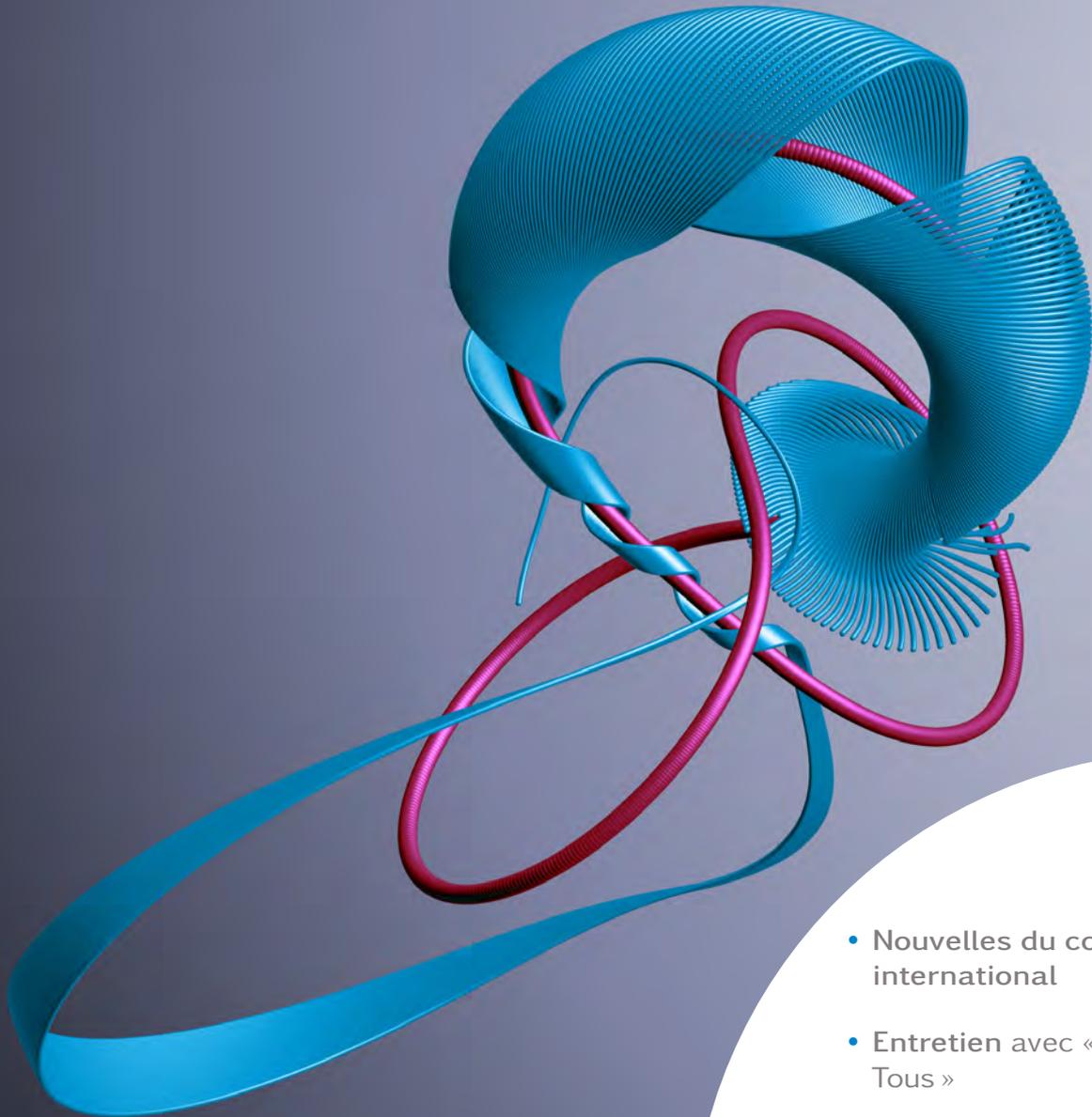


la Gazette

des Mathématiciens



- Nouvelles du congrès international
- Entretien avec « Maths Pour Tous »
- Parité – Recrutements et promotions, où en est-on ?
- Raconte-moi... une période

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Boris ADAMCZEWSKI

Institut de Mathématiques de Marseille
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Rédacteurs

Vincent COLIN

Université de Nantes
vincent.colin@math.univ-nantes.fr

Caroline EHRHARDT

Université Vincennes Saint-Denis
caroline.ehrhardt@inrp.fr

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Sébastien GOUËZEL

Université Rennes 1
sebastien.gouezel@univ-rennes1.fr

Bernard HELFFER

Université Paris-Sud
bernard.helffer@math.u-psud.fr

Pierre LOIDREAU

Université Rennes 1
pierre.loidreau@univ-rennes1.fr

Fabrice PLANCHON

Université de Nice
fab@unice.fr

Martine QUEFFÉLEC

Université Lille 1
Martine.Queffelec@univ-lille1.fr

Stéphane SEURET

Université Paris Est Créteil
seuret@u-pec.fr

Secrétariat de rédaction

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr
http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

ISSN : 0224-8999

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

À propos de la couverture. Le flot modulaire, un flot de type Anosov. Un point dans le complémentaire du noeud de trèfle (en rose) représente un réseau normalisé du plan. Une centaine de trajectoires bleues aux conditions initiales très proches se différencient au cours du temps et finissent soudain par se disperser complètement. Explications sur http://www.josleys.com/articles/ams_article/Lorenz3.htm (crédit : Jos LEYS).

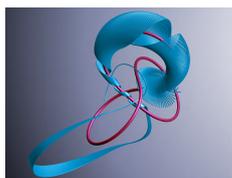


N° 143

Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,
cela ne vous aura pas échappé, la *Gazette* prend des couleurs, et même un peu ses aises, en cette rentrée 2015. C'est une grande joie de voir se concrétiser un projet pour lequel nous n'avons ménagé ni notre temps ni nos efforts. Je remercie tout particulièrement Nathalie Lozanne, qui a conçu cette nouvelle maquette, et Denis Bitouzé, qui a développé la nouvelle classe \LaTeX lui permettant de voir le jour. Reste à présent à hisser notre ramage mathématique à la hauteur de ce nouveau plumage...
À cet effet, le changement de forme s'accompagne d'une évolution de fond amorcée depuis déjà quelques numéros. De nouvelles rubriques débarquent ! *Parité*, comme son nom l'indique, est consacrée à des préoccupations qui se trouvent actuellement au cœur de notre communauté. *Raconte-moi*, inspirée des classiques et appréciés « What is... » publiés par nos confrères des Notices de l'AMS, présente au lecteur non initié une notion ou un théorème de façon très concise. *Rétroviseur* se propose de vous rafraîchir la mémoire en rééditant quelques perles glanées dans les archives de notre chère *Gazette*. Nous restons évidemment à l'écoute de vos suggestions et vous rappelons que la *Gazette* dispose d'une tribune libre. Il ne tient qu'à vous de l'alimenter ! Pour le reste, vous découvrirez le second volet de notre grand dossier consacré aux congrès international des mathématiciens, des articles sur l'expérimentation mathématique et sur la conjecture de Horn, et bien d'autres choses encore... Rendez-vous au sommaire.
L'équipe de rédaction ainsi que les auteurs œuvrent bien sûr de façon totalement bénévole, mais la *Gazette* a un coût de production et celui-ci est en partie absorbé par les abonnements des adhérents. En cette période de renouvellement, je ne peux donc qu'inciter toutes celles et ceux qui aiment lire la *Gazette* et souhaitent soutenir son renouvellement à ne pas l'oublier. En vous souhaitant une excellente année 2015 et une agréable lecture,

Boris ADAMCZEWSKI



N° 143

Sommaire

SMF	5
Mot du président	5
NOUVELLES DU CONGRÈS INTERNATIONAL	6
Les travaux de Manjul BHARGAVA – K. BELABAS et C. DELAUNAY	6
Les travaux de Martin HAIRER – F. DELARUE	15
Entretien avec Artur AVILA	28
Qui sont les conférenciers aux ICM? – M. ANDLER	33
MATHÉMATIQUES	41
L'expérimentation numérique dans les sciences : une brève histoire – J.-R. CHAZOTTES et M. MONTICELLI	41
La conjecture de Horn : quelques développements récents – M. BRION	51
ENTRETIEN	60
Rencontre avec « Maths Pour Tous »	60
ENSEIGNEMENT	63
Sur l'attractivité des mathématiques – P. ARNOUX	63
PARITÉ	69
Recrutements et promotions, où en est-on? – L. BROZE et V. DOLEAN	69
RACONTE-MOI	75
... une période – M. WALDSCHMIDT	75
INFORMATION	78
Bilan de la session PEDR 2014 du CNU, sections 25 et 26	78
Nouvelles du CNRS – P. BIANE et R. CARLES	82
Conseil scientifique de l'INSMI (2010-2014) – C. KASSEL	84
RÉTROVISEUR	89
CARNET	92
Dmitrii Victorovich ANOSOV – A. BUFETOV et A. KLIMENKO	92
LIVRES	96



N° 143

Mot du président

Chères collègues et chers collègues,

Je veux commencer en évoquant les tragiques attentats de janvier. Par son essence, notre discipline a toujours présenté un caractère d'universalité et est source de questions philosophiques et métaphysiques. L'histoire des idées est étroitement liée à la réflexion sur la nature des mathématiques. Ces actes de Paris sont contraires aux valeurs de liberté d'expression, d'ouverture humaniste au monde et d'accueil des autres, auxquelles la communauté mathématique tient tant. Celle-ci développe avec les mathématiciennes et mathématiciens du monde entier des relations fortes du respect des pluralités politiques, culturelles, religieuses, elle est donc très attachée aux principes que ces attentats visaient à remettre en cause. Revenons à une actualité un peu plus légère. Le lecteur de ces lignes aura auparavant été interpellé par le format de la *Gazette*, qui fait peau neuve en ce début d'année 2015. La dernière mue a eu lieu il y a déjà plus de 20 ans, une éternité pour les plus jeunes d'entre nous. L'année qui s'achève a été mise à profit pour mener une réflexion approfondie sur la ligne éditoriale et le format ; de nouveaux jeunes collègues ont rejoint dès juillet dernier le comité de rédaction, sous la houlette de Boris Adamczewski. Je tiens ici à remercier toutes les bonnes volontés qui ont participé à cette refonte de la *Gazette*, tout particulièrement Valérie Berthé qui a su mettre en place les conditions favorables à l'émergence de ce projet, qui j'espère vous comblera !

Les questions autour de l'enseignement des mathématiques vont être au premier plan en 2015, après que le ministère ait dévoilé début décembre son plan stratégique pour les mathématiques. Membre actif de la CFEM, la SMF entend participer pleinement à la réflexion sur les programmes en collèges et lycées qui s'ouvre dans les mois à venir, à partir du « socle commun de connaissances » en cours de validation. Je vous souhaite à toutes et tous une très bonne année 2015.

Le 30 janvier 2015

Marc PEIGNÉ, président de la SMF



NOUVELLES DU CONGRÈS INTERNATIONAL

La Gazette vous propose le second volet d'un grand dossier consacré à l'ICM 2014, qui s'est déroulé à Séoul en août dernier. Au programme : les travaux de Manjul Bhargava et de Martin Hairer, une rencontre avec Artur Avila, un article sur la provenance des conférenciers au fil des ICM, et un coup d'œil aux congrès à venir.

Manjul BHARGAVA, anneaux de petit rang et courbes elliptiques

- K. BELABAS
- C. DELAUNAY

Manjul Bhargava a reçu la médaille Fields au congrès international de Séoul « pour avoir développé de nouvelles méthodes en géométrie des nombres, qu'il a appliquées au comptage des anneaux de petit rang et pour borner le rang moyen de courbes elliptiques ». Cet article est un survol d'une partie de ses travaux.

1. Lois de composition et comptages de discriminants

Commençons par rappeler une construction remontant aux *Disquisitiones*. Étant donnée une forme quadratique binaire $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ à coefficients entiers, Gauss s'intéresse aux entiers représentables par cette forme, c'est-à-dire $\{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2\}$. Le célèbre exemple des entiers sommes de deux carrés correspond à $f(x, y) = x^2 + y^2$; il est résolu par Fermat puis Euler en se ramenant au cas des premiers représentables (2 et les premiers $p \equiv 1 \pmod{4}$), à l'aide d'une propriété de multiplicativité (un produit de sommes de 2 carrés est somme de 2 carrés). Gauss remarque que, si $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ est une matrice entière de déterminant ± 1 , alors $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\gamma$ est une bijection de \mathbb{Z}^2 et la forme $(\gamma \cdot f)$ définie par

$$(\gamma \cdot f)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}\gamma)$$

représente les mêmes entiers que f . Le discriminant $D(f) = b^2 - 4ac$ de f est commun à tous les éléments de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \cdot f$ et il est tout aussi remarquable que, si l'on fixe un discriminant, il n'existe qu'un nombre fini

1. Cette propriété est invariante sous l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

d'orbites ; par exemple, pour $D = -4$, il n'y a qu'une seule orbite, celle de $x^2 + y^2$. À discriminant fixé, il n'y a donc qu'un nombre fini de problèmes de classification d'entiers représentables, un par orbite sous $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Pour aller plus loin, il faut généraliser la multiplicativité des sommes de deux carrés. Gauss parvient à décrire toutes les identités de la forme

$$(a_1x_1^2 + b_1x_1y_1 + c_1y_1^2)(a_2x_2^2 + b_2x_2y_2 + c_2y_2^2) = (a_3x_3^2 + b_3x_3y_3 + c_3y_3^2),$$

où les trois formes quadratiques ont même discriminant et (x_3, y_3) sont deux fonctions bilinéaires à coefficients entiers de (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Par exemple $(x_1^2 + dy_1^2)(x_2^2 + dy_2^2) = (x_3^2 + dy_3^2)$, avec

$$(x_3, y_3) := (x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 - y_1x_2),$$

pour le discriminant $-4d$. Mais un nouveau phénomène apparaît : contrairement à l'exemple ci-dessus, l'identité obtenue mélange en général des formes de différentes orbites !

La théorie est plus riche en se limitant aux formes *primitives*¹, telles que $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, et en considérant plutôt les orbites pour le sous-groupe

$SL_2(\mathbb{Z})$ des matrices de déterminant 1. Voici le résultat :

Théorème 1 (composition de Gauss). *Soit $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$. L'ensemble des $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbites de formes quadratiques binaires primitives de discriminant D possède une structure naturelle de groupe abélien fini.*

L'exemple qui précède le théorème conduit ainsi à décréter que la classe de $x^2 + dy^2$ est l'élément neutre du groupe obtenu pour $D = -4d$.

La loi de groupe est explicite, donnée par des formules algébriques, mais reste obscure sous cette forme. Elle ne fut éclaircie qu'après réinterprétation par Dedekind, et en particulier l'introduction de la théorie des idéaux. En termes modernes, ce groupe est le groupe des classes (orientées) de l'anneau quadratique $Q(D)$ de discriminant D . Pour simplifier², restreignons nous au sous-ensemble formé des formes définies positives, de discriminant $D < 0$. Dans ce cas

$$Q(D) := \mathbb{Z}[x]/(x^2 - Dx + (D^2 - D)/4) \simeq \mathbb{Z}[(D + \sqrt{D})/2],$$

et soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ son corps des fractions. La multiplication de K induit sur l'ensemble des sous- Q -modules I de rang 1 de K (idéaux fractionnaires) une multiplication naturelle, de neutre Q ; s'il existe I' tel que $II' = Q$, I est dit inversible. Les isomorphismes de Q -modules partitionnent naturellement cet ensemble en classes (d'idéaux) : $I_1 \sim I_2$ s'il existe $\kappa \in K^*$ tel que $I_1 = \kappa I_2$.

Théorème 2 (composition de Gauss, version 2). *Il y a une bijection canonique entre les $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbites de formes quadratiques binaires définies positives et l'ensemble des classes d'isomorphismes de paires (Q, I) , où Q est un anneau quadratique de discriminant < 0 et I est une classe d'idéaux de Q .*

Les formes primitives de discriminant D sont associées aux idéaux inversibles de $Q(D)$ et forment un groupe abélien.

La bijection est explicite : si $I = \alpha_1\mathbb{Z} + \alpha_2\mathbb{Z}$, où la \mathbb{Z} -base est orientée³ telle que, dans le produit alterné $\wedge^2 Q \simeq \mathbb{Z}$,

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \lambda(1 \wedge \sqrt{D}), \quad \lambda \in \mathbb{Q}^+;$$

2. En trahissant l'esprit de Bhargava, qui porte une grande attention aux cas dégénérés et évite justement ce type de réductions à un cadre générique ; ici en introduisant la notion d'orientation (ou, de façon équivalente, de classes au sens restreint), au prix de complications techniques. Pour les formes définies, la simplification est vénielle : le groupe des classes orientées est un produit de deux copies du sous-groupe d'indice 2 que nous considérons. Pour le cas général, voir [2].

3. Sans ce choix d'orientation, la base serait définie modulo $GL_2(\mathbb{Z})$ et non plus $SL_2(\mathbb{Z})$, induisant une correspondance avec les classes de formes quadratiques binaires modulo $GL_2(\mathbb{Z})$. Si (α_1, α_2) est une \mathbb{Z} -base arbitraire de I , alors (α_1, α_2) ou (α_2, α_1) est correctement orientée.

4. La condition nécessaire et suffisante est « $p^2 \mid D$ pour p premier impair et $D \not\equiv 0, 4 \pmod{16}$ ».

alors la classe de I a pour image la classe de la partie primitive de

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1x + \alpha_2y),$$

où on définit $N_{K/\mathbb{Q}}(a + b\sqrt{D}) := a^2 - Db^2$ pour $a, b \in \mathbb{Q}$. Mieux, chaque classe de formes quadratiques $ax^2 + bxy + cy^2$ contient une *unique* forme telle que $|b| \leq a \leq c$ et $b \geq 0$ si l'une des inégalités est une égalité. On peut donc choisir dans chaque classe de formes (ou d'idéaux) un représentant canonique, et manipuler ou compter des classes d'idéaux en calculant au moyen de formes quadratiques, vues comme points entiers dans ce domaine fondamental $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$. De plus, si on fixe $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ et que l'on choisit un anneau quadratique $Q \subset K$ maximal pour la relation d'inclusion, par exemple si D est sans facteurs carrés⁴, il se produit un petit miracle : tous les idéaux de Q sont inversibles (toutes les formes quadratiques de discriminant D sont primitives).

Les premiers travaux de Bhargava, dans sa thèse, sont consacrés à la généralisation de cette construction de Gauss. Plus précisément, on a vu apparaître un groupe arithmétique $G = SL_2$, une représentation V définie sur \mathbb{Z} (l'ensemble des formes quadratiques), tels que l'ensemble des orbites entières $G(\mathbb{Z}) \backslash V(\mathbb{Z})$ paramètre les classes d'idéaux des anneaux quadratiques. Bhargava a plus généralement cherché à paramétrer les *anneaux de rang n* (anneaux commutatifs, libres de rang n comme \mathbb{Z} -modules) et leurs idéaux.

Ces anneaux très simples forment un cadre naturel pour la définition usuelle du discriminant : si A est un anneau de rang n et $\alpha \in A$, on définit la trace de α , $\text{Tr}(\alpha)$, comme étant la trace de la multiplication par α : $m_\alpha : A \rightarrow A$; on note $\text{disc}(A)$ le déterminant $\det(\text{Tr}(\alpha_i \alpha_j))$, pour une \mathbb{Z} -base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ arbitraire de A . Les anneaux de discriminant 0 sont dits *dégénérés*. Dans le cas quadratique, on retrouve bien $\text{disc}(Q(D)) = D$, et $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ est l'unique anneau dégénéré, à isomorphisme près.

Parmi ces anneaux, la théorie algébrique des nombres privilégie les anneaux de Dedekind (intégrés, maximaux pour la relation d'inclusion dans leur corps des fractions), qui sont les bons analogues des entiers naturels dans leur corps des

fractions ; en particulier le miracle vu plus haut se reproduit : tous les idéaux fractionnaires sont inversibles et forment donc un groupe. En fait, pour toute extension finie de corps K/\mathbb{Q} , $\dim_{\mathbb{Q}} K = n$, il existe un unique anneau de Dedekind $\mathbb{Z}_K \subset K$: le sous-anneau de nombres de rang n de K maximal pour l'inclusion et on notera $\text{disc } K := \text{disc } \mathbb{Z}_K$. De plus les classes d'idéaux fractionnaires (sous- \mathbb{Z}_K -modules de K de rang 1 modulo isomorphisme de \mathbb{Z}_K -modules) forment encore un groupe abélien fini, le groupe des classes de K , noté $\text{Cl}(K)$.

Mais la classe des anneaux de petit rang contient tout aussi bien des anneaux tels que $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ ou $\mathbb{Z}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ (de rang respectivement 2 et 3, tous deux dégénérés), ou $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x)$ (non intègre), ou $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (non maximal dans son corps de fractions $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, puisqu'il est inclus dans $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$). Il n'est pas nécessaire de se restreindre aux anneaux de Dedekind : les idéaux fractionnaires *inversibles* des anneaux non dégénérés ont de bonnes propriétés.

Où chercher d'autres couples (G, V) paramétrant ainsi des anneaux de petit rang ? Si possible tels que l'action de $G(\mathbb{Z})$ admette un invariant polynomial D , analogue au discriminant des formes quadratiques binaires ?

Un cadre naturel est celui des *espaces vectoriels préhomogènes*, tels que l'action de $G(\mathbb{C})$ sur $V(\mathbb{C})$ admette une orbite Zariski-dense, c'est-à-dire dont le complémentaire S est un ensemble algébrique (par exemple une hypersurface $D = 0$). Heuristiquement, le lien est clair : après changement de base à \mathbb{C} , il ne doit plus rester qu'une orbite non dégénérée, puisqu'il n'existe qu'un seul anneau A de rang n non dégénéré et un seul A -module I inversible de rang 1 ($A = I = \mathbb{C}^n$) ; donc un seul objet à paramétrer.

Ces espaces, introduits par Sato dans les années 70 avec de toutes autres motivations, ont été classifiés par Sato et Kimura [24] modulo des transformations naturelles : il y en a essentiellement 36 types différents. Wright et Yukie [25] les avaient déjà étudiés sur un corps k dans le but explicite d'obtenir des paramétrisations et avaient montré que les $G(k)$ -orbites non dégénérées de $(V-S)(k)$ paramétraient souvent des extensions de corps K/k ; et donc pourraient permettre de compter ces ex-

tensions (avec la restriction importante $[K : k] \leq 5$, imposée par la classification de Sato-Kimura). Bhargava a été le premier à s'intéresser systématiquement à leurs orbites entières, et à l'ensemble des objets, « dégénérés » ou non, qu'elles paramètrent. Ce qui lui permettra en particulier de réaliser le programme de compter les extensions K/\mathbb{Q} , $[K : \mathbb{Q}] \leq 5$, en s'inspirant du résultat connu pour les anneaux cubiques :

Théorème 3 (Levi [21], Gan-Gross-Savin [19]). *Il y a une bijection entre les ensembles suivants :*

- les classes d'isomorphismes d'anneaux cubiques,
- les formes cubiques binaires entières modulo l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Les analogues quartiques et quintiques sont donnés par les théorèmes suivants :

Théorème 4 (Bhargava [4]). *Il y a une bijection entre les ensembles suivants :*

- les paires de formes quadratiques entières en 3 variables modulo l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \text{GL}_3(\mathbb{Z})$;
- les classes d'isomorphismes de couples (Q, R) , où Q est un anneau quartique et R une résolvente cubique⁵ de Q .

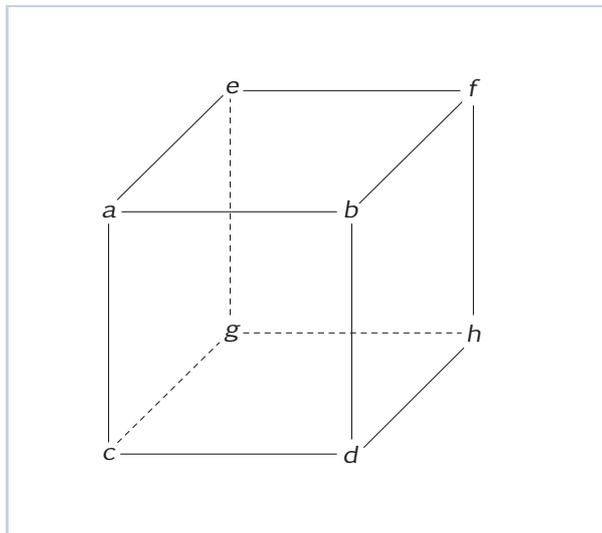
Théorème 5 (Bhargava [7]). *Il y a une bijection entre les ensembles suivants :*

- les quadruplets de 2-formes alternées entières de rang 5 ($\mathbb{Z}^4 \otimes \Lambda^2 \mathbb{Z}^5$), entières modulo l'action de $\text{GL}_4(\mathbb{Z}) \times \text{SL}_5(\mathbb{Z})$;
- les classes d'isomorphismes de couples (Q, R) , où Q est un anneau quintique et R une résolvente sextique⁶ de Q .

Ce sont les paramétrisations de ce type qui ont les conséquences les plus spectaculaires, mais Bhargava en obtient bien d'autres, pour quasiment tous les types de Sato-Kimura. Certaines admettent de nouvelles lois de composition comme la « loi du cube » : si on étiquette les 8 sommets d'un cube A par des entiers, on peut le partitionner en deux matrices 2×2 de trois façons différentes : $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, ou $M_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ e & g \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} b & d \\ f & h \end{pmatrix}$, ou encore $M_3 = \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} c & g \\ d & h \end{pmatrix}$; pour chacun de ces découpages, on construit une forme quadratique entière $Q_i(x, y) = -\det(M_i x + N_i y)$.

5. Une résolvente cubique de Q est un anneau cubique R muni d'une certaine application naturelle $Q \rightarrow R$; tous les anneaux quartiques admettent une résolvente cubique, les anneaux quartiques maximaux n'en admettent qu'une : dans ce cas on peut oublier la résolvente R .

6. Un anneau R de rang 6 muni d'une certaine application naturelle $Q \rightarrow \Lambda^2 R$; de nouveau, tous les anneaux quintiques admettent une telle résolvente et les anneaux maximaux n'en admettent qu'une.



Théorème 6 (Bhargava [2]). *Si un cube A produit trois formes quadratiques primitives alors elles ont même discriminant et leur produit pour la composition de Gauss est le neutre. Réciproquement, si le produit de trois formes quadratiques primitives est le neutre, il existe un cube A permettant de les obtenir par la recette ci-dessus.*

Ce résultat est associé à la représentation standard $V(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ de $G(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et s'interprète lui aussi en termes de groupes de classes d'idéaux (inversibles) d'anneaux quadratiques. D'autres lois de composition sont associées aux pavés $2 \times 2 \times 3$ et aux groupes de classes d'anneaux cubiques [3]. On pourra trouver dans [1] un survol plus détaillé de ces paramétrisations. Outre l'intérêt algébrique intrinsèque de ces paramétrisations et lois de composition issues de représentations préhomogènes (G, V) , on peut maintenant obtenir des résultats de comptage asymptotique des orbites non dégénérées de discriminant borné. On rentre dans un cadre classique en géométrie des nombres : le décompte de points entiers dans des domaines décrits par des inégalités polynomiales. L'analogie des conditions géométriques $|b| \leq a \leq c$ du domaine fondamental \mathcal{F} de Gauss et des conditions de signe (formes définies positives) devient une étude des composantes connexes d'un domaine fondamental pour $G(\mathbb{Z}) \backslash (V - S)(\mathbb{R})$.

- Pour peu que les domaines fondamentaux obtenus soient suffisamment réguliers, et de volume euclidien fini, leur nombre de points entiers est bien approché par leur volume, avec un terme d'erreur dépendant de la régularité du bord. On sait déjà que leur bord n'est pas trop sauvage : ces ensembles sont

définis par des inégalités polynomiales ; en revanche, il ne faudrait pas qu'il y ait des « pointes » ou « tentacules » qui bien que de volume négligeable (ensembles de codimension > 0) contiendraient beaucoup de points entiers.

- Les conditions arithmétiques de primitivité, ou de restriction aux idéaux inversibles, deviennent des conditions de congruence. Ce qui devrait se traduire par l'apparition d'un produit eulérien de densités locales devant le terme volume. Typiquement, compter des n -uplets primitifs dans \mathbb{Z}^n devrait se traduire par l'apparition d'un facteur $\prod_p (1 - p^{-n}) = \frac{1}{\zeta(n)}$. Pour peu que l'on maîtrise l'effet de ces conditions arithmétiques sur les termes d'erreur !
- Si on désire compter les corps de nombres K ordonnés par discriminant, il suffit de compter leurs anneaux d'entiers \mathbb{Z}_K , c'est-à-dire des anneaux intègres et maximaux. La condition de maximalité est locale, donc analogue aux congruences du point précédent.
- Il faut espérer que les points entiers qui ne nous intéressent pas mais qui ne sont pas exclus par des conditions de congruence, par exemple associés à des anneaux non intègres, soient en nombre négligeable dans ces domaines.

Un théorème de Minkowski énonce qu'à isomorphisme près le nombre de corps de nombres $N_n(X)$ de degré n et de discriminants bornés par X est fini. Une conjecture du folklore prédit que, pour tout $n > 1$, il existe $c_n > 0$ tel que $N_n(X) \sim c_n X$, pour $X \rightarrow \infty$. (Des conjectures plus précises ont été proposées, remplaçant \mathbb{Q} par une base plus générale, et fixant la clôture galoisienne ou des conditions locales.)

Le cas $n = 2$ est immédiat. Le cas $n = 3$, dû à Davenport et Heilbronn [16], est nettement plus ardu et nécessite déjà une paramétrisation des anneaux cubiques maximaux (mal comprise à l'époque) et une étude fine d'un domaine fondamental non compact dans \mathbb{R}^4 .

Théorème 7. *On a $N_3(X) \sim \frac{X}{3\zeta(3)}$, pour $X \rightarrow \infty$.*

(En collaboration avec Shankar et Tsimermann, Bhargava a précisé ce résultat dans [12] en donnant un second terme principal, démontrant une conjecture de Roberts.)

Entre 2004 et 2009, Bhargava a démontré cette conjecture pour les cas $n = 4$ et $n = 5$, les derniers qu'on pouvait espérer traiter par ces paramétrisa-

tions préhomogènes (d'après la classification de Sato-Kimura).

Théorème 8 ([6, 7]). *Pour $n = 4$ ou $n = 5$, on a $N_n(X) \sim c_n X$ pour des constantes c_4 et c_5 explicites.*

Ces résultats sont des tours de forces techniques : les domaines fondamentaux à étudier vivent respectivement dans \mathbb{R}^{12} et \mathbb{R}^{40} , et ont une géométrie compliquée, incluant de nombreuses « pointes » qu'il faut comprendre une à une : on ne peut pas estimer le nombre de leurs points entiers par leur volume. Il se passe plusieurs miracles à ce niveau : la majorité des pointes contient $o(X)$ points entiers ; à une exception près, les autres correspondent à des anneaux non intègres. L'exception se produit pour $n = 4$, où une pointe contient de l'ordre de X anneaux intègres dont le corps de fractions est de groupe de Galois D_4 , le groupe diédral d'ordre 8, plus $o(X)$ autres points. Un résultat de Cohen, Diaz y Diaz et Olivier, obtenu par théorie du corps de classes, permet de compter indépendamment ces corps, et donc de ne pas tenir compte de cette dernière pointe !

2. Points rationnels sur les courbes (hyper)-elliptiques

Plus récemment, Bhargava, en collaboration avec Shankar, s'est détourné des représentations préhomogènes pour paramétrer et comprendre des structures ne se réduisant pas à un seul objet par changement de base sur \mathbb{C} . Ils ont obtenu des résultats très forts et remarquables sur le comportement du rang des courbes elliptiques. Une courbe elliptique E définie sur le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} est une courbe définie par une équation de la forme $E: y^2 = x^3 + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{Q}$ sont fixés et vérifient $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Cette dernière inégalité est équivalente au fait que la courbe E est lisse et en particulier, qu'elle admet des tangentes en tous ses points. L'ensemble des points \mathbb{Q} -rationnels de E est alors

$$E(\mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Le point \mathcal{O} , appelé « point à l'infini », provient naturellement de l'homogénéisation de l'équation vue dans l'espace projectif. Les courbes elliptiques font l'objet d'études intensives depuis de nombreuses décennies. Par exemple, il est particulièrement intéressant de chercher à comprendre l'ensemble de leurs points rationnels, i.e., les solutions des

équations diophantiennes sous-jacentes. En effet, on classe les courbes (lisses) suivant leur genre $g \in \mathbb{N}$. Ce nombre mesure en quelque sorte la complexité arithmétique de la courbe (pour les courbes définies sur \mathbb{C} , il s'agit du genre analytique qui compte le nombre de trous). Dans le cas du genre 0, on sait décrire explicitement l'ensemble de leurs points rationnels assez facilement. Pour $g \geq 2$, le théorème de Faltings affirme qu'il n'existe qu'un nombre fini de points rationnels sur les courbes de genre ≥ 2 (mais il peut être délicat de donner la liste de ces points). Pour le genre 1, toutes les situations peuvent arriver : aucun point, un nombre fini ou un nombre infini de points rationnels. Les courbes elliptiques sont en fait des courbes de genre 1 possédant au moins un point rationnel : on s'intéresse alors à cet ensemble non vide $E(\mathbb{Q})$.

D'autre part, les courbes elliptiques fournissent des exemples fondamentaux de groupes algébriques. Si $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$ sont deux points de $E(\mathbb{Q})$, alors la droite (PQ) recoupe la courbe en un troisième point $R = (x_R, y_R)$, on définit alors $P + Q$ comme l'opposé (pour la loi de groupe que l'on est en train de définir) du point R qui est le point $(x_R, -y_R)$. Pour doubler un point P , il suffit de prendre la tangente à la courbe en ce point qui recoupe la courbe en l'opposé de $2P = P + P$. Le fait remarquable est que cette opération munit $E(\mathbb{Q})$ d'une structure de groupe abélien dont le neutre est le point \mathcal{O} ; trois points P, Q et R sur la courbe sont alignés si et seulement si $P + Q + R = \mathcal{O}$ (ce qui a motivé la « loi du cube » vue en première partie). D'autre part, cette loi de groupe respecte le caractère algébrique des points : si P et Q ont des coordonnées rationnelles alors $P + Q$ a aussi des coordonnées rationnelles. Le théorème crucial suivant précise la structure de $E(\mathbb{Q})$.

Théorème 9 (Théorème de Mordell-Weil). *Le groupe $E(\mathbb{Q})$ est un groupe abélien de type fini, i.e., il existe $r \in \mathbb{N}$, il existe $G_1, \dots, G_r \in E(\mathbb{Q})$ et il existe un sous-groupe fini $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ tels que :*

$$E(\mathbb{Q}) = \langle G_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_r \rangle \oplus E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}.$$

Résoudre l'équation diophantienne sous-jacente à E revient donc à déterminer le rang r , dit rang du groupe de Mordell-Weil, des générateurs et le sous-groupe de torsion $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$. En particulier, $E(\mathbb{Q})$ peut être décrit à l'aide d'un nombre fini de points rationnels. À ce jour, il n'existe pas d'algorithme pour calculer l'entier r et trouver des générateurs en général. En revanche, la torsion d'une courbe elliptique est parfaitement bien com-

prise : elle s'explique facilement et le théorème de Mazur affirme que le sous-groupe de torsion est toujours d'ordre inférieur à 16. Outre la résolution de l'équation diophantienne, il existe de nombreuses questions ouvertes sur les courbes elliptiques. Les travaux récents et tout à fait innovants de Bhargava et Shankar portent sur la question délicate du comportement du rang et ont des conséquences importantes sur certaines de ces questions ouvertes. En fait, même s'il n'existe pas d'algorithme pour déterminer le rang et un système de générateurs d'une courbe elliptique, il existe un procédé théorique qui fonctionne assez bien en général. Pour cela, on associe à une courbe elliptique E définie sur \mathbb{Q} , son groupe de Tate-Shafarevich, $\text{III}(E)$. D'autre part, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut définir le n -groupe de Selmer de E , $\text{Sel}_n(E)$; c'est un groupe fini et (théoriquement) calculable. On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow E(\mathbb{Q})/nE(\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Sel}_n(E) \longrightarrow \text{III}(E)[n] \longrightarrow 0.$$

Il n'est pas question de donner une définition rigoureuse des groupes de Tate-Shafarevich et des n -groupes de Selmer. Intuitivement, le n -groupe de Selmer est constitué de certaines courbes \mathcal{C} (de genre 1) qui possèdent des points partout localement i.e. qui possèdent un point défini sur \mathbb{R} et un point défini sur les corps \mathbb{Q}_p pour tout nombre premier p . Les éléments de $\text{III}(E)[n]$ sont les courbes \mathcal{C} de $\text{Sel}_n(E)$ qui n'ont pas de point rationnel. Ainsi, le groupe $\text{III}(E)[n]$ mesure en quelque sorte l'obstruction à ce que les objets ayant des points partout localement aient un point global i.e. rationnel.

Si $\text{III}(E)[n] = \{0\}$ alors comme $\text{Sel}_n(E)$ est calculable, on en déduit le rang (et un ensemble de générateurs). Cependant, il n'y a aucune raison d'avoir $\text{III}(E)[n] = \{0\}$ pour un n a priori mais on fait la conjecture suivante :

Conjecture 1 (Cassels). *Le groupe $\text{III}(E)$ est un groupe fini.*

Ceci dit, un contrôle du groupe de Selmer permet de majorer le rang puisque la suite exacte précédente implique que

$$r \leq \text{rk}_p(\text{Sel}_p(E)), \tag{1}$$

où p est un nombre premier et où $\text{rk}_p(G)$ désigne le p -rang du groupe abélien fini G (i.e. la dimension sur \mathbb{F}_p de G/pG). Pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, Bhargava

et Shankar ont calculé la moyenne de $|\text{Sel}_n(E)|$ pour l'ensemble des courbes elliptiques définies sur \mathbb{Q} . Afin d'énoncer correctement leurs résultats, nous devons être plus précis, en particulier pour ordonner les courbes elliptiques. Tout d'abord, on ne compte qu'une seule fois les courbes elliptiques dans une classe d'isomorphie. Deux équations $E: y^2 = x^3 + ax + b$ et $E': y^2 = x^3 + a'x + b'$ sur \mathbb{Q} définissent des courbes elliptiques isomorphes si et seulement si il existe $u \in \mathbb{Q}^*$ tel que $a' = u^4a$ et $b' = u^6b$. On passe alors de l'équation de E à celle de E' par le changement de variables $x \leftrightarrow u^2x$ et $y \leftrightarrow u^3y$. Ainsi, chaque classe d'isomorphie contient un unique représentant minimal, i.e., une courbe $E: y^2 = x^3 + ax + b$ telle que pour tout nombre premier p si p^4 divise a alors p^6 ne divise pas b . Pour une telle courbe E , minimale, on définit la hauteur (naïve) de E par

$$\text{ht}(E) = \max\{4|a|^3, 27b^2\}.$$

On note alors \mathcal{F} l'ensemble des courbes $E: y^2 = x^3 + ax + b$ minimales et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{F}(x) = \{E \in \mathcal{F} : \text{ht}(E) \leq x\}$. Enfin, si $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, la moyenne de f sur l'ensemble des courbes elliptiques ordonnées par la hauteur est

$$M(f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{E \in \mathcal{F}(x)} f(E)}{\sum_{E \in \mathcal{F}(x)} 1},$$

si la limite existe. Si f est la fonction caractéristique d'une propriété P , on parle de la probabilité (ou de la densité) de l'ensemble des courbes elliptiques vérifiant P . Avec ces définitions, les résultats de Bhargava et Shankar sont les suivants :

Théorème 10. *On a :*

- $M(|\text{Sel}_2|) = 3$ ([8]);
- $M(|\text{Sel}_3|) = 4$ ([9]);
- $M(|\text{Sel}_4|) = 7$ ([10]);
- $M(|\text{Sel}_5|) = 6$ ([11]).

On obtient les mêmes moyennes lorsqu'on considère des sous-familles de courbes elliptiques de \mathcal{F} définies par un nombre fini de congruences sur les coefficients a et b .

La conjecture générale formulée par Bhargava et Shankar est la suivante :

Conjecture 2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $M(|\text{Sel}_n|) = \sigma(n)$, où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs de n .*

Cette conjecture se retrouve aussi dans les travaux modélisant le comportement des groupes de

7. Si G est un groupe et si $n \in \mathbb{N}$, on note $G[n]$ le sous-groupe de G constitué des éléments de n -torsion.

8. Si p est un nombre premier, le corps \mathbb{Q}_p est le complété de \mathbb{Q} pour la valeur absolue $|\cdot|_p = p^{-v_p(\cdot)}$, où $v_p(\cdot)$ désigne la valuation p -adique.

Selmer et de Tate-Shafarevich ([15], [17], [23]).

Les moyennes calculées par Bhargava et Shankar entraînent des résultats sur le rang général des courbes elliptiques. En effet, l'équation (1) et $M(|\text{Sel}_2|) = 3$ impliquent que la moyenne des rangs des courbes elliptiques est majorée par $3/2$ ([8]). Lorsque Bhargava et Shankar ont annoncé cette majoration, c'était le premier résultat inconditionnel montrant que le rang moyen était borné. Le meilleur résultat antérieur était dû à Young ([26]) sous l'hypothèse de Riemann généralisée et sous la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer avec une majoration de $25/14$ donc moins bonne que le $3/2$ que Bhargava et Shankar obtiennent sans conjecture! Il convient à ce point de donner une explication sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer qui est centrale en théorie des nombres. On sait associer à une courbe elliptique E définie sur \mathbb{Q} une série L :

$$L(E, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} = \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_p p^{-s})(1 - \beta_p p^{-s})},$$

où les produit porte sur tous les nombres premiers p . On a $a_p = \alpha_p + \beta_p$ et pour tous p sauf un nombre fini, le nombre a_p est en fait défini par

$$a_p = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p),$$

où $\#E(\mathbb{F}_p)$ est le nombre de points de la courbe elliptique vue dans le corps fini à p éléments, \mathbb{F}_p . Le théorème de Hasse affirme que $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ ce qui permet d'obtenir la convergence absolue de $L(E, s)$ pour $\Re(s) > 3/2$ et de montrer qu'elle définit une fonction entière dans ce demi-plan. Les fameux travaux de Wiles complétés par Taylor-Wiles et Breuil-Conrad-Diamond-Taylor entraînent que $L(E, s)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe et qu'elle satisfait une équation fonctionnelle qui relie la valeur $L(E, s)$ à celle de $L(E, 2 - s)$. Le point $s = 1$ est une valeur centrale pour $L(E, s)$ et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (BSD) prédit un lien entre $L(E, 1)$ et certains invariants arithmétiques de E .

Conjecture 3 (Birch et Swinnerton-Dyer). *On note $r_{an} \in \mathbb{N}$ l'ordre d'annulation de $L(E, s)$ en $s = 1$. On a*

$$r_{an} = r \text{ (forme faible de la conjecture BSD).}$$

Plus précisément

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{L(E, s)}{(s-1)^{r_{an}}} = \Omega(E)c(E) \frac{R(E)|\text{III}(E)|}{(\#E(\mathbb{Q})_{tors})^2},$$

9. Il n'est pas nécessaire ici de définir précisément les invariants arithmétiques impliqués dans l'égalité de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

où $\Omega(E) \in \mathbb{R}_+$ est la période réelle⁹, $c(E) \in \mathbb{N}$ est le produit des nombres de Tamagawa, $R(E) \in \mathbb{R}_+$ est le régulateur de E (intuitivement, il donne une mesure de la complexité d'un système de générateurs de $E(\mathbb{Q})$) et où $\text{III}(E)$ est supposé être un groupe fini (i.e. on suppose que la conjecture de Cassels est vérifiée pour énoncer cette conjecture).

Les travaux de Kolyvagin et de Gross-Zagier entraînent en particulier que si $r_{an} \leq 1$ alors $r = r_{an}$ et le groupe $\text{III}(E)$ est fini. La conjecture BSD est à la base de nombreuses autres conjectures en théorie des nombres. Les travaux de Young établissent, avec des outils analytiques (formules explicites, etc.) une majoration de l'ordre d'annulation moyen en $s = 1$ des fonctions $L(E, s)$ lorsque E parcourt les courbes elliptiques définies sur \mathbb{Q} . Pour obtenir son résultat, Young a également besoin de faire des hypothèses sur les zéros de fonctions L (les fonctions $L(E, s)$ des courbes elliptiques mais également d'autres fonctions L); d'où l'utilisation de l'hypothèse de Riemann généralisée.

En utilisant leur résultat sur le 5-groupe de Selmer et les travaux de T. Dokchitser et V. Dokchitser ([18]) sur la parité des p -groupes de Selmer, Bhargava et Shankar obtiennent

Théorème 11 ([11]). *La moyenne des rangs des courbes elliptiques est majorée par 0.885.*

Ce résultat très fort est à mettre en parallèle avec les conjectures classiques du domaine qui prédisent que la moyenne du rang, $M(r)$ est égale à $1/2$. Plus précisément, la conjecture suivante fait partie du folklore (par exemple, [15], [22]) :

Conjecture 4. *Le rang des courbes elliptiques est en moyenne 0 ou 1 avec une probabilité de 1/2 pour chaque cas.*

Toujours dans [11], les auteurs déduisent de la moyenne du 5-groupe de Selmer qu'une densité d'au moins 20,62% des courbes elliptiques ont un rang égal à 0 et, si on admet la Conjecture 1, qu'une densité d'au moins 26,12% des courbes elliptiques ont un rang égal à 1. Pour le dernier point, Bhargava et C. Skinner ([13]) obtiennent un résultat inconditionnel en montrant qu'il existe une densité positive de courbes elliptiques de rang 1. C'est le premier résultat donnant une borne inférieure sur le rang moyen.

Tous les travaux précédents ont aussi des applications sur les courbes elliptiques qui vérifient la

(forme faible de la) conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. En effet, Bhargava, Skinner et Zhang obtiennent le théorème suivant :

Théorème 12. [14] *Au moins 66,48% des courbes elliptiques vérifient la forme faible de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et vérifient la conjecture de Cassels.*

La démonstration de $M(|\text{Sel}_2|) = 3$ ([8]) repose sur l'étude et le comptage des formes quartiques binaires définies sur \mathbb{Q} . Soit V l'espace vectoriel de ces formes¹⁰, i.e.

$$\begin{aligned} V(\mathbb{Q}) &= \{f(x_1, x_2) \\ &= ax_1^4 + bx_1^3x_2 + cx_1^2x_2^2 + dx_1x_2^3 + ex_2^4 : \\ &\quad a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

Si f est une forme quadratique binaire, on lui associe deux invariants :

$$\begin{aligned} I &= I(f) = 12ae - 3bd + c^2 \\ J &= J(f) = 72ace + 9bcd - 27ad^2 - 27b^2e - 2c^3. \end{aligned}$$

On définit aussi la hauteur de f par $\text{ht}(f) = \frac{4}{27} \max\{|I|^3, J^2/4\}$. Le groupe $\text{PGL}_2(\mathbb{Q})$ agit naturellement sur $V(\mathbb{Q})$: pour $g \in \text{PGL}_2(\mathbb{Q})$ et $f \in V(\mathbb{Q})$, on pose

$$(g \cdot f)(x_1, x_2) = (\det(g))^{-2} f((x_1, x_2) \cdot g),$$

de telle sorte que $I(g \cdot f) = I(f)$ et $J(g \cdot f) = J(f)$. On dit que $f \in V(\mathbb{Q})$ a des solutions partout localement si l'équation $y^2 = f(x_1, x_2)$ a des solutions (non triviales) dans \mathbb{R} et dans tous les complétés \mathbb{Q}_p de \mathbb{Q} pour tout nombre premier p . On note $V(\mathbb{Q})^{\text{sl}}$ le sous-ensemble¹¹ de $V(\mathbb{Q})$ constitué des formes f qui ont des solutions partout localement. L'action de $\text{PGL}_2(\mathbb{Q})$ préserve $V(\mathbb{Q})^{\text{sl}}$. Maintenant si $[f] \in \text{PGL}_2(\mathbb{Q}) \backslash V(\mathbb{Q})^{\text{sl}}$ alors la classe $[f]$ peut être identifiée à un élément de $\text{Sel}_2(E)$ où E est la courbe définie par $y^2 = x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{J}{27}$. En faisant varier les coefficients I et J et en ne gardant qu'une courbe elliptique dans la classe d'isomorphie (cela correspond à ne garder qu'un représentant de $[f]$ modulo \mathbb{Q}^\times sur les formes quartiques binaires via l'action $\gamma \cdot f := \gamma^2 f$, $\gamma \in \mathbb{Q}^\times$), on obtient une correspondance bijective

$$\begin{aligned} (\text{PGL}_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^\times) \backslash V(\mathbb{Q})^{\text{sl}} &\leftrightarrow \{(E, c) : \\ &E \text{ courbe elliptique, } c \in \text{Sel}_2(E)\} / \sim, \end{aligned}$$

où $(E, c) \sim (E', c')$ si il existe un isomorphisme de E dans E' respectant les éléments des groupes de Selmer. Pour obtenir le résultat sur la moyenne du 2-groupe de Selmer, tout le tour de force de Bhargava et Shankar revient à compter le nombre de classes d'équivalence des formes quartiques binaires dans $V(\mathbb{Q})^{\text{sl}}$ dont la hauteur est inférieure à x . Plusieurs résultats généraux et intéressants en eux-mêmes sont nécessaires. Il s'agit d'abord d'arriver à compter, comme dans la première partie et via la théorie géométrique des nombres, les classes d'équivalence modulo $\text{PGL}_2(\mathbb{Z})$ des formes quartiques binaires à coefficients entiers, $V(\mathbb{Z})$. Il faut alors trouver un représentant entier pour les classes de $V(\mathbb{Q})^{\text{sl}}$ modulo $(\text{PGL}_2(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^\times)$ ayant des invariants entiers et enfin faire intervenir la condition d'avoir des solutions partout localement. Outre l'article [8], on pourra trouver dans [20] ou dans [22] une présentation beaucoup plus détaillée de toutes ces étapes.

