi en son sein d'autres associations comme *Maths.En.Jeans*, *Science ouverte*, *femmes & mathématiques* etc. tout en cultivant son lien historique avec les sociétés savantes de mathématiques. Faut-il donc s'étonner de cette journée ? Car en France on considère largement que l'école porte à elle seule tout l'enseignement des sciences, au contraire de ce qu'il en est pour la musique, le sport, ou l'enseignement artistique. Le propos de Martin Andler est justement de dire tout le bénéfice qu'on peut tirer des activités périscolaires, qui permettent de reconnaître la pluralité des talents et la diversité des mécaniques d'acquisition de l'autonomie, mais aussi peuvent intervenir comme laboratoire d'idées. Il y a actuellement un foisonnement d'initiatives proposant des actions très diverses : chaînes vidéos, journées portes ouvertes, concours, olympiades, expositions. . . , qui répondent au constat que le système scolaire à lui tout seul ne marche pas ou ne répond pas aux attentes diverses du public scolaire. Pour susciter des vocations chez les jeunes des milieux défavorisés, chez les filles, pourquoi ne pas rêver d'un club scientifique dans chaque établissement ?

Pour conclure, les organisateurs remercient la Préfecture, qui a mis à leur disposition ses magnifiques locaux, ainsi que le CNRS, l'INRIA et le CEA qui ont aidé financièrement les sociétés savantes dans l'organisation de cette journée. La Préfecture a également accepté que le hall soit utilisé pour une petite exposition qu'on peut retrouver sur le site web de la journée[14] .

La prochaine édition aura lieu début 2018, dans un lieu qui sera précisé sur le site `http://sciencesetmedia.org/`. Le thème devrait tourner autour de l'information, la désinformation et la fiction. L'équipe organisatrice espère que les responsables communication, le monde de la presse et de la médiation, sans oublier les enseignants-chercheurs et les étudiants, seront une fois de plus nombreux et nombreuses à venir prendre part aux échanges et aux débats sur ce thème passionnant.

13. `http://www.animath.fr/`
14. `http://sciencesetmedia.org/expo.php`

L’impact du genre sur les profils de publication en mathématiques

• M. Romagny

À la fin du mois d’octobre 2016 est paru dans la revue plos one un article intitulé *The Effect of Gender in the Publication Patterns in Mathematics*, écrit par Helena Mihaljević-Brandt, Lucía Santamaría et Marco Tullney, voir [1]. Il s’agit d’un des premiers travaux de grande ampleur démographique et temporelle portant sur les caractéristiques des publications en mathématiques écrites par des femmes, seules ou en collaboration. L’étude porte sur l’ensemble des travaux mathématiques répertoriés dans la base zbmath depuis 1970, année de création de la classification mathématique par matières (Mathematics Subject Classification, msc), jusqu’à nos jours. Elle est donc de nature essentiellement bibliométrique. Nous proposons ci-dessous un bref résumé de cet article. Nous désignerons les auteur·e·s de l’article par le sigle mbst pour éviter un emploi conflictuel du mot « auteur·e·s » désignant également les auteur·e·s de publications mathématiques qui sont le cœur du sujet. Nous prions les lectrices et lecteurs de nous excuser pour ce choix disgracieux, que nous n’avons pas su éviter. L’article comprend quatre parties : après une introduction générale (3 pages), mbst exposent leurs outils et choix méthodologiques (3,5 pages), décrivent les résultats trouvés (10 pages) et enfin discutent les enseignements principaux de leur étude et les questions qu’il convient d’approfondir (4 pages).

Introduction

L’introduction rappelle le fait bien documenté que, en dépit d’une augmentation du nombre de femmes scientifiques à tous les niveaux (étudiante, docteure, professeure), d’importantes inégalités de genre persistent. En particulier, la sous-représentation féminine est marquante dans les postes universitaires. Ces constats sont valables de manière générale dans les disciplines stim (sciences, technologie, ingénierie et mathématiques), mais l’étude se concentre sur les mathématiques.

Les publications ont été et restent le moyen principal de communication des résultats scientifiques. Dans la recherche d’un emploi universitaire, le dossier de publication est un élément clé. Les inégalités de genre peuvent donc être révélées et éclairées par l’analyse des différences de profils de publication entre hommes et femmes, et la variation de ces différences avec le temps. Ce thème a déjà été le sujet de nombreux travaux portant sur des échantillons de données restreints dans le temps et surtout dans l'espace. L'article de MBST s'en distingue en ce qu'il présente une étude de grande ampleur, reposant sur l'ensemble des données de zbMATH sur la période de 1970 à nos jours. Quatre caractéristiques des profils de publication des individus sont extraites et analysées :

- l'évolution temporelle de l'activité scientifique ;
- la qualité des publications, reflétée par le choix des journaux ;
- le nombre de collaborations et de collaborateurs-trices ;
- la distribution dans les sous-domaines de spécialisation mathématique.

Après une brève présentation des outils mis en œuvre par MBST, nous allons décrire les résultats obtenus sur ces quatre points.

Outils et choix méthodologiques

Le matériau de base de l'étude est fourni par les données de zbMATH. Les limitations de cette ressource nécessitent de faire des choix permettant de définir les objets de l'étude. En premier lieu, on doit être en mesure d'attribuer un genre aux auteurs de publications. MBST ont écrit un algorithme qui effectue cette tâche de manière automatique à partir d'un dictionnaire de prénoms considéré comme contenant la très grande majorité des prénoms d'Europe, États-unis, Chine, Inde, Japon, entre autres. Les cas de noms d'auteur ne permettant par d'attribution de genre, tels que « P. Smith », ont été exclus de l'étude. MBST estiment que leur échantillon, une fois complété par l'étiquette de genre, ne peut sur-représenter les femmes de plus de 5%. En second lieu, on doit décider de ce qu'est un·e mathématicien·ne. Pour cela, MBST nomment *core mathematics journal* une revue dont au moins 90% des articles publiés ont un numéro de classification primaire situé entre 03 (Mathematical logic and foundations) et 65 (Numerical analysis) dans la classification MSC2010. Les mathématicien·ne·s sont les individus ayant publié au moins un article dans un *core mathematics journal*.

Résultats de l'étude

Une analyse de l'évolution temporelle de l'activité scientifique est faite en regroupant dans un même ensemble les auteur·e·s de publications mathématiques dont la première publication a eu lieu une même année. (En statistique démographique, un tel ensemble est appelé *cohorte*.) Cette première publication joue en quelque sorte le rôle de marqueur du début de la carrière scientifique. Dans chaque cohorte, l'attention est portée sur deux populations : les individus qui continuent de publier pendant au moins 5 ans (que l'on assimile à des mathématicien·ne·s dans le stade post-doctoral de la carrière) et ceux qui continuent de publier pendant au moins 10 ans (que l'on assimile à des mathématicien·ne·s ayant accédé à un poste permanent). Trois conclusions sont alors tirées de l'analyse des données. Premièrement, la proportion de mathématiciennes a triplé depuis 1970, passant de 6-8% à 21-23% ([1], Fig. 2). Parmi les mathématicien·ne·s ayant publié leur premier article à la fin des années 1990 et publiant encore 10 ans après leur première publication, 20% sont des femmes (ce qui est encore loin du pourcentage de femmes parmi les étudiant·e·s de Licence). Deuxièmement, les femmes publient moins que les hommes au début de leur carrière : sur l'ensemble de la période d'étude, les hommes publient en moyenne 9% de plus que les femmes pendant les 5 premières années, et 13% de plus pendant les 10 premières années ([1], Fig. 3). Ce *fossé de productivité* identifié auparavant dans d'autres études, s'il persiste, s'est néanmoins amenuisé entre 1970 et aujourd'hui. Il serait intéressant de savoir s'il diminue également avec le nombre d'années après la première publication au-delà de 10 ans, ce que l'article ne fait pas. Troisièmement, les femmes sont plus nombreuses que les hommes à quitter le monde universitaire : la proportion de femmes qui arrêtent de publier à un moment entre 5 et 10 ans après leur première publication était de 32% en 2000 (resp. 18% en 1970) contre 26% pour les hommes (resp. 9%), voir [1], Fig. 4. Il est notable que, hommes et femmes confondus, ce pourcentage augmente significativement, ce qui montre que les docteur·e·s éprouvent de plus en plus de difficultés à faire converger leur parcours vers un poste permanent.

1. Ces classements et indicateurs bibliométriques très controversés ont été très critiqués entre autres dans la *Gazette*, et nous ne nous prononçons pas sur leur pertinence comme mesure de qualité scientifique des publications. Nous nous efforçons de passer outre nos propres réserves pour nous en tenir à un rapport fidèle à l'article [1].

L'analyse de la qualité des publications est faite à l'aide de deux indicateurs : le classement des journaux ERA2010 (Excellence in Research for Australia, produit par le Australian Research Council) et le Journal Impact Factor (JIP) de Thomson Reuters [1]. Ces indicateurs permettent tous deux de former 4 groupes de journaux de « qualité » décroissante. Pour chacun de ces deux classements, et dans chaque groupe, MBST regardent de combien le pourcentage de femmes parmi les auteur·e·s dévie de la moyenne sur l'ensemble des 4 groupes. Les résultats obtenus avec les deux classements ERA et JIP sont comparables ; deux observations principales sont dégagées. Premièrement, les journaux mathématiques de rang élevé publient moins d'articles écrits par des femmes. Il est marquant par exemple que seuls 8,5% des articles en auteur unique sont écrits par des femmes (une déviation de -21,3% de la moyenne) dans le groupe des meilleurs journaux du classement ERA, alors que la déviation est de +20,9% dans le groupe des moins bons journaux ([1], Fig. 5 et 6). Deuxièmement, les femmes sont radicalement sous-représentées dans les trois journaux des hauts de classement que sont *Annals of Mathematics*, *Inventiones Mathematicae* et *Journal of the AMS*. Que ce soit pour ERA ou JIP, la part des femmes y est très inférieure à la part dans l'ensemble des journaux, et même à la part dans le groupe des meilleurs journaux ; on observe aussi des périodes « sans femme » dans ces journaux, y compris dans les années récentes ([1], Fig. 7).

S'agissant du nombre de collaborations et de collaborateurs-trices des mathématicien·ne·s, notons en préliminaire qu'une quantité élevée de collaborations est interprétée tantôt positivement, tantôt négativement. Ceci se retrouve d'ailleurs sous la plume de MBST qui écrivent d'une part

> single-authored publications [...] act as proof of one's individual capabilites and [...] show that one is not completely dependent on senior people for ideas, guidance, techniques

(en page 2), et d'autre part

> collaboration, e.g. in the form of joint research, publishing or grant proposals, is considered a strong indicator for productivity and integration within the research community

(en page 3). Il est donc important d'avoir en tête les différentes connotations possibles lors de l'interprétation des résultats de l'étude. Ceci étant dit, MBST mettent en avant deux résultats issus de leur analyse. Tout d'abord est mesurée la part des publications en auteur·e seul·e pour chaque mathématicien·ne. On voit alors que les femmes publient en moyenne 29% de leurs travaux seules, contre 38% pour les hommes ; et la première de leurs publications n'est signée en auteure seule que pour 33% d'entre elles, alors que la part est de 43% pour les hommes ([1], Fig. 8). Ensuite est mesuré le nombre de collaborateurs-trices des individus, comme indice de la « taille de leur réseau ». MBST trouvent que femmes et hommes ont des réseaux de collaborateurs de taille comparable, avec 3,6 collaborateurs en moyenne pour les femmes contre 3,4 pour les hommes ([1], Fig. 9).