La stratégie précédente se généralise à d'autres couples (G, V) où V est une représentation du groupe G pour lesquels l'espace des invariants est un anneau engendré par deux polynômes : on parle alors de représentations corégulières. Et, en effet, en adaptant leur méthode sur d'autres espaces, Bhargava et Shankar parviennent à calculer la moyenne des 3-4-5-groupes de Selmer (par exemple, pour les 3-groupes de Selmer, l'espace V est celui des formes cubiques ternaires et G est le groupe SL_3).

Un autre résultat de Bhargava issu d'une stratégie similaire porte sur l'existence de points rationnels sur les courbes en général. Comme dit précédemment, on classe les courbes (lisses) suivant leur genre $g \in \mathbb{N}$. Les courbes elliptiques sont des courbes de genre 1 ayant au moins un point rationnel et le rang donne une mesure de « l'abondance » des points rationnels sur la courbe (par exemple, un nombre fini si le rang est nul, une infinité si le rang est ≥ 1). Dans ce contexte, il est naturel de se demander si une courbe aléatoire définie sur \mathbb{Q} possède ou non un point rationnel. Cette question a été étudiée par plusieurs auteurs et les travaux remarquables de Bhargava dans ce domaine apportent une réponse précise dans le cas particulier et important des courbes hyperelliptiques. Une telle courbe de genre g peut se ramener à une équation de la forme :

$$C: y^2 = f_0x^n + f_1x^{n-1}y + \dots + f_{n-1}xy^{n-1} + f_ny^n,$$

10. Cet ensemble, noté également V n'a aucun rapport avec l'ensemble V donné dans la première partie de ce texte.

11. L'idée est de paramétrer ainsi les 2-groupes de Selmer.

où $n = 2g + 2$ et où le polynôme homogène $f(x, y) = f_0x^n + f_1x^{n-1}y + \dots + f_{n-1}xy^{n-1} + f_ny^n \in \mathbb{Z}[x, y]$ n'a pas de facteurs carrés non triviaux dans $\mathbb{Q}[x, y]$. En définissant la hauteur de la courbe C par

$$H(C) = \max_{0 \leq i \leq n} (|f_i|),$$

on peut définir la limite inférieure de la densité des courbes hyperelliptiques définies sur \mathbb{Q} qui ne possèdent pas de point rationnel. On note ρ_g cette limite inférieure. Bhargava démontre le théorème suivant :

Théorème 13 ([5]). *On a $\rho_g = 1 + o(2^{-g})$, $g \rightarrow \infty$.*

La stratégie de la preuve de ce théorème rejoint celle du calcul de la moyenne du 2-groupe de Selmer. À un point rationnel sur C , Bhargava associe une orbite entière de l'action du groupe $G(\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sur un certain espace $V(\mathbb{Z})$ de telle

sorte que le couple (G, V) soit une certaine représentation corégulière beaucoup plus technique à traiter que celles mentionnées précédemment. Bhargava parvient néanmoins à compter ces orbites entières et à en déduire le théorème. Ce résultat a des conséquences spectaculaires sur la philosophie « local-global ». En particulier, lorsque $g \rightarrow \infty$, 100% des courbes hyperelliptiques définies sur \mathbb{Q} ayant des points dans tous les complétés de \mathbb{Q} n'ont, en fait, pas de point rationnel.

Outre ces travaux majeurs en théorie algébrique des nombres et en géométrie arithmétiques, M. Bhargava a obtenu de nombreuses contributions originales et importantes en théorie des nombres. Citons simplement par exemple ses travaux sur la généralisation de la fonction factorielle et ses travaux autour des théorèmes « 15 » et « 290 » sur les valeurs prises par les formes quadratiques définies positives.

Références

- [1] K. BELABAS. « Paramétrisation de structures algébriques et densités de discriminants [d'après Bhargava] ». *Astérisque*, n° 299 (2005). Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004, p. 267–299.
- [2] M. BHARGAVA. « Higher composition laws. I. A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations ». *Ann. of Math. (2)* **159**, n° 1 (2004), p. 217–250.
- [3] M. BHARGAVA. « Higher composition laws. II. On cubic analogues of Gauss composition ». *Ann. of Math. (2)* **159**, n° 2 (2004), p. 865–886.
- [4] M. BHARGAVA. « Higher composition laws. III. The parametrization of quartic rings ». *Ann. of Math. (2)* **159**, n° 3 (2004), p. 1329–1360.
- [5] M. BHARGAVA. *Most hyperelliptic curves over \mathbb{Q} have no rational points*. 2013. arXiv : 1308.0395v1.
- [6] M. BHARGAVA. « The density of discriminants of quartic rings and fields ». *Ann. of Math. (2)* **162**, n° 2 (2005), p. 1031–1063.
- [7] M. BHARGAVA. « The density of discriminants of quintic rings and fields ». *Ann. of Math. (2)* **172**, n° 3 (2010), p. 1559–1591. DOI : 10.4007/annals.2010.172.1559.
- [8] M. BHARGAVA et A. SHANKAR. *Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves*. 2013. arXiv : 1006.1002v3.
- [9] M. BHARGAVA et A. SHANKAR. *Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0*. 2013. arXiv : 1007.0052v2.
- [10] M. BHARGAVA et A. SHANKAR. *The average number of elements in the 4-Selmer groups of elliptic curves is 7*. 2013. arXiv : 1312.7333v1.
- [11] M. BHARGAVA et A. SHANKAR. *The average size of the 5-Selmer groups of elliptic curves is 6, and the average rank is less than 1*. 2013. arXiv : 1312.7859v1.
- [12] M. BHARGAVA, A. SHANKAR et J. TSIMERMAN. « On the Davenport-Heilbronn theorems and second order terms ». *Invent. Math.* **193**, n° 2 (2013), p. 439–499. DOI : 10.1007/s00222-012-0433-0.
- [13] M. BHARGAVA et C. SKINNER. *A positive proportion of elliptic curves over \mathbb{Q} have rank one*. 2014. arXiv : 1401.0233v1.
- [14] M. BHARGAVA, C. SKINNER et W. ZHANG. *A majority of elliptic curves over \mathbb{Q} satisfy the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*. 2014. arXiv : 1407.1826v2.
- [15] M. BHARGAVA et al. *Modeling the distribution of ranks, Selmer groups, and Shafarevich-Tate groups of elliptic curves*. 2013. arXiv : 1304.3971v1.
- [16] H. DAVENPORT et H. HEILBRONN. « On the density of discriminants of cubic fields (II) ». *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **322** (1971), p. 405–420.

- [17] C. DELAUNAY et F. JOUHET. « p^ℓ -torsion points in finite abelian groups and combinatorial identities ». *Adv. Math.* **258** (2014), p. 13–45. doi : 10.1016/j.aim.2014.02.033.
- [18] T. DOKCHITSER et V. DOKCHITSER. « On the Birch-Swinnerton-Dyer quotients modulo squares ». *Ann. of Math. (2)* **172**, n° 1 (2010), p. 567–596. doi : 10.4007/annals.2010.172.567.
- [19] W. T. GAN, B. GROSS et G. SAVIN. « Fourier coefficients of modular forms on G_2 ». *Duke Math. J.* **115**, n° 1 (2002), p. 105–169.
- [20] W. HO. « How many rational points does a random curve have? » *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **51**, n° 1 (2014), p. 27–52. doi : 10.1090/S0273-0979-2013-01433-2.
- [21] F. LEVI. « Kubische Zahlkörper und binäre kubische Formenklassen. », n° 66 (1914), p. 26–37.
- [22] B. POONEN. « Average rank of elliptic curves [after Manjul Bhargava and Arul Shankar] ». *Astérisque*, n° 352 (2013). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043-1058, Exp. No. 1049, viii, 187–204.
- [23] B. POONEN et E. RAINS. « Random maximal isotropic subspaces and Selmer groups ». *J. Amer. Math. Soc.* **25**, n° 1 (2012), p. 245–269. doi : 10.1090/S0894-0347-2011-00710-8.
- [24] M. SATO et T. KIMURA. « A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants ». *Nagoya Math. J.* **65** (1977), p. 1–155.
- [25] D. J. WRIGHT et A. YUKIE. « Prehomogeneous vector spaces and field extensions ». *Invent. Math.* **110**, n° 2 (1992), p. 283–314.
- [26] M. P. YOUNG. « Low-lying zeros of families of elliptic curves ». *J. Amer. Math. Soc.* **19**, n° 1 (2006), p. 205–250. doi : 10.1090/S0894-0347-05-00503-5.



Karim BELABAS

Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France
 CNRS, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France
 INRIA, F-33400 Talence, France
 Karim.Belabas@math.u-bordeaux.fr

Karim Belabas est professeur à l’université de Bordeaux. Ses centres d’intérêts sont la théorie des nombres sous toutes ses formes et le calcul formel. Il développe le système libre PARI/GP.



Christophe DELAUNAY

Laboratoire de Mathématiques de Besançon, Facultés des sciences et techniques, CNRS, UMR 6623, 16 route de Gray, 25030 Besançon, France
 Christophe.Delaunay@univ-fcomte.fr

Christophe Delaunay est professeur à l’université de Franche-Comté et membre du laboratoire de mathématiques de Besançon. Il est spécialiste de théorie des nombres.

Martin HAIRER, l’équation de KPZ et les structures de régularité

Cette note a pour but de donner un aperçu des travaux sur les équations aux dérivées partielles stochastiques singulières, qui ont valu la médaille Fields à Martin Hairer. Nous retraçons plus particulièrement le cheminement suivi par Martin Hairer pour aborder l’équation de Kardar-Parisi-Zhang et élaborer, à partir de là, la théorie plus générale des structures de régularité, qu’il a appliquée par la suite à d’autres modèles.

- F. DELARUE

1. L'équation de KPZ

De façon imagée, le travail de Martin Hairer présenté lors du congrès de Séoul s'apparente à une boîte à outils, appelée « structures de régularité », destinée à l'étude d'équations aux dérivées partielles rendues profondément singulières sous l'action d'un aléa. Bien que mise sous une forme aussi systématique que possible, cette boîte à outils trouve en réalité ses motivations dans plusieurs problèmes précis, issus de la physique. Le premier d'entre eux, à l'origine de l'approche développée par Martin Hairer, remonte à un article de 1986, [12], dans lequel trois physiciens, Kardar, Parisi et Zhang, ont suggéré un modèle, continu en temps et en espace, pour décrire la croissance de surfaces soumises à un dépôt aléatoire. L'équation associée, restée connue sous le nom de KPZ, a suscité, depuis, une profonde curiosité.

1.1 – Un double enjeu

Plusieurs raisons ont participé à cet enthousiasme. D'une part, l'équation est mal posée, au sens où aucune des notions habituellement utilisées pour donner un sens aux solutions ne s'applique. D'autre part, le comportement statistique de la solution, et en particulier les fluctuations qu'elle décrit en temps long autour de son régime moyen, ont donné lieu, pendant de nombreuses années, à plusieurs conjectures. Malgré diverses avancées entre 1990 et 2010, les deux questions n'ont trouvé de réponses assez complètes que très récemment et, de façon remarquable, à moins de trois ans d'intervalle. Les publications entre 2010 et 2013 de plusieurs travaux majeurs, répondant chacun à une partie des interrogations soulevées par l'équation de KPZ, ont suscité un engouement profond. La distinction reçue par Martin Hairer s'inscrit dans ce contexte d'effervescence.

Les premiers travaux de Martin Hairer, [11], sur la résolubilité de l'équation de KPZ ont été publiés en 2013 moins de trois ans après ceux d'Amir, Corwin et Quastel, [1], et de Sasamoto et Spohn, [18, 17], sur le comportement statistique de la solution. Que le comportement statistique ait été discuté avant la résolubilité a, au moins à première vue, quelque chose d'anachronique, qui pourrait laisser perplexe. En réalité, les articles [1, 18, 17] s'appuient sur une construction *ad hoc* de la solution de l'équation de KPZ, proposée par Bertini et Giacomin en 1997, [2], en comparaison de laquelle,

l'approche de Hairer revêt un caractère beaucoup plus systématique.

1.2 – Forme de l'équation

Formellement, l'équation de KPZ s'écrit :

$$\partial_t h(t, x) = \partial_{xx}^2 h(t, x) + |\partial_x h(t, x)|^2 + \zeta(t, x), \quad (1)$$

où $h(t, x)$ représente la hauteur d'une surface, regardée à l'instant t et au point x . Ici, x est supposé réel, l'équation n'étant comprise, à l'heure actuelle et malgré les travaux de Hairer, qu'en dimension 1. La dynamique de la hauteur est expliquée par trois facteurs : un terme diffusif, un terme non-linéaire en la pente de la surface et un terme aléatoire, noté ζ . La non-linéarité quadratique se comprend comme le premier terme non trivial à apparaître dans le développement polynomial d'une non-linéarité en la pente, le terme d'ordre 0 correspondant à une translation verticale et le terme d'ordre 1 à une translation horizontale sous l'effet d'un champ de transport. Le facteur aléatoire ζ peut être interprété comme une distribution aléatoire agissant de façon gaussienne sur une fonction test temps-espace $\varphi \in L^2((0, +\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, x) \zeta(t, x) dt dx \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(t, x) dt dx\right), \quad (2)$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne la loi gaussienne centrée de variance σ^2 . Lorsque φ vaut l'indicatrice d'un domaine temps-espace, le terme de gauche se lit comme une variable aléatoire gaussienne de variance égale à l'aire du domaine. Dans le cadre d'une discrétisation de type volume fini de l'équation (1), ζ agirait sur la dynamique de la solution approchée par dépôt, sur chaque maille temps-espace, d'une quantité aléatoire distribuée selon une loi gaussienne centrée de variance égale à l'aire de la maille. Le cas échéant, les dépôts seraient indépendants d'une maille à l'autre.

Le terme ζ est appelé « bruit blanc espace-temps » et se lit comme la dérivée espace-temps $\partial_t \partial_x \zeta$ d'une fonction aléatoire ζ d'exposant de Hölder à peine égal à $1/2$, de sorte que, malgré la notation utilisée dans (2), ζ n'est en aucune manière une fonction. Aussi, toute la difficulté, dans l'étude de (1), tient à la singularité du forçage aléatoire appliqué à la dynamique de h .

1.3 – Résoudre l'équation

Lorsque ζ ne désigne plus le bruit blanc mais une fonction, (1) s'écrit comme une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, dont la solution admet une factorisation explicite, dite de Hopf-Cole :

$$h(t, x) = \ln(u(t, x)), \quad (3)$$

où u est à valeurs strictement positives et vérifie

$$\partial_t u(t, x) = \partial_{xx}^2 u(t, x) + u(t, x) \zeta(t, x). \quad (4)$$

En comparaison de (1), (4) a l'avantage d'être linéaire. Lorsque x est unidimensionnel et ζ est effectivement choisi comme le bruit blanc, il reste possible, par intégration contre le noyau de la chaleur, de donner une solution à (4). Dans le travail de Bertini et Giacomin, [2], la solution de l'équation de KPZ est définie à travers la relation (3), une fois l'équation (4) résolue.

La force du travail de Hairer est de construire directement, et dans un cadre systématisé, une solution à (1), sans passer par (3) ni (4). Une première construction, spécifiquement rédigée pour traiter (1), est proposée dans l'article de 2013, [11]. Dans un second travail, [8], publié en 2014, Martin Hairer propose une théorie générale, appelée « théorie des structures de régularité », permettant de résoudre une classe assez large d'équations aux dérivées partielles stochastiques singulières, incluant en particulier (1). Le but de cette note est d'expliquer le cheminement ayant abouti, depuis [11], à [8]. Le lecteur pourra aussi consulter la version introductive [9] et la vidéo de l'ICM [10].

1.4 – Le carré d'une distribution

La version additive de (4) s'écrit :

$$\partial_t Y^*(t, x) = \partial_{xx}^2 Y^*(t, x) + \zeta(t, x). \quad (5)$$

dont la solution, en dimension 1, est donnée par

$$Y^*(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) Y^*(0, y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) \zeta(s, y) ds dy, \quad (6)$$

où $p_t(x) = (4\pi t)^{-1/2} \exp[-x^2/(4t)]$ est la solution fondamentale de la chaleur. Pour donner un sens au membre de droite, la règle (2) suggère de calculer $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) ds dy$, qui est comparable à $\int_0^t (t-s)^{-1/2} ds$ et est donc fini. En revanche, $\partial_x Y^*(t, x)$ contient $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x p_{t-s}(x-y) \zeta(s, y) ds dy$, dont la variance, comparable à $\int_0^t (t-s)^{-3/2} ds$, diverge. La valeur critique pour la convergence de $\int_0^t (t-s)^{-\beta} ds$ étant $\beta = 1$, un argument d'interpolation suggère que Y^* est au mieux $1/2 - \eta$ Hölder continu en espace, pour $\eta > 0$ aussi petit que souhaité. Le même comportement étant attendu pour h dans (1), la non-linéarité en gradient dans l'équation de KPZ se lit comme le carré d'une distribution, pierre d'achoppement des méthodes usuelles.

Si la non-linéarité dans (1) soulève des difficultés quant au sens à donner aux solutions, elle en affecte aussi le comportement qualitatif. La formule (6) montre, qu'en l'absence de non-linéarité, la solution de (1) se réduit à une gaussienne de variance d'ordre t au temps t^2 . Autrement dit, sous l'action d'un changement d'échelle « diffusif » d'ordre $\lambda \gg 1$, la solution de l'équation linéaire, évaluée au point temps-espace $(\lambda^2 t, \lambda x)$, a des fluctuations gaussiennes d'amplitude $\lambda^{1/2}$. En présence de la non-linéarité, le comportement statistique a été mis en évidence par Amir, Corwin et Quastel, [1], et Sasamoto et Spohn [18, 17]. Pour certaines conditions initiales, la distribution de la solution de (1) en un point temps-espace donné est explicitement connue. Les fluctuations en temps long sont d'ordre $\lambda^{1/2}$ au point, d'échelle temps-espace non diffusive, $(\lambda^{3/2} t, \lambda x)$, et sont reliées à celles (non gaussiennes) de la plus grande des valeurs propres d'une matrice hermitienne de grande taille à entrées gaussiennes indépendantes. Ce phénomène, observé pour d'autres modèles aléatoires de croissance, met en évidence, à côté du régime gaussien (issu du théorème central limite), un autre régime limite en théorie des probabilités, commun à une certaine classe de modèles, appelée classe d'universalité de KPZ. Le lecteur pourra visionner l'exposé de Borodine à l'ICM, [3], ou consulter le cours de Quastel à Saint-Flour, [16].

1.5 – Comportement en temps long

2. La nécessité de renormaliser

2.1 – Régularisation du bruit blanc

Une démarche naturelle, pour envisager l'équation de KPZ, consiste à régulariser le bruit blanc de façon à faire de ζ une vraie fonction. En désignant,

de façon générique, par $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une version régularisée de ζ , il s'agit de résoudre, au sens classique,

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_{xx}^2 h_\varepsilon + |\partial_x h_\varepsilon|^2 + \zeta_\varepsilon, \quad (7)$$

sous la condition initiale $h_\varepsilon(0, \cdot) = h_0$, et d'étudier le comportement asymptotique de h_ε lorsque ε tend vers 0.

Quelle que soit la forme envisagée pour ζ_ε , il est, bien entendu, impossible d'espérer établir la convergence de la solution h_ε lorsque ε tend vers 0, la non-linéarité quadratique étant en effet appelée à « exploser » le long de la régularisation. En revanche, l'espoir est de corriger la dynamique dans (7) dans le but de compenser l'explosion et d'établir la convergence.

La correction à appliquer a été mise en évidence par Bertini et Giacomin dans [2]. Il s'agit, pour équilibrer la non-linéarité, de soustraire au terme source une constante C_ε , dépendant de la procédure de régularisation utilisée et divergeant lorsque ε tend vers 0. Une telle opération porte le nom de « renormalisation ». Dans [2], le calcul du « contre-terme » C_ε repose explicitement sur la transformation de Hopf-Cole rappelée dans la section précédente. Ce résultat est retrouvé par Martin Hairer à l'aide d'une approche plus systématique et plus robuste, dans laquelle la limite des solutions renormalisées est caractérisée de façon intrinsèque.

Dans [2] et dans [11], le bruit blanc n'est régularisé qu'à minima, dans la direction x . Intuitivement, ceci est suffisant pour donner un sens à (7). L'approche générale développée par Martin Hairer dans [8] permet d'envisager des régularisations espace-temps et, ainsi, de voir ζ_ε comme une fonction.

2.2 – Développement au premier ordre de la solution

Dans les travaux de Martin Hairer, l'équation de KPZ est envisagée sur le tore \mathbb{S}^1 , de façon à bénéficier de propriétés supplémentaires de compacité. Dans ce contexte, la compréhension de (1) repose sur l'introduction d'une structure le long de laquelle la solution attendue h est susceptible d'être développée. Intuitivement, le premier terme d'un tel développement ne peut être que la solution de l'équation de la chaleur stochastique (5), obtenue en ignorant la non-linéarité. Martin Hairer la note Y^* pour indiquer qu'elle est à la racine du développement. Formellement, la différence $h - Y^*$

vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t (h - Y^*) &= \partial_{xx}^2 (h - Y^*) + |\partial_x (h - Y^*)|^2 \\ &\quad + 2\partial_x (h - Y^*) \partial_x Y^* + |\partial_x Y^*|^2. \end{aligned}$$

En partant du principe que Y^* est le terme de plus basse régularité dans le développement de h , ou encore que $h - Y^*$ est de régularité supérieure à Y^* , il est légitime de se focaliser, dans un premier temps, sur la version réduite

$$\partial_t Y^V = \partial_{xx}^2 Y^V + |\partial_x Y^*|^2, \quad (8)$$

la notation arborescente \vee dans Y^V indiquant que l'équation ci-dessus est dirigée par la répétition du terme racine \bullet , c'est-à-dire $\partial_x Y^* \times \partial_x Y^*$. Volontairement, nous resterons flous sur les conditions initiales de Y^* et Y^V , celles-ci étant choisies de façon à rendre la distribution statistique des solutions aussi stationnaire que possible.

Naturellement, Y^* n'étant pas différentiable, le terme $|\partial_x Y^*|^2$ n'est pas mieux défini que la non-linéarité dans (1). Néanmoins, (8) présente, en comparaison, l'avantage de distinguer la solution Y^V du terme singulier $|\partial_x Y^*|^2$. Une possibilité, pour donner un sens à l'équation ci-dessus, est de remplacer Y^* par une version régularisée en espace, notée Y_ε^* , et de considérer, de façon équivalente, Y_ε^V . Le cas échéant, la question est de comprendre le comportement asymptotique de $|\partial_x Y_\varepsilon^*|^2$ lorsque ε tend vers 0.

Pour construire Y_ε^* , une façon simple est de substituer ζ_ε à ζ dans (5). Par exemple, lorsque ζ_ε est obtenu par convolution de ζ à l'aide d'un noyau $\varepsilon^{-1} \rho(\varepsilon^{-1} \cdot)$, il vient (en oubliant la condition initiale)

$$\begin{aligned} \partial_x Y_\varepsilon^*(t, x) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(\int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) \rho\left(\frac{y-u}{\varepsilon}\right) dy \right) \\ &\quad \times \zeta(s, u) ds du. \end{aligned}$$

La formule (2) donne une façon de calculer la variance du membre de droite. L'effet régularisant du noyau de la chaleur suggère de limiter l'intégration à un voisinage de t de l'ordre de ε^2 . Sur cet intervalle, le gradient ajoute un facteur $1/\varepsilon$, la norme infinie de la convolution est d'ordre $1/\varepsilon$ et la norme L^1 d'ordre 1. De fait, la variance attendue est de l'ordre de $\varepsilon^2 \times \varepsilon^{-3} = \varepsilon^{-1}$, qui, comme cela pouvait être anticipé, explose lorsque ε tend vers 0.

Pour contourner cet écueil, l'idée est de « renormaliser » et de compenser la singularité en soustrayant la partie divergente. Le premier résultat de

[11] est de calculer explicitement le contre-terme par lequel (8) doit être corrigée :

Proposition 1. *Pour un certain choix des conditions initiales et du noyau de régularisation, il existe une constante C telle que les solutions de*

$$\partial_t Y_\varepsilon^\vee = \partial_{xx}^2 Y_\varepsilon^\vee + |\partial_x Y_\varepsilon^\vee|^2 - C/\varepsilon, \quad (9)$$

convergent vers une fonction aléatoire Y^\vee lorsque ε tend vers 0, au sens où, pour tout $T > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} \|Y_\varepsilon^\vee(t, \cdot) - Y^\vee(t, \cdot)\|_\alpha \geq \delta \right) = 0,$$

la norme $\|\cdot\|_\alpha$ désignant la norme α -Hölder sur le tore \mathbb{S}^1 . La limite est indépendante du noyau choisi (dans une classe de noyaux admissibles).

La convergence mise en évidence est appelée « convergence en probabilités » : avec grande probabilité, la distance entre Y_ε^\vee et Y^\vee est petite. La limite Y^\vee s'écrit comme la solution de l'équation renormalisée :

$$\partial_t Y^\vee = \partial_{xx}^2 Y^\vee + |\partial_x Y^\vee|^2 - \infty, \quad (10)$$

la soustraction de l'infini indiquant qu'une opération de renormalisation a été effectuée. La valeur de α dans la Proposition 1 est remarquable : alors que le seuil de régularité Hölder de Y^* est $1/2$, celui de Y^\vee est 1. Il s'agit d'une observation fondamentale liée à l'effet régularisant de la chaleur dans (8). La non-linéarité dans (8) est d'ordre $(-1)^-$, c'est-à-dire $-1 - \eta$, pour $\eta > 0$ aussi petit que souhaité. Sous l'action du laplacien, deux ordres sont gagnés, et Y^\vee est de régularité Hölder 1^- (en espace).

2.3 – Termes supérieurs dans le développement

Le terme Y^\vee est de fait compris comme le deuxième terme dans le développement de la solution de l'équation (1). L'idée est naturellement d'itérer le procédé et d'écrire, ou moins formellement, h sous la forme

$$h(t, x) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} Y^\tau(t, x), \quad (11)$$

où \mathcal{T} désigne l'ensemble des arbres binaires finis (enracinés).

La structure d'arbre binaire permet ici de coder l'action de la non-linéarité quadratique. Pour deux

arbres τ_1 et τ_2 , $Y^{[\tau_1, \tau_2]}$ est lié à Y^{τ_1} et Y^{τ_2} à travers l'équation (sans en préciser la condition initiale)

$$\partial_t Y^{[\tau_1, \tau_2]} = \partial_{xx}^2 Y^{[\tau_1, \tau_2]} + \partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}, \quad (12)$$

où $[\tau_1, \tau_2]$ désigne l'arbre obtenu en reliant les racines de τ_1 et τ_2 à une même racine. Par exemple, $\vee = [\cdot, \cdot]$.

En réalité, la résolution de (12) conduit, au moins à première vue, aux mêmes difficultés que celles rencontrées pour résoudre (8). Il se peut que le produit $\partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}$ ne soit pas défini, à l'image de la non-linéarité dans (8). Ceci pose une première difficulté. Une seconde est le sens à donner au développement infini (11).

Concernant le second point, un raisonnement formel laisse espérer que, pour des arbres contenant suffisamment de nœuds, les solutions associées soient différentiables. Désignons en effet par α_1 et α_2 les ordres de régularité de Y^{τ_1} et Y^{τ_2} dans (11). Alors les ordres de $\partial_x Y^{\tau_1}$ et $\partial_x Y^{\tau_2}$ sont respectivement égaux à $\alpha_1 - 1$ et $\alpha_2 - 1$. Si jamais les deux sont négatifs, le produit a, intuitivement, $\alpha_1 + \alpha_2 - 2$ pour ordre de régularité, et, par régularisation, $Y^{[\tau_1, \tau_2]}$ a pour ordre $\alpha_1 + \alpha_2$. Si jamais l'un des deux seulement est négatif (par exemple α_1), le produit a pour ordre de régularité $\alpha_1 - 1$ et $Y^{[\tau_1, \tau_2]}$ a pour ordre $1 + \alpha_1$. Le choix $\alpha_1 = \alpha_2 = (1/2)^-$ permet de retrouver que Y^\vee est d'ordre de régularité 1^- . Le choix $\alpha_1 = (1/2)^-$ et $\alpha_2 = 1^-$ laisse penser que les termes suivants, obtenus par concaténation de \cdot et \vee , c'est-à-dire Y^\vee et Y^\vee (par ailleurs égaux par symétrie), sont d'ordre $(3/2)^-$. En fait, ce sont là les pires des scénarios et les autres termes ne peuvent pas être de régularité inférieure à $(3/2)^-$.

Le programme de Martin Hairer peut être compris comme suit. Au lieu de chercher une solution de (1) sous la forme d'un développement infini de type (11), la solution est recherchée sous la forme

$$h(t, x) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} Y^\tau(t, x) + u(t, x), \quad (13)$$

où \mathcal{T}^* est un sous-ensemble fini de \mathcal{T} et $u(t, x)$ est posée comme la solution d'une équation auxiliaire. Dit autrement, les premiers termes du développement, dont les contributions dans (1) sont trop singulières, sont traités séparément, et le reste, plus régulier (c'est-à-dire d'ordre $(3/2)^-$), est cherché comme la solution d'une équation expurgée (autant que possible) des singularités originellement présentes dans (1).

Dans cette perspective, il serait tentant de vouloir limiter \mathcal{T}^* aux arbres τ pour lesquels la solution

Y^τ n'est pas différentiable, mais ce serait une erreur, le gain en régularité n'éliminant pas de façon systématique les singularités. Par exemple, lorsque $\tau_1 = \bullet$ et $\tau_2 = \vee$ dans (12), le produit $\partial_x Y^\bullet \partial_x Y^\vee$ implique une distribution d'ordre $(-1/2)^-$ et une fonction d'ordre $(1/2)^-$ et n'est pas, comme nous le verrons ci-dessous, bien défini. Aussi un résultat essentiel dans [11] est de montrer que \mathcal{T}^* peut être réduit à $\{\bullet, \vee, \vee, \vee, \vee, \vee, \vee, \vee, \vee\}$. Le cas échéant, les Y^τ sont construits par un procédé analogue à celui de la proposition 1 :

Proposition 2. *Pour $\tau \in \mathcal{T}^* \setminus \{\bullet\}$, τ s'écrivant sous la forme $[\tau_1, \tau_2]$ avec τ_1 et τ_2 dans $\{\bullet, \vee, \vee, \vee\}$, il existe une suite de constantes $(C_\varepsilon^\tau)_{\varepsilon>0}$ telle que les solutions $(Y_\varepsilon^\tau)_{\varepsilon>0}$ de l'équation (avec une condition initiale appropriée)*

$$\partial_t Y_\varepsilon^\tau = \partial_{xx}^2 Y_\varepsilon^\tau + \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_2} - C_\varepsilon^\tau$$

convergent en probabilité sur tout $[0, T]$ (au même sens que dans la proposition (1)) vers un processus Y^τ , indépendant du choix du noyau de convolution. Les constantes C_ε^{\vee} et C_ε^{\vee} sont nulles, les constantes $C_\varepsilon^{\vee}, C_\varepsilon^{\vee}, C_\varepsilon^{\vee}$ et C_ε^{\vee} sont égales à $-(1/4)C_\varepsilon^{\vee}$ et divergent de façon logarithmique avec ε . En particulier, la somme de toutes les constantes de renormalisation est égale à $C_\varepsilon^{\vee} = C/\varepsilon$ dans la proposition 1, c'est-à-dire $\sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} C_\varepsilon^\tau = C/\varepsilon$.

En réalité, la proposition 2 reste vraie pour $\tau \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}^*$, mais avec le choix trivial $C_\varepsilon^\tau = 0$, suggérant ainsi que la décomposition (13) soit effectivement pertinente. Il est alors légitime de poser $h_\varepsilon^* = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} Y_\varepsilon^\tau$. Un calcul simple montre que h_ε^* est solution de l'équation de KPZ régularisée avec reste et contre-terme :

$$\partial_t h_\varepsilon^* = \partial_{xx}^2 h_\varepsilon^* + |\partial_x h_\varepsilon^*|^2 + \check{C}_\varepsilon - C/\varepsilon - R_\varepsilon^*, \quad (14)$$

où $R_\varepsilon^* = \sum_{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^* : [\tau_1, \tau_2] \notin \mathcal{T}^*} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_1} \partial_x Y_\varepsilon^{\tau_2}$ correspond au reste issu du développement formel (11).

3. La théorie des trajectoires rugueuses

La résolution de l'équation de KPZ passe maintenant par celle d'un point fixe impliquant le terme u dans (13). Rappelons que u est entendu comme la différence $h - h^*$ où h est la solution de (1) et $h^* = \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*} Y^\tau$. Il est également attendu comme la limite de $u_\varepsilon = h_\varepsilon - h_\varepsilon^*$ où h_ε est l'équation de KPZ régularisée avec contre-terme

$$\partial_t h_\varepsilon = \partial_{xx}^2 h_\varepsilon + |\partial_x h_\varepsilon|^2 + \check{C}_\varepsilon - C/\varepsilon.$$

3.1 – Le reste comme la solution d'une équation

En faisant la différence avec (14), u_ε est solution de

$$\partial_t u_\varepsilon = \partial_{xx}^2 u_\varepsilon + |\partial_x u_\varepsilon|^2 + 2(\partial_x h_\varepsilon^* \partial_x u_\varepsilon) + R_\varepsilon^*. \quad (15)$$

L'idée est donc de chercher u solution d'une équation de la forme

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + |\partial_x u|^2 + 2(\partial_x h^* \partial_x u) + R^*, \quad (16)$$

où $R^* = \sum_{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^* : [\tau_1, \tau_2] \notin \mathcal{T}^*} \partial_x Y^{\tau_1} \partial_x Y^{\tau_2}$. Dans [11], Martin Hairer fait d'une pierre deux coups en montrant que, non seulement, l'équation peut être résolue de façon intrinsèque, mais aussi que la solution varie continûment lorsque les données sources varient continûment pour une topologie appropriée, garantissant ainsi que le u construit est bien la limite des u_ε .

En comparaison de (1), dont la solution attendue n'est pas différentiable, la solution de (16) est cherchée parmi un espace de fonctions d'ordre $(3/2)^-$ en espace, auquel cas la non-linéarité $|\partial_x u|^2$ est bien définie.

La résolution de (16) est donc liée à la définition des restes, qui s'interprètent comme des produits de la forme $\partial_x f \partial_x g$. Lorsque f et g sont des fonctions régulières, la distribution $\partial_x f \partial_x g$ est trivialement définie. D'après la théorie de Young [20], cette définition s'étend par continuité au cas où $\partial_x f$ et g sont respectivement α et β Hölder, avec $\alpha + \beta > 1$, mais cette extension n'est plus possible lorsque $\alpha + \beta \leq 1$. En décomposant h^* sous la forme (en prenant en compte les symétries $Y^{\vee} = Y^{\vee}$ et $Y^{\vee} = Y^{\vee} = Y^{\vee} = Y^{\vee}$) :

$$\begin{aligned} h^*(t, x) &= Y^*(t, x) + \sum_{\tau \in \mathcal{T}^*, \tau \neq \bullet} Y^\tau(t, x) \\ &= Y^* + \left(Y^\vee + 2Y^{\vee} + 4Y^{\vee} + Y^{\vee} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

et en rappelant que les termes dans la somme entre parenthèses sont de régularité respective $1^-, (3/2)^-, (3/2)^-$ et 2^- , il est facile de voir que, dans le terme $\partial_x u \partial_x h^*$, seul le produit $\partial_x u \partial_x Y^*$ échappe à la théorie de Young (auquel cas $\alpha = (1/2)^-$ et $\beta = (1/2)^-$). De même, dans le reste R^* , seul le produit $\partial_x Y^{\vee} \partial_x Y^*$ est, *a priori*, mal défini (avec, là encore, $\alpha = (1/2)^-$ et $\beta = (1/2)^-$). De fait, pour construire une solution à (16), il est nécessaire de donner un sens aux distributions $\partial_x u \partial_x Y^*$ et $\partial_x Y^{\vee} \partial_x Y^*$, compatible avec le

passage à la limite le long des termes indexés par $\varepsilon : \partial_x u_\varepsilon \partial_x Y_\varepsilon^*$ et $\partial_x Y_\varepsilon^{\ddot{Y}} \partial_x Y_\varepsilon^*$.

3.2 – Principe des trajectoires rugueuses

L'idée de Martin Hairer est d'utiliser la théorie des trajectoires rugueuses initiée par Lyons, [5, 15, 14]. Dans chacun des cas ci-dessus, nous sommes en effet confrontés à la nécessité de définir la distribution $f \partial_x g$ pour deux fonctions f et g de régularité Hölder $(1/2)^-$. Essentiellement, ceci revient à définir l'intégrale « croisée » $\int^x f(y) \partial_x g(y) dy$, encore notée $\int^x f(y) dg(y)$, de f contre les incréments de g . Un exemple particulièrement simple est $f \equiv g$, auquel cas $\int^x f(y) df(y)$ peut être posée égale à $(1/2)f^2(x)$. La théorie de l'intégrale stochastique en probabilités offre également une large classe d'exemples de telles intégrales, obtenues, selon les cas, par convergence dans L^2 de la méthode des rectangles au point gauche (intégrale d'Itô) ou de celle des trapèzes (intégrale de Stratonovich). De façon générale, l'intégrale croisée doit vérifier la relation de Chasles et satisfaire l'égalité $\int_a^b f dg(y) = f[g(b) - g(a)]$ lorsque f est constante. Elle peut être la limite des intégrales croisées associées à une régularisation du couple (f, g) (tel est le cas lorsque $f \equiv g$ et $\int^x f(y) df(y) = (1/2)f^2(x)$, tel est aussi le cas de l'intégrale de Stratonovich) ou pas (l'intégrale d'Itô, avec f donnée par la réalisation d'un mouvement brownien, viole la condition $\int_a^b f(y) df(y) = (1/2)[f^2(b) - f^2(a)]$).

Dans ce contexte, l'objectif de la théorie de Lyons est de proposer une construction systématique d'une large classe d'intégrales croisées une fois déterminée celle de f contre g . L'idée essentielle est la suivante : dès lors qu'une fonction u se comporte, localement, comme la fonction f , l'intégrale de u contre g existe également. Ceci a été mis en forme par Gubinelli [6] :

Définition 1. En notant \mathcal{C}^α les fonctions α -Hölder continues sur un intervalle I (borné), une fonction $v \in \mathcal{C}^\alpha$ est dite contrôlée par $f \in \mathcal{C}^\alpha$ s'il existe $v' \in \mathcal{C}^\alpha$ et $C \geq 0$ telles que

$$|v(y) - v(x) - v'(x)(f(y) - f(x))| \leq C|x - y|^{2\alpha}, \quad x, y \in I.$$

Ici, v' fait office de « dérivée » de v par rapport à f et le développement $v(y) = v(x) + v'(x)(f(y) - f(x)) + R(x, y)$ s'apparente à un développement de Taylor généralisé à l'ordre α , avec reste d'ordre 2α . Maintenant, l'intégrale croisée de v contre g peut être

définie dès lors que celle de f contre g existe. En effet, si f et g sont dans \mathcal{C}^α , avec $\alpha \in (1/3, 1/2]$ de sorte que l'intégrale croisée de f contre g existe et que l'« aire de Lévy » dans le terme de gauche ci-dessous vérifie

$$\forall x, y \in I, \quad \left| \int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z) \right| \leq C|x - y|^{2\alpha}, \quad (18)$$

pour $C \geq 0$, alors, pour une fonction v contrôlée par f , l'intégrale de v contre g existe sur tout $[x, y]$ comme la limite des sommes de Riemann

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(v(z_i) (g(z_{i+1}) - g(z_i)) + v'(z_i) \int_{z_i}^{z_{i+1}} (f - f(z_i)) dg \right), \quad (19)$$

le long de partitions $(z_i)_{0 \leq i \leq N}$ de $[x, y]$ de pas convergeant vers 0. De plus, l'intégrale croisée vérifie (18) pour une constante C possiblement différente.

L'idée sous-jacente est que la différence entre $\int_{z_i}^{z_{i+1}} v dg$ et le terme élémentaire associé dans la somme de Riemann est d'ordre $|z_{i+1} - z_i|^{3\alpha}$, expliquant ainsi la condition $\alpha > 1/3$.

3.3 – Retour à KPZ

La discussion menée à la fin du § 3.1 suggère de choisir $g = Y^*(t, \cdot)$ (de sorte que g dépend du temps, en plus de la variable d'espace). Les candidats pour être v sont respectivement $\partial_x u(t, \cdot)$ et $\partial_x Y^{\ddot{Y}}(t, \cdot)$, la difficulté principale étant liée au choix de f et à l'existence d'une intégrale croisée entre f et g , pour chaque $t > 0$. Dans cette perspective, il est possible de voir l'équation (16) satisfaite par u comme une perturbation de :

$$\partial_t V = \partial_{xx}^2 V + 2\partial_x V \partial_x Y^*.$$

Ici, la quantité d'intérêt est, non pas V , mais $\partial_x V$. Par dérivation, nous obtenons, comme structure additive la plus simple à considérer, l'équation :

$$\partial_t \Phi = \partial_{xx}^2 \Phi + \partial_{xx}^2 Y^*. \quad (20)$$

L'idée, dans [11], est de choisir $f = \Phi(t, \cdot)$ (que v soit, en fait, égal à $\partial_x u(t, \cdot)$ ou $\partial_x Y^{\ddot{Y}}(t, \cdot)$). Ceci suggère de chercher u comme une fonction de classe $(3/2)^-$, dont la dérivée soit contrôlée, à chaque instant $t > 0$, par $\Phi(t, \cdot)$. Un argument de contraction en temps petit donne :

Théorème 1. Pour $u(0, \cdot) \in \mathcal{C}^\beta$, $\beta > 0$, il existe un temps $T^* > 0$ tel que l'équation (16) admette, sur l'intervalle $[0, T^*]$, une unique solution de dérivée $\partial_x u(t, \cdot)$ contrôlée, à chaque instant $t > 0$, par $\Phi(t, \cdot)$.

En fait, la théorie des trajectoires rugueuses garantissant la continuité des intégrales croisées dès lors que les « briques de base » f , g et l'aire de Lévy associée à $\int f dg$ dans (18) évoluent continûment dans \mathcal{C}^α , \mathcal{C}^α et $\mathcal{C}^{2\alpha}$. À l'aide de ce résultat, il est possible de démontrer que les solutions u_ε de (15) convergent vers u :

Théorème 2. *Lorsque ε tend vers 0, la solution h^ε de (14) converge sur $[0, T^*]$ vers $h = h^* + u$, solution de l'équation de KPZ renormalisée*

$$\partial_t h(t, x) = \partial_{xx}^2 h(t, x) + |\partial_x h(t, x)|^2 + \zeta(t, x) - \infty.$$

Cette solution coïncide avec la solution de Hopf-Cole et peut être étendue à $[0, +\infty)$ tout entier par un argument inductif.

4. Structures de régularité

Bien que le développement de h sous la forme $h^* + u$, avec u solution de l'équation auxiliaire (16), donne une construction intrinsèque de la solution de (1), il ne permet pas de poser proprement l'équation (1) en toute rigueur, même en soustrayant le symbole ∞ comme dans l'énoncé du théorème 2. La théorie des structures de régularité, introduite par Martin Hairer dans [8], permet de contourner cet écueil en interprétant l'équation dans un espace abstrait, sur lequel l'équation peut être effectivement posée de façon rigoureuse.

4.1 – Principe général

L'idée fondamentale est d'associer à la solution de (1) une fonction à valeurs dans une structure abstraite, munie d'un certain nombre d'opérations formelles (multiplication, intégration, dérivation), et d'effectuer, sur cette structure, les opérations impliquées dans (1). Il s'agit, ensuite, de « ramener » les résultats de ces opérations dans l'espace physique. Schématiquement, la structure abstraite est construite à partir de « briques élémentaires », modélisant des fonctions ou des distributions de régularités différentes. Voir la solution de (1) comme une fonction à valeurs dans la structure revient à la développer, localement, sous la forme d'une combinaison des briques élémentaires sous-jacentes.

Résoudre (1) revient donc à mettre en évidence une structure, munie de briques élémentaires et d'opérations formelles, et d'une application de « reconstruction » permettant de rapatrier le produit des opérations dans l'espace physique. La structure

utilisée doit pouvoir être « déformée » continûment pour traduire la convergence de h_ε vers h dans le théorème 2.

4.2 – Lien avec les trajectoires rugueuses

La théorie des structures de régularité consiste en une extension, très large, de la théorie des trajectoires rugueuses de Lyons. Le point de départ de la théorie de Lyons consiste en effet en un couple de fonctions (f, g) pour lequel l'intégrale croisée de f contre g a un sens. Ceci suggère de considérer une structure munie de trois briques de base, en l'occurrence f , g et $\int f dg$, auxquelles il est raisonnable d'ajouter la fonction constante 1. Ici $\int f dg$ pourrait être entendu comme l'intégrale croisée de f contre g , mais, par abus de notation, nous allons en fait le comprendre comme « l'aire de Lévy de f contre g » introduite dans (18), c'est-à-dire :

$$\left(\int f dg\right)(x, y) = \int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z).$$

En réalité, nous sommes plus intéressés par la dérivée g' (comprise si besoin au sens des distributions) que par g elle-même. Ceci suggère de remplacer la brique g par g' . De même, il est préférable de se focaliser sur la dérivée (en y) de l'aire de Lévy plutôt que sur l'aire de Lévy elle-même. Pour distinguer les fonctions ou distributions des briques abstraites qui les modélisent, nous introduisons quatre objets abstraits, respectivement notés \mathfrak{f} , $\mathfrak{d}g$, $\mathfrak{d}\int \mathfrak{f} \mathfrak{d}g$ et $\mathbf{1}$, associés dans l'esprit à f , g' , $(\int f dg)'$ et $\mathbf{1}$. En supposant que f et g sont deux fonctions \mathcal{C}^α , avec $\alpha \in (1/3, 1/2]$, comme dans (18) et (19), nous attribuons à \mathfrak{f} , $\mathfrak{d}g$, $\mathfrak{d}\int \mathfrak{f} \mathfrak{d}g$ et $\mathbf{1}$, quatre indices (abstraites) de régularité (nous dirons « indices d'homogénéité ») : α , $\alpha - 1$, $2\alpha - 1$ et 0. Le $2\alpha - 1$ se comprend comme suit. D'après (18), l'intégrale (en y) de $(\int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z))'$ contre la fonction test $\lambda^{-1}\varphi((y-x)/\lambda)$, pour λ petit et φ régulière à support compact, est d'ordre $\lambda^{2\alpha-1}$. Ici, la fonction test est dite « piquée » au voisinage de x .

Les quatre briques de base abstraites engendrent un espace T , appelé « espace modèle », donné par (les indices $\alpha - 1$, $2\alpha - 1$, 0 et α étant rangés par ordre croissant)

$$T = T_{\alpha-1} \oplus T_{2\alpha-1} \oplus T_0 \oplus T_\alpha,$$

où $T_{\alpha-1}$ est l'espace vectoriel $\langle \mathfrak{d}g \rangle = \mathbb{R} \mathfrak{d}g$, $T_{2\alpha-1}$ est l'espace vectoriel $\langle \mathfrak{d}\int \mathfrak{f} \mathfrak{d}g \rangle = \mathbb{R} \mathfrak{d}\int \mathfrak{f} \mathfrak{d}g$ et ainsi de suite... de sorte que T est isomorphe à \mathbb{R}^4 .

De fait, une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow T$ peut être identifiée avec une fonction $(h_{\alpha-1}, h_{2\alpha-1}, h_0, h_\alpha)$ à valeurs dans \mathbb{R}^4 . Si $h_{\alpha-1}$ et $h_{2\alpha-1}$ sont identiquement nuls, h est à « indice d'homogénéité » positif. En un point $x \in \mathbb{R}$, les valeurs de $h_0(x)$ et $h_\alpha(x)$ sont alors à interpréter comme des coefficients, permettant d'approcher, au voisinage de x , une « certaine » fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à l'aide d'un développement impliquant les fonctions $\mathbf{1}$ et f . Lorsque $h_{\alpha-1}$ et $h_{2\alpha-1}$ prennent des valeurs non triviales, l'idée reste la même, mais, les indices d'homogénéité étant négatifs, h est une distribution.

Ce principe est à rapprocher de la définition 1 d'une fonction v contrôlée par f . Avec les notations de la définition, nous avons le développement

$$v(y) = v(x) + v'(x)(f(y) - f(x)) + R(x, y),$$

où v' est C^α et R est 2α -Hölder continue. En négligeant le reste, ceci suggère d'associer à v la fonction $\mathfrak{v} : \mathbb{R} \rightarrow T$, donnée par

$$\mathfrak{v}(x) = v(x)\mathbf{1} + v'(x)f, \quad (21)$$

cette décomposition montrant que f devrait, dans l'esprit, être davantage associée aux incréments de f qu'à f elle-même.

Voici maintenant la définition donnée dans [8] :

Définition 2. Une structure de régularité est un triplet (A, T, G) constitué d'un ensemble d'indices d'homogénéité A contenant 0, minoré et localement fini, d'un espace modèle T , de la forme $\bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$, chaque T_α étant un espace de Banach, avec $T_0 = \langle \mathbf{1} \rangle \cong \mathbb{R}$, et d'un groupe G d'opérateurs linéaires (continus) agissant sur T , de sorte que, pour tout $\Gamma \in G$, $\Gamma \mathbf{1} = \mathbf{1}$ et, pour tout $\alpha \in A$ et $\tau_\alpha \in T_\alpha$, $\Gamma \tau_\alpha - \tau_\alpha \in T_{<\alpha} := \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta$. Pour $\tau \in T$, $\|\tau\|_\alpha$ est la norme de la composante de τ dans T_α .

Nous verrons ci-dessous que les éléments de G sont pensés pour « passer » d'un développement au point x à un développement à un autre point y dans une écriture du même type que (21).

4.3 – Modèle associé aux trajectoires rugueuses

Pour rendre la notion pertinente, il est nécessaire de pouvoir revenir à l'espace physique en associant, à une combinaison d'éléments de T , une fonction ou une distribution (selon le signe des indices d'homogénéité). Dans le cas des trajectoires rugueuses, il convient d'associer, au développement

(21), le développement :

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto v(x) + v'(x)(f(y) - f(x)) \in \mathbb{R},$$

qui se lit comme une approximation au premier ordre de v au voisinage de x (x est ici gelé et y vit au voisinage de x). Aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous définissons une application Π_x qui à un élément de T associe une fonction ou une distribution. Nous posons $\Pi_x(\mathbf{1})$ comme étant la fonction constante $\mathbf{1}$, $\Pi_x(f)$ comme la fonction $f(\cdot) - f(x)$, $\Pi_x(dg)$ comme la distribution g' (indépendante de x) et $\Pi_x(d \int f dg)$ comme la distribution $(\int_x^{\cdot} [f(z) - f(x)] dg(z))'$. Par exemple, pour $y \in \mathbb{R}$, $\Pi_x(f)(y) = f(y) - f(x)$. Et, pour une fonction test φ , l'action de $\Pi_x(d \int f dg)$ sur φ est donnée par

$$\begin{aligned} & \left[\Pi_x(d \int f dg) \right](\varphi) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y) \left(\int_x^y (f(z) - f(x)) dg(z) \right) dy, \end{aligned}$$

l'aire de Lévy dans l'intégrale de droite étant donnée par hypothèse.

Nous cherchons maintenant une application linéaire $\Gamma_{x,y} : T \rightarrow T$ telle que $\Pi_y = \Pi_x \circ \Gamma_{x,y}$, de façon à obtenir le développement au voisinage de y en développant au voisinage de x une écriture « translatée » au sein de T . Comme $\Pi_x(\mathbf{1})$ et $\Pi_x(dg)$ sont indépendants de x , il est raisonnable de poser $\Gamma_{x,y}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et $\Gamma_{x,y}(dg) = dg$. Par ailleurs, nous posons $\Gamma_{x,y}(f) = [f(x) - f(y)]\mathbf{1} + f$, qui vérifie bien

$$\Pi_x(\Gamma_{x,y}(f))(z) = [f(x) - f(y)] + [f(z) - f(x)] = \Pi_y(f)(z),$$

et, de façon similaire, $\Gamma_{x,y}(d \int f dg) = [f(x) - f(y)] dg + d \int f dg$.

Les applications $\Gamma_{x,y}$ ainsi construites nous renseignent sur le choix de la structure de groupe G dans la définition 2. Nous pouvons par exemple choisir $G = \{\Gamma_\ell, \ell \in \mathbb{R}\}$, où

$$\Gamma_\ell(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad \Gamma_\ell(dg) = dg, \quad \Gamma_\ell(f) = \ell \mathbf{1} + f,$$

$$\Gamma_\ell(d \int f dg) = \ell dg + d \int f dg,$$

auquel cas $\Gamma_{x,y}$ n'est rien d'autre que $\Gamma_{f(x)-f(y)}$. Suivant [8], nous dirons :

Définition 3. Le couple $\mathbf{M} = ((\Pi_x)_{x \in \mathbb{R}}, (\Gamma_{x,y})_{x,y \in \mathbb{R}})$ est un modèle sur \mathbb{R} associé à la structure (A, T, G) .

4.4 – Le théorème de reconstruction

À chaque fonction $h : \mathbb{R} \ni x \mapsto h(x) \in T$, le modèle \mathbf{M} , introduit dans la définition 3, permet d'associer, en chaque point x de l'espace physique (en

l'occurrence \mathbb{R} dans l'exemple discuté ci-dessus), une approximation locale, notée $\Pi_x(\mathfrak{h}(x))$. Lorsque $\mathfrak{h}(x)$ a un indice d'homogénéité positif (c'est-à-dire le plus petit indice β , tel que la composante de $\mathfrak{h}(x)$ dans T_β soit non nulle, est positif), $\Pi_x(\mathfrak{h}(x))$ est à penser comme un développement local $\mathbb{R} \ni y \mapsto \Pi_x(\mathfrak{h}(x))(y) \in \mathbb{R}$ au voisinage de x . Lorsque $\mathfrak{h}(x)$ est à un indice d'homogénéité négatif, $\Pi_x(\mathfrak{h}(x))$ s'interprète comme une distribution. Le cas échéant, le caractère local du développement incite à considérer des fonctions tests « piquées » au voisinage de x , de la forme $y \mapsto \varphi(x - y)$ pour une fonction φ « concentrée » au voisinage de 0.

Une question naturelle est de savoir si la collection des développements locaux $(\Pi_x(\mathfrak{h}(x)))_{x \in \mathbb{R}}$, obtenus en faisant varier x , peut être relevée en une seule et même distribution (ou fonction selon l'homogénéité), dont le comportement local, au voisinage de x , serait justement donné par $\Pi_x(\mathfrak{h}(x))$. Un exemple de ce principe est la formule de Taylor. Les développements de Taylor d'une fonction régulière φ peuvent être relevés en une seule et même fonction, en l'espèce φ elle-même. Ce parallèle suggère de limiter l'analyse à des fonctions \mathfrak{h} régulières, avec la définition suivante :

Définition 4. Étant donné un modèle \mathbf{M} sur \mathbb{R}^d , associé à une structure (A, T, G) , et un réel γ , on désigne par \mathcal{D}_M^γ l'ensemble des fonctions $\mathfrak{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow T_{<\gamma}$ telles que, pour tout compact $\kappa \subset \mathbb{R}^d$ et pour tout $\alpha < \gamma$,

$$\exists C \geq 0 : \forall x, y \in \kappa, \left\| \mathfrak{h}(y) - \Gamma_{y,x}(\mathfrak{h}(x)) \right\|_\alpha \leq C|x - y|^{\gamma - \alpha}.$$

Considérons, à titre d'exemple, la fonction \mathfrak{v} dans (21). Pour $x, y \in \mathbb{R}$, nous savons que $\Gamma_{y,x}(\mathfrak{v}(x)) = [v(x) + v'(x)(f(y) - f(x))]1 + v'(x)f$. De fait, $\mathfrak{v}(y) - \Gamma_{y,x}(\mathfrak{v}(x)) = [v(y) - v(x) - v'(x)(f(y) - f(x))]1 + (v'(y) - v'(x))f$. La définition 1 garantit que le coefficient d'homogénéité 0 est d'ordre $|y - x|^{2\alpha}$ et celui d'homogénéité α d'ordre $|y - x|^\alpha$. De fait, \mathfrak{v} est dans $\mathcal{D}_M^{2\alpha}$. En cela, nous comprenons en quoi la théorie des structures de régularité englobe la notion de fonction contrôlée utilisée dans les trajectoires rugueuses.

Le théorème fondamental de [8], dont la preuve utilise la théorie des ondelettes, est appelé « théorème de reconstruction » et réalise le programme envisagé ci-dessus : pour une fonction \mathfrak{h} de régularité $\gamma > 0$ (ce qui n'empêche pas \mathfrak{h} d'être d'homogénéité négative), il est possible de relever les développements en une distribution (ou une fonction si l'homogénéité est positive) :

Théorème 3. Étant donné un modèle \mathbf{M} sur \mathbb{R}^d , associé à une structure (A, T, G) , et un réel $\gamma > 0$, il existe une unique application linéaire \mathcal{R} de \mathcal{D}_M^γ dans l'espace des distributions sur \mathbb{R}^d telle que, pour tout $\mathfrak{h} \in \mathcal{D}_M^\gamma$, toute fonction régulière à support compact φ , et tout compact $\kappa \subset \mathbb{R}^d$,

$$\exists C \geq 0 : \forall x \in \kappa, \lambda \in (0, 1], \left| (\mathcal{R}\mathfrak{h} - \Pi_x\mathfrak{h}(x)) \left(\lambda^{-d} \varphi((\cdot - x)/\lambda) \right) \right| \leq C\lambda^\gamma.$$

Naturellement, l'idée est que $\mathcal{R}\mathfrak{h}$ se comporte comme $\Pi_x\mathfrak{h}(x)$ le long des fonctions tests concentrées autour de x . En particulier, si $\Pi_x\mathfrak{h}(x)$ est une fonction continue, il vient nécessairement $\mathcal{R}\mathfrak{h}(x) = \Pi_x[\mathfrak{h}(x)](x)$. De fait, dans le cadre de (21), $\mathcal{R}\mathfrak{v}$ n'est rien d'autre que v elle-même !

Comme nous le verrons dans la section suivante, lorsque la fonction \mathfrak{h} dépend d'une variable temps-espace (t, x) , il est souhaitable de tenir compte d'éventuelles propriétés d'échelle entre les variables de temps et d'espace dans la façon de piquer la fonction test au voisinage de (t, x) . Par exemple, si le temps et l'espace sont liés par un changement d'échelle diffusif, il convient d'utiliser $\lambda^{-(d+2)}\varphi((\cdot - t)/\lambda^2, (\cdot - x)/\lambda)$ au lieu de $\lambda^{-(d+1)}\varphi((\cdot - t)/\lambda, (\cdot - x)/\lambda)$.

4.5 – Opérations au sein de la structure

L'étape suivante est de traduire, au sein de la structure, les « opérations » impliquées dans la formulation du problème physique. Dans le cas de KPZ, ces opérations sont la différentiation (pour passer de la solution à son gradient), la multiplication (associée à la non-linéarité quadratique) et l'intégration contre le noyau de la chaleur. La définition du produit est la suivante :

Définition 5. Étant donné deux « secteurs » V et \tilde{V} inclus dans T , c'est-à-dire deux sommes directes de certains des T_α , chacune étant stable par les éléments de G , un produit sur (V, \tilde{V}) est une application bilinéaire $\star : V \times \tilde{V} \rightarrow T$ telle que, pour $\tau \in V_\alpha$ et $\tilde{\tau} \in \tilde{V}_\beta$, $\tau \star \tilde{\tau} \in T_{\alpha+\beta}$ et, pour tout élément $\Gamma \in G$, $\Gamma(\tau \star \tilde{\tau}) = (\Gamma\tau) \star (\Gamma\tilde{\tau})$.

Le gain d'homogénéité par multiplication est à rapprocher de la discussion sur la régularité des différents produits dans le §2.3. La compatibilité du produit avec Γ est une hypothèse naturelle, qui traduit l'idée que l'ordre dans lequel les produits et les translations sont effectués n'a pas d'importance.

Il est remarquable que le produit soit ici défini de façon aussi abstraite. Là encore, ceci est à rap-

procher de la théorie de Lyons, dans laquelle l'existence d'une intégrale croisée, possédant un minimum de propriétés, est présupposée. Comme dans l'approche de Lyons, la véritable question est de déterminer les fonctions h_1 et h_2 à valeurs dans T pour lesquelles le produit $h_1 \star h_2$ peut être effectivement reconstruit en une distribution (ou une fonction) sur l'espace physique. La réponse est donnée dans [8] :

Théorème 4. *Étant donné un secteur $V \subset T$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, $\mathcal{D}_\alpha^\gamma(V)$ désigne les éléments h de \mathcal{D}^γ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \in V \cap \bigoplus_{\beta \geq \alpha} T_\beta$. Alors, pour $h_1 \in \mathcal{D}_{\alpha_1}^{\gamma_1}(V)$ et $h_2 \in \mathcal{D}_{\alpha_2}^{\gamma_2}(\bar{V})$, le produit $h_1 \star h_2 : \mathbb{R} \ni x \mapsto h_1(x) \star h_2(x)$ appartient à $\mathcal{D}_\alpha^\gamma(T)$, où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\gamma = \min(\gamma_1 + \alpha_2, \gamma_2 + \alpha_1)$.*

Combiné au théorème de reconstruction, le théorème ci-dessus assure que le produit $h_1 \star h_2$ peut être reconstruit si $\gamma_1 + \alpha_2 > 0$ et $\gamma_2 + \alpha_1 > 0$.

Pour retrouver la théorie de Lyons, il suffit maintenant de choisir $V = \langle 1, f \rangle$ et $\bar{V} = \langle dg \rangle$ et de poser $1 \star g = g$ et $f \star dg = d \int f dg$. Si cette définition ne présuppose pas l'existence de l'intégrale croisée, la définition du modèle associé (nécessaire pour la reconstruction) repose dessus. Pour une fonction v satisfaisant la définition 1, nous considérons la fonction $v(x) = v(x)1 + v'(x)f$. Définir l'intégrale croisée de v contre les incréments de g revient à reconstruire une distribution à partir de $v \star dg$. Il est clair que $\gamma_1 = 2\alpha$ et $\alpha_1 = 0$. Par ailleurs, $\alpha_2 = \alpha - 1$ et γ_2 peut être choisi aussi grand que souhaité (le coefficient de dg est constant donc régulier). De fait, le produit peut être reconstruit si $3\alpha - 1 > 0$, ce qui coïncide avec la théorie de Lyons.

5. Revisiter KPZ à l'aide des structures de régularité

5.1 – Formulation abstraite

L'idée est maintenant de chercher h dans (1) comme la solution, via le théorème de reconstruction, d'une équation fonctionnelle définie sur une structure (A, T, G) munie d'un modèle \mathbf{M} . Ceci nécessite, en plus de l'opération de multiplication discutée dans la section précédente, des opérations de dérivation et de convolution contre le noyau de la chaleur, l'objectif étant de mettre (1) sous la forme abstraite :

$$h = \mathcal{K}((\partial h)^2 + \Xi) + \mathcal{G}h_0. \quad (22)$$

Ici, h est une fonction temps-espace, à valeurs dans T , et h_0 est sa valeur au temps 0 ; \mathcal{G} désigne un opérateur, abstrait, d'« extension harmonique » (dont la reconstruction est à penser comme la solution de l'équation de la chaleur de condition initiale la reconstruite de h_0) ; et \mathcal{K} est un opérateur, abstrait, de convolution temps-espace contre le noyau de la chaleur (pour une fonction temps-espace f , la reconstruite de $\mathcal{K}f$ est à comprendre comme la solution de l'équation de la chaleur de terme source la reconstruite de f). Par ailleurs, le symbole ∂ renvoie à un opérateur, abstrait, de différentiation, et, enfin, Ξ désigne un élément de T modélisant une réalisation du bruit ζ dans (1).

5.2 – Éléments de la structure

Il s'agit maintenant de définir (A, T, G) . Nous demandons d'abord que T contienne Ξ , avec $(-3/2)^-$ pour indice d'homogénéité. En effet, pour une fonction test temps-espace φ , la formule (2) permet de quantifier la variance de $\int \int \varphi(t, x) \zeta(t, x) dt dx$. En supposant que le support de φ est compact et contient l'origine, il est possible de construire une autre fonction test, « piquée » au voisinage d'un point (t, x) arbitraire, en considérant $\varphi^\lambda(s, y) = \lambda^{-3} \varphi(\lambda^{-2}(t-s), \lambda^{-1}(x-y))$, pour λ petit. Le « scaling » entre les variables de temps et d'espace correspond ici au changement d'échelle diffusif classique. Le cas échéant, la variance associée dans (2), après substitution de φ par φ^λ , est d'ordre λ^{-3} , suggérant, après passage à la racine carrée, que l'indice d'homogénéité est effectivement $-3/2$, ou plutôt $(-3/2)^-$, c'est-à-dire $-3/2 - \eta$ pour $\eta > 0$ arbitrairement petit. L'exposant « $-$ » dans $(-3/2)^-$ tient au prix à payer pour passer de l'estimation de la variance à une estimation valable aléa par aléa, le symbole Ξ dans (22) étant associé à une réalisation du bruit blanc.

Reprenons maintenant la stratégie de la section 2. Partant de Ξ , nous considérons $\mathcal{K}(\Xi)$, associé, dans l'esprit, à la solution de l'équation de la chaleur stochastique Y^\bullet . Puis, en prenant sa dérivée et le carré, nous obtenons $(\partial \mathcal{K}(\Xi))^2$. Alors, $\mathcal{K}((\partial \mathcal{K}(\Xi))^2)$ « correspond » à Y^\vee . De fait, $\mathcal{K}(\Xi)$, $\partial \mathcal{K}(\Xi)$, $(\partial \mathcal{K}(\Xi))^2$ et $\mathcal{K}((\partial \mathcal{K}(\Xi))^2)$ sont également à ajouter à la structure. En partant du principe que \mathcal{K} conduit à un gain d'homogénéité de 2 et ∂ à une perte de 1, leurs indices d'homogénéité respectifs sont $(1/2)^-$, $(-1/2)^-$, $(-1)^-$ et 1^- . Avec ce procédé, Ξ et $(\partial \mathcal{K}(\Xi))^2$ sont certainement les termes dont les homogénéités sont les plus basses, en l'occurrence

$(-3/2)^-$ et $(-1)^-$. L'argument peut être itéré : appliquer \mathcal{K} , prendre ∂ , faire le produit avec les autres termes en $\partial\mathcal{K}$ et ajouter les symboles obtenus. Par exemple, les termes d'homogénéité $(-1/2)^-$ sont $\partial\mathcal{K}(\Xi)$ (associé à $\partial_x Y^*$) et $\partial\mathcal{K}[(\partial\mathcal{K}(\Xi))^2]\partial\mathcal{K}(\Xi)$ (associé à $\partial_x Y^V \partial_x Y^*$).

Dans [8], les éléments de T sont représentés sous forme d'arbres. Par exemple, $\partial\mathcal{K}(\Xi)$ est noté \uparrow : la branche représente $\partial\mathcal{K}$ et le disque terminal \bullet représente Ξ . De même, \uparrow désigne $\partial\mathcal{K}(\partial\mathcal{K}(\Xi))$ et est associé à la dérivée de la solution de la chaleur de terme source $\partial_x Y^*$. En rappelant (20) (sous réserve du choix de la condition initiale), cette dérivée est égale à Φ , de sorte que \uparrow est associé, dans l'esprit, à Φ . Une autre exemple est \uparrow . Ici, le branchement s'interprète comme un produit, de sorte que \uparrow est à associer au produit de $\partial_x Y^*$ par Φ . En reprenant la discussion du § 3.3, ce produit est en fait à comprendre comme la dérivée de l'aire de Lévy associée à l'intégrale croisée de $\Phi(t, \cdot)$ contre $Y^*(t, \cdot)$. De fait, le quadruplet $(\uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$ est à rapprocher des « briques de base » du chemin rugueux utilisé dans le théorème 1.

5.3 – Point fixe et renormalisation

La résolution de (22) repose sur un argument de point fixe fonctionnel, démontré en temps petit comme dans le théorème 1. L'espace fonctionnel sous-jacent dépend du choix du modèle \mathbf{M} associé à la structure (A, T, G) , de sorte que la solution dépend également de \mathbf{M} . Intuitivement, il s'agit de choisir $(\Pi_{(t,x)})_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$ tels que la solution h du point fixe vérifie $h(t, x) = \mathcal{R}h(t, x) = \Pi_{t,x}[h(t, x)](t, x)$, avec h solution donnée par le théorème 2 et \mathcal{R} l'opérateur de reconstruction. Pour définir $(\Pi_{t,x})_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}}$, il serait naturel d'identifier $\Pi_{t,x}(\Xi)$ à la distribution ζ , $\Pi_{t,x}(\uparrow)$ à la distribution $\partial_x Y^*$, $\Pi_{t,x}(\uparrow)$ à la distribution $\partial_x Y^V$, $\Pi_{t,x}(\uparrow)$ aux variations, à l'ordre $(1/2)^-$, de la fonction $\partial_x Y^{\check{V}}$ au voisinage de (t, x) , et ainsi de suite... Nous nous tiendrons à cette vision des choses, relativement simple, mais en réalité inexacte (en isolant la singularité dans le noyau de la chaleur, nous comprenons que $\partial_x Y^*$, $\partial_x Y^V$ et $\partial_x Y^{\check{V}}$ contiennent une partie très régulière, qu'il conviendrait d'associer à d'autres symboles, en l'occurrence polynomiaux). Sous cet angle, le développement (17) suggère que la « dérivée » ∂h du point fixe s'écrit, dans les composantes d'homogénéité inférieure à $1/2$, sous la forme $\uparrow + \uparrow + 2\uparrow + \partial u$, où u est à rapprocher de la solution de (16) (les derniers termes dans (17) contribuent à des homogénéités supérieures à $1/2$).

Dire que $\partial_x u$ dans (16) est contrôlé par Φ , c'est certainement dire que les composantes non nulles de ∂u d'homogénéité inférieure à $1/2$ sont \uparrow et \uparrow .

Pour compléter le parallèle avec le théorème 2, il reste à interpréter la renormalisation. De façon schématique, l'objectif est d'associer, à chaque valeur du paramètre ε impliqué dans la régularisation ζ_ε de ζ , un modèle \mathbf{M}^ε (associé à (A, T, G)) convergent vers \mathbf{M} lorsque ε tend 0, la convergence étant comprise comme la convergence (dans un sens ad hoc) des applications d'« évaluation » $(\Pi_{t,x}^\varepsilon)_{t,x}$ et des opérateurs de « translation » $(\Gamma^\varepsilon)_{(t,x),(s,y)}$ sous-jacents. Lorsque ζ_ε est une fonction régulière, donnée par exemple par convolution contre un noyau temps-espace de la forme $\varepsilon^{-3}\rho(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x)$, il existe un choix simple de \mathbf{M}^ε permettant de reconstruire la solution du point fixe (22) comme la solution de l'équation non normalisée (7). Nous n'en détaillons pas la construction, mais nous acceptons qu'il puisse être simple car les symboles ne modélisent, le cas échéant, que des fonctions régulières. Avec un tel choix, nous pouvons légitimement attendre que la reconstruite d'un produit soit le produit des reconstruites, par exemple $\Pi_{t,x}^\varepsilon(\mathcal{V})(t, x) = [\partial_x Y_\varepsilon^*(t, x)]^2$. Vu la nécessité de renormaliser dans la proposition 1, nous comprenons que, dans ce contexte, \mathbf{M}^ε ne peut pas converger vers \mathbf{M} . Clairement, renormaliser implique de déformer \mathbf{M}^ε . La proposition 1 suggère de changer \mathbf{M}^ε en $\hat{\mathbf{M}}^\varepsilon$ de sorte que $\hat{\Pi}_{t,x}^\varepsilon(\mathcal{V})(t, x) = [\partial_x Y_\varepsilon^*(t, x)]^2 - C_\varepsilon^{\mathcal{V}}$, pour une certaine constante $C_\varepsilon^{\mathcal{V}}$, auquel cas $\hat{\Pi}_{t,x}^\varepsilon(\mathcal{V})(t, x)$ se lit comme $\Pi_{t,x}^\varepsilon(\mathcal{V} - C_\varepsilon^{\mathcal{V}}\mathbf{1})(t, x)$. Renormaliser revient donc à appliquer, en amont, une transformation linéaire aux symboles de la structure et à utiliser, ensuite, le modèle simple. Dans le cas de KPZ, cette transformation envoie \mathcal{V} sur $\mathcal{V} - C_\varepsilon^{\mathcal{V}}\mathbf{1}$, $\mathcal{V}^{\check{V}}$ sur $\mathcal{V}^{\check{V}} - C_\varepsilon^{\mathcal{V}^{\check{V}}}\mathbf{1}$ et $\mathcal{V}^{\check{V}}$ sur $\mathcal{V}^{\check{V}} - C_\varepsilon^{\check{V}}\mathbf{1}$, pour des constantes $C_\varepsilon^{\mathcal{V}}$, $C_\varepsilon^{\mathcal{V}^{\check{V}}}$ et $C_\varepsilon^{\check{V}}$ dépendant de ρ , $C_\varepsilon^{\mathcal{V}}$ divergeant comme $1/\varepsilon$, et $C_\varepsilon^{\mathcal{V}^{\check{V}}}$ et $C_\varepsilon^{\check{V}}$ divergeant logarithmiquement. Le lecteur pourra comparer avec les propositions 1 et 2.

6. Conclusion

Cette note avait pour but de présenter une partie du cheminement suivi par Martin Hairer depuis son travail sur l'équation de KPZ et les trajectoires rugueuses jusqu'à la formulation de la théorie plus générale des structures de régularité. Dans un souci de simplification, un certain nombre d'éléments ont néanmoins été passés sous silence. À titre

d'exemple, nous n'avons pas abordé la partie technique de la renormalisation, à savoir les démonstrations des propositions 1 et 2, qui exploitent de façon essentielle le caractère gaussien du bruit blanc. De même, dans l'étude de l'équation de KPZ à l'aide de la théorie des structures de régularité, nous n'avons pas explicité la construction du groupe de translations, noté G dans la définition 2. Dans [8, Section 8], G est associé à un groupe de formes linéaires, agissant sur une algèbre de Hopf construite à partir de symboles $\tau \in T$ d'homogénéité positive. Enfin, il faut souligner que la décomposition (22) n'est pas celle utilisée par Martin Hairer. Comme il y a été fait allusion dans la section §5.3, il convient en réalité de dissocier, dans la convolution contre la solution fondamentale de la chaleur, la partie singulière, localisée en temps et en espace au voisinage de l'origine, de la partie régulière, assimilée à une convolution contre un noyau régulier. Ce découpage ajoute, *de facto*, des éléments polynomiaux à la structure T .

Il faut par ailleurs noter que les arguments de la section 5 ne fonctionnent pas en dimension $d \geq 2$: le cas échéant, Ξ a pour homogénéité $[-(d/2 + 1)]^-$ et, donc, \forall a pour homogénéité $(-d)^-$, de sorte que l'homogénéité ne croît pas sous l'action du noyau de la chaleur.

Dans [8], d'autres équations singulières sont traitées. Tel est le cas de l'équation Φ^4 en dimension 3, issue de la théorie quantique des champs :

$$\partial_t \phi(t, x) = \partial_{xx}^2 \phi(t, x) - \phi^3(t, x) + \zeta(t, x), \\ t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \quad (23)$$

où ζ est un bruit blanc temps-espace de dimen-

sion spatiale 3. Une simple répétition des calculs de la section §1.4, ou de façon équivalente des calculs d'homogénéité ci-dessus, montre, qu'en dimension $d \geq 2$, la solution de l'équation de la chaleur stochastique est une distribution. Lorsque $d = 3$, l'ordre de régularité est comparable à celui de la dérivée de la solution de la chaleur stochastique en dimension 1. En particulier, la définition de la non-linéarité cubique présente des difficultés comparables à celles rencontrées dans la résolution de KPZ. Le lecteur pourra aussi consulter le travail précurseur de DaPrato et Debussche [4] sur le cas intermédiaire $d = 2$.

Enfin, il est à souligner que Gubinelli, Imkeller et Petrowski ont, de façon à peu près parallèle, proposé une approche alternative pour résoudre KPZ et Φ^4 . L'idée consiste également à régulariser le bruit et à étudier la convergence des solutions des équations régularisées après correction par addition de contre-termes. En revanche, l'équation vérifiée à la limite n'est pas formulée dans un espace abstrait, mais est interprétée à l'aide de l'analyse de Fourier, utilisée pour étendre la théorie de Lyons, et plus particulièrement la notion de fonctions contrôlées, à des distributions. Nous renvoyons à [7] pour une comparaison avec le travail de Martin Hairer. Très récemment, Kupiainen, [13], a montré qu'il était possible de procéder autrement que par régularisation du bruit : dans son travail, la stratégie utilisée vise à expurger, à des échelles de plus en plus fines, le noyau de la chaleur de sa singularité et à envisager, *via* une nouvelle procédure de renormalisation — inspirée de l'approche « à la Wilson » de la renormalisation, [19] —, le passage à la limite.

Références

- [1] G. AMIR, I. CORWIN et J. QUASTEL. « Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in 1+1 dimensions ». *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011), p. 466–537.
- [2] L. BERTINI et G. GIACOMIN. « Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems ». *Comm. Math. Phys.* **183** (1997), p. 571–607.
- [3] A. BORODINE. *Integrable probability*. Rapp. tech. 2014. URL : <http://www.icm2014.org/vod/ICM-VOD-I0A.asp>.
- [4] G. DAPRATO et A. DEBUSSCHE. « Strong solutions to the stochastic quantization equations ». *Ann. Probab.* **31** (2003), p. 1900–1916.
- [5] P. FRIZ et N. VICTOIR. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths. Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [6] M. GUBINELLI. « Controlling rough paths ». *J. Funct. Anal.* **216** (2004), p. 86–140.
- [7] M. GUBINELLI, P. IMKELLER et N. PETROWSKI. *Paracontrolled distributions and singular PDEs*. 2014. arXiv : 1210.2684.
- [8] M. HAIRER. « A theory of regularity structures ». *Invent. Math.* **198** (2014), p. 269–504.
- [9] M. HAIRER. « Introduction to Regularity Structures ». *Braz. Jour. Prob. Stat.* To appear ().
- [10] M. HAIRER. *Singular stochastic PDEs*. Rapp. tech. 2014. URL : <http://www.icm2014.org/vod/ICM-VOD-I0A.asp>.

- [11] M. HAIRER. « Solving the KPZ equation ». *Ann. of Math.* **178** (2013), p. 559–664.
- [12] M. KARDAR, G. PARISI et Y.-C. ZHANG. « Dynamical scaling of growing interfaces ». *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), p. 889–892.
- [13] A. KUPIAINEN. *Renormalization group and stochastic PDE's*. 2014. arXiv : 1410.3094.
- [14] T. LYONS et Z. QIAN. *System control and rough paths*. Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [15] T. LYONS et al. *Differential equations driven by rough paths. Lectures from the 34th Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, 2004*. Lecture Notes in Mathematics, 1908. Springer, Berlin, 2007.
- [16] J. QUASTEL. *Introduction to KPZ*. Rapp. tech. 2012. URL : <http://www.math.toronto.edu/quastel/survey.pdf>.
- [17] S. SASAMOTO et H. SPOHN. « Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition ». *Nuclear Physics B* **834** (2010), p. 523–52.
- [18] S. SASAMOTO et H. SPOHN. « One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation: An Exact Solution and its Universality ». *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010), p. 230602.
- [19] K. WILSON. *The Renormalization Group and Critical Phenomena*. Rapp. tech. 1982. URL : <http://www.nobelprize.org/nobel%20prizes/physics/laureates/1982/wilson-lecture.pdf>.
- [20] L. YOUNG. « An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration ». *Acta Math.* **67** (1936), p. 251–282.



François DELARUE

Laboratoire Dieudonné, université Nice-Sophia Antipolis et UMR CNRS 7351, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France
delarue@unice.fr

François Delarue est professeur de mathématiques à l'université Nice Sophia-Antipolis et membre junior de l'Institut Universitaire de France. Ses travaux portent sur les processus stochastiques, l'interface entre probabilités et équations aux dérivées partielles, depuis la théorie jusqu'aux nombreuses applications.

L'auteur remercie Frédéric Patras, pour les nombreuses discussions qu'il a eues avec lui sur le sujet. Il remercie également le relecteur anonyme, qui a lu le texte avec un très grand soin, et dont les commentaires et suggestions ont été très utiles.

Entretien avec Artur AVILA

Propos recueillis à Séoul, pendant l'ICM,
 par Boris Adamczewski et Gaël Octavia.

Bonjour Artur Avila. Tu as eu un parcours mathématique fulgurant. As-tu eu une vocation particulièrement précoce pour les mathématiques ?

J'ai effectivement toujours été intéressé par les mathématiques. Déjà très jeune, j'avais cet intérêt. À l'école, je n'ai pas sauté de classe, mais je lisais des choses plus avancées. Une étape importante a été la découverte des olympiades de mathématiques quand j'avais treize ans. À partir de quinze ans, j'ai commencé à vraiment me focaliser sur les problèmes d'olympiades. J'étais très motivé et c'est là que j'ai réellement commencé à étudier et pris l'habitude de passer plusieurs heures sur ces problèmes. D'habitude, avec les problèmes de l'école,

je n'avais pas besoin de fournir de gros efforts. De façon encore plus importante, les olympiades m'ont fait prendre contact avec l'IMPA¹. À treize ans lors d'une cérémonie de remise de prix, j'ai appris l'existence de cet institut. J'ai aussi appris à ce moment-là que d'anciens participants aux olympiades internationales travaillaient à l'IMPA. Au Brésil, il faut savoir que les lauréats d'une médaille d'or aux olympiades internationales de mathématiques sont très reconnus. Encore plus à cette époque, car les mathématiques étaient moins développées. Il y avait en particulier deux lauréats liés à l'IMPA. L'un est toujours affilié à cette institution, c'est mon coauteur Carlos Gustavo Moreira, l'autre, Nicolau Corção Saldanha, faisait un post-doc. L'IMPA apparaissait donc

1. Institut de mathématiques pures et appliquées à Rio de Janeiro.

comme un endroit merveilleux où l'on rencontrait des gens de très haut niveau. J'ai donc cherché à rejoindre cet institut et j'ai appris que Gugu² avait fait son master là-bas en même temps que le lycée. Je me suis dit que je pourrais suivre cet exemple. Lors de la rentrée qui a suivi ma participation aux olympiades en 1995, on m'a proposé d'étudier là-bas. J'ai donc commencé à fréquenter ce lieu et lors de ma dernière année de lycée, je suivais des cours de master à l'IMPA. Ensuite, je n'ai plus fait que des mathématiques. Tout s'est alors enchaîné assez rapidement et très naturellement.

Les olympiades sont donc très populaires au Brésil ?

À l'époque, les olympiades n'étaient pas forcément très connues. Il fallait se trouver au bon endroit, là où un professeur était concerné par ce genre de manifestation. J'ai justement eu la chance qu'un professeur vienne dans ma classe faire une annonce quelques jours avant des olympiades nationales auxquelles j'ai donc pu participer, à l'âge de treize ans. Aujourd'hui, les olympiades sont bien plus connues. Pas nécessairement les olympiades principales, qui permettent de sélectionner les participants aux olympiades internationales, mais il existe au Brésil des olympiades réservées aux enfants de l'école publique. Celles-ci ont des objectifs un peu différents, elles sont moins sélectives, mais touchent des millions d'enfants brésiliens. Elles sont vraiment très populaires. Quand il m'arrive de regarder la télévision au Brésil, je tombe régulièrement sur des publicités concernant ces olympiades.

Est-ce que ton environnement familial t'a également poussé vers les sciences et les mathématiques ?

Non, absolument pas. Je ne viens pas du tout d'une famille de scientifiques. Mes parents n'ont pas eu de facilité pour étudier. Surtout mon père qui a commencé quand il était déjà adolescent. Il venait d'un milieu rural de l'Amazonie et ce n'était donc pas évident pour lui de rentrer à l'école. Il a fait ce qu'il pouvait et a fini, tout en travaillant, par accéder à l'université à un niveau assez basique. Mes parents n'avaient donc pas la formation pour m'aider sur le plan scientifique. Par contre, mon père, qui avait remarqué mon intérêt pour les mathématiques, m'aidait en achetant des livres d'un niveau plus avancé que ceux que j'étudiais à l'école.

As-tu des héros mathématiques ou au moins des influences particulièrement importantes ?

Évidemment, je pourrais citer tous les grands mathématiciens, mais je ne crois pas qu'il soit très utile d'en dresser la liste. Je dirais que ma rencontre avec Misha Lyubich a été très importante. Au début de mon doctorat, je n'avais aucune idée de la façon dont on faisait de la recherche en mathématiques, j'étais timide et j'avais peur de dire des bêtises. Une conférence était organisée à l'IMPA alors que mon directeur de thèse était absent, mais il a proposé à Lyubich, qui était invité, de venir discuter un peu avec moi. Nous nous sommes donc rencontrés et nous avons commencé à parler de mathématiques. J'étais impressionné car c'était une des figures du domaine que j'étudiais. Rapidement, j'ai été frappé par le fait qu'il échangeait ses idées très librement et sans peur de commettre des erreurs. Au départ, je le prenais évidemment pour un oracle, mais je me suis rendu compte que parfois il y avait des choses à corriger et que tout n'était pas forcément exact. Cela m'a montré comment faire des mathématiques et a changé complètement mon état d'esprit, me donnant davantage de confiance en moi. J'ai été marqué par son ouverture et sa gentillesse. Nous avons ainsi commencé à collaborer et cette rencontre a été très influente pour moi. Dans un style complètement différent, j'ai évidemment passé beaucoup de temps à Paris avec Jean-Christophe Yoccoz. Nous sommes très différents, mais avec le temps j'ai pu apprécier sa façon de travailler. Cela m'a finalement beaucoup influencé, même si j'ai conservé mon propre style. Il est extrêmement puissant sur certains aspects. Je fais par exemple beaucoup moins de calculs que lui et je travaille également moins avec le papier. Mais il m'a montré encore une autre façon de faire des mathématiques.

Pourrais-tu nous décrire un peu le thème de ta conférence et nous dire ce qui t'a poussé à choisir ce sujet en particulier ?

J'ai choisi de parler des opérateurs de Schrödinger. Comme je l'ai dit au début de ma conférence : c'est un sujet que je n'ai jamais réussi à expliquer durant une conférence et dont je parlerai pour la dernière fois (sourires). C'est un thème vraiment difficile à faire partager et cela m'a pris beaucoup de temps pour me l'approprier. J'ai pensé que je pouvais choisir un angle un peu différent en décrivant la façon dont j'ai appris ce sujet et comment j'ai

2. Carlos Gustavo Moreira.

ensuite évolué dans ce domaine. Mais c'est quand même difficile... J'ai choisi ce thème sans doute car c'est un travail que j'ai effectué sans coauteur et que peu de gens comprennent. Donc, pour une fois, je ne peux pas compter sur d'autres pour l'expliquer et c'est à moi de le faire. J'ai donc voulu profiter de cette opportunité.

Il s'agit d'un sujet provenant de l'analyse. On étudie un cas particulièrement simple de l'équation de Schrödinger. L'hypothèse la plus simplificatrice est le fait de se restreindre au cas unidimensionnel. Cette équation fondamentale en mécanique quantique décrit l'évolution d'une particule non relativiste. On étudie le cas de potentiels quasi-périodiques, qui se trouve correspondre à la bonne quantité de désordre pour que la situation devienne particulièrement intéressante. En dimension un, le cas d'un potentiel très désordonné a tendance à conduire uniquement à des phénomènes de localisation, tandis que le cas périodique correspond à du transport pur. C'est précisément dans le cas quasi-périodique que l'on s'attend à voir cohabiter ces deux phénomènes. On obtient ainsi une théorie riche avec deux phénomènes possibles et on peut s'intéresser aux transitions de phases de l'un à l'autre. Bon, ça c'est du côté de l'analyse. Maintenant, il se trouve que pour chaque opérateur, disons associé à une seule fréquence, on peut associer une famille à un paramètre de systèmes dynamiques. L'idée est que l'étude des bifurcations dans cette famille et le comportement individuel des dynamiques de cette famille vont donner beaucoup d'information sur la théorie spectrale de l'opérateur associé. J'ai donc beaucoup travaillé du côté dynamique. Il s'agit d'un côté de dynamiques du type KAM, c'est-à-dire pour lesquelles on observe la persistance des phénomènes quasi-périodiques, et de l'autre côté de dynamiques non uniformément hyperboliques. Les transitions de phase entre ces deux phénomènes sont en général extrêmement dures à analyser. Cela conduit à des problèmes célèbres que l'on ne sait absolument pas traiter. Par contre, dans le cas spécifique des cocycles (que l'on considère ici), il y a davantage de contraintes et on peut vraiment faire une analyse. Au début seuls les cas extrêmes étaient connus, correspondant à des petits ou des gros potentiels et il n'y avait pas d'approche pour attaquer le problème général. J'ai pu développer une telle approche et comprendre ces transitions de phase, à la fois du côté dynamique et du côté de la théorie spectrale.

Comment en es-tu venu à t'intéresser à ce thème des opérateurs de Schrödinger ?

C'est une partie importante de cette histoire dont j'ai parlé durant mon exposé. J'étais à Paris et je sortais de ma thèse, je travaillais beaucoup sur les ramifications de mes résultats de thèse en dynamique unidimensionnelle. J'ai pris conscience alors à Paris que les mathématiques étaient plus étendues et aussi que ce que je faisais n'intéressait pas nécessairement beaucoup de gens. Pour pouvoir interagir avec la communauté, je me suis dit qu'il était nécessaire d'élargir mes connaissances et de travailler sur ce qui intéresse les gens plutôt que d'essayer de les convaincre de travailler sur mon propre thème. C'est ainsi que j'ai participé à un groupe de travail, je crois en 2002, dont le but était de comprendre un article de Bourgain et Goldstein. J'ai été très intéressé par la composante analytique de cet article, notamment ces aspects techniques, qui était très différente de ce que je connaissais. Du côté dynamique, je percevais également certaines analogies avec des situations rencontrées durant mes travaux de thèse. Cela me permettait de poser des questions qui semblaient intéressantes et nouvelles. C'est comme cela que j'ai commencé à m'intéresser à ce sujet.

Tes recherches sur les billards et les échanges d'intervalles sont venues seulement ensuite ?

Oui, un peu après. C'est un peu étrange car c'est un sujet qui intéressait beaucoup Jean-Christophe Yoccoz à l'époque, mais dont on discutait peu. Je n'étais pas encore réellement capable d'apprécier ce thème lorsque j'étais au Collège de France. Il faut dire qu'on avait des styles de travail vraiment très différents. Il est du matin, moi de l'après-midi, et on se voyait finalement assez peu. Quand je suis entré au CNRS, j'ai commencé à fréquenter le laboratoire de probabilité et modèles aléatoires³ et Jean-Paul Thouvenot a commencé à me parler du problème du mélange faible pour les échanges d'intervalles. Il l'a fait de façon répétée au cours de plusieurs déjeuners et c'est ainsi que j'ai fini par m'y intéresser. J'ai trouvé un bon candidat coauteur. La situation était un peu ridicule. Je ne connaissais absolument rien au sujet et j'ai demandé à Giovanni Forni, mathématicien reconnu du domaine qui était de passage, s'il voulait travailler sur ce problème. Malgré mon inexpérience, il a accepté de travailler avec moi et cela a bien fonctionné. Nous avons résolu le problème du mélange faible et j'ai commencé à travailler dans

3. LPMA, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche.

ce domaine.

Lors de la cérémonie d'ouverture, Étienne Ghys a insisté sur la notion de renormalisation, très présente dans tes travaux. Pourrais-tu nous décrire brièvement l'importance de ce concept dans tes recherches ?

La renormalisation est un outil qui permet de regarder la dynamique à petite échelle. On s'intéresse à des dynamiques induites sur des sous-parties de l'espace de départ. Une telle dynamique est généralement très différente de celle de départ, mais dans certains cas exceptionnels elle est au contraire assez similaire. Dans ce cas, le système est renormalisable. On peut alors itérer le procédé et comprendre des échelles de plus en plus petites. C'est un peu comme un microscope de plus en plus puissant pour découvrir ce qui se passe à petite échelle. Quitte justement à renormaliser, on peut regarder ce processus comme une méta-dynamique associant à un système dynamique un nouveau système du même type. La renormalisation revient alors à itérer ce méta-système. On peut avoir l'impression d'avoir perdu au change car on a troqué un système de départ, disons unidimensionnel, pour un système généralement de dimension infinie. Le miracle est que dans plusieurs situations, c'est la façon la plus efficace pour étudier la dynamique de départ. La dynamique de renormalisation est en général chaotique, mais elle fait intervenir, si l'on peut parler ainsi, le type de chaos le plus ordonné et le plus simple à étudier. Il s'agit d'une dynamique uniformément hyperbolique. Voilà en gros pour la philosophie de la renormalisation. J'ai rencontré ce concept pour la première fois dans mes recherches sur la dynamique unidimensionnelle, puis dans mes premiers travaux sur les opérateurs de Schrödinger. Au début, ça a été une porte d'entrée mais la plupart de mes recherches dans ce domaine n'utilise pas cette idée. Dans le cas des échanges d'intervalles et des billards, la renormalisation joue un rôle fondamental, mais la dynamique de renormalisation est plus simple (linéaire et de dimension finie). C'est beaucoup plus simple, mais on va également bien plus loin, donc au final c'est tout aussi difficile. La renormalisation a donc joué un rôle important, que ce soit comme idée maitresse ou comme porte d'entrée, dans la plupart des thèmes que j'ai étudiés.

Ton sujet principal est celui des systèmes dynamiques, mais quels sont les autres thèmes qui t'intéressent ?

L'étude des systèmes dynamiques est un sujet qui peut être abordé de façon les plus diverses. Certains les considèrent d'un point de vue combinatoire, d'autres sont plus axés sur les probabilités ou encore sur l'analyse. C'est ce qui fait que la théorie est aussi riche. À titre personnel, je me sens au départ comme un analyste. Je pense que c'est là que se situent mes capacités principales, notamment au niveau technique. Cela concerne bien sûr également des thèmes connexes comme les probabilités. Je suis probablement devenu dynamique pour des raisons historiques, car j'ai fait mon doctorat à l'IMPA où cette spécialité est très présente. Mais si mes capacités d'analyses n'avaient pu se réaliser dans les systèmes dynamiques j'aurais fait autre chose.

Parmi ses lauréats de cette édition, on compte deux dynamiciens : Maryam Mirzakhani et toi. Quelles sont les différences entre vos approches ?

Ces travaux sont principalement concentrés sur un objet lié aux échanges d'intervalles : le flot de Teichmüller. C'est un flot de renormalisation en dimension finie, comme je l'expliquais précédemment. Cela intersecte donc mes travaux de ce côté-là, mais mes autres travaux sont assez disjoints des siens. Concernant le flot de Teichmüller, nos travaux sont en fait assez proches. Ils se citent mutuellement et se complètent parfois. Certains aspects de ses travaux sont plus géométriques, mais, si je regarde par exemple ces résultats récents très importants avec Eskin, je ne dirai pas qu'il s'agit d'une autre façon de faire de la dynamique.

Une particularité de tes recherches est la grande place accordée au travail en collaboration. Étienne Ghys, dans sa conférence, a montré un diaporama avec tes nombreux coauteurs. Peux-tu nous parler de ton goût pour la collaboration ?

Oui, enfin presque tous mes coauteurs. Il en manque en fait un : Thomas Roblin. Je crois qu'il est un peu misanthrope (sourire). J'aime bien travailler en collaboration pour plusieurs raisons. La première est que j'apprends beaucoup en discutant avec des collègues. Je lis très peu et j'ai l'impression de ne pas apprendre grand chose en écoutant des conférences. C'est donc en parlant directement avec des collègues que j'apprends le plus. En changeant de domaine, on se retrouve souvent totalement ignorant et on gagne beaucoup de temps en collaborant directement avec des spécialistes. Un autre avantage du travail en collaboration est que, pour parler avec d'autres mathématiciens, il faut

savoir expliquer ses propres idées et au final cela améliore sa compréhension. On progresse vraiment en essayant de formaliser ses idées. Psychologiquement, ça rend aussi les mathématiques un peu plus sociales. Donc on se sent plus à l'aise, moins isolé.