Enfin est étudiée la répartition des femmes et de leurs publications dans les sous-domaines de spécialisation mathématique. Les femmes publient dans tous les domaines de la classification MSC, mais n'y sont pas représentées de manière égale. Dans une première direction d'analyse, MBST ont illustré la répartition thématique des mathématiciennes dans un diagramme contenant tous les domaines de niveau 1 de la classification (correspondant aux nombres à 2 chiffres de 00 à 97). La proportion des femmes dans chaque domaine est codée par une couleur de plus ou moins forte intensité, ce qui rend le diagramme difficile à décrire ici et nous invitons les lectrices et lecteurs à consulter la version originale dans [1], Fig. 10. Il est légitime de se demander si le choix du domaine de recherche a des conséquences sur les profils de publications. MBST ont recherché une éventuelle corrélation avec la sous-représentation féminine dans les trois journaux de haut rang mentionnés plus haut, et ont constaté que la présence des femmes dans les 12 domaines de niveau 2 de la classification MSC qui ont le poids le plus important dans ces trois revues [2] est bonne ([1], Fig. 11). Ceci signifie que la rareté des articles de femmes au sommaire des meilleures revues ne trouve pas son explication dans le choix d'un domaine particulier de recherches. Dans une seconde direction d'analyse, MBST se sont intéressés à la diversité thématique des mathématicien·ne·s en observant le nombre de domaines de la classification MSC abordés par les

2. Ces sous-domaines sont Global differential geometry ; Discontinuous groups and automorphic forms ; Lie groups ; Arithmetic algebraic geometry ; Low-dimensional topology ; (Co)homology theory ; Lie algebras and Lie superalgebras ; Arithmetic problems. Diophantine geometry ; Surfaces and higher-dimensional varieties ; Special aspects of infinite or finite groups ; Equations of mathematical physics and other areas of application ; Cycles and subschemes.

auteur·e·s de 2, 3, 4 et 5 publications. Dans chacune de ces quatre catégories, la part de femmes ayant écrit dans au moins 2, ou 3, ou 4, ou 5 domaines MSC est significativement plus faible que la part correspondante d'hommes ([1], Fig 12). Leur conclusion est que la distribution des thèmes de recherches des femmes est plus étroite que celle des hommes.

Discussion des résultats, et questions

Les faits observés dans l'étude de grande échelle menée par MBST sur les publications des mathématicien·ne·s mettent en évidence des différences statistiques dues au genre sous presque tous les angles considérés. Ils montrent aussi que l'augmentation du nombre de femmes dans les études supérieures ne suffit pas à faire croître leur représentation dans les postes universitaires plus élevés (phénomène du « tuyau percé »).

Naturellement, l'étude soulève de nombreuses questions, dont certaines devront probablement être abordées par des méthodes différentes de celles de l'article présenté ici. MBST en aborde quelques-unes. S'agissant de la sous-représentation des femmes dans les revues les mieux cotées : les femmes y soumettent-elles moins d'articles ? Leurs articles sont-ils plus souvent rejetés ? S'agissant des collaborations : avec qui hommes et femmes collaborent-ils et elles ? Les personnes les plus proches (directeur-trice de thèse), des personnes de rang universitaire élevé ? S'agissant des choix de spécialisation mathématique : qu'est-ce qui fait qu'un sous-domaine est attractif ? Quelle est l'importance des personnalités susceptibles de fournir des modèles, ou des mentors ? Les domaines émergents sont-ils plus « accueillants » que les autres ? La question plus subtile et fondamentale de savoir quelles personnes, institutions ou phénomènes sociologiques donnent le ton et les normes de l'édition scientifique, semble également de nature à bousculer quelques repères de nos grilles d'analyse usuelles. Les auteur·e·s (nous revenons finalement à ce terme !) de l'article forment le souhait de disposer de données meilleures et plus complètes pour mieux comprendre la situation et pouvoir en tirer des conclusions tant sur les plans individuel que collectif. Le projet « IMU-IUPAC : A Global Approach to the Gender Gap in Mathematical and Natural Sciences : How to Measure It, How to Reduce It ? » [3] récemment accepté par l'ICSU devrait permettre de progresser dans cette direction.

Références

[1] H. Mihaljević-Brandt, L. Santamaría et M. Tullney. « The Effect of Gender in the Publication Patterns in Mathematics ». *PLoS ONE* **11**, nº 10 (2016). URL : `http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0165367`.

Matthieu Romagny

Matthieu Romagny est professeur à l'université Rennes 1. Ses recherches portent sur des questions variées de géométrie algébrique en caractéristique positive ou mixte, notamment autour des courbes algébriques, des champs algébriques, et des schémas en groupes. Il est chargé de mission pour la parité à la SMF.

3. Voir `http://www.icsu.org/what-we-do/projects-activities/icsu-grants-programme/grants-2016-2019`

... La théorie de Galois différentielle

• J. Roques

1. Les travaux de Galois

« Sauter à pieds joints sur les calculs, grouper les opérations, les classer suivant leur difficulté et non suivant leur forme », telle fut la ligne directrice des travaux révolutionnaires d'Évariste Galois au sujet des équations algébriques.

L'apport majeur de Galois à l'étude des racines complexes d'un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$ consista à introduire un objet abstrait mesurant l'indiscernabilité entre ces racines. Il s'agit d'un *groupe*, celui formé par les permutations σ de l'ensemble des racines de $P(X)$ préservant les relations algébriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qu'elles vérifient. Formellement, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines complexes de $P(X)$ alors, à chaque fois que $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ pour un certain $R \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$, on doit aussi avoir $R(\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)) = 0$.

L'approche initiale de Galois a par la suite évolué et sa formulation contemporaine passe généralement par la théorie des corps : on introduit le corps de décomposition $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $P(X)$ sur $\mathbb{Q}$ et on définit le groupe de Galois de $P(X)$ sur $\mathbb{Q}$ comme le groupe des automorphismes de corps de L fixant les éléments de $\mathbb{Q}$ [1].

Galois savait que ses idées se transposaient *mutatis mutandis* à d'autres contextes, tel que celui des fonctions algébriques. Plus surprenant, il avait même sérieusement envisagé de les appliquer aux fonctions transcendantes, comme en atteste la lettre qu'il rédigea la veille du duel fatal :

> Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir *a priori* dans une relation entre quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pouvait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense.

On ignore ce que Galois avait exactement en tête, mais d'autres ont exploré après lui ce « terrain immense » et y ont fait de belles découvertes. Une avancée significative en direction d'une théorie de Galois pour les fonctions transcendantes fut réalisée par Picard : il posa les bases de la théorie de Galois différentielle.

2. Théorie de Galois différentielle

En lieu et place d'une équation algébrique, on s'intéresse maintenant à une équation différentielle linéaire

$$a_n(z)y^{(n)}(z) + \cdots + a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) = 0 \quad (1)$$

avec $a_k(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $a_n(z) \neq 0$. Nous allons exposer la définition à la Picard-Vessiot du groupe de Galois différentiel de cette équation. Les définitions et résultats évoqués ci-après sont détaillés dans le premier chapitre de [6].

Montrons d'abord l'existence d'une extension de corps K de $\mathbb{C}(z)$ munie d'une dérivation $\partial : K \to K$ étendant $d/dz : \mathbb{C}(z) \to \mathbb{C}(z)$ et jouissant des propriétés suivantes :

– K contient n solutions linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ de (1), c'est-à-dire qu'il existe

1. En fait, les automorphismes de corps de K fixent automatiquement $\mathbb{Q}$, mais si on travaillait avec un corps de base plus gros, il ne faudrait pas oublier cette condition.

$y_1, \ldots, y_n$, des éléments de K linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, tels que

$$a_n(z)\partial^n(y_k) + \cdots + a_1(z)\partial(y_k) + a_0(z)y_k = 0;$$

– le corps K est engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par ces solutions et leurs dérivées successives, c'est-à-dire

$$K = \mathbb{C}(z)(y_1, \ldots, y_n, \partial(y_1), \ldots, \partial(y_n), \ldots, \partial^{n-1}(y_1), \ldots, \partial^{n-1}(y_n))\,;$$

– les seuls éléments de K ayant une dérivée nulle sont les éléments de $\mathbb{C}$.

Un tel couple (K, ∂) est appelé *extension de Picard-Vessiot* de (1) sur $(\mathbb{C}(z), d/dz)$ et joue en théorie de Galois différentielle un rôle analogue à celui des corps de décomposition en théorie de Galois classique.

L'existence d'une telle extension de Picard-Vessiot peut se voir par des arguments analytiques simples. Considérons un petit disque $D \subset \mathbb{C}$ sur lequel $a_n(z)$ ne s'annule pas. Un théorème dû à Cauchy assure que l'ensemble V des solutions de (1) analytiques sur D est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

On introduit alors l'extension de corps K de $\mathbb{C}(z)$ engendrée par les éléments de V et leurs dérivées de tous ordres. Ses éléments sont des fonctions méromorphes sur D et on peut munir K de la dérivation $\partial = d/dz$. Le couple (K, ∂) a les propriétés requises.

Le groupe de Galois différentiel G_{gal} de (1) sur $(\mathbb{C}(z), d/dz)$ est par définition constitué des automorphismes de corps σ de K tels que

$$\sigma_{|\mathbb{C}(z)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}(z)} \text{ et } \sigma \circ \partial = \partial \circ \sigma.$$

Ces conditions garantissent en particulier que chaque $\sigma \in G_{gal}$ induit un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de l'espace des solutions V (et donc une permutation de V). L'application $\rho : G_{gal} \to \mathrm{GL}(V), \sigma \mapsto \sigma_{|V}$ est une représentation linéaire fidèle de G_{gal}. (Notons que nous aurions pu, comme Galois, ne pas recourir à la notion de corps, et voir G_{gal} comme un groupe d'automorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de V préservant les relations algébriques à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ entre les éléments de V et leurs dérivées successives.)

2.1 – Structure

Ce groupe de Galois différentiel est généralement infini, mais possède néanmoins une propriété tout à fait particulière : il est naturellement muni d'une structure de groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, $\rho(G_{gal})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ défini par des équations polynomiales. Ce fait, et en particulier les travaux de Kolchin (*e.g.*, [4]), a d'ailleurs contribué à l'essor de la théorie des groupes algébriques.

2.2 – Relations algébriques

Le groupe de Galois différentiel G_{gal} reflète les relations algébriques entre les solutions de (1) et leurs dérivées successives. Moralement, plus G_{gal} est « gros », moins il y a de telles relations algébriques. Par exemple, G_{gal} est aussi « gros » que possible, c'est-à-dire $\rho(G_{gal}) = \mathrm{GL}(V)$, si et seulement si $y_1, \ldots, y_n, \partial(y_1), \ldots, \partial(y_n), \ldots, \partial^{n-1}(y_1), \ldots, \partial^{n-1}(y_n)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}(z)$. Au contraire, G_{gal} est fini si et seulement si $y_1, \ldots, y_n$ sont algébriques sur $\mathbb{C}(z)$. Pour une formulation précise du lien entre G_{gal} et les relations algébriques sus-mentionnées en termes de torseurs nous renvoyons à [6, Theorem 1.28] et nous contentons d'en mentionner la conséquence suivante [6, Corollary 1.30] : le degré de transcendance de K sur $\mathbb{C}(z)$ coïncide avec la dimension de G_{gal} en tant que groupe algébrique sur $\mathbb{C}$, *i.e.*,

$$\dim G_{gal} = \mathrm{deg.tr}\, K/\mathbb{C}(z).$$

La cas $\rho(G_{gal}) = \mathrm{GL}(V)$ évoqué plus haut correspond précisément à $\dim G_{gal} = n^2$ et le cas G_{gal} fini à $\dim G_{gal} = 0$. D'autres exemples classiques : la dimension de $\mathrm{SL}(V)$ vaut $n^2 - 1$ et celle de $\mathrm{SO}(V)$ vaut $n(n+1)/2$.

2.3 – Correspondance de Galois différentielle

La pierre angulaire de la théorie de Galois classique est bien entendu la correspondance de Galois mettant en regard sous-corps et sous-groupes. Elle admet un avatar différentiel tout aussi fondamental, mettant en regard certains corps munis d'une dérivation d'une part et certains groupes algébriques linéaires d'autre part. Plus précisément, soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des extensions de corps de $\mathbb{C}(z)$ contenues dans K et stables par ∂, et soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes algébriques de G_{gal}. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, on note

$$G(K/F) = \{\sigma \in G_{gal} \mid \sigma_{|F} = Id_F\}$$

et pour tout $H \in \mathcal{G}$, on note

$$K^H := \{f \in K \mid \forall \sigma \in H, \sigma(f) = f\}.$$

Alors, la correspondance de Galois différentielle assure que l'application $F \mapsto G(K/F)$ donne une bijection $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ dont l'application réciproque est donnée par $H \mapsto K^H$.

3. De l'analyse à l'algèbre

Certaines ambiguïtés galoisiennes se déduisent de considérations *transcendantes*. C'est le cas de la monodromie, dont l'origine remonte à des travaux célèbres de Riemann. Notons S l'ensemble des racines complexes de $a_n(z)$. Il est assez facile de montrer que tout $f \in K$ se prolonge méromorphiquement le long de tout lacet continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus S$ basé en z_0 et que le résultat $[\gamma]_*(f)$ de ce prolongement est à nouveau un élément de K. L'application $[\gamma]_* : K \to K$ ainsi obtenue est en fait un élément du groupe de Galois différentiel G_{gal}. L'ensemble de ces $[\gamma]_*$ forme un sous-groupe G_{mono} de G_{gal} appelé *groupe de monodromie*.