Tu étais conférencier plénier à l'ICM il y a quatre ans. On parlait déjà de toi pour la médaille Fields, mais tu ne l'as finalement pas reçue. Était-ce quand même une surprise pour toi d'être lauréat cette fois-ci ?

J'étais surpris quand j'ai appris la nouvelle. Pourquoi ? C'est vrai qu'on en parlait déjà il y a cinq ans, un an avant le congrès de 2010. À vrai dire, je m'attendais davantage, et ce pour plusieurs raisons, à pouvoir être lauréat en 2010 que cette fois. Après 2010, j'ai eu le sentiment qu'il y avait une tendance à attribuer cette récompense à ceux pour lesquels c'était la dernière chance de la recevoir, ce qui n'était pas mon cas encore cette année. Je voyais aussi une lauréate potentielle très forte en Maryam. Comme on peut considérer nos domaines comme proches et que j'avais encore une chance en 2018... C'est ce qui me faisait douter de mes chances. Mais apparemment le jury a estimé que mes contributions étaient déjà suffisamment variées et étoffées pour me récompenser.

Comment se sont passées ces quatre années entre les deux congrès ?

Comme je l'ai dit, en 2010 les gens parlaient déjà beaucoup. J'étais inquiet à l'idée de travailler, potentiellement jusqu'en 2018, avec la pression mise autour de cette éventuelle récompense. J'étais aussi très stressé par ma conférence plénière car je ne suis pas trop à l'aise dans ce genre d'exercice. Cela m'a beaucoup coûté à cette période. Ensuite j'ai décidé qu'il n'était pas possible de travailler sagement avec une telle pression. Certes, je savais que les gens allaient continuer à parler et que c'est quelque chose que je ne pouvais pas contrôler. J'ai décidé de travailler normalement en évitant la tentation de me lancer dans une campagne de promotion. Il y avait beaucoup de suggestions sur ce que je pouvais faire... En 2010, j'avais également du mal à dormir au moment de l'ICM et j'ai commencé à faire du sport pour me fatiguer un peu plus et mieux dormir. Du coup, j'ai fait aussi d'autres choses que des mathématiques, comme aller à la plage. Et j'ai continué à travailler sans me poser de questions. Je crois que cela m'a permis d'obtenir de très bons résultats, mais je ne me suis pas astreint par exemple à rédiger rapidement ces travaux en

vue de la médaille Fields. Certains de mes travaux les plus importants, achevés avec mes coauteurs depuis plusieurs années, n'ont pas été rédigés rapidement et ne sont même pas encore disponibles. J'attendais que mes résultats soient mûrs. Bref, je crois avoir travaillé le plus sainement possible depuis quatre ans, mais ce n'était pas toujours facile car les gens continuaient à parler et, même avec les meilleures intentions, cela finit par accroître la pression. J'ai donc parfois essayé de disparaître un peu de la circulation...

Le prochain ICM aura lieu à Rio. Qu'attends-tu de cet ICM ? Es-tu impliqué dans l'organisation ?

Je crois que j'y serai. (sourire) C'est une énorme opportunité pour le développement des mathématiques au Brésil. Il y a de bonnes chances qu'avec la récompense que j'ai obtenue, les mathématiques bénéficient d'une plus grande attention au Brésil. Ce sera utile pour la préparation de ce congrès. Déjà, cette médaille a le mérite de faire connaître au public l'existence du métier de chercheur en mathématiques et le fait que des jeunes peuvent faire carrière dans ce domaine. Le Brésil a beaucoup à gagner avec cet ICM et se doit de le réussir. De mon côté, je me sens vraiment peu doué pour les aspects concrets liés à l'organisation, contrairement à d'autres. J'imagine que je pourrais plutôt jouer un rôle un peu symbolique. Le simple fait d'être maintenant connu du grand public devrait pouvoir s'avérer utile.

On peut imaginer que tu vas te retrouver propulser ambassadeur des mathématiques brésiliennes, au moins durant cette période. Est-ce quelque chose que tu appréhendes ?

Oui, sans doute. Je crois que c'est un peu mon devoir de travailler cet aspect de la communication, notamment avec les médias au Brésil en rapport avec la préparation de l'ICM 2018. C'est une responsabilité que j'assume. Maintenant, c'est plutôt au Brésil que cela se passera et comme je travaille la moitié du temps en France, cela me permettra d'échapper un peu à ces sollicitations pendant certaines périodes si cela devient un peu trop lourd... J'assume cette responsabilité au niveau du grand public, mais par contre je crois que les mathématiques au Brésil, notamment à travers l'IMPA, sont déjà bien reconnues par la communauté internationale. Il y a beaucoup de chercheurs de grand niveau au Brésil et il n'y a donc pas vraiment besoin d'avoir un ambassadeur à ce niveau.

Tu es franco-brésilien, travaillant à la fois au Brésil et en France, pourquoi ce choix ?

J'ai effectivement choisi de travailler une moitié du temps au Brésil et l'autre en France. J'y vois d'abord un intérêt institutionnel. Cela renforce les liens profonds entre la France et le Brésil. C'est évidemment important pour le Brésil car les mathématiques françaises sont très développées, mais c'est aussi une chance pour la France que des jeunes mathématiciens brésiliens viennent passer du temps sur son territoire. C'est pour cette raison que le CNRS, au moment de ma promotion en tant que directeur de recherche, m'a proposé cette solution. Pour moi, c'est également un bon choix. Du côté mathématique, j'aime bien l'expérience parisienne, mais parfois c'est un peu étouffant car il y a vraiment beaucoup de choses qui se passent en même temps. De temps en temps, je ressens le besoin de partir pour prendre un peu de recul et travailler avec une seule personne à la fois. J'invite souvent des chercheurs à l'IMPA afin de collaborer sur des sujets spécifiques dans une ambiance plus calme qui permet davantage de concentration et évite la dispersion. J'ai aussi des collaborateurs brésiliens. Ce sont donc deux façons complémentaires de faire des mathématiques et cette alternance me convient bien. En tant que ville, Rio et Paris sont également deux expériences très différentes. Je crois que je ne serais pas encore capable de passer tout mon temps à Paris car à certains moments le rythme de la vie parisienne est un peu trop rapide pour moi.

Tu travailles au CNRS, est-ce que tu as quand même une expérience d'enseignement ?

Non, pas vraiment. Les seuls cours que j'ai donnés sont des cours d'assez haut niveau, comme le cours Peccot. J'ai souvent du mal à revenir aux définitions de base et à expliquer un sujet à partir de zéro. Juste pour donner un exemple, on ne peut pas toujours donner la meilleure preuve possible d'un résultat, celle qui donne la meilleure compréhension du phénomène, mais seulement celle qui est accessible avec les outils dont les étudiants disposent. Je ne me sens pas vraiment à l'aise à l'idée d'enseigner une preuve que je n'utiliserai jamais. Je ne me sens vraiment pas doué pour l'enseignement. Je préfère interagir avec les étudiants en parlant avec eux. Par exemple, j'ai des étudiants de doctorat au Brésil et en France. Je préfère donc ce type d'échange plutôt que l'enseignement traditionnel.

En conclusion, quelles sont tes activités en dehors des mathématiques ?

Je vais à la plage, je fais de la gymnastique et, je ne sais pas si cela compte réellement comme une activité à part entière (sourire), mais j'aime sortir avec des amis boire un verre. Je n'ai pas beaucoup d'activités culturelles plus conventionnelles comme aller au cinéma, au théâtre ou à l'opéra. Avant je passais plus de temps à cela, mais en ce moment je préfère des activités dans lesquelles on peut interagir davantage avec les autres.

Qui sont les conférenciers aux congrès internationaux des mathématiciens ?

Cet article reprend en partie, et complète, celui qui est paru dans [1].

• M. ANDLER

Le but de cet article est de présenter une étude, d'un point de vue sociologique, des invités aux Congrès internationaux des mathématiciens, en particulier à celui de 2014. Il ne s'agit donc pas ici d'analyser les tendances en mathématiques en 2014, mais surtout d'étudier la circulation internationale des mathématiciens, en établissant

d'où ces mathématiciens sont originaires, où ils ont fait leurs études (primaires/secondaires, licence/master, doctorat) et où ils travaillent. Autrement dit, le travail a consisté à calculer les matrices de transition : pays d'origine → pays d'études universitaires → pays d'obtention du doctorat → pays d'exercice.

En obtenant des données précises sur un panel représentatif de mathématiciens considérés comme excellents par leurs pairs (et non par des calculs de bibliométrie), nous espérons ainsi donner matière à réflexion sur l'impact de l'internationalisation du marché du travail académique dans notre discipline.

Il m'a semblé intéressant de compléter, pour la Gazette, par une deuxième partie investiguant la place de la France aux Congrès depuis 1950. Depuis le congrès de 1994, les mathématiciens, notamment à l'initiative de la SMF, ont mis en place des actions de communication autour des succès de l'école mathématique française tels qu'ils étaient mis en évidence par sa place dans les Congrès : médailles Fields évidemment, mais aussi nombre de conférenciers invités, ce qui donne une idée plus représentative de la vigueur de notre communauté ; mais si communiquer est indispensable, notre devoir est d'abord d'informer et d'analyser ; c'est ce qui a été fait dans les lettres d'informations publiées dans les semaines précédant les congrès de 2010 et 2014 (<http://smf.emath.fr/content/icm-2010> et <http://smf.emath.fr/content/icm-2014-seoul>), et c'est ce que le présent article essaie de compléter.

Comme on le verra, les conclusions ne sont pas surprenantes.

En ce qui concerne ICM2014, les mathématiciens travaillant aux États-Unis occupent la première place en nombre, mais une très grande majorité d'entre eux n'y sont pas nés, et n'y ont pas reçu leur éducation secondaire ; en majorité, ils sont arrivés au moment du doctorat, ou après. Ainsi, si les États-Unis sont un pays « producteur » de mathématiciens (au congrès de 2014, 26 conférenciers sur 206 y sont nés), ils sont surtout un pays « consommateur » (73 conférenciers 2014 y travaillent), mais ils sont aussi un pays « formateur » (85 conférenciers y ont fait leur doctorat, dont 26 ont depuis quitté les États-Unis). En revanche, les pays de l'ex URSS (cette classification reste pertinente pour les conférenciers de 2014, la majorité d'entre eux ayant été formés à l'époque soviétique) sont principalement « exportateurs » (27 conférenciers y sont nés, mais seulement 4 y travaillent). Sur l'échantillon 2014, la France apparaît comme un pays fortement producteur (à la première place, avec 30 conférenciers nés en France), modérément consommateur (7 conférenciers non nés en France y travaillent), et ni exportateur (27 des 30 conférenciers nés en France y travaillent) ni formateur

(sur les 31 conférenciers ayant fait leur doctorat en France, seulement 4 travaillent ailleurs qu'en France).

Depuis 1950, notre pays occupe une place importante aux Congrès internationaux ; l'étude des chiffres montre que cette place est croissante. Entre 1950 et 1986, le pourcentage de conférenciers « français » (cette dénomination abrégée désigne les mathématiciens se rattachant à l'école française : Français de naissance ou étant venus en France pendant leur scolarité primaire/secondaire, étrangers ayant étudié en France, étrangers travaillant en France) a oscillé autour de 8,5%. Depuis 1990, le pourcentage a nettement augmenté, avec respectivement 15,5%, 14,13% et 18,45% pour les trois dernières éditions. Les chiffres des congrès antérieurs à 2014 confirment largement le diagnostic fait au paragraphe précédent : la France forme la très grande majorité des mathématiciens qui y travaillent.

1. Enjeux de la circulation internationale

Les scientifiques sont dans leur immense majorité favorables au développement des échanges scientifiques internationaux : l'éthique de la recherche implique que le savoir doit circuler, et cette circulation est en retour favorable au développement du savoir. Mais le consensus s'arrête là, car les uns et les autres ont des visions très différentes de ce qui doit guider notre action en la matière, mettant au premier plan quatre principes partiellement incompatibles :

- la liberté individuelle : comme tout être humain, un chercheur doit pouvoir décider du lieu où il vit ;
- le développement de la science : notre don pour les mathématiques nous confère l'obligation morale de savoir (comme le disait Hilbert *wir müssen wissen, wir werden wissen* (nous devons savoir, nous saurons)) ;
- la compétition : si les meilleures universités sont en compétition pour attirer les meilleurs mathématiciens du monde entier, ceux-ci trouveront des conditions de travail leur permettant un plein épanouissement, et le mécanisme de la compétition obligera les autres universités à se mettre au niveau ;
- la fuite des cerveaux : le départ des plus qualifiés, et notamment des scientifiques, est pour les pays qui les ont engendrés, nourris et édu-

qués une perte irréparable, et ce à deux niveaux : perte de potentiel de développement, et perte nette de l'investissement qu'a représenté l'éducation de ces personnes. Les économistes évaluent à 223 000\$ le coût pour la société de l'éducation primaire + secondaire + bachelor aux États-Unis (source : tables B1.3a and B1.3b, Education at a Glance 2013, OCDE, Paris).

Mon propos n'est pas de départager ces quatre arguments, qui ont chacun une forte légitimité ; il est clair qu'une politique doit les prendre tous en compte.

2. Qui sont les conférenciers au Congrès de 2014 ?

Âge. Parmi les 206 conférenciers (dont 21 pléniers), il y a 27 femmes (13%) ; leur âge médian est 46 ans, mais 52 pour les conférenciers pléniers. L'âge moyen d'obtention du doctorat et la durée entre l'obtention du diplôme de licence ou de master et la soutenance du doctorat sont difficiles à calculer, et la signification du résultat problématique en raison de l'incertitude sur le point de départ (bachelor ou master) et celle sur le point d'arrivée (doctorat type PhD ou type habilitation) ; mais pour les 150 conférenciers pour lesquels j'ai des données fiables sur les dates, l'âge moyen du doctorat est 27 ans, la durée des études doctorales est en moyenne légèrement supérieure à 5 ans (la médiane étant inférieure à 5 ans). La précocité n'est pas une condition nécessaire d'une très grande reconnaissance internationale.

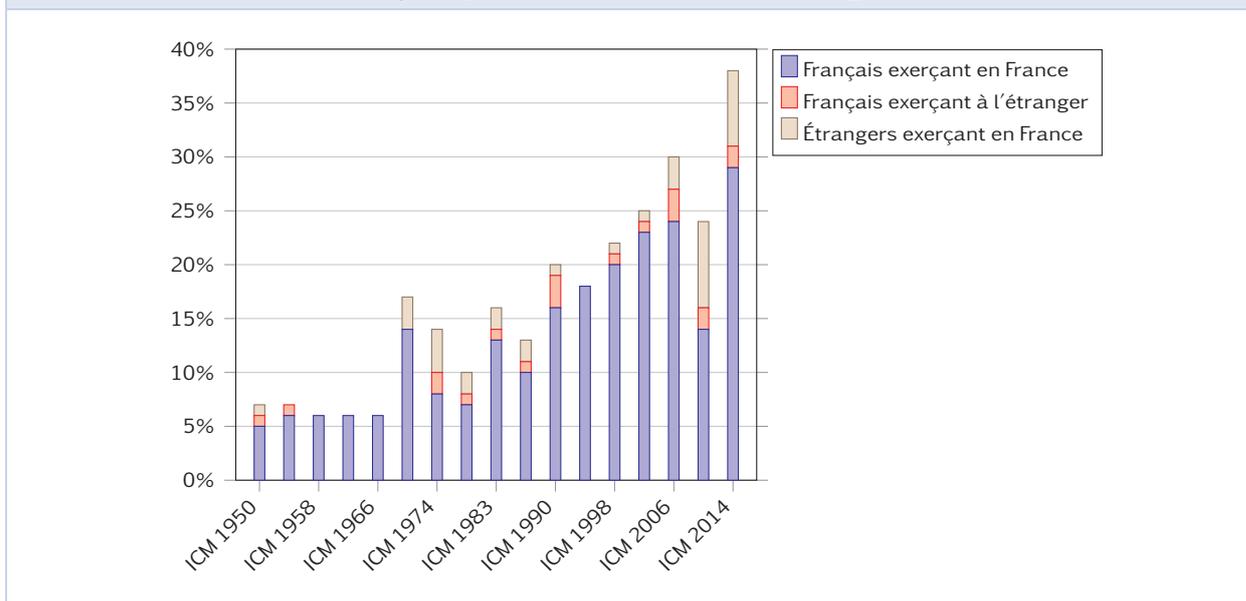
Géographie. Je me suis intéressé aux données suivantes : pays de naissance [N], pays de scolarité primaire/secondaire [S], pays d'études supérieures initiales (licence, bachelor, diplom, master... suivant les informations disponibles et l'organisation du pays) [E], pays d'obtention du doctorat [D], pays d'exercice professionnel au moment du congrès [T]. La mobilité entre N et S est quasi nulle, et la mobilité entre S et E assez faible. En revanche, les mouvements entre E et D sont très importants, et les mouvements entre D et T également très importants.

Je renvoie à l'article [1] pour les tableaux complets concernant cette partie, dont voici les enseignements principaux.

1. Les pays où sont nés les conférenciers sont, par ordre décroissant : France (30), Union soviétique (27), États-Unis (26), Royaume-Uni et Allemagne (12), Italie et Chine (9), Hongrie (8), Israël (7), Japon et Corée (6). L'Europe (non compris l'URSS) en a 95 en tout.
2. Les pays d'obtention du doctorat sont : États-Unis (84,5), France (30,5), URSS (17), Royaume-Uni (16,5), Allemagne (12), Italie (7,5), Israël et Japon (7), Suisse et Canada (4). L'Europe (non compris l'URSS) en a 81¹.
3. Les pays d'exercice sont : États-Unis (73), France (35), Royaume-Uni (19,5), Canada (10,5), Allemagne (8), Suisse (7), Italie (6,5), Japon et Corée (6), Israël (5), Singapour (4), Brésil (4), URSS (3,5), Argentine et Chine (2). L'Europe (hors URSS) en a 84,5 en tout.
4. La première mobilité significative se produit au niveau de la première partie des études supérieures, avec deux pays bénéficiaires : les États-Unis, qui ont accueilli 10 futurs conférenciers, et le Royaume-Uni, qui en a accueilli 4. Il serait très intéressant d'étudier l'évolution future de ces chiffres, au vu de la politique très active de recrutement menée par les grandes universités américaines et anglaises dans des compétitions comme les olympiades internationales des mathématiciens ou le concours "Intel Science Talent Search" (concours de projets scientifiques pour lycéens [<https://student.societyforscience.org/intel-sts>]).
5. Au niveau du doctorat, la mobilité est massive. Pour la mobilité entrante, le principal pays bénéficiaire est les États-Unis, qui ont accueilli 58,5 futurs conférenciers non étasuniens pour leur doctorat ; on trouve ensuite : Royaume-Uni (5,5), Canada (4), Israël (3), France (2,5). Pour la mobilité sortante, les principaux pays exportateurs sont : Union soviétique (10 sur 27), Chine (7/9), Corée (6/6), Hongrie (6/8), Canada (5/5), Israël (3/7), France (3/30), Allemagne (2/12).

1. La présence de fractions dans les chiffres s'explique par les co-tutelles de doctorats, les double-appartenances professionnelles, etc.

FIGURE 1 – Part de l'école française parmi les conférenciers aux Congrès entre 1950 et 2014



3. La France aux congrès internationaux

L'objectif de cette partie (qui ne figure pas dans [1]) est d'affiner les résultats précédents pour la France, en incorporant des données pour tous les congrès de l'après-guerre. Comme on l'a dit l'été dernier, au Congrès 2014, la France s'est classée, en chiffres absolus en première position dans la production de mathématiciens (cf. point 1 page 35) et très loin devant les États-Unis et l'ex URSS en proportion de la population totale (mais derrière Israël et la Hongrie).

3.1 – Place de la France²

La France occupe une place croissante dans les congrès internationaux. La figure 1 montre que la part des mathématiciens rattachés à la communauté mathématique française (Français exerçant en France ou à l'étranger), étrangers travaillant en France a crû de manière significative depuis l'an 2000.

Une des raisons de cette progression est que les mathématiciens français sont maintenant présents dans presque toutes les sous-disciplines des mathématiques, ce qui n'était pas le cas dans les périodes précédentes. C'est ce que montre la figure 2 page

ci-contre.

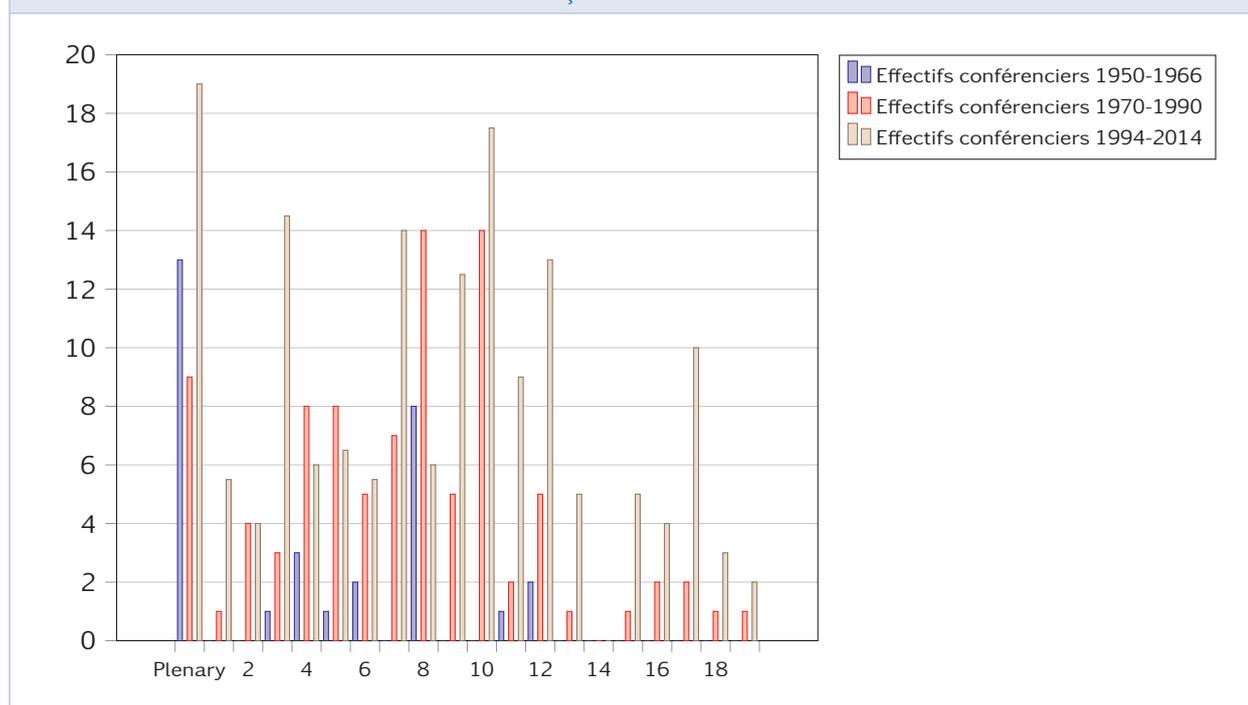
Les numéros en abscisse sont ceux des sections du Congrès international : Logic 1 ; Algebra 2 ; Number Theory 3 ; Algebraic and Complex Geometry 4 ; Geometry 5 ; Topology 6 ; Lie Groups 7 ; Real & Complex Analysis 8 ; Dynamical Systems and Ordinary Differential Equations 9 ; Partial differential equations 10 ; Mathematical Physics 11 ; Probability and Statistics 12 ; Combinatorics 13 ; Mathematical Aspects of Computer Science 14 ; Numerical Analysis and Scientific Computing 15 ; Control Theory and Optimization 16 ; Mathematics in Science and Technology 17 ; Mathematics Education and Popularization of Mathematics 18 ; History of Mathematics 19. (Les contours des sections ayant varié, on s'est efforcé d'aligner les appartenances sur les classifications actuelles.)

3.2 – La France dans les échanges

Il est frappant de voir que la France est relativement préservée des effets les plus brutaux de l'accroissement des échanges internationaux. Comme le montre la figure 1, la très grande majorité des mathématiciens travaillant en France ont fait leur scolarité et leurs études supérieures en France, et le départ vers d'autres pays reste très minoritaire. Néanmoins on peut se féliciter que la France soit aussi un pays attractif pour les mathématiciens

2. Voir ci-dessus la définition de « Français ».

FIGURE 2 – Effectifs des conférenciers « français » dans les différentes sections des ICM



étrangers, et ce nettement plus qu'avant.

3.3 – La France comme pays formateur

Les chiffres de 2014 le montrent, et ceux des congrès précédents le confirment : la France ne joue pas un rôle de formation doctorale pour des étudiants non français à la mesure de son potentiel scientifique. Le pays dominant, les États-Unis sont non seulement attracteurs, mais formateurs ; ainsi plus de la moitié des 58 non américains venus faire leur doctorat aux États-Unis en sont repartis, soit vers leur pays d'origine, soit vers d'autres horizons. Ceci leur permet d'exercer une influence internationale considérable par les liens que ces mathématiciens du monde entier ont établi lors de leur séjour aux États-Unis. Par contraste, on voit que la France joue un rôle très réduit : sur les six derniers congrès, d'après mes calculs, seulement trois mathématiciens étrangers ont fait leur doctorat en France puis sont repartis à l'étranger.

L'étude détaillée des conférenciers aux Congrès internationaux fournit des connaissances précieuses. Elle confirme la position enviable de la France dans les mathématiques mondiales, et met en évidence des déséquilibres préjudiciables pour l'avenir. Si l'on pense que les mathématiques sont

une condition indispensable pour le développement, il est nécessaire que les compétences mathématiques appropriées ne soient pas accaparées par un petit nombre de pays à qui cela permettra d'asseoir une domination sans partage. Mais il ne faut être ni myope, ni naïf. Comme le montrent de nombreux exemples, la fuite des cerveaux est parfois un point de passage nécessaire permettant à des cadres scientifiques de très haut niveau de se former en dehors de leur pays d'origine, ce qui ne les empêchera pas d'y jouer ultérieurement un rôle majeur dans la construction d'universités et de centres de recherche. Mais il serait naïf pour nous Français de ne pas vouloir prendre toute notre place, à côté des Américains et des Britanniques actuellement dominants, dans la formation des mathématiciens professionnels.

4. Appendice. Indications méthodologiques.

1. Les données que j'ai rassemblées pour les 206 conférenciers de 2014 sont les suivantes :
 - sexe
 - année et pays de naissance
 - pays où s'est déroulée l'éducation obligatoire (primaire-secondaire)

- pays et université d’obtention du premier diplôme universitaire (équivalent licence ou master); date d’obtention du diplôme
 - pays, institution, date, directeur de thèse de doctorat
 - principaux postes occupés.
2. Je me suis limité, pour les conférenciers de 2014, à ceux qui étaient conférenciers plénières ou dans les sections de recherche mathématiques, les critères pour l’histoire des mathématiques, l’enseignement ou la popularisation étant de nature différente. (Vu que je consacre une part très importante des mes activités professionnelles précisément à ces trois volets, il n’y a là de ma part aucun mépris).
3. Les données que j’ai recueillies sont (a) disponibles publiquement sur internet : pages Web et CV des conférenciers; (b) accessibles par Wikipédia, par le précieux « mathematics genealogy project » (<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>); (c) pour 60 des conférenciers pour lesquelles mes informations étaient trop lacunaires, je leur ai demandé de remplir un bref questionnaire, en leur garantissant que l’utilisation serait à des buts uniquement statistiques. J’ai obtenu 37 réponses. Des recherches supplémentaires m’ont permis d’obtenir des informations raisonnablement fiables pour tous sauf deux des conférenciers.

Références

- [1] M. ANDLER. « Who Are the Invited Speakers at ICM 2014? » *EMS Newsletter*, n° 92 (juin 2014). URL : <http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2014-06-92.pdf>.



Martin ANDLER

Université de Versailles-Saint Quentin Laboratoire de Mathématiques, bâtiment Fermat 45 avenue des États-Unis 78035 Versailles cedex
martin.andler@uvsq.fr

Martin Andler est professeur à l’université de Versailles-Saint Quentin et se définit à la fois comme mathématicien et historien des sciences. Il s’intéresse aussi bien à la recherche qu’à l’enseignement des mathématiques et est très impliqué dans la popularisation des sciences. Il est à la tête d’ANIMATH et vice-président d’EUROSCIENCE.

ICM 2018 à Rio de Janeiro

Semer l’Avenir

• M. VIANA

Le 11 août, à Gyeongju, Corée du Sud, l’assemblée générale de L’Union Mathématique Internationale a décidé, à l’unanimité, d’accorder au Brésil l’organisation du prochain Congrès International des Mathématiciens (ICM — *International Congress of Mathematicians*). L’ICM 2018 aura donc lieu à Rio de Janeiro, au mois d’août 2018. Pour la première fois dans son histoire plus que centenaire, le Congrès passe au-dessous de l’équateur !

Pour nous, les organisateurs, ceci est à la fois

un grand honneur et un grand défi. Nous habitons une région très jeune et très dynamique de la planète, où le Congrès International des Mathématiciens peut jouer un rôle majeur dans la popularisation de la connaissance mathématique et la pleine conscience de l’importance des mathématiques pour le développement socio-économique des nations. C’est pour cela que nous avons choisi *Semer l’Avenir* comme thème central de l’organisation de l’ICM 2018.

Les mathématiques sont très jeunes en Amérique Latine et, tout spécialement, au Brésil. S'il est vrai que des articles scientifiques ont été publiés par des mathématiciens brésiliens depuis le milieu du XIX^e siècle, il a fallu attendre encore une bonne centaine d'années pour que des institutions solides soient en place et que la recherche mathématique puisse démarrer en tant qu'activité professionnelle régulière.

Le premier Colloque national de mathématiques a eu lieu en 1957. Cet événement biennuel a depuis joué un rôle central dans la création de notre communauté mathématique et d'une littérature mathématique en portugais. Quelques années auparavant, en 1952, l'IMPA — *Instituto de Matemática Pura e Aplicada* — avait été créé par le gouvernement fédéral. Dès son début, il fut un centre majeur de rayonnement de l'activité mathématique dans le Brésil et, en fait, dans toute l'Amérique Latine.

À la même époque, en 1954, le Brésil rejoignit l'Union Mathématique Internationale, en tant que pays du Groupe I. Depuis 2005 il appartient au Groupe IV de l'Union, partageant l'honorable compagnie de pays dont la tradition mathématique est bien plus ancienne. La réalisation du Congrès International des Mathématiciens au Brésil dans 4 ans est, elle aussi, un important signe de reconnaissance du développement extraordinaire que la recherche mathématique a eu dans notre pays en l'espace d'une génération.

Le Congrès International *des Mathématiciens* (et pas des mathématiques!) fut conçu comme un lieu de rencontre entre mathématiciens de toute la planète. Pour ses créateurs, il s'agissait avant tout d'encourager et faciliter la coopération internationale dans notre domaine de recherche. S'il y a eu quelques faux pas — l'exclusion des mathématiciens des pays de l'Axe des ICM réalisés dans les

années 1920 étant sans doute le pire — il faut dire que le Congrès et l'Union Mathématique Internationale ont su très bien gérer les obstacles formidables que leur a posés le XX^e siècle, avec ses trois guerres mondiales (guerre froide incluse).

Bien sûr, de grands progrès ont été faits dans le domaine de la coopération internationale depuis la fin du XIX^e siècle. Le Congrès International des Mathématiciens y est, sans doute, pour beaucoup. Ceci étant, le Congrès n'en reste pas moins important et excitant de nos jours, comme il l'a toujours été : le grand succès de l'ICM 2014, qui a eu lieu à Séoul du 13 au 21 août 2014 avec plus de 5000 participants (www.icm2014.org), en est une preuve définitive.

D'autant plus que des défis majeurs, anciens et nouveaux, se posent toujours à la communauté internationale : dans un monde de plus en plus globalisé, comment faire pour que les mathématiques soient mieux connues, mieux comprises et plus appréciées par nos sociétés ? Comment s'attaquer aux problèmes graves qu'éprouve l'enseignement des mathématiques dans à peu près tous les pays ?

Les préparations pour le Congrès de Rio de Janeiro ont démarré depuis longtemps et elles se sont accélérées à partir de la fin du Congrès de Séoul. Le site officiel www.icm2018.org est désormais disponible et il est déjà possible d'y proposer des réunions satellites. D'autres informations y seront ajoutées au fur et à mesure.

Surtout, *nous invitons tous les collègues à s'inscrire pour recevoir les nouvelles électroniques sur le Congrès 2018* : il suffit d'aller sur www.icm2018.org, de cliquer sur « Newsletter » et de taper votre nom, adresse électronique et pays. Tout cela ne prend que quelques secondes et vous resterez informé(e) de toutes les nouveautés.

À bientôt à Rio de Janeiro !

ICM 2022 : la candidature française

Le Congrès international des mathématiciens (ICM) est traditionnellement précédé d'une assemblée générale de l'Union mathématique internationale (IMU) au cours de laquelle les date et lieu du prochain ICM sont annoncés officiellement. Ce fut le cas en août à Séoul et, comme chacun le sait désormais, le prochain ICM aura lieu du 7 au 15 août

2018 à Rio de Janeiro.

L'IMU avait aussi laissé la possibilité aux délégations qui le souhaitaient de faire des propositions préliminaires en ce qui concerne l'édition suivante, en 2022. La délégation française fut la seule à faire part officiellement de sa volonté d'organiser l'ICM 2022. Les raisons à l'origine de cette

proposition sont nombreuses : le rang de l'école mathématique française dans le monde, le fait que le dernier ICM organisé en France datera alors de plus de 50 ans (Nice 1970) et que la précédente édition européenne datera à ce moment-là d'une quinzaine d'année (Madrid 2006), la dimension européenne des sciences à Paris...

Pour une telle candidature, l'engagement concerne l'organisation de l'ICM mais aussi celle de l'assemblée générale de l'IMU qui le précède et qui a lieu dans une ville distincte (par exemple celle-ci aura lieu, en 2018, à São Paulo). Le cahier des charges pour chacune des deux manifestations est rédigé par l'IMU ; il est précis jusque dans les moindres détails. Les contraintes pour l'ICM proprement dit sont telles que seule Paris a les capacités logistiques et hôtelières en France d'accueillir le congrès.

Il s'agit d'accueillir environ 6000 personnes pour l'ICM et 250 pour l'AG de l'IMU ; les dates retenues sont du 9 au 17 août 2022 pour l'ICM, l'AG de l'IMU devant avoir lieu les 6 et 7 août dans un lieu à déterminer.

L'intervention de la délégation française avait été préparée à l'avance ; un certain nombre de points importants ont d'ores et déjà été prévus. Ainsi, la Fondation des sciences mathématiques de Paris (FSMP) a apporté et apportera son soutien tout au long de la candidature. Des propositions de sociétés d'ingénierie de candidature (et à terme,

d'organisation) ont été examinées et c'est la candidature du groupe MCI qui a été retenue. C'est sur l'appui des institutions suivantes que la candidature peut compter à ce jour :

- Présidence de la République française ;
- Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche ;
- Ville de Paris ;
- Région Île-de-France ;
- CNRS ;
- Inria ;
- Académie des Sciences ;
- les sociétés savantes mathématiques (SFdS, SMAI, SMF) ;
- IHÉS ;
- IHP ;

et l'on espère bien entendu que la liste ne s'arrêtera pas là !

Pour finir, le calendrier de préparation de la candidature se résume essentiellement en deux échéances :

- présentation du projet : envoi du document à l'IMU fin novembre 2016 ;
- printemps 2017 : visite d'inspection.

Pour le comité de préparation de la candidature pour l'ICM 2022 : S. Cordier, M.-J. Esteban, E. Guin-Lamourette, M. Ledoux, F. Loeser, A. Mézard, A. Philippe, F. Planchon, B. Rémy, D. Talay.



L'expérimentation numérique dans les sciences : une brève histoire

Cet article retrace brièvement quelques étapes marquantes de l'histoire de l'expérimentation numérique en mathématique et en physique. Les exemples que nous abordons montrent une évolution rapide du statut des ordinateurs : de simples « moulins à calculs » au départ, ils sont devenus de véritables instruments de recherche permettant des découvertes impossibles par d'autres moyens. Le choix des exemples reflète nos goûts et nos connaissances. Nous nous sommes efforcés de citer le nom des ordinateurs et des programmeurs dans chaque exemple.

- J.-R. CHAZOTTES
- M. MONTICELLI

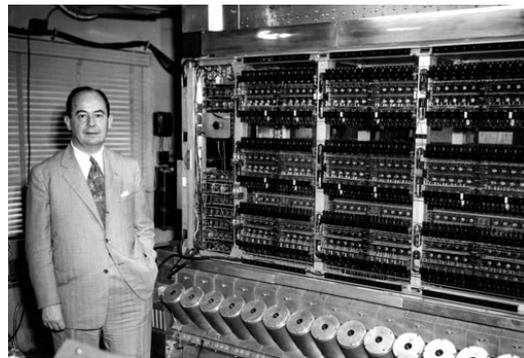
1. Introduction

L'émergence des ordinateurs, accélérée par la seconde Guerre mondiale, a donné une nouvelle dimension aux « mathématiques expérimentales », c'est-à-dire l'exploration des propriétés d'objets mathématiques par des calculs. Cette approche, qui a toujours existé, avait vu son importance diminuer progressivement à partir du XVII^e siècle en raison de la place grandissante de l'abstraction. Au-delà de l'extension stupéfiante du domaine des calculs possibles, de leur vitesse et de leur précision, les ordinateurs ont fourni un outil puissant : la visualisation, qui permet une exploration et la découverte de phénomènes qui passeraient inaperçus autrement.

Les sciences physiques ont tiré un bénéfice des ordinateurs encore plus grand et plus profond que les mathématiques. En effet, les ordinateurs permettent de faire des expériences numériques à partir des équations gouvernant les phénomènes que l'on désire étudier, alors que les expériences classiques peuvent être trop compliquées, trop coûteuses, voire impossibles à réaliser (comme en astrophysique, par exemple). Des expériences — dans le monde « réel » — ont même été suscitées par des expériences numériques. Le terme anglo-saxon pour qualifier cette approche est « simulation », qui

est également utilisé par les francophones, mais le mot « expérimentation » correspond beaucoup mieux à ce qu'est effectivement l'utilisation du numérique dans ces sciences.

FIGURE 1 – J. von Neumann et l'ENIAC (1952)



L'objet de cet article est d'illustrer comment l'expérimentation numérique, devenue interactive au fil du temps, a permis des découvertes impossibles sans elle, ainsi que le renouvellement, voire la renaissance, de certains domaines des mathématiques et de la physique. Au-delà de la recherche scientifique, les ordinateurs ont influencé la didactique des mathématiques et de la physique. Citons comme exemple les livres de Hubbard et West [11, 10] qui sont une introduction aux systèmes dyna-

miques.

Les grands inspirateurs de l'utilisation de l'expérimentation numérique sont Stanislas Ulam, John von Neumann et Alan Turing. Partant de ces figures incontournables, nous évoquerons plusieurs exemples, plus ou moins célèbres, qui illustrent cette démarche.

2. John von Neumann & Stanislas Ulam : les précurseurs

John von Neumann et Stanislas Ulam sont les premiers à avoir compris le potentiel des ordinateurs en mathématique et en physique. Voici ce qu'écrivait Ulam :

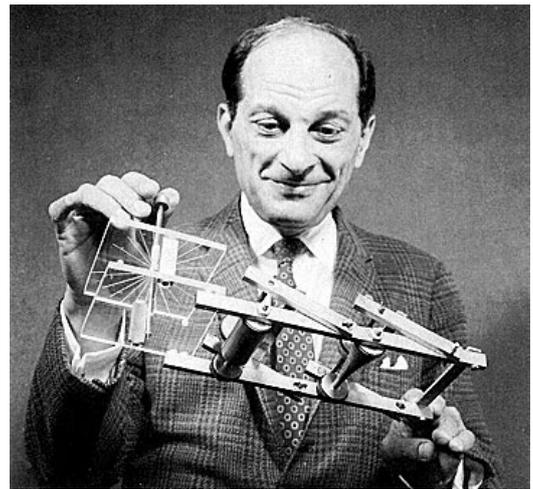
Presque immédiatement après la guerre, John von Neumann et moi-même avons commencé à discuter la possibilité d'utiliser les ordinateurs de façon heuristique, pour essayer d'obtenir quelques lumières sur des questions de mathématiques pures. En produisant des exemples et en observant les propriétés de certains objets mathématiques, on peut espérer obtenir des éléments de réponse quant au comportement des lois générales. Lors des années qui ont suivi j'ai suggéré, et dans certains cas résolu, une variété de problèmes de mathématiques pures en expérimentant ou même tout simplement en observant¹. [20]

Ulam propose d'utiliser les ordinateurs non pas comme un simple « moulin » à calculs mais comme un outil d'expérimentation permettant d'explorer les solutions des équations que l'on étudie. La vision d'Ulam a été influencée par la physique, plus précisément l'étude numérique de modèles simplifiés de diffusion des neutrons, en lien avec la bombe atomique. Notons que les premiers calculs pour une réaction en chaîne sont réalisés par Nicholas Metropolis en 1947, sur l'ENIAC.

Dans un texte écrit en 1947 intitulé « The Mathematician », von Neumann fait le bilan de ses travaux et se demande si les mathématiques sont une science empirique. Il tente de répondre à cette question par une confrontation avec les démarches de la physique théorique. Pour lui, il y a une base empirique aux mathématiques qui a été occultée par leur développement. Mais « quand des tendances

à devenir baroque se font jour, le signal de danger doit être émis » et le seul remède est, selon lui, la ré-injection d'idées plus ou moins directement empiriques.

FIGURE 2 – S. Ulam



Dans cet esprit, Ulam cherche à développer une pratique des expériences numériques, d'abord dans le domaine de la combinatoire et de la théorie des nombres. Avec ses collaborateurs, il s'intéresse ensuite à l'exploration du comportement d'itérations de transformations non linéaires qui sont le pendant en temps discret des équations différentielles. Ils utilisent un système connecté à l'ordinateur permettant la visualisation des itérations. C'est une nouvelle façon d'étudier les itérations non linéaires qui nous paraît aujourd'hui évidente. Ces analyses posent de nouveaux problèmes et ouvrent de nouvelles perspectives.

3. Enrico Fermi, John Pasta, Stanislas Ulam & Mary Tsingou

À Los Alamos, au début des années 1950, Enrico Fermi, John Pasta et Stanislas Ulam proposent un modèle pour comprendre l'évolution vers l'équilibre thermique dans un cristal. Leur modèle est suffisamment simple pour être étudié avec un ordinateur de l'époque.

Il s'agit d'une chaîne unidimensionnelle de masses identiques reliées entre elles par des ressorts. Quand on écarte une masse de sa position d'équilibre, elle subit une force de rappel qui n'est pas proportionnelle à la distance par rapport à la

1. Il sous-entend bien sûr « à l'ordinateur. »

position d'équilibre. Ce modèle est différent de celui étudié dans les cours de physique où il y a proportionnalité (on dit que la chaîne d'oscillateurs est « harmonique », ce qui rend le modèle « linéaire » et donc résoluble). Même la faible « anharmonicité » introduite par Fermi, Pasta et Ulam rend le modèle très compliqué et nécessite son exploration par une expérience numérique, sans doute la première du genre. Ils considèrent 16, 32 puis 64 masses et, à leur grande surprise, ils découvrent que le système, loin de tendre vers l'équipartition de l'énergie (synonyme de thermalisation), présente au contraire des solutions quasi-périodiques, en contradiction avec l'hypothèse ergodique qu'on pensait alors vérifiée dans ce cas.

En 1955, ils écrivent un rapport interne [6] dans lequel ils mentionnent que l'écriture de l'algorithme et la programmation du MANIAC I furent la tâche de Mary Tsingou [4].

Ces expériences ouvrirent la voie à toute une classe de problèmes nouveaux concernant les systèmes dynamiques non ergodiques et constituèrent le point de départ de ce qui est maintenant une discipline à part entière : la physique numérique, qu'on peut considérer comme une branche intermédiaire entre la physique théorique et la physique expérimentale.

4. La morphogenèse selon Alan Turing

Un des problèmes que s'était posé le biologiste D'Arcy Thompson est l'apparition de formes similaires pour des organismes non apparentés, donc non explicables par des facteurs purement génétiques. Turing postula qu'il devait y avoir un processus général à l'œuvre obéissant à des lois physico-chimiques. Il s'attela donc à la mise en place d'un modèle mathématique dont le but était de rendre compte de la « morphogenèse », c'est-à-dire, le passage d'un état d'équilibre initial symétrique, à un nouvel état d'équilibre non symétrique qui constitue une forme. Ce passage devrait résulter d'une « réaction-diffusion » dans la chimie des composants du système.

En 1952 Turing publie un article célèbre intitulé « The chemical basis of morphogenesis » [19] dans lequel il propose un tel modèle et discute notamment deux exemples :

- la constitution de taches qui font penser à

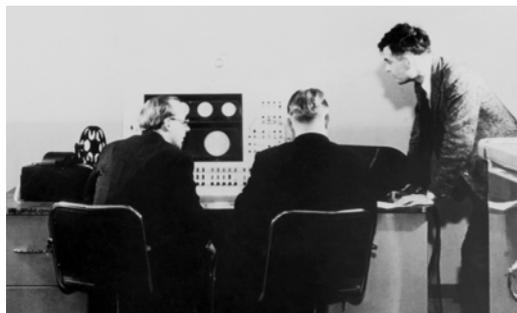
2. C.-à-d. la disposition des feuilles le long des tiges des plantes.

celle qu'on voit sur certains pelages d'animaux ;

- l'hydre d'eau douce qui développe de cinq à dix tentacules à partir d'une forme initiale tubulaire symétrique.

Dans son article, Turing fait la plupart de ses calculs à la main mais montre un exemple numérique réalisé avec l'ordinateur de Manchester (le MARK I).

FIGURE 3 – Turing (debout) et le MARK I



Du point de vue qui nous intéresse ici, Turing suggère que l'expérimentation numérique doit devenir un véritable instrument dans l'investigation de la nature. Il le confirme lui-même dans ses travaux ultérieurs consacrés à la botanique, plus précisément en phyllotaxie². Il faudra attendre 1990 pour obtenir des structures de Turing dans une véritable expérience de chimie [3].

5. Bryan Birch & Peter Swinnerton-Dyer & les points rationnels des courbes elliptiques

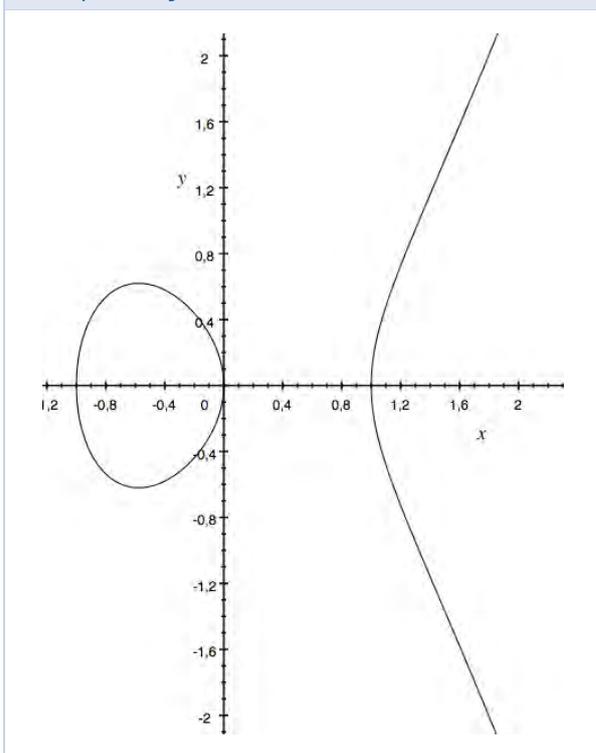
Cet exemple illustre l'apport de l'expérimentation numérique dans un domaine des mathématiques « pures » : la géométrie algébrique. Les mathématiciens ont toujours été fascinés par les équations algébriques dont on cherche des solutions qui sont des nombres entiers ou des nombres rationnels. C'est par exemple à Euclide qu'on attribue la première description de toutes les solutions de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ où (x, y, z) est un triplet d'entiers (non nuls). Géométriquement cela revient à chercher tous les triangles rectangles ayant des côtés de longueur entière, c'est pourquoi on parle de triplets pythagoriciens. On sait bien qu'il y a un nombre infini de telles solutions (telles que x, y, z

n'ont pas de facteur commun). En divisant cette équation par z^2 , cela revient à chercher les points de coordonnées rationnelles sur un cercle.