En général, G_{mono} est un sous-groupe strict de G_{gal}. Cependant, un résultat dû à Schlesinger assure que, si l'équation différentielle (1) possède une certaine condition de régularité, à savoir si ses points singuliers sont réguliers (il faut qu'ils le soient tous, y compris l'infini), alors G_{mono} est Zariski-dense dans G_{gal} ! (Sa démonstration est d'ailleurs une jolie application de la correspondance galoisienne. En effet, d'après cette correspondance, il suffit de montrer que $K^{G_{mono}} = \mathbb{C}(z)$. Pour prouver cette égalité, on remarque d'abord que les éléments de $K^{G_{mono}}$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C} \setminus S$. La condition de régularité assure que leur croissance est modérée au voisinage des éléments de S et à l'infini, ce sont donc des fonctions rationnelles.)

On peut aller plus loin et s'affranchir de cette condition de régularité. Mais la monodromie à elle seule ne suffit plus à former une partie dense de G_{gal}, il faut ajouter des tores exponentiels et des automorphismes de Stokes liés à la divergence de certaines solutions de (1). Nous renvoyons à [7] pour une formulation précise de ce résultat dû à Ramis, qui dépasse le cadre de ce texte.

4. Quelques applications

Les applications de la théorie de Galois différentielle sont multiples, et vont des systèmes dynamiques à la théorie des nombres. En voici quelques illustrations.

4.1 – Intégrabilité par quadratures

Comme dans la section 2, nous désignons par (K, ∂) une extension de Picard-Vessiot sur $(\mathbb{C}(z), d/dz)$ attachée à l'équation différentielle (1). Cette dernière est dite intégrable par quadratures s'il existe une tour de corps $\mathbb{C}(z) = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = K$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $K_i = K_{i-1}(t_i)$ où $t_i \in K$ vérifie l'une des propriétés suivantes [2] :

- $\partial(t_i) \in K_{i-1}$, c'est-à-dire que t_i est l'intégrale d'un élément de K_{i-1}, ou
- $t_i \neq 0$ et $\partial(t_i)/t_i \in K_{i-1}$, c'est-à-dire que t_i est l'exponentielle de l'intégrale d'un élément de K_{i-1}, ou
- t_i est algébrique sur K_{i-1}.

L'intérêt de la théorie de Galois différentielle pour cette question réside dans le fait que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- la composante neutre G° de G (c'est-à-dire la composante connexe de l'identité de G, qui en est un sous-groupe normal d'indice fini) est résoluble ;
- l'équation différentielle (1) est intégrable par quadratures.

C'est une réponse complète à la question de l'intégrabilité par quadratures, similaire à celle apportée par Galois pour la résolubilité par radicaux. Pour davantage de détails, nous renvoyons à [6, § 1.5].

4.2 – Intégrabilité des systèmes dynamiques

La question de l'intégrabilité au sens de Liouville des systèmes hamiltoniens, disons de la forme

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

est un sujet classique et démontrer la non-intégrabilité d'un tel système n'est en général pas aisé. Le problème des n-corps en est un exemple

2. On est en train de définir ce que l'on appelle les extensions liouviliennes. Elles sont appelées ainsi en hommage à Liouville qui s'intéressa à ce genre de question, et plus précisément à l'exprimabilité de primitives en termes de fonctions élémentaires. Liouville est d'ailleurs l'un de ceux qui contribuèrent à sortir les travaux de Galois de l'oubli.

frappant. Morales et Ramis [5] ont donné une obstruction à l'intégrabilité de ces systèmes reposant sur la théorie de Galois différentielle. L'idée est que les systèmes hamiltoniens rencontrés en physique possèdent souvent des solutions particulières explicites auxquelles on associe classiquement une équation différentielle *linéaire*, appelée *équation variationnelle*. Morales et Ramis ont découvert que le groupe de Galois différentiel d'une équation variationnelle attachée à un système hamiltonien intégrable au sens de Liouville a une algèbre de Lie commutative (on parle de commutativité virtuelle). Cette méthode a trouvé d'innombrables applications, et permis de résoudre bon nombre de problèmes ouverts.

4.3 – Théorie des nombres

Rappelons qu'une E-fonction est une série formelle

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[[z]]$$

à coefficients dans le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques telle que

1. $f(z)$ est solution d'une équation différentielle linéaire non nulle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;
2. il existe $C > 0$ tel que
   (a) le maximum des modules des conjugués de a_n soit borné par C^{n+1} ;
   (b) il existe une suite d'entiers strictement positifs d_n telle que $d_n \leqslant C^{n+1}$ et que $d_n a_m$ soit un entier algébrique pour tout $m \leqslant n$.

Les E-fonctions furent introduites par Siegel afin de généraliser les propriétés diophantiennes de la fonction exponentielle $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, et en particulier le théorème de Lindemann-Weierstrass. Le résultat suivant, qui est une vaste généralisation du théorème de Lindemann-Weierstrass, est un des points culminants des travaux de Siegel et Shidlovskii.

Théorème 1 (Siegel-Shidlovskii). *Soient $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ des E-fonctions telles que*

$$(f_1'(z), \ldots, f_n'(z))^t = A(z)(f_1(z), \ldots, f_n(z))^t$$

pour un certain $A(z) \in M_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$. Notons par $T(z)$ un dénominateur commun des coefficients de $A(z)$. Alors, pour tout $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\xi T(\xi) \neq 0$, nous avons

$$\operatorname{deg.tr} \overline{\mathbb{Q}}\Big(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)\Big)/\overline{\mathbb{Q}} = \operatorname{deg.tr} \overline{\mathbb{Q}}(z)\Big(f_1(z), \ldots, f_n(z)\Big)/\overline{\mathbb{Q}}(z).$$

Les travaux d'André dans [1] sur la structure des E-opérateurs et des arguments de théorie de Galois différentielle ont permis à F. Beukers [3] de démontrer le remarquable résultat suivant qui raffine à la fois des travaux de Nesterenko et Shidlovskii et le théorème de Siegel–Shidlovskii.

Théorème 2 (Beukers). *Reprenons les notations du Théorème 1 et considérons $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\xi T(\xi) \neq 0$. Pour toute relation polynomiale $P\Big(f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)\Big) = 0$ avec $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_n]$, il existe $Q \in \overline{\mathbb{Q}}[z][X_1, \ldots, X_n]$ tel que $Q\Big(f_1(z), \ldots, f_n(z)\Big) = 0$ et $P(X_1, \ldots, X_n) = Q(X_1, \ldots, X_n)_{|z=\xi}$.*

Ce résultat assure donc que les relations algébriques à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ entre les *nombres* $f_1(\xi), \ldots, f_n(\xi)$ proviennent toutes de relations algébriques à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ entre les *séries formelles* $f_1(z), \ldots, f_n(z)$. Et l'étude des relations algébriques entre ces séries relève de la théorie de Galois différentielle !

André [2] a récemment proposé une démonstration alternative du théorème de Beukers cité précédemment reposant sur... une nouvelle correspondance de Galois différentielle ! Celle-ci lui permet de déduire directement le théorème de Beukers du théorème de Siegel-Shidlovskii, indépendamment des résultats de [1]. Son approche s'applique à d'autres situations, au-delà du cadre différentiel, *cf.* [2, Section 6.5].

5. Et après ?

L'histoire ne s'arrête pas là. On dispose aujourd'hui de théories galoisiennes pour les équations différentielles en caractéristique positive, pour les équations aux différences, et même pour des équations non-linéaires (Malgrange, Umemura), on aussi des théories « à paramètres », *etc*. Beaucoup reste à faire sur ce terrain qui est immense !

Références

[1] Y. André. « Séries Gevrey de type arithmétique. I. Théorèmes de pureté et de dualité. » *Ann. of Math. (2)* **151**, nº 2 (2000), p. 705–740.

[2] Y. André. « Solution algebras of differential equations and quasi-homogeneous varieties: a new differential Galois correspondence ». *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **47**, nº 2 (2014), p. 449–467.

[3] F. Beukers. « A refined version of the Siegel-Shidlovskii theorem ». *Ann. of Math.* **127**, nº 2 (1988), p. 279–308.

[4] E. R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54. New York : Academic Press, 1973, p. xviii+446.

[5] J. J. Morales-Ruiz et J.-P. Ramis. « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. I, II ». *Methods Appl. Anal.* **8**, nº 1 (2001), p. 33–95, 97–111. issn : 1073-2772.

[6] M. van der Put et M. F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*. **328**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin : Springer-Verlag, 2003, p. xviii+438.

[7] J.-P. Ramis. « Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301**, nº 5 (1985), p. 165–167.

Julien Roques
Julien.Roques@univ-grenoble-alpes.fr

Julien Roques est maître de conférences à l'Institut Fourier de l'université Grenoble Alpes. Ses travaux portent sur l'algèbre, la théorie des nombres, les équations fonctionnelles, sur leurs interactions et leurs applications.

Présidentielle : n'oublions pas la science !

Mutation vers le monde numérique, problèmes énergétiques ou écologiques, place de l'économie dans le débat public, nouvelles approches des problèmes de société : autant de questions qui nécessitent la présence des scientifiques dans le débat public. Pour qu'ils partagent leurs savoirs bien sûr. Mais aussi parce que la société doit s'assurer qu'ils prennent conscience de leurs responsabilités ainsi que des conflits d'intérêt et des autres questions d'éthique.

Toutefois, en dépit d'un intérêt récent de certains responsables politiques (voir par exemple la proposition de « Résolution sur les sciences et le progrès dans la République », ou les travaux approfondis de l'OPECST), force est de constater que la plupart d'entre eux sont très éloignés des sciences. En particulier, ils semblent se satisfaire de la situation actuelle de l'université et ne pas penser qu'il soit nécessaire d'en débattre.

Au contraire ! Nous, sociétés savantes, sommes habituées à réfléchir à ces questions, et à proposer conseils et projets à tous ceux qui souhaitent réellement faire progresser la place des sciences et de leur enseignement. Nos modes de fonctionnement nous permettent de consulter rapidement un nombre significatif de nos membres et de faire circuler l'information.

Depuis des années, nous multiplions les actions en direction des jeunes ou du grand public, et celles qui visent à promouvoir la science dans les entreprises et les transferts de technologie. Nos commissions réfléchissent (souvent en commun) aux problèmes liés à l'enseignement à tout niveau, à la recherche et à son transfert, aux moyens d'augmenter l'attractivité des sciences, aux problèmes de parité et de diversité sociale, etc.

Nous avons donc décidé d'interpeller les candidat(e)s à l'élection présidentielle, et leurs électeurs, sur ces thèmes essentiels pour l'avenir de la nation. Nous espérons que cela permettra qu'ils soient plus présents dans la campagne.

1. L'enseignement et la diffusion des sciences

1.1 – Disciplines et programmes

La qualité de la formation scientifique française, en particulier dans nos disciplines, s'appuie sur une longue tradition, qui a procuré à la France de nombreux prix Nobel et médailles Fields, de nombreux ingénieurs et capitaines d'industrie. Cependant, les derniers résultats des enquêtes TIMSS et PISA ont confirmé que notre enseignement des sciences traverse une crise grave ; ce que les professeurs, à tous niveaux, constatent régulièrement. Cette crise touche aussi bien la formation élémentaire et le bagage qui convient au citoyen, que la formation des futurs scientifiques.

Nous espérons de nos instances politiques qu'elles prennent la mesure de ce problème. Les plus anciennes de nos sociétés ont été créées au lendemain de la guerre de 1870 car les pouvoirs publics ont alors brusquement pris conscience de l'importance de la science dans la compétition internationale. Une prise de conscience de ce décrochage scientifique est également nécessaire aujourd'hui, alors que les besoins en formation scientifique de qualité sont plus que jamais évidents.

Il est significatif que la suppression de l'histoire en terminale scientifique a provoqué un tollé, alors que la suppression des mathématiques en terminale littéraire s'est faite dans une indifférence presque générale. Le contenu des programmes scientifiques a également été amoindri tout au long du cursus des élèves, surtout en lycée. Le rétablissement d'horaires suffisants de mathématiques et de sciences au lycée est une priorité qui exige un traitement actif de la pénurie actuelle de professeurs.