L'équation $x^2 + y^2 = z^2$ est un exemple d'équation diophantienne, c'est-à-dire d'une équation polynomiale à coefficients entiers dont on cherche les solutions entières ou rationnelles. Décrire les solutions des équations diophantiennes est en général hors d'atteinte. Un problème plus simple est de se demander s'il y a un nombre fini ou infini de solutions pour une équation donnée. On vient de voir un exemple avec un nombre infini de solutions. Un exemple où il n'y en a qu'un nombre fini (zéro en l'occurrence) est l'équation $x^2 + y^2 = -1$. On sait résoudre ce problème mais une classe d'équations résiste : celles des *courbes elliptiques*.

Une courbe elliptique est l'ensemble des solutions d'une équation de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$ où a et b sont des rationnels tels que $4a^3 + 27b^2 \neq 0^3$. L'exemple avec $a = -1$ et $b = 0$ donne la courbe de la figure 4.

FIGURE 4 – Courbe elliptique correspondant à l'équation $y^2 = x^3 - x$



On s'intéresse aux points de la courbe qui ont des coordonnées rationnelles. On parle de solutions rationnelles. Il est facile de vérifier que $(1, 0)$ est

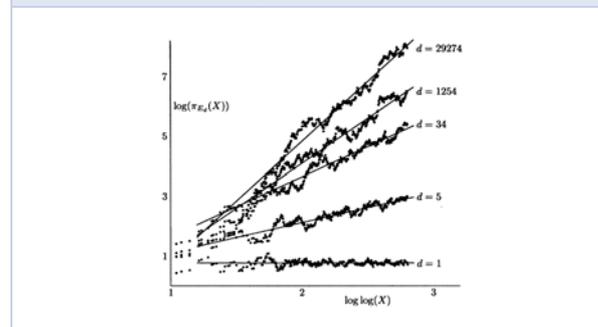
une solution rationnelle, contrairement à $(2, \sqrt{6})$. Fermat a montré que les seules solutions rationnelles sont $(-1, 0)$, $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Pour une courbe elliptique quelconque, a-t-on un nombre fini ou infini de solutions rationnelles ? Il s'avère qu'on ne sait toujours pas répondre à cette question en général, mais une conjecture a été proposée en 1965 par Bryan Birch et Peter Swinnerton-Dyer sur la base d'expériences numériques menées sur l'EDSAC (descendant de l'ENIAC, cité plus haut) au laboratoire d'informatique de l'université de Cambridge [2].

Au début des années 1960, Birch et Swinnerton-Dyer se sont mis à calculer le nombre N_p de points modulo p sur une courbe elliptique E de rang r connu, pour un grand nombre de nombres premiers p et pour de nombreuses courbes elliptiques. De leurs expériences numériques ils ont déduit que, vraisemblablement, on a

$$\pi_E(X) := \prod_{p \leq X} \frac{N_p}{p} \sim C(\ln X)^r, \quad X \rightarrow \infty,$$

où C est un constante ne dépendant que de la courbe. Le *rang* d'une courbe elliptique est le nombre minimal de points rationnels permettant de retrouver tous les points rationnels de la courbe. Le rang est nul si et seulement si la courbe a un nombre fini de solutions rationnelles⁴. Pour les courbes E_d de la forme $y^2 = x^3 - dx$, Birch et Swinnerton-Dyer firent les calculs pour cinq valeurs de d . Leurs résultats se trouvent dans la figure 5.

FIGURE 5 – D'après [2]. On a $r = 0$ pour $d = 1$, $r = 1$ pour $d = 5$, $r = 2$ pour $d = 34$, $r = 3$ pour $d = 1254$ et $r = 4$ pour 29274



L'étape suivante a été de reformuler ces observations sous une forme plus précise faisant intervenir une fonction $L_E(s)$ que nous ne décrivons pas. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer énonce que l'ordre d'annulation de $L_E(s)$ en $s = 1$ est exactement r . En particulier, le nombre de solutions ration-

3. Ceci exclut les points doubles et les points de rebroussement.
4. Cf. le théorème de Mordell-Weil.

nelles d'une courbe elliptique E est donc conjecturé comme infini si et seulement si $L_E(1) = 0$, ce qui fournirait un algorithme pour décider si oui ou non une courbe elliptique possède un nombre infini de solutions rationnelles.

6. Edward Lorenz : de la météo aux attracteurs étranges

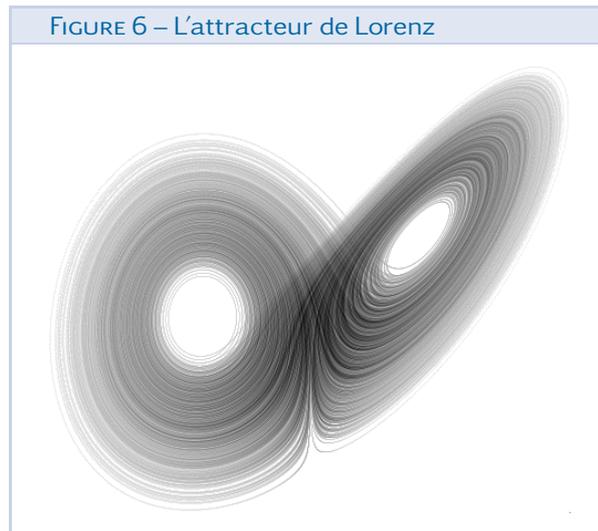
Au début des années 1960, Edward Lorenz étudie les phénomènes de convection dans l'atmosphère terrestre. Il travaille comme météorologue au Massachusetts Institute of Technology. Il obtient un modèle de seulement trois équations différentielles couplées après avoir drastiquement simplifié les équations fournies par la physique. Nous ne tenterons pas de décrire ici ce que représentent ces équations. Le point qui nous intéresse ici est que Lorenz résout numériquement les équations et découvre ce qu'on a appelé par la suite le « chaos déterministe ».

Le phénomène de base est la « sensibilité » aux conditions initiales, autrement dit, le fait que d'infimes différences dans les conditions initiales produisent des trajectoires complètement différentes au bout d'un temps assez bref. L'observation capitale et remarquablement fine de Lorenz, comptenu de l'ordinateur qu'il avait à sa disposition (un Royal McBee LGP-300), est que les trajectoires ont beau dépendre des conditions initiales, elles semblent néanmoins s'accumuler sur une sorte de surface compliquée qui est insensible aux conditions initiales. Lorenz fait une esquisse de cet objet qui semble de dimension deux et dont s'approche rapidement la trajectoire d'une condition initiale. Elle voyage ensuite sur cette « surface » composée de deux sortes de lobes, passant de l'un à l'autre d'une manière qui semble aléatoire. Lorenz fait d'autres observations remarquablement inspirées que nous ne décrivons pas ici.

Lorenz venait d'observer le premier « attracteur étrange » comme allait le qualifier le physicien-mathématicien David Ruelle. Il s'agit d'un objet extraordinairement compliqué résultant pourtant de seulement trois équations différentielles couplées en apparence innocentes.

Il convient de saluer l'extraordinaire intuition de Lorenz car on pouvait interpréter ces observations comme un artefact de l'ordinateur. Cette ques-

tion se poserait également aujourd'hui : rien ne dit que ce qu'on observe numériquement reflète correctement les équations sous-jacentes. Mais c'était pire à l'époque : les ordinateurs étaient volumineux, bruyants, lents, chauffaient énormément et, qui plus est, étaient beaucoup moins fiables qu'aujourd'hui.



Lorenz publia ses résultats en 1963 dans un journal de météorologie [13]. Pour la petite histoire, notons que son article fut confié par le journal à Ulam pour évaluation. Il fallut près de dix ans avant que les physiciens et les mathématiciens ne réalisassent l'importance de cet article. C'est en effet en 1972 que Lorenz présente l'« effet papillon » devant l'Association Américaine pour le progrès des Sciences avec une célèbre question [14] : « Le battement d'aile d'un papillon au Brésil peut-il déclencher une tornade au Texas ? »⁵. Mais, surtout, Lorenz exhibe sur son écran d'ordinateur l'image surprenante de son attracteur.

Il a fallu attendre 1998 pour que Warwick Tucker démontre mathématiquement dans sa thèse de doctorat l'existence de cet attracteur. Sa démonstration repose sur un intégrateur numérique donnant un contrôle rigoureux des erreurs d'approximation des trajectoires [18]. Terminons en citant un extrait d'un article de Lorenz où il fait référence à Ulam juste après ces lignes :

Nous voyons ainsi que l'ordinateur devrait jouer un rôle important, au-delà d'être un simple moulin à calculs. La machine ne peut pas prouver un théorème, mais elle peut suggérer une proposition

5. L'effet papillon devint célèbre auprès d'un large public. Il est encore souvent mal interprété. Il est amusant de rappeler que Lorenz ajoute que le battement d'aile d'un papillon peut très bien « empêcher » la tornade...

à prouver. La proposition peut ensuite être prouvée et établie comme un théorème par des moyens analytiques, mais l'existence même du théorème pourrait ne pas être suspectée sans l'aide d'une machine. [12]

7. Martin Kruskal & Norman Zabusky (re)découvrent numériquement les solitons

Au début des années 1960, les américains Martin Kruskal (physicien) et Norman Zabusky (mathématicien et physicien) reprennent le modèle de Fermi-Pasta-Ulam en changeant le terme non linéaire qui régit l'interaction entre les ressorts.

Avec leur programmeur, Gary Deem, ils procèdent à des expérimentations numériques qui les conduisent à l'observation d'un nouveau phénomène : des ondes « solitaires », qu'ils baptisent « solitons » [22]. Ces expériences numériques sont menées au Bell Telephone Laboratory, à Whippany, sur des machines IBM 709 et 7090.

La théorie des solitons permet de comprendre plusieurs phénomènes physiques où une déformation initiale localisée dans l'espace se propage à vitesse constante en ne se déformant quasiment pas sur de longues distances. En hydrodynamique, mentionnons les mascarets qui apparaissent à l'embouchure de certains fleuves sous l'effet de fortes marées, ou les raz-de-marée (tsunamis). En optique non linéaire, on utilise des solitons pour améliorer la propagation dans les fibres optiques. Les solitons sont des objets intrinsèquement non linéaires contrairement aux ondes classiques. En particulier, deux solitons peuvent se croiser sans interagir alors que des ondes classiques interfèrent entre elles.

Kruskal et Zabusky réalisent qu'une approximation continue de leur modèle à la Fermi-Pasta-Ulam n'est autre qu'une équation aux dérivées partielles qui avait été introduite par Diederik Korteweg et son étudiant Gustav de Vries en 1895. Leur but était d'expliquer les vagues bizarres observées cinquante ans plus tôt par l'ingénieur écossais John Scott Russell dans un canal. C'est donc indirectement le travail de Fermi-Pasta-Ulam, repris par Kruskal et Zabusky, qui a fait sortir de l'oubli l'équation de Korteweg-de Vries après quelque soixante-dix ans de sommeil ! Tout un pan de la physique et des mathématiques venait de naître.

FIGURE 7 – Reconstitution de l'onde solitaire de Russell en 1995, près d'Édimbourg (cf. <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>)



Dans l'approche de Kruskal et Zabusky, la visualisation joue un rôle crucial. Ceci nous paraît banal aujourd'hui mais ce n'était pas le cas à cette époque : ils ont non seulement dû inventer leurs propres outils de visualisation, mais aussi d'interaction avec le programme. Pour eux, il est clair que l'expérimentation numérique interactive dépasse le simple outil : modifier « en temps réel » des paramètres et visualiser presque aussitôt le résultat, puis éventuellement recommencer, développe une intuition et un rapport nouveaux avec les équations [21].

8. Michel Hénon : de l'astrophysique aux attracteurs étranges

Michel Hénon a placé au cœur de sa pratique scientifique les expériences numériques qu'il considérait comme ayant un statut comparable aux expériences de physique habituelles. Il s'intéresse à l'astrophysique qui est un domaine où l'expérimentation directe est impossible ! Le calcul numérique ouvre donc a priori la possibilité d'étudier des modèles, seule façon de faire des « expériences ».

Dans un premier temps, Hénon participe à la construction de calculateurs analogiques et en construit entièrement un pour son propre usage, ce qui lui donne un rapport presque physique au calcul. Avec l'avènement et la démocratisation des ordinateurs modernes (calculateurs digitaux), il utilisera l'IBM 750 de Meudon, l'IBM 7040 de l'observatoire de Nice ou encore la toute première calculatrice programmable de poche, la HP 65.

Dans les années 1960, Hénon s'intéresse à diffé-

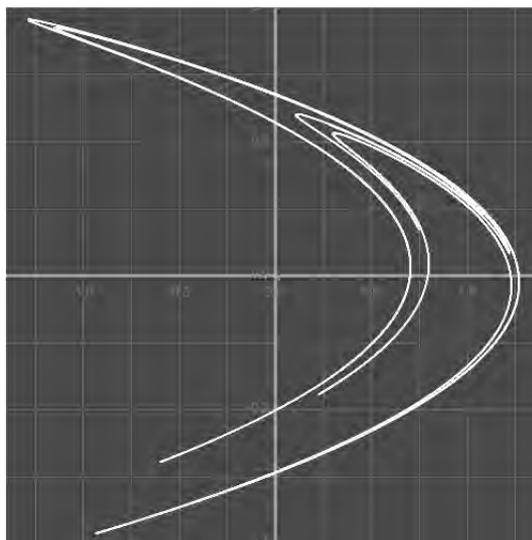
rents problèmes d'astrophysique. Durant son séjour à Princeton, en 1962, il projette d'étudier le problème d'une étoile dans une galaxie asymétrique. Il réalise plusieurs expériences numériques qui révèlent des « irrégularités ». Il confie à un étudiant, Carl Heiles, la tâche de refaire ses calculs, sur une autre machine, indépendamment, comme on ferait avec une expérience de physique dont on exige qu'elle soit reproductible. Ces résultats conduiront à l'article de Hénon et Heiles de 1964 qui révèle un mélange de comportements quasi-périodiques et « ergodiques », cf. [8].

L'astronomie étant une discipline très mathématisée, Hénon propose de se concentrer sur les propriétés mathématiques de modèles simples obtenus par des méthodes bien connues (datant de Poincaré et Birkhoff) qui conduisent à remplacer les équations différentielles par des itérations en utilisant des « sections transverses » habilement choisies. Même simples, ces modèles restent extrêmement difficiles à étudier analytiquement et Hénon propose donc de faire un usage systématique des expériences numériques. Un travail de longue haleine concerne la classification des trajectoires dans le problème restreint des trois corps. Il illustre magnifiquement comment mettre en pratique les idées de Poincaré et Birkhoff pour explorer le comportement des trajectoires.

Le travail pour lequel Hénon est sans doute le plus connu en dehors de l'astronomie est celui qui a conduit à l'attracteur étrange qui porte son nom [7]. En jouant sur les paramètres des équations de Lorenz et en utilisant une section de Poincaré, Yves Pomeau, qui réalise une série de calculs numériques avec J.-L. Ibanez, met en évidence le mécanisme de formation d'un « fer à cheval » de S. Smale. Pomeau expose ses travaux lors d'un séminaire donné à l'Observatoire de la Côte d'Azur auquel assiste Michel Hénon.

Ce dernier propose alors un modèle très simple de transformation quadratique du plan qui simule, lorsqu'un paramètre varie, le mécanisme de formation d'un « fer à cheval » : c'est le fameux modèle de Hénon. L'exploration numérique de ce modèle montre, pour certaines valeurs des paramètres, l'existence d'un « attracteur étrange ». Le fait que cet attracteur existe vraiment, c'est-à-dire qu'il n'est pas un artefact numérique, est resté un problème ouvert jusqu'en 1991. Ce sont les mathématiciens suédois Benedicks et Carleson qui, les premiers, ont démontré mathématiquement l'existence de tels objets [1].

FIGURE 8 – L'attracteur de Hénon

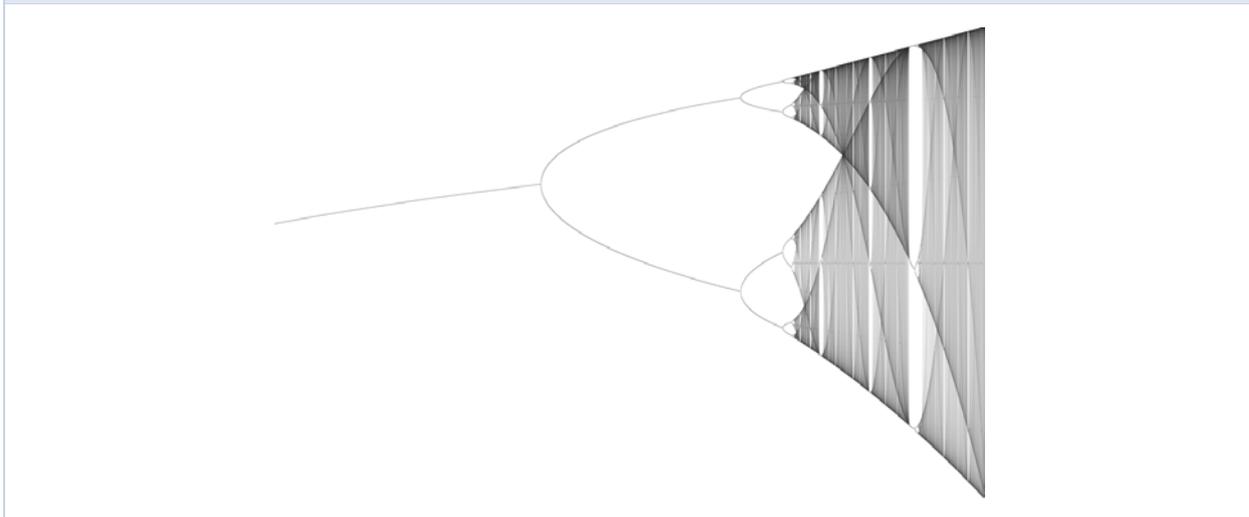


9. La cascade de doublements de période : Mitchell Feigenbaum, Pierre Coulet & Charles Tresser

En 1978, Pierre Coulet, jeune chercheur au CNRS à l'université de Nice et Charles Tresser, étudiant en 3^e cycle, s'intéressent au mécanisme de transition vers la turbulence et en particulier à sa modélisation par des systèmes dynamiques simples, comme l'itération d'une application de l'intervalle. Comme pour le modèle de Hénon, l'exploration numérique a joué un grand rôle dans leurs travaux. La nouveauté réside dans une approche « interactive » de l'expérimentation numérique : la visualisation du résultat obtenu en « temps réel » pour une valeur du paramètre permet de faire de nouveaux choix des valeurs des paramètres et de se forger ainsi une intuition du phénomène.

En même temps que Mitchell Feigenbaum [5], et indépendamment de lui, ils se sont inspirés d'idées du « groupe de renormalisation » en physique statistique pour analyser la transition vers le « chaos » pour les applications « unimodales » de l'intervalle (c'est-à-dire avec une seule « bosse »). Plus précisément ils montrent que la transition vers le chaos pour les applications unimodales se fait par une cascade de doublements de période qui possède des propriétés géométriques universelles [17]. Cette universalité se manifeste par le fait que les valeurs du paramètre pour lesquelles on assiste à un doublement de période des orbites périodiques s'accu-

FIGURE 9 – Diagramme de bifurcation de doublements de période de l'application $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ avec $f_r(x) = rx(1-x)$ et $r \in [2, 4]$



mulent avec une raison géométrique indépendante des détails du modèle d'applications que l'on étudie.

Au moyen d'un ordinateur HP 9825 et d'un « traceur xy », Couillet et Tresser ont pu visualiser les itérations de l'application logistique, changer de paramètre et visualiser immédiatement le résultat de ce changement. Le langage HPL, proche du Basic, permettait de modifier la valeur d'une variable au clavier, sans interrompre le programme. Notons que Feigenbaum a de son côté utilisé une HP 65.

On peut se demander s'il est possible d'observer une transition vers le chaos par une cascade de doublements de période dans une vraie expérience de physique. La réponse est positive : en 1979, Albert Libschaber mena une expérience de convection avec de l'hélium liquide. En augmentant peu à peu le paramètre de contrôle que constitue la différence de température entre le bas et le haut de la cellule de convection, il observa effectivement une transition vers le chaos suivant ce schéma.

10. Itérations de polynômes complexes : Benoît Mandelbrot & John Hubbard

Nous évoquons pour terminer la dynamique complexe, un domaine défriché par les mathématiciens français Pierre Fatou et Gaston Julia au début du xx^e siècle, mais qui doit son réveil, après environ une soixantaine d'années d'hibernation, à l'expéri-

mentation numérique. En effet, la visualisation des ensembles de Julia a été une révélation qui a permis aux mathématiciens de se poser les bonnes questions.

Dans la préface du livre *The Mandelbrot set, theme and variations* [9], le mathématicien John Hubbard explique comment l'enseignement en DEUG, en 1976-77, à l'université d'Orsay, l'a amené à faire des expériences numériques. En cherchant comment utiliser un ordinateur dans le cadre de son cours d'analyse, il choisit d'illustrer la méthode de Newton. Comme son domaine de recherche est l'analyse complexe, il l'applique à un polynôme complexe, par exemple $z^3 - 1$, pour visualiser les bassins d'attraction des racines. Il se fait aider par Michel Fiollet pour écrire des programmes sur une mini 6. Stimulé par le mathématicien Dennis Sullivan qui se trouve à l'IHÉS, il explore et visualise divers « ensembles de Julia » : étant donné deux nombres complexes z_0 et c , on définit la suite (z_n) par récurrence en posant $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Pour une valeur donnée de c , l'ensemble de Julia correspondant est la frontière de l'ensemble des valeurs initiales z_0 pour lesquelles la suite est bornée.

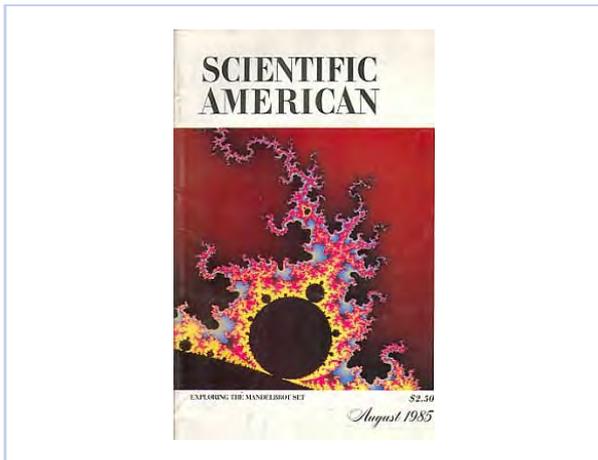
Il semble que Hubbard ait montré ses images durant une conférence à laquelle assistait Benoît Mandelbrot, en 1977, aux USA. Ce dernier lui dit avoir souvent pensé à ces ensembles sans jamais avoir cherché à en obtenir des images. Hubbard mentionne que l'arrivée de l'Apple II, en 1981-82, va énormément compter pour lui et va lui permettre d'obtenir facilement de bien meilleures images

qu'auparavant.

Alors que Mandelbrot travaille chez IBM et a accès aux meilleurs ordinateurs de l'époque, c'est lors d'un séjour à Harvard qu'il obtient pour la première fois, en mars 1980, au moyen d'un ordinateur VAX, une visualisation grossière de l'ensemble qui portera son nom. Un enseignant auxiliaire nommé Peter Moldave lui offre ses services de programmeur [16].

Cet ensemble est obtenu en traçant l'ensemble de toutes les valeurs de c pour lesquelles la suite définie ci-dessus est bornée, en démarrant à chaque fois de $z_0 = 0$. Mandelbrot publie un article sur ses résultats la même année [15].

L'étude approfondie de l'ensemble de Mandelbrot commence réellement en 1984 avec les travaux de Douady et Hubbard, qui établissent ses propriétés fondamentales et baptisent l'ensemble en l'honneur de Mandelbrot. Hubbard utilise beaucoup d'expériences numériques pour guider leur intuition. En 1985, les mathématiciens Heinz-Otto Peitgen et Peter Richter popularisent l'ensemble de Mandelbrot par des images de qualité et qui frappent les esprits.



11. En guise de conclusion

Cet article s'est focalisé sur l'usage des ordinateurs comme instruments d'exploration et de découverte. Les exemples que nous avons choisis illustrent le rôle indispensable qu'ils ont joué.

Nous n'avons pas abordé l'analyse numérique, c'est-à-dire, comment résoudre des problèmes mathématiques continus avec des algorithmes discrets.

Nous n'avons pas non plus abordé les démonstrations assistées par ordinateur (« computer-assisted proofs »). Le théorème des quatre couleurs est un exemple célèbre de telle démonstration (cela remonte à 1976). En 2013, Harald Helfgott a annoncé une démonstration de la conjecture faible de Goldbach⁶ dont une partie est assistée par ordinateur.

Un autre aspect que nous avons laissé de côté est celui des assistants de preuve permettant des démonstrations formelles. Citons le logiciel Coq utilisé par exemple pour démontrer en 2012 le théorème de Feit et Thompson⁷ de manière complètement « mécanisée ». On peut comprendre l'intérêt d'une telle démarche quand on apprend que la démonstration « classique » couvre plus de deux cents pages !

Références

- [1] M. BENEDICKS et L. CARLESON. « The dynamics of the Hénon map ». *Ann. of Math. (2)* **133**, n° 1 (1991), p. 73–169. doi : 10.2307/2944326.
- [2] B. J. BIRCH et H. P. F. SWINNERTON-DYER. « Notes on elliptic curves. I ». *J. Reine Angew. Math.* **212** (1963), p. 7–25.
- [3] V. CASTETS et al. « Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern ». *Physical Review Letters* **64**, n° 24 (1990), p. 2953.
- [4] T. DAUXOIS. « Fermi, Pasta, Ulam and a mysterious lady ». *Physics Today* **61**, n° 1 (2008), p. 55–57.

6. À savoir que tout entier impair plus grand que 5 s'écrit comme la somme de trois nombres premiers.

7. Qui énonce que tout groupe fini d'ordre impair est résoluble.

- [5] M. J. FEIGENBAUM. « Quantitative universality for a class of nonlinear transformations ». *J. Statist. Phys.* **19**, n° 1 (1978), p. 25–52.
- [6] E. FERMI, J. PASTA et S. M. ULAM. *Studies of Nonlinear Problems*. Rapp. tech. Los Alamos Scientific Laboratory, 1955.
- [7] M. HÉNON. « A two-dimensional mapping with a strange attractor ». *Comm. Math. Phys.* **50**, n° 1 (1976), p. 69–77.
- [8] M. HÉNON et C. HEILES. « The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments ». *Astronom. J.* **69** (1964), p. 73–79.
- [9] J. H. HUBBARD. « Preface ». In : *The Mandelbrot set, theme and variations*. Sous la dir. de T. LEI. London Math. Soc. Lecture Note 274. Cambridge University Press, 2000.
- [10] J. H. HUBBARD et B. H. WEST. *Differential equations: a dynamical systems approach. 2*. Texts in Applied Mathematics 18. Higher-dimensional systems. Springer-Verlag, New York, 1995, p. xiv+601. doi : 10.1007/978-1-4612-4192-8.
- [11] J. H. HUBBARD et B. H. WEST. *Differential equations: a dynamical systems approach. Part I. 1*. Texts in Applied Mathematics 5. Ordinary differential equations. Springer-Verlag, New York, 1991, p. xx+348. doi : 10.1007/978-1-4612-0937-9.
- [12] E. N. LORENZ. « The problem of deducing the climate from the governing equations ». *Tellus* **16**, n° 1 (1964), p. 1–11. doi : 10.1111/j.2153-3490.1964.tb00136.x.
- [13] E. N. LORENZ. « Deterministic nonperiodic flow ». *Journal of the atmospheric sciences* **20**, n° 2 (1963), p. 130–141.
- [14] E. N. LORENZ. *Predictability: does the flap of a butterfly's wing in Brazil set off a tornado in Texas?* Address at the 139th Annual Meeting of the American Association for the Advancement of Science, December 29, 1972. 1972.
- [15] B. MANDELBROT. « Fractal aspects of the iteration of $z \mapsto \lambda z(1-z)$ for complex λ and z ». *Ann. New York Acad. Sci.* **357**, n° 2 (1980), p. 249–259.
- [16] B. MANDELBROT. « Fractals and the Rebirth of Iteration Theory ». In : *The Beauty of Fractals*. Sous la dir. de H. O. PEITGEN et P. H. RICHTER. Springer, 1986, p. 151–160.
- [17] C. TRESSER et P. COULLET. « Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **287**, n° 7 (1978), A577–A580.
- [18] W. TUCKER. « The Lorenz attractor exists ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* **328**, n° 12 (1999). <http://www2.math.uu.se/~warwick/main/thesis.html>, p. 1197–1202.
- [19] A. M. TURING. « The chemical basis of morphogenesis ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* **237**, n° 641 (1952), p. 37–72.
- [20] S. M. ULAM. *The Adventures of a Mathematician*. 2^e éd. Berkeley : University of California Press, 1991.
- [21] N. J. ZABUSKY. « Fermi-Pasta-Ulam, solitons and the fabric of nonlinear and computational science: history, synergetics, and visiometrics ». *Chaos* **15**, n° 1 (2005), p. 015102, 16. ISSN : 1054-1500. doi : 10.1063/1.1861554.
- [22] N. J. ZABUSKY et M. D. KRUSKAL. « Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states ». *Phys. Rev. Lett* **15**, n° 6 (1965), p. 240–243.



Jean-René CHAZOTTES

Centre de Physique Théorique, UMR 7644 du CNRS, École polytechnique, Palaiseau, France
Jean-Rene.Chazottes@cph.t.polytechnique.fr

Jean-René Chazottes est directeur de recherche au CNRS au sein du Centre de Physique Théorique de l'École polytechnique. Ses domaines de recherche sont les systèmes dynamiques, la mécanique statistique et les processus aléatoires.



Marc MONTICELLI

Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné, UMR 7351 du CNRS, Université de Nice Sophia Antipolis
marc.monticelli@unice.fr

Marc Monticelli est ingénieur de recherche en calcul scientifique au CNRS au sein du laboratoire J.-A. Dieudonné, à Nice. Il est spécialiste d'outils d'expérimentation numérique interactive qu'il développe depuis une vingtaine d'années pour la recherche, l'enseignement et la culture scientifique.

Cet article est une adaptation d'un article originellement conçu pour tablette tactile, avec des expériences numériques interactives. Il en existe également une version conçue pour l'Internet qui contient des expériences numériques interactives (<http://experiences.math.cnrs.fr/L-experimentation-numerique-dans-50.html>). Nous remercions des relecteurs anonymes de la Gazette qui ont contribué à l'amélioration de ce texte.

La conjecture de Horn : quelques développements récents

• M. BRION

1. La conjecture de Horn

Considérons deux matrices hermitiennes A et B de même taille n . Que peut-on dire du spectre de leur somme $A+B$ en termes des spectres de A et B ? Ce problème remonte au début du xx^e siècle et un premier résultat est dû à Weyl en 1912 (voir [26]) : en notant $\lambda(X) = (\lambda_1(X) \geq \dots \geq \lambda_n(X))$ le spectre d'une matrice hermitienne X de taille n , on a les inégalités

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \quad (1)$$

pour tous les couples (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i, j \leq n$ et $i+j-1 \leq n$.

Voici une démonstration de ces *inégalités de Weyl*. Observons que

$$\lambda_n(X) \leq (v|Xv) \leq \lambda_1(X), \quad (2)$$

où $(|)$ désigne le produit scalaire hermitien standard sur \mathbb{C}^n , et $v \in \mathbb{C}^n$ vérifie $(v|v) = 1$. Choisissons une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n , où chaque e_i est vecteur propre de A de valeur propre $\lambda_i(A)$; introduisons de même des bases orthonormées (f_1, \dots, f_n) de vecteurs propres de B , et (g_1, \dots, g_n) de vecteurs propres de $A+B$. Considérons les sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n

$$E := \text{Vect}(e_j, \dots, e_n), F := \text{Vect}(f_j, \dots, f_n), \\ G := \text{Vect}(g_1, \dots, g_{i+j-1}).$$

Alors $\dim(E) + \dim(F) + \dim(G) = (n-i+1) + (n-j+1) + (i+j-1) = 2n+1$; on en déduit que l'intersection $E \cap F \cap G$ est non nulle. Soit donc $v \in E \cap F \cap G$ tel que $(v|v) = 1$. En appliquant successivement (2) à $X = (A+B)|_G, A|_E$ et $B|_F$, on obtient comme annoncé

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \leq (v|(A+B)v) = (v|Av) + (v|Bv) \\ \leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B).$$

D'autres inégalités ont été obtenues par plusieurs mathématiciens dans les années 1950; elles

sont toutes de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i(A) + \sum_{j \in J} \lambda_j(B) \leq \sum_{k \in K} \lambda_k(A+B) \quad (3)$$

pour des sous-ensembles I, J, K de $\{1, \dots, n\}$ ayant le même nombre d'éléments, noté r , et vérifiant

$$\sum_{i \in I} i + \sum_{j \in J} j = \sum_{k \in K} k + \frac{r(r+1)}{2}. \quad (4)$$

Le sens des inégalités (3) est opposé à celui des inégalités de Weyl, mais celles-ci peuvent se réécrire sous la forme (3) grâce à l'égalité des traces,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(B) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A+B). \quad (5)$$

En 1962, Horn a formulé une remarquable conjecture; elle affirme que les triplets de spectres de matrices hermitiennes $A, B, A+B$ de taille n sont les solutions d'un nombre fini d'inéquations linéaires homogènes, construites de façon récursive (voir [12]). Pour énoncer cette conjecture, introduisons quelques notations. Posons

$$\text{Horn}_n := \{(\lambda(A), \lambda(B), \lambda(A+B)) | A, B \\ \text{hermitiennes de taille } n\}.$$

Notons $\mathcal{P}(r, n)$ l'ensemble des parties à r éléments de $\{1, \dots, n\}$, où $r = 1, \dots, n-1$; on identifie chaque $I \in \mathcal{P}(r, n)$ à une suite strictement croissante $(i_1 < \dots < i_r)$ de $\{1, \dots, n\}$. Désignons par U_r^n l'ensemble formé des triplets (I, J, K) de $\mathcal{P}(r, n)$ qui vérifient l'équation (4); enfin, posons

$$T_r^n := \{(I, J, K) \in U_r^n \mid \sum_{f \in F} i_f + \sum_{g \in G} j_g \\ \leq \sum_{h \in H} k_h + \frac{s(s+1)}{2} \forall s < r, \forall (F, G, H) \in T_s^r\}.$$

Conjecture 1. *L'ensemble Horn_n est formé des solutions communes de l'équation (5) et des inéquations (3), où $(I, J, K) \in T_r^n$ pour $r = 1, \dots, n-1$.*

Lorsque $r = 1$, on obtient

$$T_1^n = U_1^n = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i, j, k \leq n \text{ et } i + j = k + 1\};$$

on retrouve ainsi les inégalités de Weyl. Celles-ci suffisent pour $n = 2$; en fait, Horn_2 est formé des triplets de spectres $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2)$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 &= \nu_1 + \nu_2, & \lambda_2 + \mu_2 &\leq \nu_2, \\ \lambda_1 + \mu_2 &\leq \nu_1, & \lambda_2 + \mu_1 &\leq \nu_1 \end{aligned}$$

(ce qu'on peut vérifier directement). De nouvelles inégalités apparaissent lorsque $n = 3$, par exemple

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \mu_3 \leq \nu_2 + \nu_3$$

puisque $\{(1, 2), (2, 3), (2, 3)\} \in T_2^3$.

La conjecture 1 affirme en particulier que Horn_n est un cône convexe polyédral, c'est-à-dire l'ensemble des solutions d'un système fini d'inéquations linéaires homogènes dans un espace vectoriel réel de dimension finie (ici $3n - 1$ compte tenu de l'équation (5)). Lorsqu'on fixe les spectres λ, μ de A, B , l'ensemble obtenu, qu'on notera $\text{Horn}_n(\lambda, \mu)$, est compact comme on le verra dans la seconde partie. Mais toute partie compacte d'un \mathbb{R}^N définie par un nombre fini d'inéquations linéaires est un polytope convexe, c'est-à-dire l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. On est ainsi amené à une version qualitative (affaiblie) de la conjecture 1 :

Conjecture 2. *L'ensemble $\text{Horn}_n(\lambda, \mu)$ est un polytope convexe.*

En fait, ces deux conjectures sont maintenant des théorèmes : la seconde se déduit d'un résultat général de convexité pour les projections des orbites coadjointes des groupes de Lie compacts connexes, obtenu par Heckman en 1982 (voir [10]). Quant à la première, elle a été résolue à la fin des années 1990 par la combinaison de travaux de Klyachko (voir [14]) et de Knutson et Tao (voir [16]) ; elle est à l'origine de multiples développements et généralisations.

On va présenter le résultat de Heckman dans la deuxième partie, puis son interprétation en termes de théorie des représentations dans la troisième partie. La quatrième partie est consacrée aux liens entre la conjecture de Horn et le calcul de Schubert (qui permet en gros de résoudre des problèmes de dénombrement portant sur les sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n) ; ces liens s'avèrent assez inattendus, et n'ont été mis en lumière que dans les années 1990. Dans la cinquième partie, on donne les grandes lignes d'un résultat dû à Belkale-Kumar et Ressayre, qui forme une vaste généralisation de la conjecture.

Dans cette brève présentation d'un sujet foisonnant, où le problème initial est de nature très élémentaire mais ses solutions sont loin de l'être, on s'est efforcé de garder des prérequis minimes : quelques notions de géométrie différentielle et de groupes de Lie, pour lesquelles une référence récente et accessible est [6]. Il a fallu ainsi faire l'impasse sur les méthodes de théorie géométrique des invariants, qui sont pourtant au cœur de développements importants. Ces méthodes figurent en bonne place dans plusieurs textes d'exposition plus avancés, tant récents ([19], [4]) que moins récents ([7], [15], [20]).

2. Projection d'orbites coadjointes

Dans cette partie, on va reformuler la définition de l'ensemble $\text{Horn}_n(\lambda, \mu)$ en termes de la géométrie du groupe unitaire, puis énoncer le théorème de Heckman qui entraîne la conjecture 2 grâce à cette reformulation. On esquissera ensuite une preuve de ce théorème par des méthodes de géométrie différentielle.

Notons H_n l'espace vectoriel réel formé des matrices hermitiennes de taille n . Étant données $X, Y \in H_n$ de même spectre, il existe une matrice unitaire U de taille n telle que $Y = UXU^{-1}$. Autrement dit, l'ensemble des matrices hermitiennes de spectre donné, $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$, forme une orbite du groupe unitaire U_n opérant par conjugaison dans H_n ; on note cette orbite \mathcal{O}_λ . Le groupe U_n est compact, donc \mathcal{O}_λ l'est aussi. Notons $D_n \subset H_n$ le sous-espace vectoriel formé des matrices diagonales (à coefficients réels), et $C_n \subset D_n$ le sous-ensemble formé des matrices de la forme $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ où $x_1 \geq \dots \geq x_n$. Alors C_n est un cône convexe polyédral, et on a par définition

$$\text{Horn}_n(\lambda, \mu) = (\mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\mu) \cap C_n \quad (6)$$

où $\mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\mu$ désigne bien sûr l'image de $\mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\mu$ par l'application somme,

$$s : H_n \times H_n \longrightarrow H_n, \quad (X, Y) \longmapsto X + Y.$$

Il en résulte aussitôt que $\text{Horn}_n(\lambda, \mu)$ est compact.

On va interpréter les différents ingrédients de (6) à l'aide de la structure du groupe unitaire U_n . C'est un groupe de Lie (réel) compact connexe dont l'algèbre de Lie, $\text{Lie}(U_n)$, est l'espace iH_n des matrices anti-hermitiennes ; l'action adjointe de U_n

dans $\text{Lie}(U_n)$ est la conjugaison¹. L'espace vectoriel réel iH_n s'identifie au dual de H_n grâce à la forme bilinéaire

$$B : iH_n \times H_n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \longmapsto \text{Tr}(iXY),$$

qui est non dégénérée car la forme quadratique $X \mapsto \text{Tr}(X^2)$ est définie positive sur H_n . De plus, B est invariante sous l'action de U_n définie par

$$U \cdot (X, Y) := (UXU^{-1}, UYU^{-1}).$$

On peut donc identifier la représentation de U_n dans H_n à la duale de la représentation adjointe, appelée *représentation coadjointe*.

Observons aussi que le sous-espace iD_n de iH_n est l'algèbre de Lie du sous-groupe $T_n \subset U_n$ formé des matrices diagonales. De plus, T_n est isomorphe au tore $U_1 \times \dots \times U_1$ (n facteurs), où U_1 est le cercle unité; puisque T_n est son propre centralisateur, on en déduit que c'est un *tore maximal* de U_n . On peut ainsi identifier D_n à la représentation coadjointe de T_n . Le normalisateur $N_{U_n}(T_n)$ est formé des matrices monomiales (ayant au plus un coefficient non nul par ligne et par colonne); c'est donc le produit semi-direct de T_n par le groupe symétrique S_n opérant dans T_n par permutation des coefficients diagonaux. En particulier, le *groupe de Weyl* de U_n (le quotient de $N_{U_n}(T_n)$ par T_n) s'identifie au groupe symétrique. Ce groupe opère aussi dans D_n par permutation des coefficients diagonaux, et toute orbite rencontre C_n en un point unique; par ailleurs, toute orbite de U_n rencontre D_n suivant une unique orbite de S_n . Ainsi, la *chambre de Weyl* C_n est un domaine fondamental pour l'action coadjointe de U_n .

Enfin, l'application $s : H_n \times H_n \rightarrow H_n$ s'identifie à la projection

$$p : \text{Lie}(U_n)^* \times \text{Lie}(U_n)^* \longrightarrow \text{Lie}(U_n)^*$$

transposée de l'inclusion diagonale $\text{Lie}(U_n) \rightarrow \text{Lie}(U_n) \times \text{Lie}(U_n)$, $X \mapsto (X, X)$.

La conjecture 2 est ainsi un cas particulier du

Théorème 1. Soient K un groupe de Lie compact connexe et $L \subset K$ un sous-groupe fermé connexe. Notons $\mathfrak{l}, \mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de L, K , et $p : \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathfrak{l}^*$ la projection, transposée de l'inclusion $\mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{k}$. Soient $T_L \subset L$ un tore maximal, \mathfrak{t}_L son algèbre de Lie, et $C_L \subset \mathfrak{t}_L^*$ une chambre de Weyl. Pour toute K -orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{k}^*$, l'intersection $p(\mathcal{O}) \cap C_L$ est un polytope convexe.

1. Un *groupe de Lie* G est une variété différentielle munie d'une structure de groupe telle que les opérations de multiplication et de passage à l'inverse soient différentiables. L'*algèbre de Lie* de G est l'espace tangent en l'élément neutre; l'action de G dans lui-même par conjugaison induit une action linéaire de G dans son algèbre de Lie, la *représentation adjointe*. On renvoie au chapitre IX de [6] pour plus de détails sur ces notions, et leurs illustrations sur les groupes classiques.

En effet, il suffit de prendre pour K le groupe $U_n \times U_n$ et pour L la diagonale.

Le théorème 1 est dû à Heckman (voir [10, Th. 7.5]) par des méthodes de théorie des représentations sur lesquelles on reviendra dans la troisième partie. C'est aussi une conséquence d'un résultat de géométrie différentielle, qu'on va présenter après quelques définitions.

Soit M une variété différentielle; on dit que M est *symplectique* si elle est munie d'une 2-forme différentielle alternée ω qui est fermée (c'est-à-dire $d\omega = 0$) et non dégénérée en tout point $p \in M$ (autrement dit, l'application $T_p(M) \rightarrow T_p(M)^*$, $x \mapsto (y \mapsto \omega_p(x, y))$ est un isomorphisme). Toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ définit alors un champ de vecteurs $H(f)$ sur M , tel que $H(f)_p$ est l'image de la différentielle $df_p \in T_p(M)$ par l'isomorphisme ci-dessus; on dit que $H(f)$ est le *hamiltonien* de f .

Soit de plus K un groupe de Lie compact connexe opérant dans M et laissant ω invariante. On dit que cette opération est *hamiltonienne* s'il existe une application $\mu \in C^\infty(M, \mathfrak{k}^*)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\mu(k \cdot p) = \text{Ad}(k)^* \mu(p)$ pour tous $k \in K$ et $p \in M$, où $\text{Ad}^* : K \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{k}^*)$ désigne la représentation coadjointe;
- (ii) pour tout $X \in \mathfrak{k}$, le champ de vecteurs induit X_M est le hamiltonien de la fonction $M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \mu(p)(X)$.

La propriété (i) signifie que μ est équivariante pour l'action de K ; quant à (ii), elle se réécrit sous la forme $d\mu_p(x)(X) = \omega_p(x, X_p)$ pour tous $x \in T_p(M)$ et $X \in \mathfrak{k}$.

On appelle μ l'*application moment* associée à l'action de K dans M (une telle application est unique à translation près par un élément K -invariant de \mathfrak{k}^*).

Exemple 1. Avec les notations du théorème 1, toute K -orbite coadjointe \mathcal{O} a une structure naturelle de variété symplectique compacte connexe, pour laquelle l'action de K est hamiltonienne. En effet, choisissons $\lambda \in \mathcal{O}$, de sorte que \mathcal{O} s'identifie à l'espace homogène K/K^λ , où K^λ désigne le stabilisateur de λ ; c'est un sous-groupe fermé connexe de K . On a donc $T_\lambda(\mathcal{O}) \cong \mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\lambda$, où $\mathfrak{k}^\lambda := \text{Lie}(K^\lambda)$; de plus, \mathfrak{k}^λ est formé des $X \in \mathfrak{k}$ tels que $\text{ad}(X)^*(\lambda) = 0$, ce qui

équivalent à $\lambda([X, Y]) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{k}$. L'application $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto \lambda([X, Y])$ est une forme bilinéaire alternée de noyau \mathfrak{k}^λ ; elle passe donc au quotient en une forme symplectique ω_λ sur $\mathfrak{k}/\mathfrak{k}^\lambda$. On vérifie que ω_λ est invariante par K^λ ; elle définit donc une 2-forme différentielle K -invariante ω sur \mathcal{O} . De plus, ω est fermée (cela résulte de l'identité de Jacobi); c'est donc une forme symplectique sur \mathcal{O} , dite de Kostant-Kirillov-Souriau. On a par définition $\omega_\lambda(X_\lambda, Y_\lambda) = \text{ad}(X)^*(\lambda)(Y)$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{k}$ vus comme champs de vecteurs sur \mathcal{O} . En utilisant l'invariance de ω , on en déduit que l'inclusion $\mathcal{O} \subset \mathfrak{k}^*$ est l'application moment.

Exemple 2. Considérons une K -variété hamiltonienne M et un sous-groupe fermé connexe $L \subset K$. L'action induite de L dans M est alors hamiltonienne, d'application moment $p \circ \mu : M \rightarrow \mathfrak{l}^*$ avec les notations du théorème 1. En particulier, la projection $p : \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{l}^*$ est l'application moment pour l'action de L dans une K -orbite coadjointe \mathcal{O} .

Compte tenu de l'exemple 2, le théorème 1 résulte du

Théorème 2. Soit M une variété symplectique compacte connexe, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe K , d'application moment μ . Soit $C \subset \mathfrak{k}^*$ une chambre de Weyl. Alors l'intersection $\mu(M) \cap C$ est un polytope convexe.

Ce résultat est dû à Kirwan (voir [13]); il conclut (et repose sur) des travaux de Guillemin et Sternberg (voir [8, 9]). Sa preuve, de nature qualitative, ne permet pas en général d'obtenir des inéquations définissant $\mu(M) \cap C$. Mais lorsque K est un tore (si bien que $C = \mathfrak{k}^*$), l'ensemble $\mu(M)$ est l'enveloppe convexe des points $\mu(p)$, où p décrit les points fixes de K dans M (voir [1, Th. 1] et [8, Th. 4]).

Appliquons ce dernier résultat à l'action du tore maximal $T_n \subset U_n$ dans l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\lambda \subset H_n$. La projection $p : H_n \rightarrow D_n$ envoie chaque matrice hermitienne $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sur sa diagonale, (x_{11}, \dots, x_{nn}) . Par ailleurs, les points fixes de T_n sont les matrices hermitiennes de spectre λ qui commutent aux matrices diagonales unitaires; ce sont donc les matrices diagonales de spectre λ . On obtient ainsi le résultat suivant, dû à Schur et Horn (voir [24, 11]) par des méthodes bien différentes :

Corollaire 1. L'ensemble des diagonales des matrices hermitiennes de spectre donné, $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$, est l'enveloppe convexe des $(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$, où $\sigma \in S_n$.

3. Restriction de représentations

Le but de cette partie est de présenter une autre interprétation de l'ensemble Horn_n en termes de théorie des représentations; il en résultera que cet ensemble est un polyèdre convexe rationnel, c'est-à-dire défini par des inéquations à coefficients rationnels.

Commençons par rappeler quelques résultats sur la structure des groupes de Lie compacts connexes et de leurs représentations; on renvoie à [5] pour une exposition détaillée.