Pour que la science et les techniques retrouvent leur place dans la culture de tous et améliorent l'efficacité de chaque citoyen, il faut montrer leur richesse et la diversité de leurs pratiques, qu'elles soient orientées vers la connaissance ou bien vers l'action et la production. La science et la démarche scientifique permettent de comprendre le monde dans ses mécanismes les plus fondamentaux.

Ceci vaut pour toutes les disciplines que nous représentons. La physique permet de saisir les notions d'énergie, de bilans et d'évolution des systèmes. Les mathématiques sont un langage permettant de décrire le monde, comme l'a écrit Galilée, et d'explorer les domaines abstraits. Dans notre ère numérique, l'informatique amplifie les capacités à décrire et interagir avec le monde.

1.2 – L'enseignement primaire et secondaire

Lors d'une réflexion collective à laquelle toutes nos sociétés ont participé, en impliquant des professeurs en activité des différents niveaux, une liste de ce qu'il semble urgent de faire a été établie :

- revoir la définition des filières et l'articulation des disciplines ;
- introduire une réelle interdisciplinarité ancrée sur les notions fondamentales qui relient les disciplines dans tous les cycles d'enseignement ;
- proposer des programmes cohérents sur l'ensemble du cycle lycée et sur l'ensemble des disciplines, évoluant de manière raisonnée, en concertation avec la communauté éducative ;
- renforcer et multiplier les pratiques scientifiques en classe à tous les niveaux en prévoyant le temps nécessaire pour cela.

Pour qu'elle se traduise en un changement réel des pratiques, une telle réforme doit se faire, dans son élaboration comme dans son suivi, en concertation avec tous les acteurs : associations disciplinaires d'enseignants, sociétés savantes et associations de parents d'élèves.

Quels moyens mettrez-vous en place pour que l'enseignement primaire et secondaire donne à l'ensemble de la population un socle de connaissances scientifiques essentielles ? Comment encouragerez-vous l'engagement vers les études de science et d'ingénierie des talents nécessaires au développement économique ?

1.3 – L'enseignement supérieur

Les étudiants qui arrivent aujourd'hui à l'université n'ont, souvent, pas le bagage scientifique nécessaire pour poursuivre dans les formations post bac, tout particulièrement dans les licences scientifiques. Une majorité de bacheliers semblent ne plus maîtriser le calcul, numérique ou littéral, et le raisonnement, avoir perdu le goût ou la capacité de travailler chez eux ou en classe, ignorer ce que sont les sciences qu'ils ont décidé d'étudier. La démarche scientifique dans l'enseignement supérieur les déstabilise.

Par ailleurs, l'image de l'université est faussée par un manque flagrant d'informations sur son action. De plus en plus de masters scientifiques ont un excellent taux d'insertion professionnelle en entreprise, ce que les services d'orientation savent peu. Plus généralement, ces services connaissent mal les débouchés des filières universitaires.

Quels moyens mettrez-vous en œuvre pour permettre aux étudiants de réussir leurs études supérieures, et pour valoriser les études à l'université ?

1.4 – La formation et la carrière des enseignants

L'année de formation en alternance pour les nouveaux recrutés des concours de l'enseignement primaire et secondaire a été rétablie. C'est une bonne chose. Mais la formation scientifique reste fragile pour les futurs enseignants à l'école primaire. La structure des études est ainsi faite qu'une majorité des professeurs des écoles n'ont qu'un bagage scientifique extrêmement léger. Ils ne peuvent alors transmettre aux enfants que leur incompréhension, voire leur appréhension, pour ce qui est scientifique.

En outre, deux années de formation initiale, si riches soient-elles, ne peuvent équiper un enseignant pour toute sa carrière, et la formation continue, notamment scientifique, des professeurs des écoles, de lycées et collèges reste insuffisante : il faut lui donner la place qui lui revient dans le dispositif de formation des enseignants. Il est frappant qu'elle soit sacrifiée alors que l'évolution des programmes scolaires et le développement de l'interdisciplinarité créent des besoins supplémentaires. Cette formation continue ne peut ni reposer sur l'initiative individuelle, ni être externalisée via des associations comme La Main à la Pâte ou les Maisons des sciences, quelle que soit la qualité de leur travail. Elle requiert aussi une prise en charge par l'institution.

Quelles mesures envisagez-vous pour la formation scientifique des futurs professeurs des écoles et pour la formation continue des enseignants ?

1.5 – Attirer vers le métier d'enseignant du secondaire

Les mesures préconisées précédemment risquent d'être insuffisantes pour résoudre la crise des recrutements d'enseignants en mathématiques et en physique. Le besoin de stimuler l'intérêt pour les sciences se fait sentir à tous niveaux et en particulier pour attirer de nouveaux enseignants. Il y a une réelle prise de conscience des chercheurs et enseignants-chercheurs de nos domaines scientifiques de l'importance des actions de popularisation des sciences vis-à-vis du grand public et du public scolaire. Celles-ci se multiplient, qu'elles soient organisées par nos sociétés ou par d'autres.

Pour rendre son attractivité à l'enseignement secondaire, pourquoi ne pas offrir aux enseignants des opportunités variées, qui leur donnent des perspectives d'enrichissement intellectuel tout au long de leur carrière ? Parmi celles auxquelles nos sociétés et les communautés scientifiques que nous représentons peuvent être associées on peut citer :

– la participation à des séminaires, par exemple dans les Instituts de Recherche en Enseignement des Sciences (IRES et IREM),
– des périodes d'accueil (stage ou trimestre sabbatique) dans un environnement universitaire, leur permettant à la fois de se former et de se ressourcer.

La participation à des formations au cours de sa carrière, à des colloques ou à des projets comme les Olympiades ou les concours Faites de la Science ou C.génial, les publications dans les revues spécialisées, devraient être prises en compte dans l'activité de l'enseignant et lui donner des perspectives d'évolution de carrière.

Revaloriser le métier d'enseignant dans la situation actuelle est une tâche difficile mais indispensable. Le monde politique doit œuvrer pour que les enseignants retrouvent la considération dont ils étaient naguère l'objet, y compris sur le plan financier.

Comment envisagez-vous d'attirer suffisamment de jeunes vers les sciences et plus particulièrement vers les métiers de l'enseignement ?

2. La recherche scientifique et sa structuration

2.1 – Financer la recherche : comment et à quelle hauteur

La recherche scientifique fondamentale nécessite un investissement constant et durable des équipes qui la mènent, avec un accompagnement financier suffisant. C'est cet investissement à long terme qui a permis à nos disciplines d'atteindre la visibilité internationale dont elles jouissent.

En France, le financement de la recherche est en baisse, et inférieur à ce que l'on observe dans nombre de pays scientifiquement comparables (seulement 2,3% du PIB pour la Recherche et le Développement, à comparer à 3% en Allemagne et à 4,3% en Corée). Il faut inciter les entreprises à rattraper le niveau des contrats offerts chez nos concurrents, développer le dialogue et multiplier les échanges entre les universités et les entreprises.

De plus, la France n'échappe pas à un mal qui menace la recherche fondamentale dans le monde entier : l'émiettement des crédits sous la forme de financements sur projets. Ainsi la part des financements récurrents diminue pour laisser place aux financements sur projets depuis la création de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) et des programmes d'« excellence », et aux programmes du Conseil européen de la recherche (ERC).

Les courtes durées conviennent aux projets ayant vocation à évoluer rapidement vers des transferts de technologie, ou à certains projets interdisciplinaires, mais il y a danger pour la recherche fondamentale si celle-ci ne dispose pas de la longue durée. Plusieurs comités d'évaluation de l'ANR ont manifesté leur fort mécontentement en juin 2016 à la suite de la suppression des programmes « blancs » et de dysfonctionnements manifestes des processus de sélection. Plus généralement, le financement de la recherche sur projets génère une bureaucratie qui semble vouloir gaspiller toujours plus une des ressources les plus précieuses, notamment chez les jeunes : le temps des chercheurs.

Les chercheurs et enseignants-chercheurs souhaitent aussi que les modèles de financement prennent en compte la diversité de leurs besoins : spécificités de leurs domaines scientifiques, avancement dans la carrière, etc.

Quelle politique d'investissement prévoyez-vous pour rattraper ce retard financier, qui aurait à moyen terme, des conséquences sur la qualité scientifique et technologique française, et sur l'innovation ? Quel engagement pouvez-vous prendre pour que la répartition des budgets prenne mieux en compte la diversité de la communauté scientifique ?

2.2 – Évaluer la recherche

L'auto-évaluation de la recherche, c'est-à-dire l'évaluation par les pairs, fait partie intégrante de son organisation et requiert un investissement constant de la communauté scientifique. D'une part elle valide la production scientifique, en garantit la qualité et l'originalité, met en perspective les résultats obtenus, et sert de base aux promotions. D'autre part elle constitue l'outil de base de toute politique scientifique. Nos sociétés savantes y sont très attachées.

Avec l'extension des financements sur projets, le nombre d'évaluations s'est multiplié, chacun étant tour à tour candidat ou évaluateur. Sous la pression de ce système, les chercheurs en situation d'évaluateurs (pour les projets et les recrutements) sont poussés à la facilité qu'offre la bibliométrie, dans laquelle la qualité est mesurée à la cote des revues dans lesquelles on a publié. Nos sociétés savantes sont inquiètes de ces pratiques et souhaitent que les chercheurs aient les moyens de faire de véritables évaluations scientifiques.

Le problème complexe d'une véritable évaluation qui ne soit pas trop consommatrice de temps, en liaison avec une politique de publication ainsi qu'avec un système de financement et d'organisation de la recherche, est un défi pour la science de demain. Plutôt que des changements rapides à grande échelle, on pourrait avoir une approche pragmatique, scientifique : encourager et soutenir des expériences à petite échelle et les évaluer. Car les acteurs sur le terrain ayant des idées ne manquent pas, et nos sociétés savantes, représentatives de leurs communautés et en liaison avec leurs analogues internationales, sont prêtes à servir de relais.

L'évaluation de la recherche pose des problèmes similaires à tous les pays et les conséquences des décisions publiques sont interdépendantes, avec la multiplication des collaborations internationales. Comment pensez-vous œuvrer pour une réflexion, puis une évolution, européennes ?

2.3 – Valoriser le doctorat

À la différence de la très grande majorité des pays, l'emploi des docteurs en France reste surtout cantonné au milieu académique, même si la situation, très inégale en fonction des disciplines, est en amélioration. Il nous semble nécessaire que les pouvoirs publics et le monde de l'entreprise encouragent l'embauche de docteurs en sciences et la formation par la recherche, par exemple en réservant aux docteurs des places aux divers concours de la fonction publique.

La remise en cause des résultats obtenus, le souci d'avoir les meilleures solutions possibles, la formation à aller chercher dans la littérature ou auprès des collègues les éléments de réponse aux problèmes qu'il se pose, toutes ces caractéristiques du travail d'un doctorant sont valorisées en Allemagne, au Canada, ou en Australie, mais mal en France. La communauté internationale pousse cependant la France à cette reconnaissance en privilégiant les docteurs dans les recrutements, notamment dans les entreprises. Celles-ci parieraient sur le long terme en comprenant l'enjeu d'une formation de fond de leurs nouveaux recrutés. Dans les autres pays, le monde politique lui-même comprend un nombre conséquent de docteurs. Nous sommes conscients que la confiance entre les universitaires et les autres employeurs est là aussi capitale.

Quelles solutions proposez-vous pour combler le retard de la France dans la valorisation du doctorat ?

2.4 – Publier les résultats de la recherche

L'Internet a bouleversé le paysage de l'édition scientifique. On s'attendrait à une diffusion instantanée et mondiale des résultats de la recherche et de leurs données, à un coût très faible. Or, bien que le paysage actuel de l'édition scientifique réponde en partie à cette attente, de puissants éditeurs se sont installés dans une situation de quasi-monopole pour une grande partie des revues. Ces éditeurs, obéissant à des intérêts commerciaux parfois contradictoires avec la qualité scientifique, n'hésitent pas à multiplier les péages, grâce auxquels ils réalisent des bénéfices records, pour chaque usage que les chercheurs ou les citoyens voudraient faire des publications.

La situation est d'autant plus inacceptable qu'elle porte sur des connaissances produites puis évaluées par des chercheurs payés par la puissance publique, connaissances récupérées à faible coût par les éditeurs. Les communautés scientifiques et les pouvoirs publics de nombreux pays sont intervenus. L'accès libre aux publications a été prôné par plusieurs pays, ainsi que par l'Union Européenne, même si celui-ci se fait au prix de faire payer l'auteur, ce contre quoi nos sociétés se sont mobilisées. Le libre accès à l'archivage des publications par leurs auteurs est une première réponse à ce problème, qui figure dans la loi pour une République numérique (articles 30 et 38), ce dont nous nous félicitons.