Soient K un groupe de Lie compact connexe, et $T \subset K$ un tore maximal; alors $T \cong U_1 \times \dots \times U_1$ (r facteurs) où r est le rang de K . On note \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K , et $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ celle de T ; on a donc $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^r$. Notons $W = N_K(T)/T$ le groupe de Weyl, et Λ le groupe des caractères de T , c'est-à-dire des homomorphismes de groupes de Lie $\lambda : T \rightarrow U_1$. Puisque tout caractère de $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est de la forme $z \mapsto z^n$ pour un unique $n \in \mathbb{Z}$, on a $\Lambda \cong \mathbb{Z}^r$. En considérant la différentielle en l'élément neutre de K , on identifie Λ à un réseau dans $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^r$: le réseau des poids.

Choisissons une chambre de Weyl $C \subset \mathfrak{k}^*$. Rappelons que C est un cône convexe polyédral rationnel (on peut le définir par des inéquations linéaires de la forme $f \geq 0$, où $f \in \mathfrak{t}$ est à valeurs entières sur Λ); c'est aussi un domaine fondamental pour l'action de W dans \mathfrak{k}^* , et pour l'action coadjointe de K dans \mathfrak{k}^* . On note $\Lambda^+ := \Lambda \cap C$ l'ensemble des poids dominants; il est stable par addition et contient 0. D'après le lemme de Gordan, il existe un ensemble fini de poids dominants, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, tel que

$$\Lambda^+ = \left\{ \sum_{i=1}^N n_i \lambda_i \mid n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N} \right\}.$$

On dit que Λ^+ est un sous-monoïde de type fini du groupe abélien Λ .

Exemple 3. Lorsque K est le groupe unitaire U_n , on peut prendre $T = T_n$; alors $W = S_n$ et \mathfrak{k}^* s'identifie à D_n , dont C_n est une chambre de Weyl. Le réseau des poids est \mathbb{Z}^n avec pour base les caractères $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ donnés par les coefficients diagonaux, et Λ^+ est formé des suites décroissantes d'entiers relatifs.

Étant donnée une représentation différentiable de K dans un espace vectoriel complexe V de dimension finie, on a une décomposition unique

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

dans laquelle

$$V_\lambda := \{v \in V \mid t \cdot v = \lambda(t)v \forall t \in T\}$$

désigne le sous-espace de poids λ ; de plus, W permute ces sous-espaces. On dit que λ est un poids de V si $V_\lambda \neq \{0\}$; l'enveloppe convexe de ces poids dans \mathfrak{t}^* est un polytope convexe, stable par W . Lorsque V est irréductible comme représentation de K , les sommets de ce polytope forment une orbite de W ; autrement dit, ces sommets sont de la forme $w\lambda_0$ ($w \in W$) pour un unique $\lambda_0 \in \Lambda^+$. De plus, V_{λ_0} est de dimension 1, et la représentation irréductible V est uniquement déterminée par son plus grand poids λ_0 à isomorphisme près. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de K , sur l'ensemble Λ^+ des poids dominants ; on note $\lambda \mapsto V_K(\lambda)$ la bijection réciproque.

Revenons à la situation du théorème 1 ; notons $T_K, W_K, \Lambda_K, \dots$ les objets ainsi associés à K , et $T_L, W_L, \Lambda_L, \dots$ ceux associés à L . On peut supposer que $T_L \subset T_K$; par suite, la projection $p : \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{t}_L^*$ envoie \mathfrak{t}_K^* dans \mathfrak{t}_L^* et Λ_K dans Λ_L (les relations entre W_K et W_L sont plus compliquées, voir [3, Sec. 2]). Étant donnée une représentation irréductible $V_K(\lambda)$ de K , sa restriction au sous-groupe L admet une unique décomposition de la forme

$$\text{Res}_L^K V_K(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_L^+} m(\lambda, \mu) V_L(\mu),$$

où on pose $mV_L(\mu) = V_L(\mu) \oplus \dots \oplus V_L(\mu)$ (m copies) pour tout entier $m \geq 1$; les multiplicités $m(\lambda, \mu)$ sont des entiers naturels uniquement déterminés. Posons

$$\Lambda^+(K, L) := \{(\lambda, \mu) \in \Lambda_K^+ \times \Lambda_L^+ \mid m(\lambda, \mu) \neq 0\}$$

et désignons par $C(K, L)$ le sous-cône de $\mathfrak{t}_K^* \times \mathfrak{t}_L^*$ engendré par $\Lambda^+(K, L)$.

Théorème 3.

- (i) L'ensemble $\Lambda^+(K, L)$ est un sous-monoïde de type fini de $\Lambda_K \times \Lambda_L$.
- (ii) L'ensemble $C(K, L)$ est un cône convexe polyédral rationnel.
- (iii) Avec les notations du théorème 1, on a

$$C(K, L) = \{(\lambda, \mu) \in C_K \times C_L \mid \mu \in p(\mathcal{O}_\lambda)\}.$$

L'assertion (i) se déduit d'un résultat de finitude en théorie des invariants, dû à Hilbert et Nagata. L'assertion (ii) en résulte aussitôt. Enfin, l'assertion (iii) est conséquence d'un résultat de Sjamaar

qui généralise et précise le théorème 2 (voir [25, Th. 7.6] et aussi l'introduction de [3]).

Exemple 4. Lorsque L est un tore maximal de K , noté simplement T , on a $\Lambda_L = \Lambda$ et $C_L = \mathfrak{t}^*$. On montre alors que $\Lambda^+(K, T)$ est formé des couples $(\lambda, \mu) \in \Lambda^+ \times \Lambda$ tels que $\mu \in \text{Conv}(W\lambda)$ (où Conv désigne l'enveloppe convexe dans \mathfrak{t}^*), et que $\lambda(t) = \mu(t)$ pour tout t dans le centre de K (qui est l'intersection de tous les tores maximaux). Le théorème 3 entraîne alors que $p(\mathcal{O}_\lambda) = \text{Conv}(W\lambda)$. Ce résultat, dû à Kostant (voir [18]), généralise le théorème de Schur et Horn (corollaire 1).

Exemple 5. Un problème classique est de décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de K en somme directe de représentations irréductibles ; en d'autres termes, il s'agit de déterminer les multiplicités $c_{\lambda, \mu}^\nu$ dans la décomposition

$$V_K(\lambda) \otimes V_K(\mu) = \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} c_{\lambda, \mu}^\nu V_K(\nu). \quad (7)$$

Ce problème rentre dans le cadre ci-dessus, en considérant l'inclusion diagonale de K dans $K \times K$. Lorsque $K = U_n$, les $c_{\lambda, \mu}^\nu$ sont appelés coefficients de Littlewood-Richardson ; ils se calculent par une règle combinatoire due à ces deux mathématiciens. D'après l'égalité (6) et le théorème 3, on a

$$C(U_n \times U_n, U_n) = \text{Horn}_n.$$

4. Conjecture de Horn et calcul de Schubert

Dans cette partie, on va introduire progressivement des notions de calcul de Schubert, et présenter ses liens avec la conjecture 1.

On revient au cadre de la première partie ; on va tout d'abord obtenir une famille d'inégalités du type (3) qui contient celles de Weyl, en généralisant la preuve de ces dernières. On considère à nouveau A, B dans H_n de spectres respectifs $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n)$; on pose $C = A + B$ et on note $\nu = (\nu_1 \geq \dots \geq \nu_n)$ son spectre. On choisit une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n telle que $Ae_i = \lambda_i e_i$ pour tout i ; on introduit de même des bases orthonormées (f_1, \dots, f_n) pour B , et (g_1, \dots, g_n) pour C . On se donne enfin I, J, K dans $\mathcal{P}(r, n)$; on écrit $I = (i_1 < \dots < i_r)$, et de même pour J et K .

Proposition 1. Avec les notations précédentes, on a

$$\sum_{k \in K} \nu_k \leq \sum_{i \in I} \lambda_i + \sum_{j \in J} \mu_j$$

s'il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{C}^n$ de dimension r tel que

$$\begin{aligned} \dim(V \cap \text{Vect}(e_{i_m}, \dots, e_n)) &\geq r + 1 - m, \\ \dim(V \cap \text{Vect}(f_{j_m}, \dots, f_n)) &\geq r + 1 - m \\ \text{et } \dim(V \cap \text{Vect}(g_1, \dots, g_{k_m})) &\geq m \quad \forall m \in \{1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Lorsque $r = 1$, on retrouve les inégalités de Weyl. La preuve de la proposition utilise la notion de *trace de Rayleigh* : étant donnée une base orthonormée (v_1, \dots, v_r) de V , on pose

$$R_A(V) := \sum_{i=1}^r (Av_i | v_i).$$

On vérifie que $R_A(V)$ est la trace de l'application composée

$$V \xrightarrow{i} \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^n \xrightarrow{p} V,$$

où i désigne l'inclusion, et p la projection orthogonale ; en particulier, $R_A(V)$ ne dépend pas du choix de v_1, \dots, v_r .

Montrons d'abord que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \min_W R_A(W), \quad (8)$$

où le minimum porte sur les sous-espaces $W \subset \mathbb{C}^n$ de dimension r qui vérifient

$$\dim(W \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_m})) \geq m \quad (1 \leq m \leq r).$$

En effet, pour un tel W , on peut choisir $w_1 \in W \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_1})$ tel que $(w_1 | w_1) = 1$; alors $(Aw_1 | w_1) \geq \lambda_{i_1}$ d'après (2). Puis on choisit $w_2 \in W \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_2})$ tel que $(w_1 | w_2) = 0$ et $(w_2 | w_2) = 1$; on a alors $(Aw_2 | w_2) \geq \lambda_{i_2}$. En itérant cette construction, on obtient $R_A(W) = \sum_{i=1}^r (Aw_i | w_i) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i$, avec égalité lorsque $W = \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$; ceci démontre (8).

On montre de façon analogue que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \max_W R_A(W), \quad (9)$$

où le maximum porte cette fois sur les sous-espaces $W \subset \mathbb{C}^n$ de dimension r qui vérifient

$$\dim(W \cap \text{Vect}(e_{i_m}, \dots, e_n)) \geq r + 1 - m \quad (1 \leq m \leq r).$$

Comme l'application $X \rightarrow R_X(V)$ est linéaire, on a $R_{-A}(V) + R_{-B}(V) + R_C(V) = 0$. Mais $R_C(V) \geq \sum_{k \in K} \nu_k$ d'après (8). Puisque le spectre de $-A$ est $(-\lambda_n \geq$

$\dots \geq -\lambda_1)$ pour la base orthonormée (e_n, \dots, e_1) , on a aussi $R_{-A}(V) \geq -\sum_{i \in I} \lambda_i$ d'après (9). On obtient de même $R_{-B}(V) \geq -\sum_{j \in J} \mu_j$, ce qui établit la proposition.

Cette démonstration fait apparaître les principaux ingrédients du *calcul de Schubert*, qu'on va présenter très brièvement (voir [21] pour une exposition approfondie). L'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n de dimension r est muni d'une structure naturelle de variété projective complexe, appelée *grassmannienne* et notée $\text{Gr}(r, \mathbb{C}^n)$. Les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, où $i = 1, \dots, n$, forment un *drapeau complet*, c'est-à-dire une suite croissante $(E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{n-1})$ où chaque E_i est un sous-espace de dimension i de \mathbb{C}^n . Étant donné un tel drapeau complet E_\bullet et $l \in \mathcal{P}(r, n)$, l'ensemble

$$X_l(E_\bullet) := \{V \in \text{Gr}(r, \mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap E_{i_m}) \geq m \quad (1 \leq m \leq r)\}$$

est une sous-variété fermée, irréductible, de dimension $\sum_{m=1}^r (i_m - m)$. Les $X_l(E_\bullet)$, où $l \in \mathcal{P}(r, n)$, sont appelées les *variétés de Schubert* associées au drapeau E_\bullet . On introduit aussi les *cellules de Schubert*

$$\begin{aligned} \Omega_l(E_\bullet) &:= \{V \in \text{Gr}(r, \mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap E_j) = m \\ &\quad (i_m \leq j < i_{m+1}, 0 \leq m \leq r)\}. \end{aligned}$$

On montre que $\Omega_l(E_\bullet)$ est un ouvert dense de $X_l(E_\bullet)$, isomorphe à un espace affine complexe ; de plus, $\text{Gr}(r, \mathbb{C}^n)$ est la réunion disjointe de toutes les cellules de Schubert, et $X_l(E_\bullet)$ est réunion de certaines d'entre elles (voir [6, Chap. IV] pour plus de détails sur cette décomposition cellulaire de la grassmannienne).

Il s'avère plus commode d'indexer les variétés de Schubert par des partitions, c'est-à-dire des suites décroissantes d'entiers naturels : à tout $l = (i_1 < \dots < i_r) \in \mathcal{P}(r, n)$, on associe la suite

$$\lambda = \lambda(l) := (i_r - r, \dots, i_1 - 1).$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathcal{P}(r, n)$ sur l'ensemble des partitions $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r)$, où $\lambda_1 \leq n - r$. On pose $X_\lambda(E_\bullet) := X_l(E_\bullet)$; sa dimension est $\sum_{m=1}^r \lambda_m =: |\lambda|$. L'hypothèse de la proposition 1 se réécrit alors

$$X_{\lambda(I')}(E_\bullet) \cap X_{\lambda(J')}(F_\bullet) \cap X_{\lambda(K)}(G_\bullet) \neq \emptyset,$$

où $I' := (n + 1 - i_r, \dots, n + 1 - i_1)$ de sorte que $\lambda(I') = (n - r - \lambda_r, \dots, n - r - \lambda_1)$ est la partition *duale* de $\lambda(I)$, qu'on notera $\lambda(I)'$; $\lambda(J')$ est définie de même, et $E_\bullet, F_\bullet, G_\bullet$ sont des drapeaux complets, associés à $-A, -B, C$.

Les variétés de Schubert permettent de décrire l'anneau de cohomologie $H^*(\text{Gr}(r, \mathbb{C}^n))$.² Pour toute partition $\lambda = (n - r \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0)$, on note σ_λ la classe fondamentale de la variété de Schubert $X_{\lambda'}(E_\bullet)$, si bien que $\sigma_\lambda \in H^{2|\lambda|}(\text{Gr}(r, \mathbb{C}^n))$. On montre que les classes σ_λ sont indépendantes du choix du drapeau complet E_\bullet et forment une base du groupe abélien $H^*(\text{Gr}(r, \mathbb{C}^n))$; la base duale (pour la dualité de Poincaré) est formée des $\sigma_{\lambda'}$. De plus, on a les relations :

$$\sigma_\lambda \cup \sigma_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda, \mu}^{\nu} \sigma_{\nu}$$

où $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ est le coefficient de Littlewood-Richardson introduit dans l'exemple 5. Pour que $c_{\lambda, \mu}^{\nu} \neq 0$, il faut que $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$; en écrivant $\lambda = \lambda(I)$, $\mu = \lambda(J)$ et $\nu = \lambda(K)$, ceci équivaut à la mystérieuse égalité (4).

Théorème 4. *L'ensemble Horn_n est formé des solutions de l'équation (5) et des inéquations (3) pour tout triplet (I, J, K) de $\mathcal{P}(r, n)$ tel que $c_{\lambda(I), \lambda(J)}^{\lambda(K)} \neq 0$, et pour $r = 1, \dots, n$.*

Le fait que Horn_n vérifie les inéquations ci-dessus se déduit de la proposition 1 et d'arguments de dualité en calcul de Schubert. La réciproque utilise deux ingrédients nouveaux : la théorie géométrique des invariants, en particulier le critère de Hilbert-Mumford, et la propriété de *saturation* des coefficients de Littlewood-Richardson : s'il existe un entier $n > 0$ tel que $c_{n\lambda, n\mu}^{n\nu} \neq 0$, alors $c_{\lambda, \mu}^{\nu} \neq 0$. Cette propriété a été établie par Knutson et Tao (voir [16]); par ailleurs, le lien entre conjecture de Horn et théorie géométrique des invariants, mis en évidence par Klyachko (voir [14]), joue un rôle fondamental dans la plupart des développements ultérieurs.

En fait, on peut montrer que l'ensemble T_n^r (qui définit les inégalités de la conjecture 1) est formé des $(I, J, K) \in U_n^r$ tels que $c_{\lambda(I), \lambda(J)}^{\lambda(K)} \neq 0$. Mais certaines de ces inégalités sont superflues : pour définir Horn_n , il suffit de conserver celles indexées par les (I, J, K) tels que $c_{\lambda(I), \lambda(J)}^{\lambda(K)} = 1$. Ces résultats sont dus à Fulton, voir [7, Th. 12, Th. 13]); Knutson, Tao et Woodward ont montré que les inégalités pour lesquelles $c_{\lambda(I), \lambda(J)}^{\lambda(K)} = 1$ forment un système minimal (voir [17]). En d'autres termes, les égalités correspondantes définissent des faces de codimension 1 du cône convexe polyédral Horn_n .

5. Le cône de Littlewood-Richardson

Le but de cette partie est d'énoncer un résultat de Belkale-Kumar et Ressayre qui peut être vu comme une généralisation de la conjecture de Horn (reformulée en termes du groupe unitaire U_n) à un groupe de Lie compact connexe K arbitraire. Plus précisément, on va présenter une version quantitative du théorème 1, pour le cas de l'inclusion diagonale de K dans $K \times K$ (le cas général, traité dans des travaux de Ressayre (voir [22, 23]), sort du cadre de ce texte).

Considérons à nouveau le cône $C(K \times K, K)$ associé à la décomposition des produits tensoriels de représentations irréductibles (exemple 5). On va introduire une variante de ce cône qui contient les mêmes informations et qui est plus symétrique, puis en présenter un système minimal d'équations et d'inéquations.

On conserve les notations $T, W, \Lambda, C, \dots, c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ de la troisième partie. Observons que

$$c_{\lambda, \mu}^{\nu} = \dim(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu)^*)^K,$$

où pour toute représentation de K dans V , on note $V^K \subset V$ le sous-espace des invariants. De plus, la représentation de K dans $V(\nu)^*$ est irréductible, et donc de la forme $V(\nu^*)$ pour un unique $\nu^* \in \Lambda^+$; on a $\nu^* = -w_0\nu$, où w_0 désigne l'unique élément de W tel que $w_0(C) = -C$. Notons $\mathcal{LR}(K)$ le cône convexe de $(\mathfrak{k}^*)^3$ engendré par les triplets (λ, μ, ν) de poids dominants tels que $(V(\lambda) \otimes V(\mu) \otimes V(\nu))^K \neq 0$; c'est le *cône de Littlewood-Richardson*. D'après le théorème 3, on a

$$\mathcal{LR}(K) = \{(\lambda, \mu, \nu) \in C^3 \mid 0 \in K\lambda + K\mu + K\nu\}$$

et ce cône convexe est polyédral rationnel; il est donc défini par un système minimal d'équations et d'inéquations linéaires homogènes, où chaque inéquation est uniquement déterminée modulo la multiplication par un scalaire positif, et l'ajout d'une combinaison linéaire des équations. Il est facile de montrer que ces équations sont toutes de la forme

$$(\lambda + \mu + \nu)(\theta) = 0 \quad (\theta \in \mathfrak{k}^K), \quad (10)$$

où le sous-espace $\mathfrak{k}^K \subset \mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie du centre de K ; de plus, $\mathfrak{k}^K = \mathfrak{t}^W$.

2. Rappelons qu'on associe à tout espace topologique X , son anneau de cohomologie à coefficients entiers $H^*(X)$, muni du produit \cup ; c'est un anneau gradué. Lorsque X est une variété projective complexe, toute sous-variété complexe $Y \subset X$ définit une classe fondamentale $[Y] \in H^{2d}(X)$, où d est la codimension complexe de Y dans X ; on a $[Y] \cup [Z] = [Y \cap Z]$ si Y et Z se coupent transversalement. On renvoie à [21, App. A] pour plus de détails sur ces notions.

La description des inéquations, bien plus élaborée, met en jeu une collection de résultats sur la structure du groupe de Lie K et de certains espaces homogènes qui lui sont associés. On va présenter brièvement ces résultats ; ils seront illustrés par l'exemple du groupe unitaire, après l'énoncé du théorème principal.

On peut choisir un produit scalaire (\cdot, \cdot) sur \mathfrak{k} , invariant par K ; par restriction et passage au dual, on en déduit un produit scalaire sur \mathfrak{t}^* , invariant par W , qu'on notera encore (\cdot, \cdot) .

Soit R l'ensemble (fini) des poids non nuls de la représentation adjointe de K ; c'est l'ensemble des racines de (K, T) . Une racine α est dite *positive* si $(\alpha, \lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in C$; on note $R^+ \subset R$ le sous-ensemble formé des racines positives, et on pose

$$\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

Une racine positive α est dite *simple* si l'hyperplan $(\alpha = 0) \subset \mathfrak{t}^*$ définit une face de codimension 1 de la chambre C . Les racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ forment une base du sous-espace de \mathfrak{t}^* orthogonal à \mathfrak{t}^W .

Pour toute racine α , l'application linéaire

$$s_\alpha : \mathfrak{t}^* \longrightarrow \mathfrak{t}^*, \quad \lambda \longmapsto \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

est la symétrie orthogonale qui fixe point par point l'hyperplan α^\perp ; elle appartient au groupe de Weyl W . Les symétries s_{α_i} associées aux racines simples forment un système générateur minimal de ce groupe ; on note $\ell : W \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction longueur associée.

On appelle *poids fondamentaux* une suite $(\omega_1, \dots, \omega_s)$ de \mathfrak{t}^* qui vérifie les équations

$$\frac{2(\omega_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq s).$$

Ainsi, chaque poids fondamental est uniquement déterminé à translation près par $(\mathfrak{t}^*)^W$. La chambre C est le plus petit cône convexe qui contient $(\mathfrak{t}^*)^W$ et les poids fondamentaux.

Choisissons une suite de tels poids et posons $L_i = K^{\omega_i}$ pour $i = 1, \dots, s$. Alors L_i est un sous-groupe fermé connexe de K , maximal pour ces propriétés, et contenant le tore T ; il est indépendant du choix de ω_i . Le groupe de Weyl de (L_i, T) est le sous-groupe $W_i \subset W$ engendré par les s_{α_j} , où $j \neq i$. L'ensemble $W^i \subset W$, formé des w tels que $\ell(w) \leq \ell(wv)$ pour tout $v \in W_i$, est un système complet de représentants du quotient W/W_i . L'espace homogène K/L_i est muni d'une structure de variété projective

complexe, réunion disjointe de sous-variétés localement fermées Ω_w , où $w \in W^i$; chaque Ω_w est un espace affine complexe de dimension $\ell(w)$. Les classes fondamentales des adhérences des cellules, notées σ_w , forment donc une base de $H^*(K/L_i)$; on a $\sigma_w \in H^{2\ell(w)}(K/L_i)$. En particulier, la classe du point est σ_e , où e désigne l'élément neutre de W .

Pour tout $w \in W^i$, on pose

$$\chi_w := \rho + w^{-1}\rho - 2\rho_i$$

où $\rho_i := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+, (\omega_i, \alpha) = 0} \alpha$. On peut maintenant énoncer le

Théorème 5. *Avec les notations précédentes, le cône $\mathcal{LR}(K)$ est formé des $(\lambda, \mu, \nu) \in C^3$ qui vérifient les équations (10) où θ décrit une base de $(\mathfrak{t}^*)^W$, et les inéquations*

$$(\lambda, u\omega_i) + (\mu, v\omega_i) + (\nu, w\omega_i) \leq 0$$

pour $i = 1, \dots, r$ et pour tout $(u, v, w) \in (W^i)^3$ tel que $\sigma_u \cup \sigma_v \cup \sigma_w = \sigma_e$ dans $H^*(K/L_i)$ et que $(\chi_u + \chi_v + \chi_w - \chi_e, \omega_i) = 0$. De plus, ce système d'équations et d'inéquations est minimal.

La première assertion de ce théorème est due à Belkale et Kumar en 2006 (voir [2, Th. 28]) ; la minimalité a été obtenue par Ressayre en 2010 (voir [22]).

Lorsque G est le groupe unitaire U_n , rappelons que le réseau Λ est engendré par les coefficients diagonaux $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$; on peut prendre $\theta = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$. Les racines (resp. les racines positives) sont formées des $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, où $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$ (resp. $i < j$) ; les symétries orthogonales associées sont les transpositions $(i, j) \in S_n$. Les racines simples sont les $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, où $1 \leq i \leq n-1$; elles correspondent aux transpositions élémentaires de S_n . La fonction longueur de ce groupe est donnée par le nombre d'inversions. On peut prendre pour poids fondamentaux les sommes partielles $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$, où $1 \leq i \leq n-1$; on a $L_i = U_i \times U_{n-i}$, si bien que l'espace homogène K/L_i est isomorphe à la grassmannienne $\text{Gr}(i, \mathbb{C}^n)$. De plus, $W_i = S_i \times S_{n-i}$ et W^i est formé des permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(1) < \dots < \sigma(i)$ et $\sigma(i+1) < \dots < \sigma(n)$. On peut donc identifier W^i à $\mathcal{P}(i, n)$, en associant à σ la suite $(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$. On montre que l'égalité des poids $(\chi_u + \chi_v + \chi_w - \chi_e, \omega_i) = 0$ est toujours vérifiée (c'est un phénomène propre au groupe unitaire), et que l'égalité des classes de cohomologie $\sigma_u \cup \sigma_v \cup \sigma_w = \sigma_e$, reformulée en termes de partitions, équivaut à $c_{\lambda, \mu}^{\nu'} \neq 0$. Le théorème 5 entraîne donc une reformulation plus symétrique de la conjecture de Horn, qui caractérise les spectres de trois matrices hermitiennes de somme nulle.

Références

- [1] M. F. ATIYAH. « Convexity and commuting Hamiltonians ». *Bull. London Math. Soc.* **14**, n° 1 (1982), p. 1–15.
- [2] P. BELKALE et S. KUMAR. « Eigenvalue problem and a new product in cohomology of flag varieties ». *Invent. Math.* **166**, n° 1 (2006), p. 185–228.
- [3] A. BERENSTEIN et R. SJAMAAR. « Coadjoint orbits, moment polytopes, and the Hilbert-Mumford criterion ». *J. Amer. Math. Soc.* **13**, n° 2 (2000), p. 433–466.
- [4] M. BRION. « Restriction de représentations et projections d'orbites coadjointes (d'après Belkale, Kumar et Ressayre) ». *Astérisque* **352** (2013), p. 1–33.
- [5] T. BRÖCKER et T. T. DIECK. *Representations of Compact Lie Groups*. **98**. Grad. Texts in Math. Springer-Verlag, 1985.
- [6] P. CALDERO et J. GERMONI. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1^{er}*. Paris : Calvage & Mounet, 2013.
- [7] W. FULTON. « Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus ». *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, n° 3 (2000), p. 209–249.
- [8] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG. « Convexity properties of the moment mapping ». *Invent. Math.* **67**, n° 3 (1982), p. 491–513.
- [9] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG. « Convexity properties of the moment mapping. II ». *Invent. Math.* **77**, n° 3 (1984), p. 533–546.
- [10] G. J. HECKMAN. « Projections of Orbits and Asymptotic Behavior of Multiplicities for Compact Connected Lie Groups ». *Invent. Math.* **67**, n° 2 (1982), p. 333–356.
- [11] A. HORN. « Doubly Stochastic Matrices and the Diagonal of a Rotation Matrix ». *Amer. J. of Math.* **76**, n° 3 (1954), p. 620–630.
- [12] A. HORN. « Eigenvalues of sums of Hermitian matrices ». *Pacific J. Math.* **12**, n° 2 (1962), p. 225–241.
- [13] F. KIRWAN. « Convexity properties of the moment mapping, III ». *Invent. Math.* **77**, n° 3 (1984), p. 547–552.
- [14] A. A. KLYACHKO. « Stable bundles, representation theory and Hermitian operators ». *Sel. math., New ser.* **4**, n° 3 (1998), p. 419–445.
- [15] A. KNUTSON. « The symplectic and algebraic geometry of Horn's problem ». *Linear Algebra Appl.* **319**, n° 1-3 (2000), p. 61–81.
- [16] A. KNUTSON et T. TAO. « The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products I: proof of the saturation conjecture ». *J. Amer. Math. Soc.* **12**, n° 4 (1999), p. 1055–1090.
- [17] A. KNUTSON, T. TAO et C. WOODWARD. « The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products II: Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone ». *J. Amer. Math. Soc.* **17**, n° 1 (2004), p. 19–48.
- [18] B. KOSTANT. « On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition ». *Ann. Sci. École Norm. Supér.* **6**, n° 4 (1973), p. 413–455.
- [19] S. KUMAR. *Additive Eigenvalue Problem (a survey)*, (With appendix by M. Kapovich). 2013. arXiv : 1305.4697.
- [20] L. MANIVEL. « Around the Horn conjecture ». Notes d'un cours au CIRM. Mar. 2000. URL : <http://math.univ-lyon1.fr/~ressayre/PDFs/manivel.pdf>.
- [21] L. MANIVEL. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*. Cours spécialisés 3. Paris : Société Mathématique de France, 1998.
- [22] N. RESSAYRE. « Geometric Invariant Theory and Generalized Eigenvalue Problem ». *Invent. Math.* **180**, n° 2 (2010), p. 389–441.
- [23] N. RESSAYRE. « Geometric Invariant Theory and Generalized Eigenvalue Problem II ». *Ann. Inst. Fourier* **61**, n° 4 (2011), p. 1467–1491.
- [24] I. SCHUR. « Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf der Determinantentheorie ». *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* **22** (1923), p. 9–20.
- [25] R. SJAMAAR. « Convexity Properties of the Moment Mapping Re-examined ». *Adv. Math.* **138**, n° 1 (1998), p. 46–91.
- [26] H. WEYL. « Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen ». *Math. Ann.* **71**, n° 4 (1912), p. 441–479.



Michel BRION

Institut Fourier, UMR 5582, 100 rue des maths, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France
 Michel.Brion@ujf-grenoble.fr

Michel Brion est directeur de recherche au CNRS, affecté à l'Institut Fourier à Grenoble. Ses domaines de recherche sont l'étude des groupes algébriques et la géométrie algébrique.



Rencontre avec « Maths Pour Tous »

En juin dernier, la SMF a décerné le prix d'Alembert 2014 à Olivier Peyon, pour la réalisation du film *Comment j'ai détesté les maths*, et à l'association « Maths Pour Tous » qui porte les mathématiques au devant du grand public dans tous les coins des régions Provence-Alpes-Côte-d'Azur et Corse. La Gazette est allée à la rencontre de cette association pour recueillir les propos de son président, Julien Cassaigne, et de ses vice-présidents, Laurent Beddou et Dominique Barbolosi.

Tout d'abord, pouvez-vous me présenter un peu l'association « Maths Pour Tous » ?

L'association, dont le nom complet est « Maths Pour Tous, association européenne pour une mathématique culturelle et populaire », a été créée en 1993 par Christian Mauduit et Jean-Pierre Boudine. Son but est, selon ses statuts, de « faire connaître et apprécier les mathématiques par le plus grand nombre », et ce par toutes sortes d'activités, dans tous les lieux.

Toute personne qui a participé comme animateur à l'une des activités de « Maths Pour Tous » devient, si elle le souhaite, membre de l'association. « Maths Pour Tous » a actuellement plus de 120 membres, dont une vingtaine sont très actifs, d'autres intervenant plus ponctuellement. Sans surprise, les professionnels des mathématiques sont majoritaires, principalement des enseignants du secondaire et des universitaires. Mais on compte aussi des gens dont le métier n'est pas directement lié aux mathématiques, des étudiants et des lycéens.

« Maths Pour Tous » est basée à l'IREM d'Aix-Marseille, à Luminy, qui met un bureau à notre disposition. Beaucoup d'activités se déroulent dans la région PACA et en Corse, mais pas uniquement.

Concrètement, quels types d'actions menez-vous ?

Les actions de « Maths Pour Tous » sont variées. Nous animons des stands lors de manifestations pour la diffusion de la culture scientifique (par exemple Fête de la science, Souk des sciences, etc.) ; nous organisons nous-mêmes de telles manifes-

tations (notamment le Forum des mathématiques dont il sera question plus loin) ; nous proposons un soutien aux ateliers de mathématiques dans les établissements scolaires, et aux équipes de lycéens ou de collégiens engagées dans des concours scientifiques ; enfin, à Aix-en-Provence, nous intervenons depuis deux ans auprès des centres sociaux et des écoles primaires.

Le Forum des Mathématiques est, depuis 2010, notre action phare, lancée à l'initiative de Dominique Barbolosi. Nous en sommes déjà à la 8^e édition sur Aix, Marseille et la Corse. Pendant deux jours, dans un lieu prestigieux, nous invitons une centaine de classes du primaire au lycée à venir découvrir une grande variété d'activités mathématiques attrayantes, autour d'une quarantaine de stands et plus de vingt conférences, en veillant à mettre particulièrement en évidence les interactions fortes avec les autres sciences. Pour cela, nous faisons appel à tous nos partenaires : mathématiciens, autres associations, clubs scolaires, etc., pour présenter, sous forme d'animations, d'expositions, de jeux, de conférences, les multiples facettes de la culture mathématique. »

Cela vous a-t-il conduit à investir des lieux insolites ?

Pour toucher un public le plus large possible, nous devons aller au-devant de ce public là où il se trouve. Si nous restons dans des salles fermées, même en centre ville, nous ne toucherons jamais que les gens qui font la démarche de venir nous voir. C'est notamment la démarche du Souk des sciences, une mani-

festation créée par un collègue chimiste, Hassane Bitar, à laquelle nous participons régulièrement en tenant des stands dans la rues, sur un marché, ou dans une galerie marchande.

Nous avons aussi eu l'occasion de nous installer dans une station du métro de Marseille, ou encore de présenter des animations aux détenus dans la prison des Baumettes.

Avec succès ?

Si l'on mesure le succès au nombre de visiteurs, alors oui, certainement. Il y a bien eu quelques ratés, quelques farces de la météo, mais en général le public est au rendez-vous. Il est parfois difficile à « accrocher », certains par exemple ont peur que l'on cherche à leur vendre quelque chose, et se détournent dès qu'on leur adresse la parole. Il faut savoir recourir à des ruses, comme commencer à faire jouer les enfants pour que leurs parents s'arrêtent et regardent les posters. Mais une fois qu'on a un petit groupe de visiteurs, un attroupement se forme et le stand ne désamplit plus.

Il est beaucoup plus difficile de savoir si nos actions ont des retombées durables, que ce soit sur la perception que le public a des mathématiques, sur l'intérêt que les jeunes portent à la discipline, ou encore sur leurs choix d'orientation.

Quelles sont les particularités de « Maths Pour Tous » par rapport aux autres associations ?

L'une des particularités de « Maths Pour Tous », qui est je pense pour beaucoup dans le succès de nos forums, c'est qu'une bonne partie des animations sont présentées par des jeunes. Pour cela, nous faisons appel à des groupes qui ont conduit un projet de recherche, dans le cadre d'un club scolaire ou d'un atelier « Math en Jeans », par exemple. Si besoin, nous retravaillons avec eux leurs posters ou maquettes pour les aider à mettre en valeur ce qui fera une bonne animation, et à leur donner une apparence soignée.

Ces stands tenus par des jeunes aident à faire passer le message que la culture mathématique est accessible à tous. Pour le public scolaire, ils sont plus faciles à aborder, moins intimidants peut-être que ceux tenus par des chercheurs. Mais les chercheurs ne sont pas loin non plus, et pourront à l'occasion apporter un complément d'information.

Pour de jeunes élèves ou étudiants, cela doit être très valorisant d'être ainsi responsabilisés ?

Tout à fait. C'est parfois difficile au départ, d'autant qu'ils ont souvent assez peu d'expérience de prise de parole en public. Mais ils prennent vite de l'assurance, y compris face à des élèves plus âgés ou à des adultes.

Le nom même de l'association semble lui conférer une dimension sociale. Avez-vous le sentiment de parvenir à créer une certaine mixité ?

Pour les forums des mathématiques, nous sommes amenés à sélectionner les classes qui viennent visiter, car les demandes sont plus nombreuses que les places disponibles : nous veillons alors à varier les établissements, ce qui assure une certaine mixité. Pour d'autres actions, c'est le lieu qui détermine la mixité ou non du public.

Quel sont vos liens avec l'association « Math en Jeans » ?

Un certain nombre de membres de « Maths Pour Tous » sont aussi impliqués dans « Math en Jeans » : enseignants, chercheurs, et aussi élèves puisque chaque année, lors du congrès « Math en Jeans », nous repérons des groupes que nous invitons à animer avec nous. Nous avons participé à l'organisation du congrès de Gap en 2011, et pris en charge celle du congrès de Marseille en 2013, que nous avons d'ailleurs couplé avec un forum.

Et avec l'IREM d'Aix-Marseille ?

L'IREM est un lieu privilégié pour les rencontres entre universitaires et enseignants du secondaire. Celui d'Aix-Marseille a un groupe « Vulgarisation et diffusion de la culture scientifique » dont la plupart des membres sont aussi membres de « Maths Pour Tous ». Le personnel de l'IREM nous aide parfois ponctuellement, pour l'accueil du forum par exemple. Et nous contribuons à faire connaître les activités de l'IREM.

L'université d'Aix-Marseille propose des UE « Math en Jeans » dans sa licence de mathématiques. Pouvez-vous nous décrire un peu cette initiative originale et ses liens avec « Maths Pour Tous » ?

Il y a en fait deux UE. « Math en Jeans » 1 d'une part, proposée à toutes les licences scientifiques, est une initiation à la recherche, dans l'esprit des ateliers « Math en Jeans » dans les établissements scolaires. « Math en Jeans » 2 d'autre part, proposée aux étudiants de 3^e année en mathématiques et de 2^e année en informatique, est tournée vers la diffusion de la culture scientifique. La moitié de l'horaire

de cette dernière UE se passe hors du campus, lors de sorties où les étudiants peuvent d'abord assister à des animations scientifiques, puis présenter les animations qu'ils auront eux-mêmes conçues. C'est là que « Maths Pour Tous » intervient, en intégrant les étudiants à ses actions.

L'association vient de recevoir le prix d'Alembert attribué par la SMF, que pensez-vous que cela lui apportera ?

C'est d'abord une reconnaissance institutionnelle qui a une grande valeur à nos yeux ! Il nous conforte dans nos choix parfois audacieux, entretient notre motivation et nous encourage à poursuivre nos efforts. Ce prix nous offre aussi un label qui assoit notre crédibilité et entérine le sérieux de notre démarche auprès de nos partenaires.

D'un point de vue comptable, comment fonctionne « Maths Pour Tous » ?

Nos ressources proviennent de nos prestations d'animation et de conseil, de subventions locales et nationales, de sponsors (en particulier l'ensemble des clubs Rotary du pays d'Aix qui nous soutiennent fortement pour l'organisation des « Forums des mathématiques »), et enfin, depuis deux ans, du consortium CapMaths.

Actuellement, quels sont selon vous les principaux besoins de l'association ?

Le temps ! La partie administrative et financière du montage des projets et des bilans nous prend un temps et une énergie considérables, au final souvent supérieurs à ceux consacrés à la réalisation concrète des actions elles-mêmes. La prise en main des dossiers est complexe et il est difficile de déléguer ces tâches à l'extérieur des membres du bureau.

L'idéal serait d'avoir les moyens de financer de façon pérenne un chargé de mission. Mais si l'on accordait seulement quelques heures de décharge d'enseignement à l'un de nos membres actifs, cela nous soulagerait déjà énormément.

Nous cherchons aussi à partager notre expérience d'animation en l'adaptant au champ pédagogique dans nos classes, en rédigeant sous forme de livrets, de vidéos et de contenus Web une sélection de nos nombreuses animations. Quelques membres de l'association étant depuis peu à la retraite, nous avons bon espoir d'y arriver !

Souhaitez-vous développer cette initiative dans d'autres académies ?

Oui ! Mais de fait, avec les années et au gré des mutations et nominations, nous avons des membres de l'association un peu partout en France. Nous venons de créer notre première antenne en terre Corse, « Matematica per tutti », qui gère à nos côtés les « Journées des sciences d'Ucciani ».

Nous avons par ailleurs des partenariats avec des structures d'animation scientifique bien implantées dans d'autres régions.

Pour finir, quels sont les projets qui vous tiennent particulièrement à cœur pour les prochaines années ?

Nous travaillons actuellement sur la 4^e édition du « Forum des mathématiques » d'Aix-en-Provence les 8 et 9 janvier 2015, et œuvrons pour relancer celui de Corse sur Ajaccio, après 2 années d'interruption. Nous avons de nombreux autres projets :

- Réaliser un ambitieux et novateur jeu mathématique sérieux, « Mathéopolis », déjà complètement scénarisé par notre ami Francis Loret.
- Lancer un grand rallye de culture scientifique permanent, avec application téléphone, à Aix-en-Provence.
- Dans le cadre de la réforme des rythmes scolaires, étendre à d'autres villes le dispositif « Math en jeu » conçu par Laurent Giauffret, déjà mis en place dans toutes les écoles primaires d'Aix-en-Provence.
- Créer deux lieux d'accès à la culture scientifique dans les quartiers nord de Marseille, un en collaboration avec le CEDEC, l'école de la deuxième chance et l'IREM, et l'autre avec le laboratoire de Dominique Barbolosi.
- Organiser, pour la deuxième fois, un congrès « Math en Jeans » en 2016 sur Marseille ou Aix.
- Former une équipe régionale pour la coupe Euro-math.
- Développer la participation aux compétitions mathématiques nationales et internationales dont nous organisons des épreuves locales (championnat FFJM, Tournoi des villes), pour en faire des compétitions de référence en région PACA.

Et tellement d'autres choses...

Nous espérons avoir donné envie à nombre de lecteurs de la *Gazette des Mathématiciens* de nous rejoindre. Pour cela rien de plus simple, il suffit de visiter notre site Web <http://www.maths-pour-tous.org> et de nous contacter par courriel : mpt@irem.univ-mrs.fr.



Sur l'attractivité des mathématiques

• P. ARNOUX

Ces derniers mois, j'ai assisté à plusieurs discussions sur la question de l'attractivité des mathématiques ; les problèmes récurrents rencontrés par les concours de recrutement, entre autres, ont remis cette question au goût du jour. Beaucoup de gens semblent penser que le problème vient de là, et qu'il suffirait de rendre les mathématiques attractives pour résoudre le problème.

L'avantage, c'est que cette solution ne coûte rien à personne (sauf aux enseignants supposés incompetents, chargés de réformer leur enseignement pour attirer les étudiants). L'ennui, c'est que cette analyse est fautive : les mathématiques sont déjà attractives, comme le montrent toutes les études sur le sujet ; donc cette solution n'en est pas une, elle cache les vraies questions, et elle ne permettra pas de résoudre les problèmes.

1. Une attractivité indéniable

Pierre Merle, dans un article de 2003 [7], expose les résultats d'une enquête qui montre que 70% des élèves de collèges sont intéressés, ou très intéressés, par les mathématiques ; il confirmait ainsi les résultats d'une étude de la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance du Ministère de l'éducation nationale (DEPP) en 1997 [4] montrant que le cours préféré des collégiens français, après le cours d'éducation physique et sportive, est le cours de mathématiques. Un article très récent (Teresa Assude et al., à paraître) montre que les élèves de l'école de la 2^e chance de Marseille ont une vision positive des mathématiques. La thèse de Lili Ji en 2011 [5] montre que le cours préféré des lycéens de Terminale français est le cours de mathématiques, comme pour les lycéens chinois. Toutes les enquêtes faites sur le sujet donnent des résultats similaires : les mathématiques sont une matière attractive, probablement la préférée des matières scolaires, pour une majorité de lycéens et

de collégiens.

C'est d'ailleurs un résultat qui persiste dans la population générale ; si, comme l'a fait Daniel Boy dans plusieurs sondages [1], on pose la question plus générale de l'intérêt pour la science, on voit que, de façon constante, il est d'environ 30% dans la population générale. Comme le montrent d'autres enquêtes, c'est à peu près égal à la proportion de français qui s'intéressent au foot [3].

On peut prendre un autre point de vue : les différentes voies du lycée français sont hiérarchisées, et c'est la voie scientifique qui est en haut de la hiérarchie ; au sein même de cette voie scientifique, les différentes spécialités sont elles aussi hiérarchisées, et c'est la spécialité mathématique qui est en haut du classement. Si elle ne l'était pas, ce sont les meilleurs élèves, ceux qui ont le choix, qui la fuiraient : les résultats du bac montrent le contraire d'une manière incontestable [2]. Même s'il n'est pas politiquement correct de le dire, car toutes les disciplines doivent se voir reconnaître une égale dignité, l'expérience quotidienne de tout parent d'élève, comme les divers indicateurs sociologiques disponibles, convergent vers cette image d'une hiérarchie forte et stable, et d'une forte attractivité des sciences et en particulier des mathématiques. Ici aussi, bien que dans un sens différent (mais l'est-il tellement ?) on peut parler de l'attractivité des mathématiques. Cette attractivité continue d'ailleurs dans les études supérieures : ce sont les études scientifiques, ingénieur ou médecin, qui sont les plus convoitées, et une étude récente de François-Xavier Martin [6] montre que la France est le pays qui compte le plus haut taux de diplômés à bac+5 en sciences, avant l'Allemagne, bien avant la Chine ou les USA ; même au niveau doctorat, elle suit l'Allemagne de près en sciences. Cette attractivité continue d'ailleurs avec l'accès à l'emploi : on sait que les diplômés scientifiques, en particulier en mathématiques et en informatique, sont parmi les

plus appréciés des employeurs, comme le montrent les taux d'emploi et les salaires correspondants.

Qu'est-ce qui explique cette attractivité ? Il y a bien sûr quelque chose d'intrinsèque à la discipline ; chaque mathématicien connaît le plaisir de réussir une démonstration, et de comprendre pourquoi les choses marchent, même si ce plaisir prend des formes très diverses suivant les personnes. Ceux qui ont eu la chance de travailler dans un atelier de mathématiques, quel que soit le format, ont constaté cet intérêt des jeunes. Ce n'est sûrement pas le seul facteur : les sociologues ont montré combien les goûts dépendent de la situation sociale de chacun ; l'article de Pierre Merle cité plus haut montre que l'intérêt pour les mathématiques baisse entre la 6^e et la 3^e, mais qu'il baisse moins que l'intérêt pour le français (peut-être parce que les buts de l'enseignement des mathématiques sont plus explicites que ceux du français), et surtout, qu'il baisse beaucoup moins pour les élèves qui considèrent qu'ils ont un bon niveau dans la matière. Il est aussi probable qu'il y a quelque chose de spécifique à la France : la classification d'Auguste Comte a toujours une grande influence chez nous.

2. Mais un message opposé porté par la société

Ce qui précède est bien sûr contraire au message répandu par les médias. Il est généralement admis, sans qu'il soit besoin d'argumenter, que les mathématiques sont un outil de sélection répulsif, que les élèves ne suivent que sous la contrainte, et qui exerce une dictature arbitraire sur le système éducatif. Les journalistes sont persuadés que les matières littéraires sont plus attractives que les matières scientifiques, et que parmi celles-ci, la physique, la chimie et la biologie sont plus attractives que les mathématiques.

J'ai pu constater à de multiples reprises que toute opinion qui va dans ce sens est admise sans contradiction, et sans qu'il soit besoin d'en apporter des preuves. Par contre, ce qui est écrit plus haut soulève immédiatement des protestations, et les preuves que l'on peut apporter sont toujours insuffisantes : même si elle date de moins de 5 ans, l'étude est considérée comme ancienne, et on en demande une plus récente ; si elle concerne les collégiens, on demande ce qui se passe pour les lycéens, ou les étudiants, et on explique que le choix de l'échantillon est biaisé, ou qu'il est trop petit pour être représentatif... On a pourtant maintenant une série

d'enquêtes convergentes sur des niveaux et des publics divers, bien qu'il n'y ait pas grand monde pour soutenir ce type d'études ; mais cela ne suffit toujours pas ; on constate un fort biais culturel, assez ancien, contre les sciences et plus particulièrement contre les mathématiques.

3. Les fondements de ce message

Si ce message persiste, c'est qu'il s'appuie sur des faits de nature diverse qui se renforcent. D'abord, des éléments sociologiques sur la formation du personnel médiatique et politique. Ensuite, la place particulière des mathématiques dans la culture française. Enfin, un certain nombre de faits sur l'enseignement des mathématiques et des sciences.

La plupart des personnalités politiques ou médiatiques n'ont fait aucune étude scientifique ; ces responsables pensent aux mathématiques en termes d'échec, et ont du mal à imaginer que l'on puisse s'y intéresser. Il leur semble évident qu'un enseignement d'histoire ou de philosophie est intéressant, et qu'un enseignement de mathématique est ennuyeux et déconnecté de la réalité. Placés face à une étude qui montre que, pour bien des élèves, c'est le contraire, ils refusent de la prendre en compte. Il est d'ailleurs probable, et c'est un fait inquiétant, qu'il en va de même pour une fraction des professeurs des écoles.