Il est urgent de définir une politique qui permette une réelle souveraineté sur la production scientifique de nos chercheurs. Nos sociétés sont doublement concernées : comme éditrices de journaux scientifiques qui participent au rayonnement de la France tout en ayant du mal à co-exister avec les géants de l'édition ; et comme représentantes de nos communautés scientifiques qui sont confrontées aux problèmes financiers de leurs institutions et à l'inflation du nombre de revues. Plusieurs initiatives, telles OpenEdition en sciences humaines, offrent d'autres possibilités. Ce problème touche les pays scientifiquement et économiquement développés aussi bien que les pays en développement, dont l'essor scientifique nous tient à cœur.

La France peut-elle être source d'initiative pour l'Europe en terme de politique de publication scientifique ? Comment pensez-vous mener une réflexion nationale, voire internationale, à ce sujet ?

2.5 – Structuration du tissu universitaire

La politique de fusion des universités est réalisée sans vraie réflexion et concertation. Le pouvoir politique a laissé le Commissariat Général à l'Investissement gérer la politique « d'excellence » en ignorant les réalités locales des universités tant sur le plan de la recherche que de l'enseignement. Ce manque d'intérêt se manifeste d'ailleurs par l'indifférence que suscitent les multiples conflits qui émaillent la construction des comue.

Ce plan « d'excellence » masque une politique de restriction budgétaire via une concentration des moyens dans les plus gros établissements qui risque de créer des déserts scientifiques. Il ne respecte pas la façon dont se construit la recherche, dont les avancées majeures sont essentiellement le fait d'individus ou de petites équipes.

Comptez-vous encourager aussi des « excellences » locales ? Permettrez-vous une structuration européenne de la recherche et de l'enseignement supérieur ?

Société Française de Physique : Bernard Julia, Jérôme Pacaud, Michel Spiro. Société Infomatique de France : Gilles Dowek, Christine Froidevaux, Jean-Marc Petit. Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles : Fatiha Alabau, Frédéric Hélein, Thierry Horsin. Société Mathématique de France : Aline Bonami, Laurent Guillopé, Stéphane Seuret.

Nouvelles du CNU

1. Rapport sur les sessions du CNU 25 pour l'année 2016

La section 25 du CNU nouvellement élue s'est réunie le 23 novembre 2015 pour procéder à l'élection de son bureau. Le bureau désigné se compose comme suit :

– président, Philippe Briet, université de Toulon;
– 1er vice-président, David Hernandez, université Paris Diderot;
– assesseur, Caroline Gruson, université de Lorraine;
– 2e vice-président, Olivier Ruatta, université de Limoges;
– assesseur, Isabelle Liousse, université Lille 1;
– assesseur, Gioia Vago, université de Dijon.

Lors de cette réunion, le CNU a voté les motions suivantes.

Motion sur son fonctionnement : les membres titulaires et suppléants du CNU 25 ne pourront bénéficier ni d'une promotion ni d'un congé de recherche ou de conversion thématique au titre du CNU durant leur appartenance au conseil. Ils peuvent néanmoins être candidats à une promotion ou un CRCT au niveau de leur établissement d'origine. Il est demandé aux membres du conseil, lors d'une éventuelle candidature à la promotion ou à un CRCT au niveau local, de préciser qu'ils ne candidatent pas au titre du CNU en raison de la position affichée ci-dessus.

Motion sur le suivi de carrière : la section 25 du CNU se joint à la CP-CNU pour demander à ce que la « session suivi de carrière » inscrite au calendrier 2016 du CNU soit repoussée, tant que les objectifs de cette session ne sont pas explicités. La 25e section du CNU s'oppose à ce que soit instauré un examen systématique des dossiers de suivi de carrière des enseignants-chercheurs dont les buts ne seraient pas précis.

À la demande de notre collègue élu Sebastien Maronne (université Paul Sabatier), la section décide de considérer de manière systématique les candidats dont les thématiques sont l'Épistémologie ou l'Histoire des mathématiques.

La qualification

Le bureau de la section a nommé deux rapporteurs par dossier. Les noms des deux rapporteurs ont été communiqués aux candidats par le Ministère.

Il est important de préciser que la décision de qualification ou de non-qualification est une décision de la section dans son ensemble et non pas des seuls rapporteurs, dont le rôle est avant tout de présenter les éléments factuels du dossier, en particulier en lien avec nos critères de qualification.

1.1 – Rappel sur les règles déontologiques et impossibilités provisoires de siéger

– Les membres du CNU ne peuvent ni participer à la rédaction des rapports ni assister aux délibérations dans les cas concernant :
– des parents ou alliés jusqu'au troisième degré. Cette règle s'applique lorsqu'il existe un lien familial et notamment entre conjoints, entre personnes liées par un pacte civil de solidarité et entre concubins. Le lien familial est également constitué entre l'une de ces personnes et ascendants et descendants de son conjoint, de la personne liée par un pacte civil de solidarité et de son concubin,
– un candidat dont ils ont dirigé ou co-dirigé la thèse ou s'ils ont été garants de son habilitation à diriger des recherches.
– Les membres titulaires et suppléants du CNU ne peuvent participer ni aux délibérations ni à la rédaction des rapports dans les cas concernant un candidat qui a préparé son doctorat ou exercé des activités au sein de l'établissement dans lequel ils sont eux même affectés ou dans lequel ils exercent ou ont exercé des fonctions depuis moins de deux ans.

À noter : *le non-respect de ces règles entraîne la nullité des décisions prises par la section concernée (article 17 de l'arrêté du 19 mars 2010).*

1.2 – Qualification aux fonctions de Maître de conférences

Le nombre de candidats à la qualification était de 345 dont 58 femmes. Nous avons examiné 307 dossiers. 82 candidats n'ont pas été qualifiés dont 16 femmes. D'autre part 2 candidats se sont présentés au titre de la qualification aux fonctions de Maître de conférences du Muséum national d'histoire naturelle. Un candidat a été qualifié.

L'accès à la qualification repose principalement sur

- l'activité scientifique, l'évaluation du candidat se fait à travers l'ensemble de ses travaux : publications (s'il y en a), et le contenu de sa thèse de doctorat ;
- l'aptitude à enseigner les mathématiques.

Critères d'évaluation

L'activité scientifique. Elle est jaugée par un travail récent de recherche en mathématiques, contenant des résultats théoriques nouveaux et des démonstrations rigoureuses sur le plan mathématique. Son évaluation se fait à travers :

- les travaux de la thèse (les résultats importants du doctorat, le sujet, les techniques mises en jeu…) ; pour les candidats titulaires d'un doctorat très récent, on n'exige pas de publication : la qualification peut être accordée après étude de la thèse et des rapports de pré-soutenance et de soutenance ;
- les publications récentes. Pour les autres candidats, on vérifie que la thèse a donné lieu à des publications dans des journaux référencés (par exp. dans MathScinet, zbMATH).

Dans le cas des candidats ayant changé de thématique, on demande à ce que le dossier comporte des publications récentes dans les thématiques de la section 25 ; il se peut qu'une prépublication ne suffise pas à obtenir la qualification, la section demande alors une confirmation de ce travail de recherche (par une publication).

Pour les dossiers relevant aussi de la section 26 (mathématiques et applications) une attention particulière est portée sur les aspects théoriques du dossier. La seule utilisation d'outils mathématiques, classiques ou avancés, même de façon innovante et dans des domaines originaux, ne peut permettre de qualifier un candidat en section 25.

C'est le cas aussi pour les candidats dont le dossier contient une part importante en informatique et relèvent aussi de la section 27, que ce soit à travers une thématique reconnue à la fois par les communautés en mathématiques et en informatique, comme par exemple la théorie des graphes, la logique, la théorie des automates, la complexité algorithmique, ou d'une discipline transverse comme la cryptographie. La section s'assure d'un contenu théorique et mathématique suffisant.

L'aptitude du candidat à enseigner des mathématiques fondamentales. Pour les candidats dont les travaux sont à la marge des thématiques de la section 25, la section s'appuie en particulier sur leur cursus en mathématiques ou tout autre élément confirmant la capacité du candidat à enseigner les mathématiques

Candidats dont la thématique est l'Épistémologie ou l'Histoire des mathématiques. Le dossier scientifique est examiné en tant que dossier d'Épistémologie ou Histoire des mathématiques. On sollicite pour cela l'avis d'experts dans ce domaine faisant partie ou non du CNU. En particulier, il n'y a aucune réticence a priori vis-a-vis des travaux portant sur des périodes anciennes ou ayant une orientation davantage philosophique qu'historique. On attend à ce que le dossier du candidat mette en évidence des liens significatifs avec la communauté mathématique, ce qui distingue d'une demande de qualification en section 72.

Pour une qualification aux fonctions de maître de conférences, on vérifie que le candidat soit apte à enseigner les mathématiques au moins jusqu'au niveau L3. Des indicateurs sont, par exemple : avoir passé l'agrégation de mathématiques, un DEA ou un master de mathématiques, avoir une certaine expérience en enseignement des mathématiques dans des filières post-bac, avoir un contenu mathématique substantiel dans la thèse et dans les publications.

1.3 – Qualification aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats était de 82 dont 9 femmes. Le nombre de dossiers examinés était de 75. 7 candidats n'ont pas été qualifiés.

Pour qualifier un candidat, la section 25 se base principalement sur :

- l'activité et le rayonnement scientifique du candidat ;
- l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau Master mathématiques ;
- la capacité du candidat à encadrer des doctorants (à travers son expertise en mathématiques, la variété des thèmes qu'il a abordés, sa capacité à avoir posé et résolu des questions pertinentes ...). La section 25 n'exige pas d'avoir encadré ou co-encadré un doctorant pour pouvoir obtenir une qualification aux fonctions de Professeur. Cependant des encadrements ou co-encadrements éventuels de doctorants ou post-doctorants sont un plus pour le dossier.

Les critères principaux. L'activité de recherche, jugée sur :

- une production régulière de publications de qualité, une attention particulière étant portée sur les 4 dernières années ;
- la diversité des thématiques scientifiques abordées, en particulier celles qui sortent du cadre de la thèse.

Le rayonnement du candidat :

- les participations à des conférences, les invitations dans des colloques internationaux, les séjours à l'étranger, la variété des collaborations...

Pour les candidats relevant aussi de la section 26 (mathématiques et applications) ainsi que ceux relevant de la section 27, la section 25 se base sur les mêmes critères que ceux utilisés pour les candidats à la qualification aux fonctions de Maître de conférences.

Candidats dont la thématique est l'Épistémologie ou l'Histoire des mathématiques. Le dossier scientifique est examiné de la même manière que dans le cas d'une demande de qualification Maître de conférences. Cependant on demande en plus que le candidat fasse preuve d'une grande implication au sein de la communauté mathématique, ce qui peut se traduire notamment par :

- un enseignement régulier des mathématiques à divers niveaux de l'université (du L1 au M2) ;
- des responsabilités au sein du département de mathématiques de son établissement ;
- des projets scientifiques menés en commun avec des mathématiciens ;
- des publications dans des revues destinées aux mathématiciens.

Il est important de souligner que le CNU actuel comme le précédent n'exige pas que le candidat possède une thèse en mathématiques.

1.4 – Renouvellement de qualification

Cela concerne aussi bien les MCF que les PR.

Les dossiers des candidats à un renouvellement de qualification font l'objet d'une attention particulière.

Les périodes vides en productions scientifiques sont analysées, et sont presque systématiquement rédhibitoires si elles concernent les 4 dernières années d'activité.

A contrario, une reprise d'activité récente, concrétisée par des publications ou des travaux soumis est considérée favorablement par le CNU. Cependant, si cette reprise se traduit essentiellement par des travaux soumis ou en cours, le CNU peut reporter sa décision de qualification à une campagne ultérieure, conditionnant sa décision à la publication des travaux.

Il est important de souligner qu'une non-qualification est une décision non-définitive, elle peut être révisée l'année suivante. Le CNU veille à ce que le dossier d'un candidat refusé ne soit pas examiné deux années de suite par les mêmes rapporteurs.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus dans ce document ne font l'objet d'une application automatique.