De plus, les sciences et les mathématiques ont une place particulière dans la culture française. D'une part, il est socialement admis de parler en public de philosophie, d'histoire ou de littérature, mais considéré comme grossier de parler de mathématiques ou de physique (ce qui n'était pas le cas au siècle de Voltaire et de Condorcet). Cette évolution date du début du XIX^e siècle, et semble débiter avec le romantisme. D'autre part, il y a en France (comme dans d'autres pays) une forme d'anxiété des mathématiques. On s'inquiète régulièrement, à la première page des journaux, de la difficulté à recruter des professeurs de mathématiques, du manque d'ingénieurs, de la fuite des cerveaux en science ; mais personne ne se préoccupe du manque de professeurs de français ou d'anglais. Bien que le bac L baisse depuis 40 ans, et soit féminisé à 78%, c'est des effectifs du bac S, et de son déséquilibre (54% de garçons et 46% de filles) que l'on s'inquiète.

Enfin, il y a un certain nombre de phénomènes négatifs mesurables : les effectifs de la spécialité mathématique en Terminale ont fortement baissé,

comme les effectifs des licences scientifiques. Le niveau scientifique et mathématiques des élèves français, mesuré par les études PISA, a baissé.

Mélanger tout cela donne une explication cohérente, facile à raconter et bien acceptée par le public, même si elle est fautive et ne permet pas de résoudre les problèmes.

4. Déconstruire les explications paresseuses

On sait que les effectifs de la spécialité mathématique en Terminale scientifique ont fortement baissé en 20 ans. Est-ce le signe d'un manque d'attractivité des mathématiques ? Si c'était le cas, les meilleurs élèves, auxquels tous les choix sont ouverts, partiraient les premiers vers d'autres cieux. On constate exactement le contraire : le taux de mentions Bien et Très Bien, et le pourcentage d'élèves en avance ou issus des classes favorisées, tous indicateurs classiques des bons élèves, sont nettement meilleurs en spécialité mathématique : celle-ci est plus attractive que les autres pour les bons élèves. La cause de la baisse est plus prosaïque, et parfaitement connue : la moyenne de mathématiques au bac est inférieure de quelques points aux moyennes de physique-chimie et de SVT ; cette différence, qui n'a aucune raison avouable, fait qu'un élève moyen augmente ses chances en choisissant une autre spécialité. Comme les élèves sont en général bien plus au courant de ce genre de choses que les responsables du système éducatif, ils en tirent les conséquences logiques ; les très bons élèves qui n'ont aucun doute sur leurs capacités à obtenir le bac choisissent en grand nombre la spécialité mathématique, les autres vont voir ailleurs, avec ce résultat paradoxal que, bien que plus difficile à obtenir toutes choses égales par ailleurs, la spécialité mathématique a un meilleur taux de réussite que les autres ! On trouvera tous ces résultats détaillés dans une note de la DEPP NI 05.38, décembre 2005 sur le bac 2003 [2] ; les choses ne semblent pas avoir changé depuis.

Les études PISA, comme les études de la DEPP, ont montré une baisse des capacités des élèves français en mathématiques. Cette baisse a probablement plusieurs causes ; la formation des professeurs des écoles doit jouer un rôle : leur formation en mathématiques et en sciences est plus faible aujourd'hui, pour la plupart, qu'elle ne l'était dans les écoles normales. Il ne s'agit pas d'un problème de sciences, mais d'un problème de sélection et de

formation des enseignants.

Les flux d'entrée en licence de sciences ont été divisés par 2 depuis 1995. On explique cette chute dans la presse, ou dans de multiples rapports dont les premiers ont été soutenus par l'OCDE, par une désaffection pour les sciences. On oublie en général de mentionner que les effectifs de classes préparatoires ont nettement augmenté pendant ce temps, que les IUT n'ont pas connu de baisse notable, et que les masters scientifiques, avec plus de 4% d'une classe d'âge, se portent fort bien. L'explication par le manque d'attractivité des sciences permet d'éviter de se pencher sur d'autres données, telles que le taux de réussite en licence ; une note de la DEPP NI 13.02, avril 2013 [8] montre que, même sans compter les étudiants qui abandonnent après un an, ils sont particulièrement bas. Pourquoi de bons étudiants se dirigeraient-ils vers des études connues pour avoir un fort taux d'échec, un faible accompagnement des étudiants, des débouchés moins bons que les autres filières, pour un temps d'étude plus long ?

Le nombre de candidats au CAPES de mathématiques est tout à fait insuffisant pour permettre de recruter le nombre de postes mis au concours, et la presse s'en est largement fait l'écho. On a moins dit que la situation était pire en lettres classiques, car on effraie moins les gens en leur disant qu'on va manquer de professeurs de latin que de mathématiques, et pas plus brillante dans d'autres domaines, dont l'anglais ; on a préféré mettre l'accent sur le manque d'attractivité des mathématiques. Pourtant, il s'agit là d'un banal désastre de gestion des ressources humaines par des responsables incompetents, résultat prévisible, et d'ailleurs prévu depuis 2010... La seule chose qui distingue les mathématiques et l'anglais d'autres disciplines, c'est que les candidats potentiels à ces deux CAPES peuvent très facilement trouver un emploi ailleurs. Dans ces domaines, des erreurs majeures de politique de recrutement se paient donc immédiatement au prix fort ; rien à voir avec l'attractivité de la discipline.

5. Changer ce qu'on nous reproche

Cette déconstruction est utile pour le milieu lui-même : si nous nous laissons prendre à ces fables, nous ne saurons rien faire d'utile, parce que nous ne nous attaquerons pas aux causes des problèmes. Mais elle n'aura probablement aucun effet en dehors : l'histoire est trop belle et correspond trop bien aux idées reçues. La seule action efficace est

de changer les faits qui la fondent.

Dans certains cas, cela n'est probablement pas très difficile : demander que toutes les matières aient la même moyenne au bac devrait être une évidence, et on s'étonne que cela ne soit pas encore réalisé. De même, on sait parfaitement ce qu'il faut faire pour attirer des candidats au CAPES : publier une programmation, mettre en place des recrutements, stabiliser la formation, améliorer la condition des enseignants. Cela a déjà été fait dans des circonstances semblables ; quand les candidats reviendront, on oubliera le problème du manque d'attractivité, et on passera au problème du trop grand nombre de candidats...

D'autres faits sont plus délicats à modifier : la situation actuelle de la licence résulte d'une longue série d'erreurs que personne ne veut reconnaître ; la première a été de passer de 2 ans à 3 ans pour le premier diplôme, ce qui a immédiatement donné un avantage compétitif aux classes préparatoires et aux IUT, dont le premier diplôme est en deux ans, et à la médecine, où le couperet tombe à la fin de la première année. Il semble que la licence générale est irrémédiablement perdue, puisque personne ne veut rien faire, et que la seule issue pour l'université soit de développer des modèles alternatifs, ce qui commence à se faire. Ce sera difficile, car ces modèles alternatifs ont une durée de vie brève, étant à la merci de la moindre lubie de la DGESIP¹.

Il y a une dernière chose qui conditionne probablement les précédentes, et qui ne dépend que de nous. Un instituteur n'a aucun doute sur la capacité de la très grande majorité de ses élèves à apprendre à lire, et la société qui l'entoure non plus ; et de fait, tous ses élèves apprennent à lire, de façon plus ou moins rapide. On peut remarquer que ce n'était sûrement pas le cas il y a trois siècles. Un professeur d'anglais n'a pas de doute sur la capacité de ses élèves à apprendre l'anglais, s'ils fournissent l'effort nécessaire. Il le sait, parce que tous les anglais savent parler anglais, et parce que des centaines de millions de personnes de toutes origines apprennent l'anglais sur tous les continents ; et comme la société commence à croire la même chose, un nombre beaucoup plus important d'élèves arrive à parler anglais.

Mais il est socialement tout à fait admis de ne rien comprendre en mathématiques, et une majorité pense que les mathématiques sont réservées à

une minorité d'élèves. Ce qui est plus gênant, c'est qu'une partie des enseignants semble penser la même chose, à tous les niveaux ; j'ai eu des discussions avec des collègues de licence qui trouvent normal d'avoir un taux d'échec supérieur à 50%, et considèrent que cela correspond aux capacités des élèves. C'est certainement cela qui explique les faibles moyennes du bac : si les enseignants pensent que les mathématiques sont plus dures que la physique ou la biologie, il est normal que les notes soient plus basses, et ils peuvent même en tirer une certaine satisfaction, puisque cette note renforce leur opinion (même si le barème, et donc la moyenne, n'est que le résultat d'une convention sociale). Or la recherche en éducation (et, plus naïvement, l'observation directe des milieux favorisés) montre que, comme la lecture, les mathématiques sont accessibles à la grande majorité des élèves, si l'enseignement leur est adapté. Je n'ai aucun doute sur la capacité de tous mes étudiants de licence à apprendre, de façon plus ou moins efficace, les mathématiques que je leur enseigne, s'ils fournissent l'effort nécessaire.

Si nous voulons changer l'opinion générale sur l'enseignement des mathématiques, un premier pas est certainement de nous convaincre nous-mêmes que tous nos étudiants sont capables de réussir, si bien sûr ils fournissent le travail nécessaire, et d'organiser l'enseignement dans ce sens : non pas un 100 mètres où l'on ne garde que les premiers, mais une randonnée où tous ceux qui ont fait l'effort arrivent au bout. Quand on lit un enseignant qui explique (dans les commentaires d'un site de mathématiques) qu'il est bon de traumatiser les adolescents avec le formalisme pour les faire progresser en mathématiques, on sent qu'il y a encore des progrès à faire pour permettre à tout le monde d'y arriver.

6. Une remarque finale

Qu'on ne me fasse pas dire ce que je ne dis pas. Si l'attractivité des mathématiques n'est pas le problème, ce n'est pas une raison pour faire des cours ennuyeux. C'est évidemment notre devoir en tant qu'enseignant de rendre notre enseignement plus intéressant pour les élèves, et de multiples initiatives se développent ces dernières années dans ce but.

1. Direction Générale de l'Enseignement Supérieur et de l'Insertion Professionnelle : service qui surveille étroitement, en liaison avec les bureaucraties locales, les enseignements universitaires, et n'a jamais entendu parler de cette fiction que l'on appelle l'autonomie universitaire.

Cette amélioration de l'enseignement passe aussi par une meilleure formation, initiale et continue, des enseignants, en particulier en mathématiques, car rien ne pourra remplacer des connaissances scientifiques approfondies. Quand on a vu un groupe d'élèves essayer de comprendre pourquoi il est naturel de poser que la somme de toutes les puissances de 2 est égale à -1 , ou pourquoi

la dimension de la courbe de von Koch est égale à $\ln 4 / \ln 3$, on sait qu'un cours de mathématiques, quand il est bien fait, peut rivaliser avec un spectacle de prestidigitateur... mais qu'il faut pour cela disposer d'un réservoir de tours propres à intéresser les élèves et à rendre vivantes les notions que l'on enseigne.

Références

- [1] D. BOY. « Support de présentation ». In : *Sciences en société au XXI^e siècle : autres relations, autres pratiques*. 2007. URL : http://sciences-societe.u-strasbg.fr/docs/presentations/1_D_Boy.pdf.
- [2] *Étude docimologique du baccalauréat scientifique*. Note d'information 05-38. DEPP. 2005. URL : <http://www.education.gouv.fr/cid1764/etude-docimologique-du-baccalaureat-scientifique.html>.
- [3] IFOP, éd. *L'intérêt pour le football*. 2010. URL : <http://www.cfem.asso.fr/debats/attractivite-mathematiques/SondageIFOPInteretFoot.pdf>.
- [4] J.-P. JEANTHEAU et F. MURAT, éd. *Les dossiers*. 104. DEPP, 1998. URL : <http://educ-eval.pleiade.education.fr/pdf/dossier104/dossier104.pdf>.
- [5] L. JI. « La poursuite des études scientifiques ou non scientifiques au lycée et à l'université, en Chine et en France ». Sous la direction d'Agnès VAN ZANTEM. Thèse de doct. Institut d'Études Politiques de Paris, 2011. URL : www.cfem.asso.fr/debats/attractivite-mathematiques/TheseLiliJiDEF.pdf.
- [6] F.-X. MARTIN. « Doctorats scientifiques : y a-t-il un retard français ? » *La jaune et la rouge*, n° 686 (2013). URL : <http://www.lajauneetlarouge.com/article/doctorats-scientifiques-y-t-il-un-retard-francais>.
- [7] P. MERLE. « Le rapport des collégiens aux mathématiques et au français ». *Orientat. Sc. Prof.* n° 32/4 (2003), p. 641-668. DOI : 10.4000/osp.2632. URL : <http://osp.revues.org/2632>.
- [8] *Parcours et réussite en licence et en master à l'université*. Note d'information 13-02. DEPP. 2013. URL : <http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid71415/page.html>.



Pierre ARNOUX

Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373, Site Sud, Campus de Luminy, Case 907 13288 Marseille Cedex 9, France.

pierre@pierrearnoux.fr

Pierre Arnoux est professeur au département de mathématiques de l'université d'Aix-Marseille. Il étudie les systèmes dynamiques, plus précisément les liens entre la dynamique symbolique et la théorie des nombres.

Le forum « Mathématiques vivantes : de l'École au Monde »

De mauvaises évaluations dans les enquêtes internationales, des licences de mathématiques qui se vident, des postes de professeurs de mathématiques qui ne sont pas pourvus faute de candidats : il fallait réagir et autrement que par des déclarations de principe, même si la qualité des mathématiques françaises est reconnue partout dans le monde.

Les mathématiques ont la chance d'être représentées au sein d'une structure qui rassemble un

grand nombre d'associations, sociétés savantes (dont la SMF) concernées par l'enseignement des mathématiques : la CFEM (Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques). Dès le mois de juin 2014, tous ses membres ont été d'accord pour lancer l'idée d'une manifestation tournée à la fois vers le grand public et vers les enseignants de mathématiques et leurs formateurs.

Redorer l'image des mathématiques dans la so-

ciété, populariser notre discipline, convaincre les jeunes d'aller vers les études de mathématiques, faire connaître tout ce qui se fait dans l'école et dans sa périphérie pour donner le goût des mathématiques aux jeunes, donner des outils, des pistes, des éléments de réflexion aux professeurs pour participer dans l'école à ce mouvement : voilà ce qu'on voudrait pouvoir faire. Il faut aussi que la richesse des mathématiques puisse nourrir l'enseignement des mathématiques. D'où l'organisation du « Forum des mathématiques vivantes, de l'École au Monde ».

Ce « Forum » aura lieu les 21 et 22 mars 2015¹ à la fin de la semaine des mathématiques, et se tiendra sur 3 sites, « PLM » (comme Paris, Lyon, Marseille), permettant ainsi de rester dans le thème de la semaine « Les Maths nous transportent ». On profitera dans chacune de ces villes de lieux symboliques :

- à Paris avec « le 104 », la BnF (qui fêtera les 10 ans du cycle « Un Texte, Un Mathématicien ») et l'IHP;
- à Lyon avec la Maison des Mathématiques et de l'Informatique et l'Institut Français de l'Éducation au sein de l'ÉNS;
- à Marseille avec l'École de la deuxième chance, le CIRM, des lieux symboliques du centre ville.

Dans ces trois villes, l'une des journées du « Forum »² s'adressera à tous, avec des événements « grand public » :

- présentation des activités d'ateliers Math en Jeans, Hippocampe, math à modeler...;

- rallyes mathématiques ;
- jeux mathématiques ;
- énigmes ;
- exposés grand public ;
- expositions, films ;
- etc.

Avec le thème des « transports » à l'honneur, les entreprises de transports (SNCF, les sociétés de transports publics de Paris, Lyon et Marseille) devraient être présentes lors du forum.

L'autre journée³ sera plus orientée vers l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants :

- MOOC eFAN maths ;
- périscolaire et la vie de la classe : comment l'un peut nourrir l'autre ?
- les mathématiques vivantes d'aujourd'hui : comment les faire rencontrer aux enseignants ? aux élèves ?
- et hors de France, comment ces questions sont-elles abordées ?
- etc.

La SMF soutient et participe à l'organisation de ce Forum. Pour qu'il soit réussi, il faut que les mathématiciennes et les mathématiciens s'impliquent et soient présents. Les doctorants pourront découvrir un aspect du métier de mathématicien : la diffusion et la popularisation des mathématiques.

Notez ces dates et venez nombreux ! Plus d'information sur le site de la CFEM : <http://www.cfem.asso.fr/actualites/forum-mathematiques-vivantes>

1. À Marseille, le Forum débutera dès le vendredi 20 mars par une journée dédiée aux élèves, à l'École de la deuxième chance, avec animations entre autres sur le modèle des forums des mathématiques (Math pour Tous).

2. À Paris et Marseille : le 21 mars, à Lyon le 22 mars.

3. À Paris et Marseille : le 22 mars, à Lyon le 21 mars.



Recrutements et promotions des femmes et des hommes en mathématiques, où en est-on ?

- L. BROZE
- V. DOLEAN

Cette analyse est consacrée à la présence des femmes aux différentes étapes du processus de recrutement et des différents niveaux de carrière sur des postes en mathématiques dans les établissements d'enseignement supérieur.

L'examen de ces chiffres, ou plutôt de leur évolution au fil des années, pourrait donner une idée plus précise d'un phénomène qu'on désire mieux comprendre afin d'améliorer d'une manière générale les pratiques destinées à renforcer la présence des femmes en mathématiques à l'université.

1. La qualification et le recrutement des maîtres de conférences

Commençons par le processus de qualification dans les sections 25 et 26 du CNU. Le nombre des maîtres de conférences qualifiés est resté relativement stable entre 2008 et 2014, tout comme la proportion de femmes parmi les qualifiés (en moyenne 20% dans la section 25 et environ 27% dans la section 26).¹

L'étape suivante est celle du recrutement. En analysant les chiffres des tableaux 3 et 4 page 71 correspondant au recrutement des maîtres de conférences, on voit que la proportion des femmes recrutées est assez semblable à celle des femmes qualifiées, sauf en 2010 et 2011 en section 25 (en défaveur des femmes), et en 2008 et 2011 en section 26 où les écarts sont plus importants (en 2008

en faveur des femmes et en 2011 en leur défaveur). Dans tous les cas, l'âge moyen des nouvelles et nouveaux recrutés est relativement semblable et assez stable, se situant autour des 30 ans.

2. La qualification et le recrutement des professeurs

Au niveau professeur, le nombre des qualifiés est également stable, tout comme l'est la proportion de femmes (environ 15% dans la section 25 et 20 à 22% dans la section 26).

La situation est particulièrement tendue dans le cas des recrutements sur un poste de professeur. Le nombre de femmes recrutées en section 25 est en chute libre depuis quelques années, les dernières années ont connu en effet le recrutement d'une ou de deux femmes maximum pour environ une vingtaine de postes. Ce phénomène est d'autant plus choquant que le nombre de femmes qualifiées est en légère augmentation.

Même en section 26 où la situation est bien plus favorable (proportion de femmes entre 14 et 18% selon les années, et même 24% et 26% en 2010 et 2013 respectivement), le nombre de femmes ne correspond pas à ce qu'on pourrait attendre à la suite de la campagne de qualification pour ces postes. En section 26 les âges moyens de recrutement des hommes et des femmes sont à peu près comparables. En section 25, l'âge de recrutement des femmes est supérieur à celui des hommes (mais

1. Les données qui suivent ont été compilées à partir de rapports de la DGRH du MENESR, de rapports des CNU 25 et 26 ou de données figurant sur le site Galaxie. Lorsqu'une case est vide, cela signifie que la donnée n'est pas (ou pas encore) disponible. Des tableaux plus détaillés et mis à jour se trouvent sur le site www.femmes-et-maths.fr, onglet statistiques.

TABLEAU 1 – Qualification des maîtres de conférences section 25

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Examinés							
H	203	222	179	172	177	212	199
F	37	49	51	40	52	43	54
Total	240	271	230	212	229	255	253
Qualifiés							
H	187	203	158	164	172	200	187
F	33	46	49	37	51	42	51
Total	220	249	207	201	223	242	238
% femmes	15%	18%	24%	18%	23%	17%	21%
Taux de qualification							
H	92%	91%	88%	95%	97%	94%	94%
F	89%	94%	96%	93%	98%	98%	94%

TABLEAU 2 – Qualification des maîtres de conférences section 26

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Examinés							
H	189	215	204	223	216	261	269
F	84	96	71	85	89	97	119
Total	273	311	275	308	305	358	388
Qualifiés							
H	172	179	185	211	192	218	215
F	75	77	64	78	79	72	95
Total	247	256	249	289	271	290	310
% femmes	30%	30%	26%	27%	29%	25%	31%
Taux de qualification							
H	91%	83%	91%	95%	89%	84%	80%
F	89%	80%	90%	92%	89%	74%	80%

on ne parle ici que d'une ou deux femmes).

3. Les promotions

Les promotions peuvent être attribuées par deux voies : le CNU ou la voie locale. En globalisant ces deux voies, on obtient pour 2014 :

Une analyse plus fine peut être menée sur la base des données détaillées qui sont disponibles sur le site www.femmes-et-maths.fr, onglet statistiques. On peut consulter les taux de succès par les différentes voies, les taux de candidatures, etc.

Jusqu'en 2009, les candidatures comptabilisées étaient uniquement celles qui étaient examinées par le CNU, il n'y avait pas de recensement des candidatures à une promotion par la voie locale. Depuis 2010, le dossier de candidature aux promotions par

le CNU ou par la voie locale est unique (déposé sur un site Web du ministère). Sauf demande expresse des candidats (c'est le cas par exemple des collègues qui sont membres des CNU 25 ou 26, une motion de non promotion des membres a été votée par ces sections en début de mandat en 2011), tous les dossiers de candidature sont examinés d'abord par le CNU, puis par les instances locales.

Nous reprenons ci-dessous quelques éléments concernant, pour 2014, les deux catégories les plus nombreuses : les maîtres de conférences hors classe et les professeurs de première classe.

TABLEAU 3 – Recrutement des maîtres de conférences section 25

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
H	32	43	34	45	30	24
F	6	11	6	6	10	6
Total	38	54	40	51	40	30
% F	16%	20%	15%	12%	25%	20%
Âge moyen						
H	29 a. 9 m.	30 a. 8 m.	30 a. 1 m.	30 a. 8 m.	30 a. 2 m.	30 a. 11 m.
F	29 a. 6 m.	31 a. 2 m.	29 a. 8 m.	30 a. 4 m.	31 a. 1 m.	29 a. 3 m.

TABLEAU 4 – Recrutement des maîtres de conférences section 26

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
H	39	48	54	52	37	32
F	27	19	17	12	16	11
Total	66	67	71	64	53	43
% F	41%	28%	24%	19%	30%	26%
Âge moyen						
H	30 a. 3 m.	29 a. 10 m.	30 a. 2 m.	30 a. 2 m.	31 a.	30 a. 3 m.
F	30 a. 6 m.	30 a. 1 m.	30 a. 9 m.	29 a. 5 m.	33 a. 3 m.	30 a. 5 m.

TABLEAU 5 – Qualification des professeurs section 25

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Examinés							
H	99	119	85	88	90	98	90
F	15	22	13	11	16	19	18
Total	114	141	98	99	106	117	108
Qualifiés							
H	87	101	78	86	88	94	85
F	14	19	11	11	16	18	15
Total	101	120	89	97	104	112	100
% femmes	14%	16%	12%	11%	15%	16%	15%
Taux de qualification							
H	88%	85%	92%	98%	98%	96%	94%
F	93%	86%	85%	100%	100%	95%	83%

3.1 – Les promotions à la hors-classe des maîtres de conférences

Pour les candidats maîtres de conférences éligibles qui n'ont pas franchi le cap de la promotion à un poste de professeur, il reste souvent en dernier recours la possibilité d'être promu à la hors-classe, par le CNU ou par la voie locale. On enregistre généralement un nombre très faible de candidatures. On constate aussi que la voie locale a souvent été plus favorable aux femmes que le CNU.

En section 25, en 2014, 67% des femmes et 72% des hommes promouvables n'étaient pas candidats à une promotion. 4 femmes et 10 hommes ont obtenu une promotion par le CNU et 5 femmes et 11 hommes l'ont obtenue par la voie locale.

En section 26, 64% des promouvables n'étaient pas candidats à une promotion, aussi bien pour les femmes que pour les hommes. *Une seule* femme et 21 hommes ont été promus par le CNU. 5 femmes et 9 hommes ont été promus localement.

TABLEAU 6 – Qualification des professeurs section 26

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Examinés							
H	102	90	70	93	98	93	100
F	17	29	23	20	28	30	31
Total	119	119	93	113	126	123	131
Qualifiés							
H	94	78	62	84	86	73	83
F	15	22	21	16	25	24	27
Total	109	100	83	100	111	97	110
% femmes	14%	22%	25%	16%	23%	25%	25%
Taux de qualification							
H	92%	87%	89%	90%	88%	78%	83%
F	88%	76%	91%	80%	89%	80%	87%

TABLEAU 7 – Recrutement des professeurs section 25

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
H	28	20	19	24	25	12
F	4	4	2	2	1	1
Total	32	24	21	26	26	13
% F	13%	17%	10%	8%	4%	8%
Âge moyen						
H	39 a.	38 a.	38 a. 4 m.	38 a. 3 m.	40 a.	37 a. 4 m.
F	39 a.	41 a.	41 a. 6 m.	40 a. 6 m.	42a.	51 a.

TABLEAU 8 – Recrutement des professeurs section 26

	2008	2009	2010	2011	2012	2013
H	30	23	19	18	18	17
F	4	3	6	4	3	6
Total	34	26	25	22	21	23
% F	12%	12%	24%	18%	14%	26%
Âge moyen						
H	38 a. 10 m.	38 a. 1 m.	39 a.	37 a. 11 m.	41 a. 8 m.	36 a. 7 m.
F	36 a.	48 a.	38 a. 2 m.	39 a. 6 m.	40 a.	37 a. 2 m.

3.2 – Les promotions à la première classe des professeurs

En section 25, les femmes professeures sont peu nombreuses et leur nombre ne fait que diminuer, passant de 50 en 1996 à 36 en 2013. Le nombre trop faible de recrutements qui a été indiqué précédemment ne peut suffire à compenser les départs en retraite. Le nombre de femmes promouvables est donc très petit. En 2014, 7 femmes (sur 14 promouvables) et 72 hommes (sur 175 promouvables)

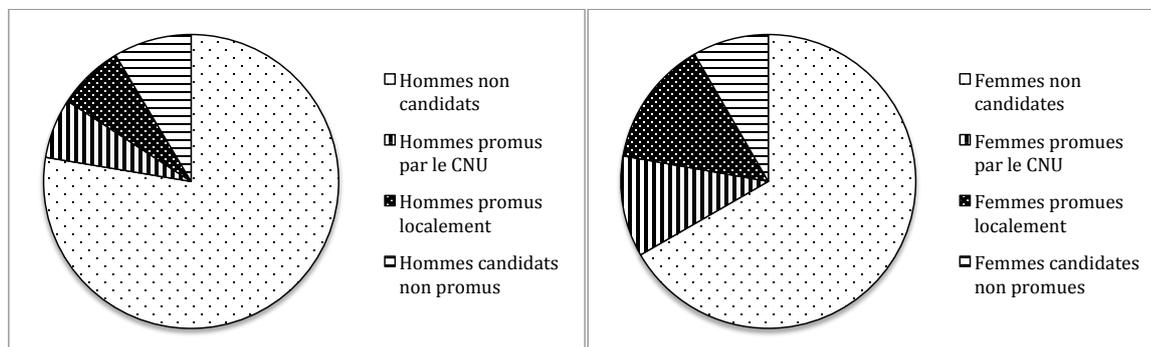
étaient candidats à une promotion à la première classe. 4 femmes ont été promues par le CNU et aucune par la voie locale. 10 hommes ont été promus par le CNU et 14 localement. Depuis 2009, en moyenne annuelle, 14% des femmes et 11% des hommes promouvables ont été promus.

En section 26, les pourcentages de candidatures sont un peu plus élevés qu'en section 25, aussi bien pour les femmes que pour les hommes. Le taux de promotion est toutefois plus défavorable aux femmes : depuis 2009, en moyenne annuelle, 12%

TABLEAU 9 – Promotions 2014

Maths fondamentales (section 25)	H	F	Total	% femmes
Maîtres de conf. hors-classe	21	9	30	30%
Prof. première classe	24	4	28	14%
Prof. classe except. 1 ^{er} échelon	17	0	17	0%
Prof. classe except. 2 ^e échelon	7	0	7	0%
Maths appliquées (section 26)	H	F	Total	% femmes
Maîtres de conf. hors-classe	30	6	36	17%
Prof. première classe	32	4	36	11%
Prof. classe except. 1 ^{er} échelon	13	5	18	28%
Prof. Classe except. 2 ^e échelon	15	0	15	0%

FIGURE 1 – Promotions à la hors-classe en section 25



des femmes et 15% des hommes promouvables ont été promus. En 2014, 16 femmes (sur 39 promouvables) et 85 hommes (sur 183 promouvables) étaient candidats à une promotion à la première classe. 2 femmes ont été promues par le CNU et 2 par la voie locale. 14 hommes ont été promus par le CNU et 18 localement.

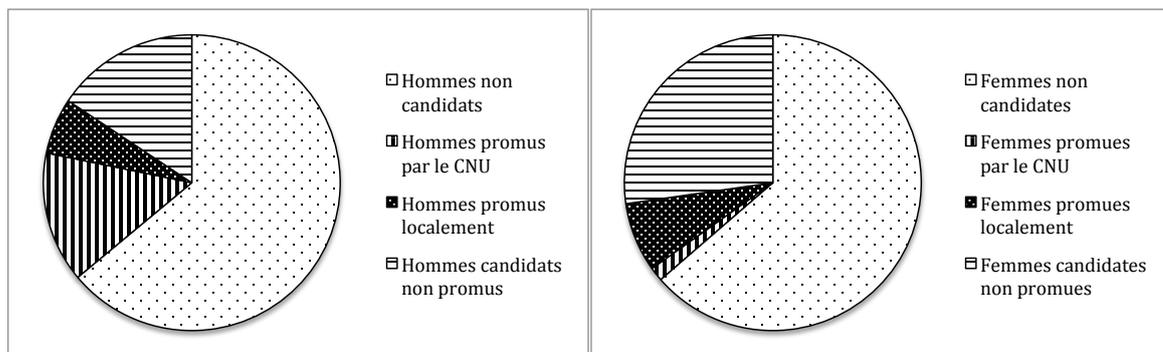
4. En guise de conclusion

Une conclusion des données précédentes pourrait être que les proportions demeurent correctes dans la première phase de recrutement des maîtres de conférences par rapport au nombre de femmes présentes dans l'environnement scientifique. La suite de l'histoire est moins évidente ; au-delà des exceptions dues aux particularités des différentes années, on ne peut que constater l'existence d'un plafond de verre : la proportion de femmes qualifiées aux fonctions de professeur ne se retrouve pas dans l'échelon supérieur. Le rapport du nombre de recrutés au nombre de qualifiés est plus important pour les hommes que pour les femmes.

En section 25, le nombre de femmes qualifiées au niveau professeur reste faible et le nombre de femmes recrutées est dérisoire alors même que les besoins pour compenser les départs en retraite des dernières normaliennes issues des écoles non mixtes sont importants. Sans action volontariste pour inciter les femmes à entreprendre une habilitation à diriger des recherches et pour amener les comités de sélection à être plus attentifs aux candidatures des femmes, la disparition totale des femmes professeures paraît inéluctable. Rappelons en effet qu'il ne reste que 36 femmes professeures en section 25, représentant 6,7% des effectifs (voir site www.femmes-et-maths.fr, onglet statistiques, pour l'ensemble des derniers chiffres disponibles).

Comment se fait-il que lors d'un processus de promotion à la hors-classe des maîtres de conférences par une commission unique (le CNU), le nombre de femmes atteint des extrêmes difficilement compréhensibles (1 en section 26 en 2014 et 1 en section 25 en 2013!) ? Les femmes, si elles commencent des carrières au même niveau que les hommes, sont victimes en mathématiques, comme

FIGURE 2 – Promotions à la hors-classe en section 26



ailleurs, du phénomène du plafond de verre : promues plus tard lorsqu'elles sont promues, ou jamais promues.

La compréhension de ces phénomènes requiert donc une étude plus approfondie, prenant en compte un ensemble de facteurs qualitatifs, allant bien au-delà des analyses de chiffres et constats

de tendances effectués au fil des années. Une fois que l'on a posé que, comme sur l'ensemble du marché du travail, des mécanismes de discrimination sont certainement actifs, il reste la question de la spécificité des mathématiques. Pourquoi la situation est-elle plus grave en mathématiques que dans les autres sciences ? Il revient à la communauté mathématique de s'emparer de la question.



Laurence BROZE

Laboratoire EQUIPPE, EA 4018, université de Lille, UFR MIME, BP 60149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France

laurence.broze@univ-lille3.fr

Laurence Broze est professeure à l'université Lille 3 et présidente de l'association femmes et mathématiques. Ses thèmes de recherche sont la statistique, l'économétrie et les modèles dynamiques.



Victorita DOLEAN

Laboratoire J-A Dieudonné, université de Nice-Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2, France
dolean@unice.fr

Victorita Dolean est maître de conférence à l'université de Nice-Sophia Antipolis, actuellement en détachement à l'université de Strathclyde à Glasgow. Ses thèmes de recherche sont l'analyse numérique et le calcul scientifique.



... une période

• M. WALDSCHMIDT

Il y a beaucoup de nombres réels, beaucoup trop ; plutôt que d'avoir quelques informations sur tous ces nombres, on aimerait en savoir davantage sur les plus intéressants d'entre eux. Définir une classe de nombres qui soient spécialement dignes d'intérêt n'est pas aisé. On veut que tous les nombres algébriques en fassent partie. En contrepartie, il semble naturel de ne considérer qu'un ensemble dénombrable. Les nombres transcendants qui vont être élus pour faire partie de cet ensemble proviennent de l'analyse classique et de la géométrie.

En théorie des fonctions d'une variable complexe, une *période* d'une fonction $f(z)$ est un nombre ω tel que les fonctions $f(z)$ et $f(z + \omega)$ coïncident. La période est le temps qui s'écoule entre deux évènements qui se répètent à intervalles réguliers - ce sont les mouvements périodiques ! On peut, au moins dans un premier temps, prendre pour fonctions f des fonctions méromorphes complexes d'une variable complexe. Pour restreindre la classe de fonctions étudiées, on suppose que f satisfait à une équation différentielle. Cela permet d'écrire une période ω comme une intégrale. L'exemple de base est le nombre $2i\pi$, période fondamentale de la fonction exponentielle e^z :

$$e^{z+2i\pi} = e^z,$$

avec l'équation différentielle $f'(z) = f(z)$ qui fournit une expression de $2i\pi$ comme une intégrale

$$2i\pi = \int_{|t|=1} \frac{dt}{t}.$$

Les périodes de la fonction exponentielle sont les éléments du réseau $2i\pi\mathbb{Z}$. Un autre exemple provient des fonctions elliptiques \wp de Weierstrass, solutions d'équations différentielles

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

avec g_2 et g_3 nombres complexes tels que le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ du polynôme en \wp au second membre ne s'annule pas, de sorte que $4t^3 - g_2t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)$ avec e_1, e_2 et e_3 deux à deux distincts. Les périodes de \wp forment encore un réseau $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, cette fois-ci en dimension 2, un couple fondamental de périodes étant donné par les intégrales elliptiques

$$\omega_i = 2 \int_{e_i}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} \quad (i = 1, 2).$$

Plus généralement, il est possible d'associer des périodes, admettant des expressions similaires (« intégrales abéliennes »), à toute variété abélienne, en considérant leurs points complexes et en les identifiant à des tores complexes.

C'est ainsi que va apparaître la première définition d'une période par Kontsevich et Zagier [6] : ils considèrent toutes les intégrales convergentes de fonctions algébriques, en imposant que tout soit défini sur le corps des nombres rationnels. Le domaine d'intégration doit être défini par des égalités et des inégalités ne faisant intervenir que des fractions rationnelles à coefficients rationnels. Les fonctions algébriques que l'on intègre doivent également être définies par des équations polynomiales à coefficients rationnels. Une période est alors définie comme un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire vérifient ces conditions. Les nombres algébriques sont des périodes : l'écriture de $\sqrt{2}$ sous forme de l'intégrale réelle

$$\frac{1}{2} \int_{t^2 < 2} dt$$

s'étend facilement pour écrire tout nombre algébrique comme une période. Comme la somme de périodes et le produit de périodes sont encore des périodes, on obtient une sous-algèbre \mathcal{P} de \mathbb{C} sur le corps des nombres algébriques.

Il est fréquent, en théorie des nombres, que des problèmes soient faciles à formuler mais que les réponses défient les méthodes connues. C'est ce qui se passe ici : cet ensemble \mathcal{P} , défini de façon naturelle et élémentaire, recèle de nombreux mystères qui révèlent à quel point nos connaissances sont limitées. Une première question ouverte est de savoir si cette algèbre est un corps. On soupçonne que non — par exemple on s'attend à ce que $1/\pi$ ne soit pas une période. Mais on dispose de peu de moyens pour démontrer qu'un nombre n'est pas une période (voir [11]), et on ne connaît pas d'exemple d'un nombre défini par une série ou une intégrale convergente simple, dont on puisse démontrer qu'il n'est pas dans \mathcal{P} . La constante de Chaitin [4] est un exemple de nombre qui n'est pas calculable, donc qui n'est pas une période, mais on ne peut pas dire que ce soit une constante qui apparaît naturellement en analyse.

En revanche, on connaît explicitement un bon nombre d'éléments de \mathcal{P} . Nous avons dit que les nombres algébriques sont des périodes. De même, tout logarithme d'un nombre algébrique est une période, l'exemple le plus simple étant

$$\ln 2 = \int_{1 < t < 2} \frac{dt}{t}.$$

Les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs, et plus généralement les valeurs des polyzêtas (valeurs zêta multiples étudiées par Euler, Zagier et beaucoup d'autres) sont des périodes. Comme \mathcal{P} est une algèbre sur le corps des nombres algébriques, toute combinaison linéaire à coefficients algébriques de logarithmes de nombres algébriques est encore une période. Ces nombres sont appelés *périodes de Baker* par certains auteurs [8]. Un résultat fondamental obtenu par A. Baker en 1968 est que tout nombre de la forme

$$\beta_1 \ln \alpha_1 + \dots + \beta_m \ln \alpha_m$$

avec des α_i et des β_j algébriques est nul ou transcendant. De plus, un tel nombre ne peut s'annuler que dans des cas triviaux (s'il s'annule, alors les nombres $\ln \alpha_i$ sont linéairement dépendants sur le corps des nombres rationnels). Démontrer qu'un nombre transcendant n'est pas dans cette classe des nombres de Baker est de nouveau un problème difficile : ici encore, on dispose de peu de moyens pour y parvenir. Comme le produit de périodes est encore une période, la valeur de tout polynôme à coefficients rationnels en un point dont les coordonnées sont des logarithmes de nombres algébriques

est encore une période. Déterminer les conditions sous lesquelles un tel nombre peut s'annuler est un des principaux problèmes ouverts de la théorie des nombres transcendants (c'est un cas particulier de la conjecture de Schanuel); on s'attend à un résultat facile à énoncer : la conjecture est que des logarithmes \mathbb{Q} -linéairement indépendants de nombres algébriques sont algébriquement indépendants.

La conjecture principale de [6] énonce que toute égalité entre périodes découle des transformations élémentaires sur les intégrales : additivité, changement de variables, formule de Stokes. Ce n'est pas le seul problème ouvert. Que l'algèbre \mathcal{P} contienne un sous-ensemble infini formé d'éléments algébriquement indépendants ne semble pas encore démontré. On peut aussi s'attendre à ce qu'aucune période ne soit un nombre de Liouville — de manière plus ambitieuse, les périodes devraient, pour l'essentiel, avoir des propriétés diophantiennes génériques (i.e., partagées par presque tous les nombres réels au sens de la mesure de Lebesgue — cf. [3]). Une notion de degré de périodes a été introduite par Wan Jianming [10] : le degré d'une période réelle p est la dimension minimale d'un domaine Σ de l'espace euclidien défini par des inégalités polynomiales à coefficients algébriques tel que

$$p = \int_{\Sigma} 1.$$

Les périodes de degré ≤ 2 sont les nombres de la forme

$$a \operatorname{Arctan} \xi + b \ln \eta + c$$

avec a, b, c, ξ, η algébriques. On ne connaît pas encore explicitement de période dont on puisse démontrer qu'elle est de degré > 2 .

La définition ci-dessus d'une période n'est pas la plus commode pour travailler avec cette algèbre \mathcal{P} . Kontsevich et Zagier [6] donnent une autre définition des périodes comme une intégrale $\int_C \omega$ faisant intervenir une variété quasiprojective lisse X , une sous-variété Y de X , une n -forme algébrique fermée ω sur X s'annulant sur Y , le tout étant défini sur le corps des nombres algébriques, et une n -chaîne singulière C sur $X(\mathbb{C})$ dont le bord est contenu dans $Y(\mathbb{C})$. Ils affirment que cette définition, apparemment plus générale, est équivalente à la première, mais l'équivalence n'est pas immédiate : les détails de la démonstration ont fait l'objet d'un mémoire de Diplomarbeit par Benjamin Friedrich [5] qui analyse finement les liens entre différentes notions de période.

On voulait définir une classe de nombres dignes d'intérêt ; \mathcal{P} représente une première étape dans cette direction, mais le but n'est pas encore pleinement atteint. On s'attend à ce qu'un nombre comme e , valeur au point 1 de la fonction exponentielle, ne soit pas une période. Il est naturel d'étendre la classe \mathcal{P} en définissant des *périodes exponentielles*, ce que fait Kontsevich dans la dernière partie de [6] dont il est l'unique auteur. La constante d'Euler est un exemple de période exponentielle (voir [9]), mais d'autres constantes mathématiques classiques ne sont probablement pas des périodes exponentielles, et il faudra élaborer une hiérarchie de sous-ensembles de \mathbb{C} , de façon à réaliser la prédic-

tion de Kontsevich [6] : « toute constante classique est, en un sens convenable, une période ».

Un des aspects les plus fascinants lié à cette notion de période, à peine évoqué ici, réside dans les développements sophistiqués auxquels elle conduit, en liaison avec des conjectures de A. Grothendieck et Y. André, et des travaux récents de F. Brown [7] et J. Ayoub [2]. La notion de période joue un rôle clé dans la recherche d'une généralisation aux nombres transcendants de la théorie de Galois, culminant avec le groupe de Galois cosmique prédit par P. Cartier, comme cela est décrit par Y. André dans [1].

Références

- [1] Y. ANDRÉ. « Idées galoisiennes ». In : Y. ANDRÉ et al. *Histoires de Mathématiques X-Ups 2011. Journées mathématiques X-UPS 2011*. Sous la dir. de P. HARINCK, A. PLAGNE et C. SABBAH. École Polytechnique, 2011.
- [2] J. AYOUB. « Periods and the conjectures of Grothendieck and Kontsevich-Zagier ». *Eur. Math. Soc. Newsl.* **91** (2014), p. 12–18.
- [3] Y. BUGEAUD. *Approximation by algebraic numbers*. **160**. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2004, p. xvi+274. doi : 10.1017/CB09780511542886.
- [4] G. CHAITIN. « How real are real numbers? » *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **16**, n° 6 (2006), p. 1841–1848. doi : 10.1142/S0218127406015726.
- [5] B. FRIEDRICH. *Periods and algebraic deRham cohomology*. 2005. arXiv : math/0506113.
- [6] M. KONTSEVICH et D. ZAGIER. « Periods ». In : *Mathematics unlimited—2001 and beyond*. Berlin : Springer, 2001, p. 771–808.
- [7] S. MÜLLER-STACH. « What is... a period? » *Notices Amer. Math. Soc.* **61**, n° 8 (2014), p. 898–899. doi : 10.1090/noti1159.
- [8] M. R. MURTY et P. RATH. *Transcendental Numbers*. New York : Springer, 2014. 217 p.
- [9] T. RIVOAL. « On the arithmetic nature of the values of the gamma function, Euler's constant, and Gompertz's constant ». *Michigan Math. J.* **61**, n° 2 (2012), p. 239–254. doi : 10.1307/mmj/1339011525.
- [10] J. WAN. *Degrees of periods*. 2011. arXiv : 1102.2273 [math.NT].
- [11] M. YOSHINAGA. *Periods and elementary real numbers*. 2008. arXiv : 0805.0349 [math.AG].



Michel WALDSCHMIDT

UPMC Univ Paris 06, UMR 7586-IMJ, F-75005 Paris, France
 michel.waldschmidt@imj-prg.fr
<http://www.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt>

Michel Waldschmidt est Professeur émérite de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) où il a enseigné durant 40 années. Ses travaux portent surtout sur des questions diophantiennes, en particulier sur la théorie des nombres transcendants. Il milite activement pour permettre aux pays en développement d'avoir de bons mathématiciens à tous les niveaux, y compris au niveau de la recherche.



Bilan de la session PEDR 2014 du CNU, sections 25 et 26

1. Section 25

Depuis cette année, la Prime d'Excellence Scientifique est redevenue Prime d'Encadrement Doctoral. La PEDR reste attribuée par les établissements, mais ceux-ci peuvent faire appel soit à des experts extérieurs, soit à l'instance nationale (le CNU). Les conditions d'attribution ont peu changé puisque

[...] Elle peut être accordée aux personnels dont l'activité scientifique est jugée d'un niveau élevé au regard notamment de la production scientifique, de l'encadrement doctoral et scientifique, de la diffusion de leurs travaux et des responsabilités scientifiques exercées. Elle peut également être attribuée aux personnels apportant une contribution exceptionnelle à la recherche. Elle est attribuée aux personnels lauréats d'une distinction scientifique de niveau international ou national conférée par un organisme de recherche dont la liste est fixée par arrêté du ministre chargé de la recherche. [...] La prime d'encadrement doctoral et de recherche est attribuée de plein droit aux enseignants-chercheurs placés en délégation auprès de l'Institut universitaire de France. [...] (Décret n° 2009-851 du 8 juillet 2009, Art. 1 et Art. 2)

Selon les instructions reçues du ministère, la PEDR est attribuée de droit aux lauréats de distinctions scientifiques (cette attribution de droit ne peut intervenir qu'une seule fois au titre de chaque prix) ainsi qu'aux membres de l'IUF qui ne doivent donc pas soumettre de dossier au CNU, mais directement auprès de leur établissement.

Les dossiers MCF et PR ont, conformément aux instructions du ministère, été examinés séparément et répartis selon le contingentement imposé par le ministère : 20% de « A », 30% de « B » et 50% de « C ». Le calcul du contingentement est fait par le

ministère sur l'ensemble des candidats (MCF + PR) mais a été refait au niveau de notre section pour chaque catégorie afin de respecter les poids respectifs des deux catégories (au prorata des candidatures).

En sus du classement global, l'évaluation des dossiers porte aussi sur quatre critères : Publications et production scientifique, Encadrement doctoral et scientifique, Diffusion des travaux et Responsabilités scientifiques, pour lesquels les avis peuvent être « A » : De la plus grande qualité, B : Satisfait pleinement aux critères, C : Doit être consolidé en vue d'une prime, D : Insuffisamment renseigné. Ces avis ne sont pas contingentés.

L'évaluation s'est concentrée principalement sur les quatre années 2010-2013. Les quatre critères mentionnés ci-dessus n'ont pas le même poids dans l'évaluation, les deux premiers ayant été considérés comme plus importants. Les exigences diffèrent selon le profil et l'âge du candidat : on n'attend pas la même chose en termes d'encadrement doctoral ou de responsabilités scientifiques d'un MCF débutant que d'un MCF plus expérimenté ou d'un PR2 que d'un PREx.

Le choix de respecter les quotas à l'intérieur de chaque catégorie (qui est propre à la communauté mathématique) conduit à un niveau d'exigence extrêmement élevé pour les PR. Nous avons fait le choix de ne pas distinguer dans la discussion les diverses catégories de PR. Au vu des résultats (cf. chiffres ci-dessous), ce choix est peut-être mauvais, même si un équilibre (A+B versus C) reste finalement respecté, et devra être rediscuté.

Nous avons fait notre possible pour arriver au résultat le plus juste et impartial possible. Le niveau des candidatures est très bon et nous voulons insister sur le fait qu'être classé « C » n'a pas d'autre signification, aussi bien en MCF qu'en PR, que « le dossier du candidat n'a pas été considéré comme faisant partie des 50% meilleurs du point de vue des critères d'attribution de la PEDR mentionnés ci-dessus ». Nous insistons donc sur le fait que notre

classement ne reflète en aucun cas une évaluation absolue de la qualité des candidats, mais bien une tentative d'évaluation relative et comparative des candidatures qui nous étaient soumises. De nombreux très bons candidats ont ainsi dû, à la suite de choix difficiles, être classés « C ». Le taux de candidatures est plutôt faible (un calcul grossier donne environ 20% de candidatures parmi le vivier potentiel). Si on considère (ce qui n'est probablement pas très éloigné de la réalité) que parmi les candidats potentiels beaucoup parmi les meilleurs postulent, on obtient un taux de succès pour les « A » de 4% et de 6% pour les classés « B »!!!