Les promotions

La section 25 du CNU, a attribué les promotions en veillant à ce que certains équilibres soient respectés. Notamment

- l'ancienneté dans le corps et le grade d'appartenance ;
- l'âge des candidats, en particulier nous essayons d'éviter de concentrer les promotions sur une classe d'âge ;
- une répartition géographique raisonnable des promotions ;

- une répartition par thématique, en tenant compte des dossiers ayant des thématiques à la marge de celles de la section 25 ;
- tous les éléments objectifs expliquant le retard éventuel dans la carrière, en particulier l'appartenance à des établissements à petit effectif.

Pour chaque candidat le bureau désigne deux rapporteurs.

La section 25 demande à ce que les dossiers des candidats décrivent la carrière au moins depuis le dernier changement de corps ou de grade et ne soit pas strictement limités aux dernières années.

Pour évaluer chaque dossier, nous prenons en compte les éléments suivants :

- un cv précis contenant l'ensemble des informations du candidat ;
- l'activité scientifique reposant sur une description des travaux scientifiques mettant en avant les travaux les plus marquants ;
- la qualité des publications, le dossier doit comprendre une liste de l'ensemble des travaux classée par type (article dans les revues à comité de lecture, actes de colloques, livres ou chapitres de livre, articles de vulgarisation...) ;
- le rayonnement national et international : participation à des conférences (en particulier s'il s'agit de conférence invité), à des séminaires... Collaborations internationales, séjours à l'étranger ;
- les responsabilités diverses : pédagogiques, administratives, scientifiques, coordination de projets, présidence ou appartenance à diverses commissions ;
- l'encadrement doctoral : thèses soutenues ou en cours, le devenir des doctorants ;
- mandats nationaux (membre de commissions du CNRS, du CNU...) et mandats locaux (membre du CA, CAC, CORE...).

1.5 – Promotion à la hors classe des Maîtres de conférences

Le nombre de candidats était de 49 dont 9 femmes. 18 candidats ont été proposés à la hors classe dont 3 femmes.

Liste des candidats retenus : Blache François Régis, Damian Mihai, Dingoyan Pascal, Dumas Éric, Fichou Goulwen, Hauswirth Laurent, Maugendre Hélène, Millet Fauquant Florence, Monnier Philippe, Mosaki Elie, Mounoud Pierre, Rossignol Raphaël, Ruette Sylvie, Schapira Barbara, Stos Andrzej, Touzet Frédéric, Verovic Patrick, Wageman Friedrich.

1.6 – Promotion des Professeurs

Promotion à la Première Classe des Professeurs

Le nombre de candidats était de 75 dont 3 femmes. 12 candidats ont été proposés à la Première Classe des Professeurs dont 1 femme.

Il est à souligner que le nombre de promotions offertes reste très faible au regard du nombre de candidats soit 16%.

Liste des candidats retenus : Autissier Pascal, Calaque Damien, Comte Georges, Guirardel Vincent, Haissinski Peter, Heiermann Volker, Lecouvey Cedric, Meigniez Gaël, Merker Joël, Russ Emmanuel, Sarti Alessandra, Zuk Andrzej.

Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 51 dont 3 femmes. 10 candidats ont été proposés à la hors classe dont 1 femme.

Liste des candidats retenus : Bachoc Christine, Bergeron Nicolas, Breuillard Emmanuel, Buff Xavier, Falbel Elisha, Fan Ai Hua, Hubert Pascal, Krikorian Raphaël, Nier Francis, Shappacher Norbert.

Promotion au deuxième échelon de la classe exceptionnelle des Professeurs

La section 25 tient compte de la qualité du dossier du candidat mais aussi et de manière importante de l'ancienneté dans le premier échelon.

Le nombre de candidats était de 36 dont 0 femme. 7 candidats ont été retenus.

Liste des candidats retenus : Burq Nicolas, Ivashkovych Serge, Lustig Martin, Paulin Frederic, Vasserot Eric, Zinsmeister Michel, Zoritch Anton .

Attribution des Congés pour Recherche ou Conversion Thématique

Le nombre de candidats était de 74 (dont 3 candidates MCF et 14 candidates Prof.). La section disposait de 8 semestres au titre des CRCT, soit moins de 10% de la demande (compte tenu du nombre de semestres demandé par candidat). Il apparaît urgent d'augmenter le nombre de possibilités.

L'examen des candidatures se fait en prenant en considération les éléments suivants qui doivent apparaître dans chaque demande :

– un CV détaillé et une liste de travaux en lien avec le projet proposé ;
– une description du projet de recherche en mettant en avant des éléments le justifiant : contexte scientifique, liens avec la politique scientifique du laboratoire/équipe d'appartenance, le cas échéant un argumentaire concernant la conversion thématique ;
– la section est sensible à la faisabilité du projet proposé. Par exemple une lettre d'invitation (dans le cas d'un déplacement à l'étranger), les moyens dont le candidat dispose pour mener à bien le projet, etc.

Cette liste, non exhaustive, est fortement conseillée. De manière générale la section prend en compte tous les éléments permettant de cadrer au mieux la demande.

CRCT attribués.

MCF : Boumaza Hakim, Chavaudret Claire (retour de maternité), Jouve Guillaume, Lenzhen Anna, Sahbani Jaouad.

PR : Delzant Thomas, Fan Ai Hua, Roubtsov Vladimir.

Liste complémentaire : Mouze Augustin, Gauthier Thomas, Lahoz-Vilalta Marti.

Session PEDR

Le nombre de candidatures à la PEDR a augmenté cette année, ce dont la section se félicite.

2016 : 107 candidatures PR et 111 candidatures MCF.

2015 : 86 candidatures PR et 88 candidatures MCF.

Il convient en effet de rappeler que les notes globales sont données au prorata du nombre total de candidature.

Plus précisément, nous devons attribuer à chaque candidature 4 petites notes et une note générale (les notes sont A, B ou C). On rappelle que la PEDR porte sur les activités scientifiques liées à la recherche. Les 4 petites notes correspondent aux activités suivantes dans les 4 dernières années :

P : Publications.

E : Encadrement.

D : Diffusion.

R : Responsabilité.

La note générale est la seule pour laquelle nous avons des quotas imposés par le ministère : au plus 20% de A, au plus 30% de B.

Le section a décidé de répartir uniformément ces quotas selon le nombre de candidatures MCF et PR, et, pour les candidatures PR, de tenir compte aussi du grade du candidat. Ce choix, qui est propre à la communauté mathématique, conduit à un niveau d'exigence extrêmement élevé pour tous les PR, et notamment pour les PR1-PREX. Il y a en effet dans ces groupes un grand nombre d'excellents dossiers, si bien que l'application des quotas a conduit à noter B des dossiers présentant des recherches de tout premier plan, et même en C les dossiers de collègues éminents qui bénéficient d'une très forte reconnaissance internationale.

Plus en détail, nous avons attribué les notes globales suivantes :

44 A : 23 MCF (dont 2 femmes) et 21 PR (dont 1 femme).

65 B : 33 MCF (dont 3 femmes) et 32 PR (dont 0 femme).

109 C : 55 MCF (dont 9 femmes) et 54 PR (dont 2 femmes).

Les 4 petites notes ne font pas l'objet de quota, mais la note globale doit les refléter. Notons que les notes ne sont pas utilisées de la même manière selon les universités. Pour certaines, notamment là où la compétition est particulièrement forte, la note A est nécessaire pour obtenir la PEDR.

Quelques précisions sur les critères retenus par la section. Pour la note P, le niveau des revues dans lesquels les articles sont publiés est plus important que le nombre de publications. Pour la note E : pour les MCF, l'encadrement de projets de M1/M2 est considéré comme des activités d'encadrement de recherche, par contre pour les PR, il s'agit bien d'encadrement doctoral, les thèses soutenues étant plus importantes que les thèse en cours. Pour la note D, il s'agit notamment des exposés scientifiques ou de vulgarisation. Pour la note R, il s'agit des responsabilités relatives à la recherche (organisations de colloques, coordinations de projets, direction d'équipes et de laboratoires...)

Comme chaque année, les membres de la section ont tenté de faire au mieux pour arriver au résultat le plus juste et le plus impartial possible. Néanmoins, les quotas A/B/C imposés ont obligé à des décisions difficiles. Dans ces conditions, être classé C, aussi bien pour les MCF que pour les PR, ne doit pas être considéré comme une appréciation négative du dossier par la section, mais simplement comme le résultat de choix difficiles et fortement contraints. Cela ne doit en aucun cas décourager les futures candidatures à la PEDR.

Rédigé par le bureau de la section.

2. Bilan 2016 du CNU section 26

L'actuel Conseil National des Universités (CNU) a été mis en place à la fin de l'année 2015 pour un mandat de quatre ans.

La section 26 est composée de 48 membres titulaires et de 48 membres suppléants, elle est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » et représente environ les trois cinquièmes des enseignants-chercheurs en mathématiques en France. Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CP-CPCNU `http://www.cpcnu.fr`.

La section dispose également d'un site propre `http://cnu26.emath.fr`

2.1 – Prises de position du CNU 26

Lors de la session qualifications, la section a adopté deux motions.

La première concerne l'attribution des PEDR, et fait suite au constat partagé d'un nombre de candidatures trop faible et plus généralement du découragement et de la frustration que génère le système actuel.

Motion 1 : la section 26 constate que le système actuel de contingentement des notes A et B pour l'attribution de la PEDR ne permet pas d'évaluer à leur juste niveau de très nombreux dossiers et décourage la candidature de beaucoup trop de collègues. En conséquence, elle adopte le principe d'un examen séparé des dossiers des candidats à la PEDR ayant postulé sans succès les trois années précédentes. Sera réservé à ces dossiers un quota de notes A et B adapté à l'objectif de les récompenser s'ils reflètent une activité scientifique justifiant de telles notes.

Cette motion s'est traduite dans les faits cette année, voir la section PEDR.

La seconde motion concerne le suivi de carrière.

Motion 2 : la section 26 du CNU, saisie à nouveau de la question du suivi de carrière, déplore l'absence de concertation avec le ministère et les universités sur ce sujet. Elle considère que, faute d'une définition précise des objectifs, des modalités et de l'allocation de moyens dévolus à cette nouvelle mission, celle-ci ne peut être mise en œuvre cette année. La section 26 se joint donc à la CP-CNU pour demander que la « session suivi de carrière » inscrite au calendrier 2016 du CNU soit repoussée.

2.2 – Bilan de la session qualifications

Le bureau de la section a nommé en décembre 2015 deux rapporteurs par dossier. Les candidats ont connaissance de ces deux rapporteurs à qui ils doivent envoyer leur dossier. Il est important de préciser que la décision de qualification ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, le rôle des rapporteurs étant avant tout de présenter les éléments factuels du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification.

La section 26 a constaté que ses critères de qualification ne sont pas toujours connus, elle invite les candidats à les consulter sur les pages web mentionnées ci-dessus. Un nombre trop important de refus provient du fait que les dossiers ne comportent pas les informations nécessaires à leur évaluation.

Qualifications aux fonctions de Maître de conférences

Résultats de la session 2016. Cette année la répartition des résultats sur les 510 dossiers MCF est la suivante : 291 qualifiés, 44 non qualifiés, 101 hors-section, 72 non parvenus, 2 irrecevables.

Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers recevables est de 67%, remarquablement stable par rapport à 2015 (69% des dossiers examinés), 2014 (67%), 2013 (65%), 2012 (68%).

Sur l'ensemble, 97 dossiers concernent des doctorats obtenus hors de France (sans compter les thèses en co-tutelle). Les nationalités les plus représentées sont, dans l'ordre : l'Italie (21 doctorats), la Grande-Bretagne (11), l'Espagne (8), la Belgique (7), la Suisse, la Russie et l'Allemagne (6 chacun). Sur les 97 dossiers, 54 ont été qualifiés, soit 55%.

Critères de qualification. Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon canonique dans les thématiques de la section, d'une part l'aptitude à enseigner les mathématiques, d'autre part l'activité scientifique, qui dans les domaines d'application des mathématiques ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

L'activité de recherche est évaluée à partir 1) des travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat français récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification.
2) des publications. Cependant, la présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, mais elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes.
3) l'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

À noter : l'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26. (C'est en général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualification). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26e section.

Par ailleurs le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci est particulièrement examiné en cas de requalification).

Il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

Qualifications aux fonctions de Professeur

Résultats de la session 2016. Le nombre de dossiers était de 109, dont 78 qualifiés, 9 non qualifiés, 12 hors section et 10 non parvenus. Le nombre total de dossiers est en nette baisse (140 en 2015, 156 en 2014, 155 en 2013), alors qu'il n'y a pas de tendance visible pour les dossiers MCF. Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers recevables est de 78%, il était de 77% en 2015, 75% en 2014, 69% en 2013 et de 86% en 2012.

L'examen des dossiers a révélé un nombre important de dossiers de requalification (environ 1/4 du total), tous qualifiés sauf un. Il s'agit de dossiers de très bon niveau qui justifieraient largement un recrutement PR. Un embouteillage semble donc se former au niveau des recrutements PR.

Critères de qualification et recommandation aux candidats. Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de Professeur sont les suivants : l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau master, l'activité et le rayonnement scientifiques, la démonstration d'une réelle autonomie scientifique, l'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

L'activité de recherche en mathématiques appliquées est évaluée selon plusieurs aspects. 1) Une production scientifique régulière et significative, qualitativement et quantitativement suffisante, sous forme d'articles publiés ou de logiciels (une attention particulière sera portée aux travaux postdoctoraux des quatre dernières années). 2) Le rayonnement, estimé entre autres critères par la participation aux colloques, les invitations dans les conférences internationales, les séjours à l'étranger, les collaborations internationales. 3) Les rapports de l'habilitation.

L'autonomie scientifique est en particulier évaluée par le nombre et la qualité des publications (hormis celles issues de la thèse), ainsi que la variété des thèmes abordés et leur nouveauté par rapport aux travaux de thèse.

La capacité à encadrer des doctorants est évaluée à travers l'expertise scientifique, l'autonomie, l'expérience d'encadrement ou coencadrement de thèses ou de mémoires de Master...

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal...), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées, et préciser la nature de l'apport des mathématiques au domaine d'application.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Il est demandé que les rapports préalables à la soutenance de l'HDR soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des HDR françaises).

Pour les candidats étrangers non titulaires de l'HDR française, le CNU a l'obligation en cas de qualification de délivrer une équivalence de cette HDR. Pour les candidats provenant d'un pays où existe un deuxième doctorat du niveau de l'HDR, il paraît souhaitable qu'ils l'aient obtenu. Par ailleurs il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

Dans tous les cas, le niveau du dossier scientifique reste un critère déterminant.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

2.3 – Promotions

Les candidatures se font par voie électronique et avant l'examen par le CNU les dossiers sont préalablement examinés par les conseils académiques des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a choisi de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion. Elle a donc transmis aux établissements l'avis suivant pour les candidats non promus « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué ». Pour les membres du CNU, la section indique à l'établissement qu'elle n'examine pas les dossiers de candidature à une promotion émanant de ses membres.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Pour les dossiers examinés plusieurs années consécutives par notre section, nous nous efforçons de choisir chaque année des rapporteurs différents.

Nous attirons l'attention sur les points importants suivants.

1) Les dossiers de candidature à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière et faire apparaître clairement les éléments nouveaux par rapport à la dernière promotion.

2) En ce qui concerne l'encadrement doctoral, fournir pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.

3) En ce qui concerne les conférences, distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément (publication, logiciel, responsabilité collective, activité pédagogique...) doit être décrit de façon suffisamment claire pour permettre sa juste prise en compte par la section.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

Promotions à la hors-classe des MCF

Nombre de promotions proposées : 22, dont 10 femmes. Nombre de promouvables : 258. Nombre de candidats : 88, dont 34 femmes.

Listes des Promus : Alibert Jean-Jacques (Toulon), Antoni Arlette (Bretagne Sud), Bardet Jean-Baptiste (Rouen), Bellanger Lise (Nantes), Blanchet Marie-Christophe (École Centrale Lyon), Brunel Elodie (Montpellier), Canon Eric (Saint-Étienne), Capatina Daniela (Pau), Chasseigne Emmanuel (Tours), Chau Oanh (La Réunion), Couailler Vincent (Bordeaux), El abdalaoui el Houcein (Rouen), El Assoudi Rachida (INSA Rouen), Ghattas Badih (Aix-Marseille), Jadda Zoubida (INSA Rennes), Klein Thierry (Toulouse III), Mounier Caroline (Paris 13), Mounier Éric (Paris 12), Paturel Éric (Nantes), Régnier Virginie (Valenciennes), Schneider Jacques (Toulon), Viallefont Anne (Clermont-Ferrand).

Les âges s'étendent de 40 à 58 ans. L'âge moyen des promus est de 47 ans.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

Promotions à la première classe des PR

Nombre de promotions proposées : 15, dont 3 femmes. Nombre de promouvables : 202. Nombre de candidats : 84, dont 13 femmes.

Listes des Promus : Belhachimi Zakaria (Mulhouse), Bettiol Piernicola (Brest), Carbou Gilles (Pau), Chambaz Antoine (Nanterre), Chauveau Didier (Orléans), Coquet François (Rennes), Dupuy Jean-François (PRInsa Rennes), Durand-Guerrier Viviane (Montpellier), Igbida Noureddine (Limoges), Lafitte Pauline (Centrale Supélec), Levy Thierry (UPMC), Magoules Frédéric (Centrale Supélec), Matoussi Anis (Le Mans), Renard Yves (Insa Lyon), Simon Thomas (Lille 1).

Les âges des promus sont compris entre 39 et 63 ans. L'âge moyen est de 47 ans.

Pour l'examen des promotions à la première classe des Professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants : domaine scientifique, âge et ancienneté comme Professeur, faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques, activité et responsabilités pédagogiques, responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...), activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapports de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales, activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications), encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistique), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donné la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2016 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeur depuis au moins trois ans.

Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions proposées : 14, dont 3 femmes. Nombre de promouvables : 233. Nombre de candidats : 74, dont 9 femmes.

Liste des promus : Bucur Dorin (Chambery), Cardaliaguet Pierre (Paris-Dauphine), Chaumont Loïc (Angers), Comte Fabienne (Paris-Descartes), Danchin Raphaël (Paris-Est Créteil), Guillou Armelle (Strasbourg), Hamadene Saïd (Le Mans), Mehats Florian (Rennes), Philippe Anne (Nantes), Rosier Lionel (U. de Lorraine), Sabot Christophe (U. Claude Bernard), Trélat Emmanuel (UPMC), Trouche Luc (Éns Lyon), Zambotti Lorenzo (UPMC).

Les âges s'étendent de 41 à 63 ans. L'âge moyen des promus est de 48 ans.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils aient fait preuve de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2016 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeur 1re classe depuis au moins trois ans.

Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions proposées : 9, dont 1 femme. Nombre de promouvables : 95. Nombre de candidats : 39, dont 6 femmes.

Listes des Promus : Combettes Patrick (UPMC), Dinh The Luc (Avignon), Herbin Raphaelle (Aix-Marseille), Lamberton Damien (Paris-Est Marne La Vallée), Nicaise Serge (Valenciennes), Olla Stephano (Paris-Dauphine), Petritis Dimitri (Rennes), Pham Xuan-Huyen (Paris Diderot).

Les âges s'étendent de 48 à 64 ans. L'âge moyen des promus est de 57 ans.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle.

Promotions 2015 hors CNU

Le bilan des promotions locales pour l'année 2016 n'est pas encore disponible. En 2015, il y a eu 38 promotions locales en section 26, toutes catégories confondues, et 57 au niveau national.

Par ailleurs, il existe une procédure spécifique d'avancement de grade, décrite plus bas, qui a bénéficié en 2015 à un membre de la 26e section.

Hors-Classe des Maîtres de conférences. 21 promotions avaient été attribuées par le CNU en 2015 tandis que 9 promotions ont été obtenues localement : Bonnefoy Muriel (Toulouse III), Calgaro Caterina (Lille I), Etcheverry Brigitte (Bordeaux), Guibe Olivier (Rouen), Lemaire Anne-Sophie (Le Havre), Leonte Ciuperca (Lyon I), Letue Frédérique (Grenoble II), Meunier Nicolas (Paris Descartes), Vandebrouck Fabrice (Paris Diderot).

Première classe des Professeurs. 16 promotions avaient été attribuées par le CNU en 2015 tandis que 15 promotions ont été obtenues localement : Barbolosi Dominique (Aix-Marseille), Berred Alexandre (Le Havre), Berthet Philippe (Toulouse II), Chupin Laurent (Clermont-Ferrand II), Durand Sylvain (Paris Descartes), Gaitan Patricia (Aix-Marseille), Horsin Thierry (CNAM), Kirane Mokthar (La Rochelle), Lambert Sophie (Grenoble II), Matzner-Lober Eric (Rennes II), Nazaret Bruno (Paris I), Niang Dabo (Lille III), Péché Sandrine (Paris Diderot), Rossi Fabrice (Paris I), Ruiz Anne (Toulouse I).

Classe exceptionnelle des Professeurs. Le CNU avait attribué 14 promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle en 2015 tandis que 12 promotions ont été obtenues localement : Bertail Patrice (Paris X), Briane Marc (INSA Rennes), Brighi Bernard (Mulhouse), Cannone Marco (Marne La Vallé), Desbat Laurent (Grenoble I), Godlewski Edwige (Paris VI), Lombardi Eric (Toulouse III), Quincampoix Marc (Brest), Rabut Christophe (INSA Toulouse), Raphael Pierre (Nice), Vaillant Jean (Les Antilles), Yassine Adnan (Le Havre).

Le CNU avait attribué 6 promotions au second échelon de la classe exceptionnelle en 2015. Il y a eu une promotion locale : Lemarie-Rieusset Pierre-Gilles (Évry Val d'Essone).

Promotions au titre de la procédure spécifique 2015. La procédure spécifique est une voie d'avancement de grade ouverte aux enseignants-chercheurs dont l'activité n'est pas principalement l'enseignement ou la recherche. Président d'université, directeur d'UFR par exemple. Il y a eu en 2015 une promotion en 26e section relevant de cette procédure, au grade de PrEx2 : Amara Mohammed (Pau).

2.4 – Attribution de semestres de congé pour recherche ou conversion thématique

La section avait 9 semestres CRCT à attribuer pour 73 demandes.

Elle a décidé d'attribuer 3 semestres à des PR : Guillopé Colette, Léonard Christian, Millet Annie.

Et 6 semestres à des MCF : Faccanoni Gloria, Friguet Chloé, Olteanu Madalina, Mardare Sorin, Vandewalle Vincent, Doyen Laurent.

En outre il a été établi une liste complémentaire classée de 7 noms : 1) Kavian Otared, 2) Di Bernadino Elena, 3) Roubaud Marie-Christine, 4) Blum Jacques, 5) Gerchinovitz Sébastien, 6) El Machkouri Mohamed, 7) Simon Damien.

L'attribution d'un CRCT nécessite un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini. Le CNU privilégie tout particulièrement les dossiers comportant des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques... Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou ont peu bénéficié de CRCT ou de délégations dans le passé, ainsi que les demandes suite à un congé maternité ou longue maladie. Il est indispensable que toutes les délégations passées des candidats soient clairement mentionnées. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres...

2.5 – Bilan de la session PEDR

Depuis 2014, ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2016, toutes les universités l'ont fait sauf 6 établissements (Clermont-Ferrand 1, Corte, Lille 2, Toulouse 1, UPMC et l'École pratique des hautes études). Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. Hormis le président de section et la vice-présidente A, aucun membre du CNU n'a participé à la fois à la session promotions et à la session PEDR en 2016.

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories désignées par les seuls quotas qu'elles représentent : « 20% » , « 30 % » et « 50 % ». Ces quotas doivent être respectés de manière globale sur tous les candidats Professeurs et Maître de conférences.

En plus du classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attribuer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) ou X (Insuffisamment renseigné) pour chacune des rubriques **P** : Publications / production scientifique, **E** : Encadrement doctoral et scientifique, **D** : Diffusion des travaux, **R** : Responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories (« 20% », « 30% », « 50% ») et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Les informations remontées (malheureusement partiellement) des universités montrent une certaine disparité concernant l'utilisation des notes fournies par le CNU pour cette attribution finale. Globalement, en 2015, la totalité des candidats de 26ème section classés dans les 20% ont obtenu la prime, ainsi que 75% des candidats classés dans les 30%.

L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années. En cas de congé maternité pendant cette période, l'appréciation portera sur les cinq années précédentes (plus s'il y a plusieurs congés dans la période).

Fonctionnement de la section

Le 12 mai 2015 a été consacré à l'examen des candidatures MCF en session plénière, et le 13 mai concernait l'examen des dossiers de PR en session restreinte aux professeurs. Il a été convenu que les membres du CNU présents ne s'exprimeraient pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils auraient été trop proches. Le bureau de la section avait nommé deux rapporteurs par dossier. L'un était proche de la spécialité du candidat, l'autre était un rapporteur commun à tous les candidats (dans certains cas tous les candidats PR ou tous les candidats MCF) d'un même établissement (ou plus largement d'un même site géographique), de manière à assurer une cohérence inter-disciplinaire et interne aux établissements.

Les quotas 20% et 30% ont été appliqués dans chaque corps MCF et PR. Par ailleurs les notes intermédiaires A, B, C ont été attribuées en tenant compte de l'ancienneté des candidats, par souci d'inclure dans le dispositif de façon équilibrée les enseignants-chercheurs à tous les stades de leur carrière, et de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Ceci conduit à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PREX. Ce mode de fonctionnement n'est pas généralisé dans les autres sections du CNU.

Le niveau des dossiers déposés est globalement très bon et a conduit à classer dans les 30% plusieurs dossiers de recherche *de tout premier plan* et dans les 50% des dossiers de collègues *très actifs* effectuant bien leur métier selon les quatre critères. Être classé dans les 50% ne doit donc pas être interprété comme une appréciation négative, d'autant plus que de nombreux dossiers se situant à la limite des 30% sont de niveaux proches, et que donc l'ordre du classement entre eux comporte une part arbitraire inévitable.

Soulignons que des MCF récemment recrutés ont obtenu, cette année comme la précédente, des évaluations « 20% » ou « 30% », car la jeunesse de leur dossier a été prise en compte. Ils ne doivent donc pas hésiter à postuler.

Par ailleurs la section a décidé d'attribuer les notes intermédiaires A, B, C sans tenir compte des quotas, afin qu'elles reflètent réellement la valeur du dossier dans une catégorie donnée. Cela aboutit naturellement à ce que des dossiers ayant des notes intermédiaires excellentes aient une note globale décevante. C'est le reflet d'un niveau moyen des dossiers de candidature élevé, et ceci est accentué par le fait qu'une faible proportion de collègues postule.

Comme mentionné plus haut, la section a procédé à un examen séparé des dossiers de candidats ayant postulé trois fois sans succès à la PEDR. Nous avons à cette fin demandé aux candidats qui étaient dans cette situation de le mentionner explicitement dans leur dossier de candidature. Ces candidats ont été classés dans les catégories 20%, 30% et 50% en fonction des notes intermédiaires uniquement. Ceci concernait 3 dossiers PR cette année, et 8 dossiers MCF. Parmi eux 3 ont été classés dans les 20%, 8 ont été classés dans les 30%, et aucun n'a été classé dans les 50%.

Résultats de la session

Il y a eu cette année 202 candidats MCF et 149 candidats PR (contre 154 MCF et 128 PR en 2015). Sur les 202 candidats MCF il y avait 136 hommes et 66 femmes. Il y a eu 14 femmes classées dans les 20% et 23 femmes dans les 30%. Sur les 149 candidats PR il y avait 122 hommes et 27 femmes. Il y a eu 8 femmes classées dans les 20% et 9 femmes dans les 30%.

Il est important de noter qu'un congé de maternité pendant les 4 années précédant la candidature *conduit à prendre en compte l'activité sur une période de 5 ans au lieu de 4.* Les candidates *doivent en tenir compte dans la constitution de leur dossier.*

Recommandations aux candidats

Le CNU26 a rendu public sur le site du CNU `http://www.cpcnu.fr/web/section-26` et sur le site `http://cnu26.emath.fr/` des conseils aux candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques **P** , **E** , **D** et **R**.

Ces quatre rubriques seront évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartienne à l'une des trois catégories suivantes : MCF, PR2 ou PR1-PREX, et selon l'ancienneté du candidat. Pour les maîtres de conférences récemment nommés les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens. Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire... sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (**E**) et responsabilités scientifiques (**R**) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilités administratives ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il est anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives, la même analyse sera appliquée aux MCF « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Comme dans le cas des dossiers de promotion, nous attirons l'attention sur les points suivants :
1) En ce qui concerne l'encadrement doctoral, il est important de fournir pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
2) En ce qui concerne les conférences, il faut distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

3) De façon générale, chaque élément (publication, logiciel, tâche ou responsabilité collective, activité pédagogique...) doit être décrit de façon suffisamment claire pour permettre sa juste prise en compte par la section.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

Rédigé par le bureau de la section.

Annonce du Prix Fermat

La nouvelle édition du Prix Fermat en recherche mathématique a été lancée en octobre 2016, l'appel aux candidatures et à leurs parrainages sera ouvert jusqu'au 30 juin 2017 et la proclamation des résultats aura lieu en décembre 2017.

Le Prix Fermat récompense les travaux de recherche d'un ou de plusieurs mathématiciens dans des domaines où les contributions de Pierre de Fermat ont été déterminantes :

- énoncés de principes variationnels, ou plus généralement équations aux dérivées partielles,
- fondements du calcul des probabilités et de la géométrie analytique,
- théorie des nombres.

À l'intérieur de ces domaines, l'esprit du prix est de récompenser plutôt des résultats de recherche qui sont accessibles au plus grand nombre de mathématiciens professionnels.

Plus de détails sur le Prix Fermat, notamment sur la procédure de candidature, sont disponibles sur `http://www.math.univ-toulouse.fr/PrixFermat`

Candidature de Paris à l’organisation de l’ICM 2022

Les 6 et 7 mars, Helge Holden, Hyungjiu Park et Christiane Rousseau, représentants de l’Union Internationale des Mathématiciens (IMU) ont effectué la visite de site en vue de l’organisation du Congrès International des Mathématiciens (ICM) à Paris en 2022, où ils ont été accueillis par le comité de candidature, présidé par François Loeser.

Au cours de leur visite, les membres de l’IMU ont pu échanger avec Gérard Biau, Thierry Horsin et Stéphane Seuret, représentant les trois sociétés savantes de mathématiques françaises unies autour du comité de candidature, ainsi qu’avec Vincent Giovangigli et Emmanuel Trélat représentant la FMJH et la FSMP.

La journée du lundi a été consacrée à la visite du Palais des congrès et à la présentation de l’organisation du congrès Paris ICM 2022. De nombreux aspects de la candidature ont été abordés : cérémonie d’ouverture, budget, enjeux scientifiques, liens avec l’industrie, impact international... La qualité de l’organisation pratique a été particulièrement défendue par Marta Gomes et Stéphanie Eyraud de Viparis (exploitant du Palais des congrès), Cécile Mairaville de l’office du tourisme de Paris et Philippe Fournier, président de MCI France. Les activités en amont de Paris ICM 2022, notamment l’Assemblée Générale de l’IMU à Strasbourg, les activités de diffusion et de promotion des mathématiques sur l’ensemble du territoire et au-delà, ont été évoquées le lendemain.

Les membres de l’IMU ont pu également apprécier le soutien du CNRS, représenté par le directeur de l’INSMI Christoph Sorger et d’Inria, représenté par son PDG Antoine Petit. Enfin, les membres de l’IMU ont été reçus à l’Hôtel de Ville par Anne Hidalgo en présence de Cédric Villani, et au palais de l’Elysée par Olivier Lyon-Caen et Christophe Prochasson.

L’unité autour de ce projet fédérateur, l’ambition d’en accroître considérablement l’impact et le nombre des acteurs, en France et au-delà, ont été explicitement appréciés par le comité de visite avant son départ pour Saint-Petersbourg.

Au cours du mois d’avril, l’IMU devrait rendre publiques ses recommandations concernant l’organisation de l’ICM 2022. Nous espérons tous que ce sera le point de départ d’une multitude d’activités et de projets mathématiques partout en France, ouverts sur le monde entier.

François Loeser, pour le comité d’organisation de la candidature de Paris.

Le hasard
Ivar Ekeland et Étienne Lecroart
Le Lombard, 2016. 72 p. isbn : 2803637391

Quelle belle idée que cette bande dessinée proposant une vulgarisation érudite et humoristique sur le thème du hasard! Le mathématicien lira avec un grand plaisir ces planches pleines d'humour, d'histoires et d'Histoire sur des thèmes qui lui sont chers. Quant au béotien, il profitera du talent de vulgarisateur d'Ivar Ekeland et des plaisants dessins d'Étienne Lecroart pour découvrir les questions profondes qui sont au cœur des probabilités et des statistiques, et qui dépassent parfois, disons-le, le champ de la science mathématique pour marcher sur les plates-bandes de la philosophie.
Ivar Ekeland, grand mathématicien au spectre large, bien connu des analystes pour son principe variationnel aux applications nombreuses (optimisation, points fixes, etc.) n'en est pas à son premier essai en matière de vulgarisation et ce format bande dessinée décuple son talent puisqu'en moins de 60 planches de nombreux thèmes profonds sont abordés. Le point d'entrée dans la sphère du hasard proposé par ce livre est double. Il est tout d'abord philosophique. Le hasard est en effet une manière de ne pas choisir : tirage au sort de certains magistrats dans l'antiquité (manière de s'en remettre à l'Olympe...), mais aussi tirage au sort de nos actuels jurés d'assises, optimalité de l'aléatoire dans les stratégies du tireur et du gardien de but lors d'une séance de pénaltys au football, etc. Sur le plan scientifique ensuite, le point d'entrée est original puisqu'il s'agit de la théorie du chaos (choix personnel d'Ivar Ekeland qui, sauf erreur, a intellectuellement conquis le domaine parfois aride des probabilités par ce versant). En d'autres termes, l'apparition du hasard est ici le fruit d'une incapacité à expliquer des phénomènes pourtant déterministes. Pensons aux lancers de dés, phénomènes on ne peut plus déterministes puisque régis par les lois de la mécanique et aux résultats pourtant imprévisibles!
Ce point d'entrée scientifique nous offre aussi, en plus des deux personnages principaux, qui ne sont autres que les auteurs eux-mêmes, et de la déesse italique Fortuna, un quatrième « personnage » non sans humour : un papillon – lépidoptère dont l'effet éponyme n'est pas sans évoquer la théorie du chaos dans sa représentation populaire. Voilà donc nos acolytes conversant sur des problèmes bien réels auxquels les probabilités et les statistiques tentent d'apporter une réponse. Et puisque l'on évoquait les jeux de dés, il était naturel de commencer par la fameuse question du chevalier de Méré (rebaptisé « chevalier demeuré » par le compagnon lépidoptère) à Blaise Pascal sur les justes paiements lors d'une partie interrompue. Ce problème est l'occasion de comprendre, avec des arbres, le calcul des probabilités et, sans la nommer, la loi des espérances itérées. C'est aussi l'occasion, car cette bande dessinée traite autant de probabilités que de statistiques, d'introduire naturellement la notion de distribution et celle de test (et plus tard celles de vrai positif et de faux positif), mais aussi de présenter le théorème central limite, résultat central de ces domaines mathématiques, ici utilisé pour le calcul d'intervalles de confiance.
Après avoir croisé Pascal, Bernoulli et Gauss, les protagonistes évoquent les relations fortes entre information et probabilités. Sont évoquées à travers des énigmes (par exemple l'énigme des trois portes) et des exemples concrets (par exemple celui des bombardiers de Wald) la notion de probabilités conditionnelles et ses implications comme le biais du survivant. Le cas d'Abraham Wald est aussi l'occasion d'évoquer une période faste des mathématiques et l'exil outre-Atlantique de bons

nombres de scientifiques allemands et austro-hongrois menacés par les nazis, avec notamment un échange drolatique (probablement imaginaire) entre Gödel et Einstein. On l'aura compris, cette bande dessinée est un petit bijou de science et d'humour, qui fait qui plus est la part belle aux applications : physique statistique des gaz, sondage, génétique et évolution, et même la finance !
Un seul regret : le point de vue purement « fréquentiste » qui passe donc sous silence la règle de Bayes et les belles statistiques bayésiennes. Peut-être l'occasion d'une seconde bande dessinée, qui sait ?
N.B. Cette bande dessinée fait partie de la collection « La petite bédéthèque des savoirs » (Le Lombard). D'autres bandes dessinées dans la même collection pourront intéresser le lecteur scientifique, notamment celles intitulées « L'univers » et « L'intelligence artificielle ».

Olivier Guéant
Université Paris 1

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions TeX courantes (TeX Live et MacTeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTeX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TeX à jour.

Classe LaTeX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.