Quelques chiffres.

- Il y avait 129 candidats en MCF :
 - 106 hommes et 23 femmes (82%/18%);
 - 100 Classe Normale, 29 Hors Classe (78%/22%);
 - 26 « A » : 19 hommes, 7 femmes (73%/27%), 21 CN, 5 HC (81%/19%);
 - 39 « B » : 35 hommes, 4 femmes (90%/10%), 35 CN, 4 HC (90%/10%);
 - 64 « C » : 52 hommes, 12 femmes (81%/19%), 44 CN, 20 HC (69%/31%).
- Il y avait 95 candidats en PR :
 - 89 hommes et 6 femmes (94%/6%) : 19 « A », 28 « B » et 48 « C »;
 - PR2 : 37 candidats : 4 « A », 14 « B », 19 « C »;
 - PR1/PRex : 61 candidats : 15 « A », 14 « B », 29 « C ».

Les membres du bureau du CNU 25 présents : V. Blanloeil, N. Burq, S. Chemla et E. Godelle.

2. Section 26

En 2014, les anciennes PES (Prime d'Excellence Scientifique) ont été transformées en PEDR (Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche). Jusqu'en 2013 l'évaluation des dossiers de candidats était faite par une commission, nommée par le ministère, chargée des candidats relevant des sections 25 et 26. À partir de 2014 ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2014 toutes les universités l'ont fait sauf 8 établissements (Universités d'Aix Marseille, de Franche Comté, Clermont-Ferrand 1, de Corte, Lille 2, Toulouse 1, UPMC et l'École pratique des hautes études).

La 26^e section s'est réunie deux jours les 16 et 17 septembre 2014 à Paris pour expertiser les dossiers.

Le présent texte a pour but d'expliquer les principes utilisés par le CNU26 pour rendre compte de son travail de 2014 mais aussi pour guider les candidats des années futures et permettre aux représentants de la section 26 dans les conseils d'établissements de prendre en compte au mieux cette évaluation.

2.1 – Mise en place de la réforme transformant les PES en PEDR

Pendant une grande partie de l'année universitaire 2013/2014, la mise en place pratique de l'évaluation des PEDR par le CNU n'était pas clairement définie. Les modalités précises d'intervention des CNU n'ont été connues qu'en mai 2014. Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. Il a été un moment question que les CNU puissent nommer cette commission et choisir des membres extérieurs au CNU. C'est pourquoi lors de la session de février 2014, le CNU 26 a choisi un de ses membres, Arnaud Guillin pour mettre en place cette commission. En février 2014 il a été aussi clairement décidé que si dans un couple titulaire/suppléant du CNU26, l'un intervenait pour la session de promotion de mai 2014 ce serait l'autre qui siégerait pour les PEDR en septembre 2014. Lors de cette session de février 2014 le CNU a aussi adopté la motion suivante.

Le CNU 26 considère que le système de primes ne saurait à lui seul remédier à la dégradation des carrières dans l'enseignement supérieur et la recherche. Concernant la PEDR, le CNU 26 est très réservé sur le processus d'attribution des primes. En effet, le CNU est chargé de l'évaluation contingentée des dossiers de candidature au niveau national mais il ne maîtrise pas son attribution, décidée in fine exclusivement au niveau local.

Ce n'est qu'en mai 2014 que la réglementation a été précisée : il est apparu que ce serait en fait le CNU plénier qui devrait faire l'expertise des PEDR, que les PEDR des MCF et PR devaient être attribuées séparément.

2.2 – Cadre général

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories A, B, C imposées par le

ministère avec des quotas stricts : 20% de A, 30% de B et 50% de C. Ces quotas doivent être respectés de manière globale sur tous les candidats Professeurs et Maître de Conférences. L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années (et en aucun cas sur l'ensemble de la carrière).

Hormis le classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attribuer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) ou D (Insuffisamment renseigné) correspondant aux quatre critères suivants

- P : Publications/production scientifique,
- E : Encadrement doctoral et scientifique,
- D : Diffusion des travaux,
- R : Responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories A, B ou C et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Les informations remontées (malheureusement partiellement) des universités ont montré une grande disparité concernant l'utilisation des notes fournies par le CNU pour cette attribution finale.

2.3 – Recommandations aux candidats

Le CNU26 avait rendu public dès avril 2014 sur le site du CNU <http://www.cpcnu.fr/web/section-26> et sur le site <http://cnu26.emath.fr/> des conseils aux candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques P, E, D et R. Il est utile de rappeler ci-dessous ces recommandations qui pouvaient être connues des candidats au moment du dépôt de leur dossier.

1. Parmi ces quatre rubriques, la production scientifique jouera un rôle prépondérant dans l'évaluation des dossiers. La publication d'articles dans des revues sélectives joue un rôle important dans l'évaluation de la production scientifique, la qualité des articles étant plus importante que leur nombre, les brevets et logiciels éventuels auront une influence importante.
2. Pour l'encadrement doctoral, le nombre et le taux d'encadrement des thèses est un élément d'appréciation central mais également le devenir des docteurs. Pour les MCF

l'encadrement de mémoires de M2, le co-encadrement de thèses seront considérés.

3. Pour les responsabilités scientifiques seront considérées les activités de direction de grands programmes, organisation de congrès, directions d'unités de recherche, d'écoles doctorales, responsabilités de masters, de contrats industriels ou publics.
4. Pour le rayonnement seront considérées les activités éditoriales, invitations dans des universités étrangères, expertises nationales ou internationales et les participations à des jurys de thèse ou d'HDR.

Ces quatre rubriques seront évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartienne à l'une des trois catégories suivantes : MCF, PR2 ou PR1-PREX.

Pour les maîtres de conférences récemment nommés (dans les six dernières années) les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens. Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire, etc. sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (E) et responsabilités scientifiques (D) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilités administratives ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il n'est pas du ressort de la PEDR de récompenser une activité administrative particulièrement intense (non accompagnée d'une production scientifique brillante) mais il est anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives. La même analyse sera appliquée aux MCF « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Pour son évaluation, le CNU s'attachera quasi exclusivement à l'examen des activités dans les quatre dernières années.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis

clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

2.4 – Expertise des PEDR 2014

Il y avait 321 demandes de PEDR (181 pour les MCF et 140 pour les PR). Le CNU 26, lors de son assemblée plénière de mai 2014 (session Promotions), avait préalablement décidé qu'il y aurait autant de notes A et B dans les deux corps ce qui a conduit à 32 appréciations A pour les PR et autant pour les MCF, à 48 appréciations B pour les PR et autant pour les MCF.

Le 16 septembre 2014 a été consacré à l'examen des candidatures MCF en session plénière, et le 17 septembre concernait l'examen des dossiers de PR en session restreinte. Il a été convenu que les membres du CNU présents ne s'exprimeraient pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur leur collaborateur ou anciens étudiants.

Le bureau de la section avait nommé en juin 2014 deux rapporteurs par dossier. L'un était proche de la spécialité du candidat, l'autre était un rapporteur commun à tous les candidats du même établissement, de manière à assurer une cohérence interdisciplinaire et interne aux établissements.

Comme dans les anciennes commissions PES, un équilibre a été recherché dans les trois catégories suivantes : MCF (Maîtres de Conférences), PR2 (Professeurs de seconde classe) et PR1/EX (Professeurs de première classe ou de classe exceptionnelle).

La prépartition des A et B entre les PR et les MCF et la recherche d'un équilibre entre PR2 et PR1/EX sont des choix propres à notre discipline. Cela donne un avantage aux MCF par rapport aux PR, et permet de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Il conduit aussi à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PREX. Il est important de rappeler que (à notre connaissance)

seules les sections du CNU 25 et 26 procèdent de la sorte.

Le conseil a noté qu'en moyenne les dossiers déposés sont de bon niveau et que l'application des quotas sur les notes A, B et C a conduit à classer B des dossiers de recherche de tout premier plan et de noter C des dossiers de collègues bénéficiant d'une forte notoriété. Il est certainement plus difficile d'avoir l'appréciation A ou B en section 26 pour les PR1/EX que dans d'autres disciplines. Des MCF récemment recrutés ont été cette année classés A ou B et ils ne doivent pas hésiter à postuler.

Une application équilibrée des critères annoncés dans la section « recommandations aux candidats » a été recherchée. Il apparaît nécessaire de préciser que pour l'encadrement doctoral, l'appréciation maximale n'est pas forcément donnée au candidat ayant eu le plus de doctorants, il semble au contraire qu'un collègue ayant eu un encadrement de doctorants totalisant 100% de taux d'encadrement sur les quatre dernières années et ayant un bonne insertion de son/ses doctorants devrait avoir une très bonne évaluation dans la catégorie E.

Les membres du CNU 26 ont visé le résultat le plus impartial possible. Néanmoins les quotas imposés sur les notes A, B et C et le fait que le CNU 26 ait choisi aussi d'appliquer ces quotas dans les catégories PR2 et PR1/EX (comme expliqué précédemment) ont conduit à des décisions difficiles. C'est pourquoi le plus souvent une note C ne doit pas être considérée comme une appréciation négative d'un dossier mais comme le résultat de choix difficiles dus à l'existence de contraintes fortes sur les quotas. De manière symétrique il est regrettable que les quotas imposés ne permettent pas de donner la meilleure appréciation à tous les dossiers de tout premier plan.

Arnaud Guillin (membre du CNU 26), Marc Quinampoix (président de la section) et Fabrice Vandebrouck (assesseur MCF).

Nouvelles du CNRS

- P. BIANE
- R. CARLES

La section 41 du comité national (numérotée section 01 jusqu'en 2012), intitulée « Mathématiques et interactions des mathématiques », se réunit grosso modo à trois occasions dans l'année : la session d'automne, le concours de recrutement, et la session de printemps. La section traite de questions d'évaluation scientifique, l'INSMI anime la politique scientifique : les deux entités ont des rôles complémentaires, tout en interagissant régulièrement. De nouveaux lecteurs de la *Gazette* apparaissant régulièrement, ce texte contient certaines redites par rapport à des versions antérieures. La page de la section est disponible à l'adresse <http://cn.math.cnrs.fr/>.

1. Session d'automne 2014

La session d'automne 2014 s'est tenue du 20 au 22 octobre. L'ordre du jour comprenait les évaluations suivantes :

- écoles thématiques ;
- changement de direction d'unités ;
- renouvellement d'unités ;
- titularisation des CR ;
- confirmation d'affectation des CR ;
- évaluations de chercheurs ;
- demandes particulières : changement de section, évaluation par une deuxième section ;
- promotion des chercheurs.

Comme lors de chaque session (automne et printemps), la direction de l'INSMI est intervenue auprès de la section (l'INSMI n'intervient pas au moment du concours de recrutement).

1.1 – Écoles thématiques

Les écoles thématiques correspondent à des rencontres scientifiques, dont la formule se distingue des colloques : cette distinction est un des critères de l'évaluation. Ces demandes sont examinées lors de la session d'automne uniquement. La section se prononce sur la pertinence scienti-

fique des demandes, pas sur le montant accordé en cas d'avis positif (les financements viennent de la formation, pas directement des instituts du CNRS). Sont particulièrement examinés, pour de telles demandes : les enjeux et résultats à attendre de l'école, l'adéquation entre le thème et le public visé, le choix du programme et des intervenants. Il convient donc, dans les demandes, d'être aussi précis que possible sur ces éléments.

Cette année, la section a examiné 19 demandes : 13 ont reçu un avis très favorable, 5 un avis favorable, et une demande est restée sans avis, les mathématiques semblant trop peu représentées.

1.2 – Changement de direction d'unités, renouvellement d'unité

Lorsque les unités ou GDR changent de directeur, la section est appelée à se prononcer sur ces demandes, accompagnées du CV du nouveau directeur pressenti, ainsi que des avis des conseils concernés (laboratoire, académique). Sept demandes ont été examinées lors de la session d'automne, toutes ont reçu un avis favorable. La section a donné un avis très favorable à la demande de renouvellement d'unité qu'elle a examinée.

1.3 – Chercheurs

Les chercheurs recrutés en 2013 et dépendant de la section 41, qui en avaient fait la demande, ont tous été titularisés. Deux des chercheurs recrutés en 2013 n'ont pas demandé leur titularisation, ayant démissionné du CNRS à l'issue de leur première année dans l'organisme.

La section se prononce sur l'adéquation entre le projet scientifique des lauréats aux concours CR et leur affectation. En effet, conformément à la séparation des rôles évoquée plus haut, la section tient lieu de jury de concours (elle classe les candidats), mais c'est l'INSMI qui gère les affectations dans les laboratoires. La section propose également un

directeur de recherche pour chaque CR2 nouvellement recruté, dont le rôle est de veiller au bon déroulement du début de carrière du CR (en rédigeant notamment un rapport au moment de la titularisation) ; il ne s'agit pas forcément d'un DR, le titre de directeur de recherche dans ce contexte est indépendant. La section a donné un avis favorable pour chacun des 11 dossiers qu'elle a examinés.

L'activité des chercheurs est évaluée régulièrement, suivant des critères établis en début de mandat, et consultables sur la page de la section. Il existe deux types d'évaluation, dites à vague et à mi-vague. Ce terme renvoie à l'évaluation (jusqu'ici par l'AERES) de l'unité à laquelle appartient le chercheur, l'évaluation à vague se faisant au même moment que l'évaluation de l'unité. Il y a donc une évaluation à vague tous les cinq ans, l'évaluation intermédiaire à mi-vague correspondant à un rapport plus court. Depuis 2011, la durée de contractualisation entre l'État et les établissements d'enseignement supérieur et de recherche est passée de 4 à 5 ans, modifiant ainsi le rythme d'évaluation des unités par l'AERES, et donc des chercheurs. Chaque évaluation donne lieu à un avis favorable, différé (insuffisance ou absence d'éléments du dossier, donnant lieu à un réexamen à la session suivante), réservé ou d'alerte. Dans les deux derniers cas, un suivi spécifique est mis en place. Lors de la session d'automne, la session a évalué à mi-vague les chercheurs appartenant aux laboratoires évalués lors de la vague C de l'AERES (Amiens, Lorraine, Marseille, Nice, Orléans, Poitiers, Strasbourg, Tours). Sur 63 dossiers, 50 ont reçu un avis favorable, 3 un avis différé (faute de rapport d'activité), 1 un avis réservé, 1 un avis d'alerte, et 8 dossiers n'ont pas reçu d'avis, étant hors du périmètre de la section. Quatre dossiers nécessitaient un réexamen suite à une précédente session : deux avis favorables, un avis réservé (faute de dossier : on ne peut émettre deux avis différés de suite), et une insuffisance professionnelle a été votée, qui donnera lieu à une procédure particulière, auprès de la commission administrative paritaire du CNRS.

La section a également examiné l'activité de 8 collègues recrutés sur des chaires CNRS-université, au terme de 4 ans. Sur les 8 dossiers examinés 7 ont reçu un avis favorable, un dossier était hors périmètre de la section (pas d'avis). Rappelons que l'INSMI a fait le choix de ne plus proposer de chaire.

Un chercheur appartenant à une autre section ayant demandé à être désormais rattaché à la section 41, la section a émis un avis favorable au vu de l'activité de ce collègue. Un autre chercheur a sou-

haité solliciter une évaluation permanente par une autre section du CNRS (outre la section 41). Son activité scientifique concernant en effet les deux sections, la 41 a émis un avis favorable.

Contrairement au corps des maîtres de conférences, le corps des chargés de recherches est encore séparé en 1^{re} classe et 2^e classe. La demande de promotion à la 1^e classe ne peut se faire qu'au bout de quatre ans après le recrutement CR2. Sur les 16 demandes examinées, la section a émis 15 avis très favorables, et un avis favorable. Notons qu'il n'existe pas de statut de chargé de recherches hors classe.

Lors de la session d'automne, la section se prononce sur les demandes de promotions dans le corps DR. Au vu des faibles effectifs concernés, nous présenterons des statistiques plus complètes (concernant l'âge, notamment) à l'issue des quatre ans de mandature. Cette année, d'après les informations fournies par l'INSMI, la section a travaillé sur la base de 7 promotions DR1, 1 promotion DRCE1, 0 ou 1 promotion DRCE2. Le nombre exact de promotions est décidé au niveau du CNRS, la validation finale ayant lieu en janvier ou février.

Promotion DR1. 1. Anne-Marie Aubert, Frédéric Coquel, Louis Funar, David Lannes, Eric Leichtnam, Laurent Miclo, Bertrand Toën, 8. Charles Favre.

Promotion DRCE1. 1. Geneviève Raugel.

Promotion DRCE2. 1. Claire Voisin.

1.4 – Intervention de l'INSMI

Christoph Sorger, directeur de l'INSMI, et Clotilde Fermanian, directrice adjointe scientifique, sont intervenus auprès de la section, pour l'informer de plusieurs points, et recueillir son avis le cas échéant. Les discussions ont porté sur le nombre prévisible de postes pour le concours de recrutement 2015, la publication du rapport de prospective rédigé par le conseil scientifique d'institut sortant (disponible sur le site du comité national), les nouvelles procédures de recrutement d'IT (mise en place des FSEP — fonctions susceptibles d'être pourvues — facilitant le changement d'affectation). La section est également informée des choix faits par l'INSMI concernant les affectations des chercheurs recrutés en 2014, des changements d'affectation, et de la démarche de l'INSMI pour suivre les chercheurs en difficulté. Des détails apparaissent dans le PV de la session, disponible sur la page de la section.

Conseil scientifique de l'INSMI (mandat 2010-2014)

• C. KASSEL

1. Introduction

La réorganisation en 2010 du CNRS en dix instituts a abouti à la création d'un institut propre aux mathématiques, l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI)¹. Chaque institut est doté d'un Conseil scientifique d'institut (CSI), composé de 24 membres : 12 élus (3 DR, 2 PR, 2 CR, 2 MC, 3 IT) et 12 nommés, pour un mandat de quatre ans.

Le Conseil scientifique de l'INSMI a été constitué en 2010. On trouvera la liste de ses membres en annexe. Lors de sa première réunion, le 10 décembre 2010, il a procédé à l'élection d'un président, d'un secrétaire scientifique et à la mise en place du bureau suivant.

Président : Christian Kassel ;

secrétaire scientifique : Olivier Gipouloux ;

autres membres : Pascal Auscher, Jean-Marc Couveignes, Ellen Saada.

Christine Disdier (élue du Collège C) était invitée permanente au bureau. Le mandat du Conseil s'est achevé fin 2014.

2. Missions des CSI

Selon les textes en vigueur au CNRS², chaque CSI « conseille et assiste par ses avis et ses recommandations le directeur de l'institut de manière prospective sur la pertinence et l'opportunité des projets et activités de l'institut ». Il est également chargé d'écrire un rapport de prospective. Chaque année il est consulté sur la nomination de membres des jurys d'admission des chargés de recherche ainsi que sur les éventuels points de divergence entre l'institut et les sections concernées du Comité

national concernant les créations et suppressions d'unités de recherche.

Contrairement aux instituts ou aux sections du Comité national, les CSI ne sont engagés ni dans la gestion de la recherche, ni dans le recrutement des chercheurs. Ce sont des instances de réflexion et de proposition, ce qui leur laisse une grande liberté dans le choix des sujets traités.

3. Fonctionnement du Conseil scientifique de l'INSMI

Au cours de son mandat, le Conseil scientifique de l'INSMI s'est réuni à neuf reprises, dans les locaux du Comité national au siège du CNRS.

Invités permanents aux réunions :

- le directeur de l'INSMI (Guy Métivier, puis Christoph Sorger), qui assiste de droit aux réunions et a souvent été accompagné de membres de son équipe,
- le président de la section de mathématiques du Comité national (Yann Brenier, puis Philippe Biane) ou un membre de la section le représentant.

Arnaud Le Ny, membre mathématicien du Conseil scientifique du CNRS, a également assisté à certaines réunions plénières.

Chaque réunion du Conseil était précédée d'une réunion de bureau qui en établissait l'ordre du jour. Mme Solange Lassalle, assistante du Secrétariat général du Comité national, était présente à toutes nos réunions, nous apportant une aide précieuse, compétente et efficace. Le calendrier et les ordres du jour des réunions se trouvent sur le site Web www.cnrs.fr/comitenational/calendrier/csi/insmi.htm.

1. Auparavant, les mathématiques faisaient partie du même Département que la physique.

2. Décision n° 100003SGCN fixant la composition, le mode d'élection et le fonctionnement des Conseils scientifiques d'institut.

Les missions statutaires prenaient peu de temps : nous avons toujours donné un avis favorable aux propositions de nomination de membres des jurys d'admission des chargés de recherche et, durant notre mandat, nous n'avons eu à délibérer que sur un seul cas de divergence entre la section de mathématiques du Comité national et la direction de l'INSMI concernant une création d'unité de recherche.

Typiquement, le matin après l'approbation du compte-rendu de la réunion précédente et le traitement des points statutaires, le directeur de l'INSMI exposait la politique de l'INSMI, faisait le point sur le budget, sur le recrutement des chercheurs et des IT et sur les concours à venir. D'autres sujets, le plus souvent en rapport avec l'actualité, étaient abordés dans ces échanges, comme la politique documentaire, les actions internationales, les projets Investissement d'avenir (Idex, Labex, Equipex).

Nous débutions généralement l'après-midi avec deux ou trois invités extérieurs (voir le détail au § 4). Les groupes de travail exposaient régulièrement l'état d'avancement de leurs travaux. La rédaction du rapport de prospective était également à l'ordre du jour des réunions.

4. Invités extérieurs

Le Conseil a régulièrement accueilli des experts, dont les présentations ont chaque fois été suivies de discussions avec les membres du Conseil.

En février 2011, Frédéric Coquel, chargé de mission à l'INSMI pour les relations avec l'industrie, Bertrand Maury, responsable du GDR « Mathématiques et Entreprises », et Georges-Henri Cottet³ nous ont parlé du projet AMIES (Agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société).

En septembre 2011, Jacquelin Charbonnel (Mathrice), Odile Luguern et Bernard Teissier (RNBM⁴) ont présenté le projet Equipex de portail pour l'accès à la documentation en mathématiques.

En septembre 2012, Anne Pépin, Nicole Abal-

léa et Catherine Thinus-Blanc de la Mission pour la place des femmes au CNRS ont exposé leurs objectifs et leur action ainsi que le projet européen INTEGER.

En janvier 2013 Jean-Paul Laumond⁵ et Pierre Rouchon⁶ ont présenté certaines interactions des mathématiques avec l'automatique.

En septembre 2013, nous avons accueilli Alesandra Carbone⁷, membre du CSI INSB, Aurélie Edwards⁸ et Eduardo Pimentel Cachapuz Rocha⁹, président de la CID 51¹⁰, qui ont illustré les interactions des mathématiques avec les sciences du vivant.

Enfin, en septembre 2014, le Conseil a invité à sa dernière réunion plénière les nouveaux élus du mandat 2014-2018.

5. Groupes de travail

Dès le début de notre mandat, nous avons procédé à la mise en place de groupes de travail (GT). Si l'école mathématique française est à juste titre réputée, les interactions des mathématiques avec d'autres sciences sont encore trop peu connues. Nous avons prioritairement souhaité faire le point sur elles, et dans un but prospectif, comprendre comment les renforcer.

Voici la liste et la composition des GT.

GT Mathématiques et informatique.

Coordinateur : Jean-Marc Couveignes.

Autres membres du Conseil : Ugo Boscain, Mireille Bousquet-Mélou, Jean-Marc Gambaudo, Jean-Marc Sac-Epée.

Membres extérieurs : Pierre-Louis Curien, Isabelle Debled-Renesson, Jean Mairesse, Dimitri Peaucelle, Jean-François Raskin, Dominique Rossin.

GT Mathématiques et physique.

Coordinateur : Sandro Vaienti.

Autres membres du Conseil : Nalini Anantharaman, Ellen Saada, Étienne Sandier.

3. Futur directeur d'AMIES.

4. Réseau national des bibliothèques de mathématiques.

5. Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (Toulouse).

6. Centre Automatique et Systèmes (Mines ParisTech).

7. Laboratoire Génomique des microorganismes (UMR 7238 CNRS-UPMC, Paris).

8. ERL 7226 Physiologie, physiopathologie et génomique rénales.

9. Unité Génomique évolutive des microbes - Institut Pasteur Paris.

10. Commission interdisciplinaire « Modélisation et analyse des données et des systèmes biologiques : approches informatiques, mathématiques et physiques. »

Membres extérieurs : Anne-Sophie Bonnet Ben Dhia (présidente du CSI INSIS), Philippe Briet, Marie-José Casanove (présidente du CSI INP), Alain Comtet, Jean-Pierre Gaspard, Boris Gralak, Aziz Hamdouni, Gilles Montambaux.

GT Mathématiques et sciences du vivant.

Coordinatrice : Ellen Saada.

Autres membres du Conseil : Olivier Gipouloux, Peggy Cénac-Guesdon, Jean-Marc Gambaudo, Michelle Thieullen.

Membres extérieurs : Luis Almeida (membre de la CID 51), Philippe Besse, Michael Blum (secrétaire scientifique de la CID 51), Pierre Degond, Bertrand Fourcade, Nathalie Leresche, Benoît Perthame, Jean-Christophe Thalabard.

GT Mathématiques et automatique.

Coordinateur : Ugo Boscain.

Autres membres du Conseil : Karine Beauchard, Olivier Ley.

GT Mathématiques et calcul.

Coordinateur : Christophe Prud'homme.

Membre extérieur : Philippe Helluy (chargé de mission à l'INSMI).

GT Politique documentaire.

Coordinatrice : Colette Anné.

Autres membres du Conseil : Pascal Ausercher, Christine Disdier, Christian Kassel.

GT Parité.

Coordinatrice : Peggy Cénac-Guesdon.

Autres membres du Conseil : Colette Anné, Olivier Gipouloux, Christian Kassel, Ellen Saada.

Membre extérieur : Aline Bonami.

Les groupes de travail avaient toute liberté pour organiser leur travail. Certains ont envoyé un questionnaire aux directeurs d'unité afin de mieux appréhender l'état actuel des interactions, les projets en cours, les points forts et les points faibles. Les réponses obtenues ont constitué un matériau précieux pour la rédaction du rapport de prospective et pour les discussions au sein des groupes de travail portant sur des questions telles que : quels sont les freins, scientifiques ou institutionnels, à l'interdisciplinarité et comment amener les chercheurs de différentes disciplines à mieux collaborer ?

6. Rapport de prospective

Vers la fin de son mandat le Conseil scientifique a rédigé un rapport de prospective. Hormis un tel rapport sur les mathématiques appliquées et industrielles, publié en 2008 par la SMAI, notre texte est le premier rapport de prospective sur les mathématiques de cette ampleur produit au sein de la communauté mathématique française.

L'objet du rapport était de dégager des tendances dans l'évolution actuelle de la recherche mathématique ainsi que les défis auxquels elle est confrontée. Bien que destiné au CNRS, il concerne l'ensemble de la communauté mathématique. Les mathématiques recouvrant en France un spectre large où la plupart des domaines sont représentés, nous n'avons pas systématiquement cherché à distinguer les mathématiques produites en France de celles qui le sont ailleurs dans le monde.

Notre rapport se distingue de ceux des autres CSI par sa longueur, par la présence d'un chapitre sur la documentation/édition et d'un autre sur la parité. La rédaction proprement dite a occupé l'essentiel de l'année universitaire 2013-14. Nous avons fait appel à plus de cent cinquante collègues qui ont largement enrichi notre réflexion et nous ont permis d'alimenter le rapport.

Le rapport, long de 65 pages, comporte les neuf chapitres suivants.

1. Introduction.
2. Les mathématiques : situation actuelle et tendances.
3. La recherche en mathématiques.
4. Des interactions en fort développement.
5. Relations avec les entreprises.
6. L'information scientifique et technique — Documentation et édition.
7. Questions de parité.
8. L'INSMI et les unités de recherche.
9. Rester attractives : un défi majeur pour les mathématiques

Le rapport est public et téléchargeable à partir du site Web www.cnrs.fr/comitenational/doc/conjoncture.htm.

7. Recommandations

Les CSI sont habilités à voter des motions, appelées « recommandations » dans le jargon administratif du CNRS. Le nôtre en a voté quatre¹¹, une en soutien à l'INSMI dans ses missions nationales, une autre en rapport avec les négociations en cours avec l'éditeur Springer, une troisième sur le *Gold Open Access* et une dernière sur l'emploi scientifique.

8. Relations avec la direction de l'INSMI et les autres CSI

Le Conseil scientifique a eu constamment des relations de confiance avec la direction de l'Institut, comme avec la section de mathématiques du Comité national. Il était représenté aux réunions annuelles des directeurs d'unité de l'INSMI par son président, qui y a fait quelques interventions¹².

À travers les groupes de travail il y eut des échanges réguliers avec Anne-Sophie Bonnet Ben Dhia (présidente du CSI de l'INSIS¹³), Marie-José Casanove (présidente du CSI de l'INP¹⁴), Pascal Weil (président du CSI de l'INS2I¹⁵) et des membres de leurs conseils. Avec Pascal Weil il y eut également coordination dans le cadre de la refonte de l'INIST¹⁶ et le développement de la BSN¹⁷.

La C3N, qui rassemble le bureau du Conseil scientifique du CNRS, le bureau de la Conférence des présidents du Comité National et les présidents des dix CSI, s'est réunie plusieurs fois. À la fin du mandat, les présidents et présidentes des dix CSI ont rédigé un message collectif¹⁸ à destination du CNRS et des instituts sur les améliorations à apporter au fonctionnement des CSI.

9. En guise de conclusion

Contrairement aux sections du Comité national, les CSI ont peu de missions statutaires. Il en résulte une grande liberté d'action, mais le rôle de chaque CSI est à réinventer en permanence. Pour la suite nous recommandons la mise en place de contacts plus systématiques et plus étroits avec le Conseil scientifique du CNRS et avec les autres CSI.

Annexe. Composition du Conseil scientifique de l'INSMI (2010-2014)

Nalini Anantharaman (PR, nommée), Colette Anné (CR, élue), Pascal Auscher (PR, nommé, membre du bureau), Karine Beauchard (CR, élue), Ugo Boscain (DR, nommé), Mireille Bousquet-Mélou (DR, nommée), Yann Brenier (DR, élu en 2013 en remplacement de J.-L. Sauvageot), Nathalie Catrain (IE, élue en 2013 en remplacement de J.-M. Madranges), Peggy Cénac-Guesdon (MC, élue), Jean-Marc Couveignes (PR, nommé), membre du bureau, Christine Disdier (IR, élue), invitée permanente au bureau, Hélène Esnault (PR, nommée, démissionnaire), Jean-Marc Gambaudo (DR, nommé), Mariano Giaquinta (PR, nommé, démissionnaire), Olivier Gipouloux (MC, élu), secrétaire scientifique, Christian Kassel (DR, élu), président, Olivier Ley (PR, élu), Jean-Michel Madranges (T, élu, démissionnaire), Sylvie Méléard (PR, nommée, démissionnaire), Christophe Prud'homme (PR, nommé), Raphaël Rouquier (PR, nommé), Ellen Saada (DR, élue), membre du bureau, Jean-Marc Sac-Epée (IR, élu), Étienne Sandier (PR, élu), Jean-Luc Sauvageot (DR, élu, admis à la retraite en 2012), Michèle Thieullen (MC, nommée en remplacement de S. Méléard), Sandro Vaienti (PR, nommé).

Christian KASSEL

Institut de Recherche Mathématique Avancée, CNRS
Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex

11. Voir www.cnrs.fr/comitenational/csi/recommand.htm.

12. Par exemple, www.cnrs.fr/insmi/IMG/pdf/Parite_ReunionDU290312.pdf.

13. Institut des sciences de l'ingénierie et des systèmes.

14. Institut de physique.

15. Institut des sciences de l'information et de leurs interactions.

16. Institut de l'information scientifique et technique.

17. Bibliothèque scientifique numérique.

18. www.cnrs.fr/comitenational/doc/rapport/2014/Message_presidents_CSI_sortants_14-11-2014.pdf.

Nouvelle revue « North-Western European Journal of Mathematics »

Les laboratoires de Mathématiques du Nord-Pas-De-Calais lancent un nouveau journal appelé « North-Western European Journal of Mathematics ». Cette revue généraliste, avec comité éditorial international, accueille des articles aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées et en histoire des mathématiques. Son originalité par rapport à l'écosystème des revues françaises est d'avoir une assise régionale et transfrontalière sur le plat pays pris au sens large (Nord-Pas-De-Calais/Belgique/Luxembourg/Pays-Bas). Par ailleurs, la revue dispose du soutien des sociétés savantes de mathématique française, luxembourgeoise et néerlandaise ainsi que de celui de l'institut Fields. Techniquement, nous bénéficions du soutien local de l'université de Lille et national du système d'archivage Numdam¹.

Notre but est de mettre en place un journal académique de grande qualité en accès libre faisant concurrence aux trop nombreuses revues payantes détenues par les grandes maisons d'édition. Nous pensons que c'est le bon moment pour lancer un tel projet car les bibliothèques ont de plus en plus de difficulté à acheter des revues devenues trop chères et en outre l'Europe préconise aux chercheurs de

soumettre des articles dans des journaux d'accès ouvert. Notre revue est d'accès libre (voie diamantée), librement accessible en ligne et la version papier sera disponible à un prix très bas (pour couvrir les frais d'impression et d'envoi). Les auteurs conservent leurs droits et aucuns frais de publication ne seront à leur charge.

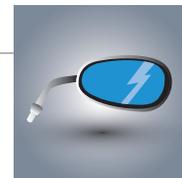
Nous planifions d'avoir un premier volume en 2015 et dans un premier temps, nous comptons publier un volume de grande qualité par an. Évidemment, une telle initiative est un pari, et ne pourra être couronnée de succès qu'avec un mouvement d'ensemble de notre communauté vers les revues libres. Notre contribution à ce qui est une bataille contre les éditeurs privés est de joindre nos efforts avec nos voisins du nord afin de faire déborder la lutte hors de la France, qui pour l'instant fait figure de pionnière².

Pour plus d'information, nous renvoyons à notre site Web <http://math.univ-lille1.fr/~nwejm/>.

Au nom du comité éditorial, Serge Nicaise (éditeur en chef) et Nicolas Wicker (directeur technique).

1. Numérisation de documents anciens mathématiques <http://numdam.org/>.

2. D. CHAFAÏ. « Coût des publications : propositions concrètes ». *Gazette des Mathématiciens*, n° 139 (2014), p. 82–86.



LETTRE DE M. ALEXANDRE GROTHENDIECK À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE SUÈDE •

Institut de mathématiques, Université des sciences et techniques du Languedoc

Cher Professeur Tord Ganelius,

Je vous remercie pour votre lettre du 13 avril reçue aujourd'hui, et pour votre télégramme, et suis sensible à l'honneur que me fait l'Académie royale des sciences de Suède en décidant d'attribuer le prix Crafoord pour cette année, assorti d'une somme importante, en commun à Pierre Deligne (qui fut mon élève) et à moi-même. Cependant je suis au regret de vous informer que je ne souhaite pas recevoir ce prix (ni d'ailleurs aucun autre), et ceci pour les raisons suivantes.

1. Mon salaire de professeur, et même ma retraite à partir du mois d'octobre, sont beaucoup plus que suffisants pour mes besoins matériels et pour ceux dont j'ai la charge; donc je n'ai pas besoin d'argent. Pour ce qui est de la distinction accordée à certains de mes travaux de fondements, je suis persuadé que la seule épreuve décisive pour la fécondité d'idées ou d'une vision nouvelles est celle du temps. La fécondité se reconnaît par la progéniture, et non par les honneurs.

2. Je constate par ailleurs que les chercheurs de haut niveau auxquels s'adresse un prix prestigieux comme le prix Crafoord sont tous d'un statut social tel qu'ils ont déjà en abondance et le bien-être matériel et le prestige scientifique avec tous les pouvoirs et prérogatives qui vont avec. Mais n'est-il pas clair que la surabondance des uns ne peut se faire qu'aux dépens du nécessaire des autres?

3. Les travaux qui me valent la bienveillante attention de l'Académie royale datent d'il y a vingt-cinq ans, d'une époque où je faisais partie du milieu scientifique et partageais pour l'essentiel son esprit et ses valeurs. J'ai quitté ce milieu en 1970, et, sans renoncer pour autant à ma passion pour la recherche scientifique, me suis éloigné intérieurement de plus en plus du milieu des scientifiques. Or dans les deux

décennies écoulées l'éthique du métier scientifique (tout au moins parmi les mathématiciens) s'est dégradée à un degré tel que le pillage pur et simple entre confrères (et surtout aux dépens de ceux qui ne sont pas en position de pouvoir se défendre) est devenue quasiment une règle générale et qu'il est en tous cas toléré par tous, y compris dans les cas les plus flagrants et les plus iniques. Sous ces conditions, accepter d'entrer dans le jeu des "prix" et "récompenses", serait aussi donner ma caution à un esprit et une évolution, dans le monde scientifique, que je reconnais comme profondément malsains, et d'ailleurs condamnés à disparaître à brève échéance tant ils sont suicidaires spirituellement et même intellectuellement et matériellement.

C'est cette troisième raison qui est pour moi, et de loin, la plus importante. Si j'en fais état, ce n'est nullement pour critiquer les intentions de l'Académie royale dans l'administration des fonds qui lui sont confiés. Je ne doute pas qu'avant la fin du siècle, des bouleversements entièrement imprévus vont transformer de fond en comble la notion même que nous avons de la "science", ses grands objectifs, et l'esprit dans lequel s'accomplit le travail scientifique. Nul ne doute que l'Académie royale fera alors partie des institutions et des personnes qui auront un rôle utile à jouer dans un renouveau sans précédent, après une fin de civilisation également sans précédent ...

Et je suis désolé de la contrariété que peut représenter pour vous-même et pour l'Académie royale mon refus du prix Crafoord, alors qu'il semblerait qu'une certaine publicité ait d'ores et déjà été donnée à cette attribution, sans s'assurer au préalable de l'accord des lauréats désignés. Pourtant, je n'ai pas manqué de faire mon possible pour faire connaître dans le milieu scientifique et tout particulièrement parmi mes anciens amis et élèves dans le monde mathématique,

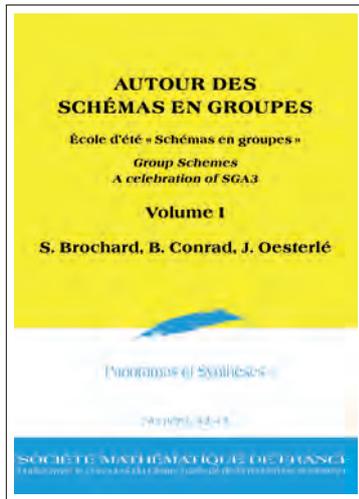
mes dispositions vis-à-vis de la "science officielle" d'aujourd'hui. Il s'agit d'une longue réflexion, "*Récoltes et semailles*", sur ma vie de mathématicien et sur la création (et plus particulièrement la création scientifique) en général, et qui est devenu en même temps, inopinément, un "tableau de mœurs" du monde mathématique entre 1950 et aujourd'hui. Un tirage provisoire (en attendant sa parution sous forme de livre), fait par les soins de mon université en deux cents exemplaires, a été distribué presque en totalité parmi mes collègues mathématiciens, et plus particulièrement parmi les géomètres

algébristes (qui m'ont fait l'honneur maintenant de se souvenir de moi). Pour votre information personnelle, je me permets de vous en envoyer les deux fascicules introductifs, sous enveloppe séparée.

En vous remerciant de votre attention, et en vous renouvelant ainsi qu'à l'Académie royale des sciences de Suède mes remerciements et mes excuses pour ce contre-temps bien involontaire, je vous prie de recevoir l'expression de mes sentiments sincèrement dévoués. ■

* Nous publions ici la version intégrale de la lettre de M. Grothendieck – lettre que *le Monde* avait publiée, avec quelques coupures, en mai 1988.

Alexander Grothendieck est décédé le 13 novembre 2014.



Panoramas et Synthèses

Autour des schémas en groupes. Volume I

Group Schemes, A celebration of SGA3

École d'été « Schémas en groupes »

S. BROCHARD, B. CONRAD et J. OESTERLÉ

Société Mathématique de France, 2014.

488 pages

ISBN : 978-2-85629-794-0

Publié avec le concours de : Centre National de la Recherche Scientifique.

Ce volume contient la première partie des notes de cours de l'École d'été « Schémas en groupes, une introduction au séminaire SGA3 de Demazure-Grothendieck », qui s'est tenue au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Luminy en septembre 2011. Cette école était consacrée à la théorie des schémas en groupes en particulier réductifs. Cette première partie est constituée de versions développées des exposés sur les topologies de Grothendieck (S. Brochard), sur les schémas en groupes de type multiplicatif (J. Oesterlé) et sur les schémas en groupes réductifs (B. Conrad).

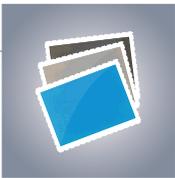
Prix public : 80 € – Prix membre SMF : 56 € – Frais de port non compris

This volume contains the first part of the lecture notes of the Summer school "Group Schemes, introduction to the SGA3 seminar of Demazure-Grothendieck", which was held at the Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) at Luminy in September 2011. This summer school was devoted to the theory of group schemes and especially of reductive group schemes. The contributions in this first part are expanded versions of the talks introducing Grothendieck topologies (S. Brochard), group schemes of multiplicative type (J. Oesterlé) and reductive group schemes (B. Conrad).

Public price : 80 € – SMF member price : 56 € – Shipping costs not included

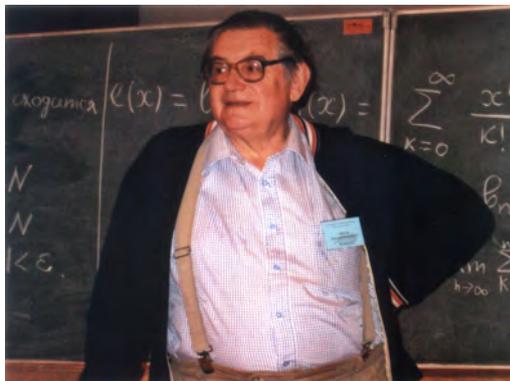


<http://smf.emath.fr>



Dmitrii Victorovich Anosov

- A. BUFETOV
- A. KLIMENKO



Dmitrii Victorovich Anosov, one of the greatest mathematicians of the twentieth century, whose main contributions belong to the field of dynamical systems, died on 5 August 2014 at the age of 77.

Dmitrii Victorovich Anosov was born in Moscow on 30 November 1936. Mathematical high-schools did not yet exist at that time, so, when he was in high school, he attended “mathematical circles” of Nikolai Nikolaevich Konstantinov at the Moscow State University, who told one of us a few years ago: “Anosov’s manner of speaking was then roughly the same as it is now, and once, while Anosov was explaining a proof, a janitor (‘uborshchitsa’ in Russian) walked in¹. As she was walking out, she said: ‘This boy will become a member of the Academy.’” Anosov went on to study at the Department of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, where his diploma advisor was Lev Semenovich Pontryagin. On graduating with high honours from the University, Anosov enrolled in the graduate program at the Steklov Institute of Mathematics, continuing to work with Pontryagin, then Head of the Department of Differential Equations, a post later occupied by Anosov himself. In these years Pontryagin switched his interests from topology to differential equations and optimal control. Conse-

quently, D.V. became focused on problems in differential equations, while also obtaining a deep knowledge of topology that would have a great impact on his future work.

Anosov’s Ph.D. thesis deals with the averaging in multi-frequency systems. In modern terms, he considered a slow-fast system such that the fast system has several integrals H_i (we do not consider the slow variables y_j as integrals for the fast system), as well as an integral invariant (a smooth measure). Now for the “complete” slow-fast system, H_i ’s and y_j ’s are slowly changing, while the trajectory stays for a long time near the surface $\{H_i = H_i^0, y_j = y_j^0\}$. Suppose that the trajectory of the fast system is uniformly distributed on this surface (that is, the fast flow is ergodic in restriction to this surface with respect to the measure induced by the integral invariant). Then we can obtain an averaged dynamics for H_i ’s and y_j ’s (the speed of evolution is proportional to the parameter ϵ of the system, thus we scale the time). Note that if the dimension of the level set is larger than one (thus the systems were called “multi-frequency”) then usually the fast system is not ergodic simultaneously on all level surfaces of the integrals. Say, consider a Liouvillean tori of an integrable Hamiltonian sys-

1. Janitors at the Moscow University are semi-mythical figures.

tem; in the action-angle variables the dependence of the velocity vector $v_j(l) = d\phi_j(l)/dt$ from l can be generic, thus the values of the integrals where v_j 's are linearly dependent, are dense. Nevertheless, as Anosov showed, this averaging still makes sense: if we consider a point (x^0, y^0) on a level set with ergodic action of the fast flow, then the real dynamics of the slow-fast system is close to the dynamics of the averaged system in the time interval $[0, T/\epsilon]$ for a set of initial points of almost full measure in a small neighbourhood of (x^0, y^0) . This answer was quite unexpected at the time.

As he remembered, the idea of this work emerged in his head while attending lectures on philosophy, which was a compulsory part of the curriculum for all Ph.D. students in the USSR. As D.V. would remark, with a wry humour that those who knew him remember very well, in this way the Marxist-Leninist philosophy made its contribution to progress in science.

In September 1961 Stephen Smale visited the USSR. His visit started in Kiev where an International Symposium on Nonlinear Oscillations was held. Initially, D.V. would recall, he was not planning to go to Kiev at all, since he had already presented his results on averaging at a large USSR-wide conference in the spring of the same year. He did go, however, and, glancing at abstracts while queuing for registration at the symposium, he read the title of Smale's talk: "A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points"². It was an explosion; recalling the episode later, he would humourously quote Tchekhov's well-known: "That can never happen, because it cannot possibly be." The example presented by Smale — the Smale horseshoe — brought Anosov to the area, and in the next few years he obtained his famous results on what would later be called Anosov systems.

A detailed obituary is in press at the Russian Mathematical Surveys, and here we limit ourselves to briefly mentioning only some of Anosov's breakthroughs: his proof that geodesic flows on surfaces of negative curvature are structurally stable, his method of shadowing of pseudotrajectories by "real" trajectories, his understanding of the importance of the Hölder condition in hyperbolic theory, when proving that the dependence of stable and unstable subspaces from the point is Hölder, and

showing that the stable and unstable foliations of Anosov systems are absolutely continuous.

Dynamical systems were one of the favorite fields of Andrei Nikolaevich Kolmogorov, and the fifties had seen Kolmogorov's two spectacular breakthroughs: the theorem on invariant tori in Hamiltonian mechanics and the discovery of metric entropy, a new invariant of a dynamical system that allowed Kolmogorov to solve von Neumann's problem on distinguishing Bernoulli shifts. In the sixties and the seventies, students of Kolmogorov, for example, Vladimir Mikhailovich Alexeev and Yakov Grigorievich Sinai, will have made fundamental contributions to the theory of dynamical chaos.

Anosov's work on hyperbolicity became his Doctorate of State thesis "Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature" defended in 1966, published as a separate 90th issue of the Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.

He could join the "hyperbolic revolution" started by Smale, D.V. would later say, because he was "the right man in the right place": he was expert both in classical differential equations and in theory of smooth manifolds. Also, D.V. would stress, he had already seen from the monograph by M. Morse on the calculus of variations that geometrical and analytical tools could be combined to construct a far-reaching theory.

Late 1980s and 1990s were the years of Anosov's active collaboration with Andrei Andreevich Bolibruch, with whom they also became close friends. At the end of 90s, Anosov and Bolibruch started to work towards the creation of the Chair of Dynamical Systems at the Mathematics and Mechanics Department of the Moscow State University, and the Chair was inaugurated in 2000. After Bolibruch succumbed to a fatal illness in 2003, Anosov assumed responsibility over the new Chair.

In 2000s Anosov returned to the area of hyperbolic dynamics, which had brought fame to him. His old question of 1960s was whether any non-locally maximal hyperbolic set could be extended to a locally maximal one lying in its small neighbourhood. The first counterexamples, of dimension two, were constructed by A. Fathi and S. Crovisier, while T. Fisher gave an example of dimension one. Anosov suggested the name "locally pre-maximal" for invariant sets satisfying his conjecture, that is, sets

2. S. Smale. "A structurally stable differentiable homeomorphism with an infinite number of periodic points". In: *Proc. Internat. Sympos. Non-linear Vibrations*. Vol. 2: *Qualitative methods in the theory of non-linear vibrations*. SSR, Kiev: Izdat. Akad. Nauk Ukrain., 1963, pp. 365–366.

that can be extended in any neighbourhood to locally maximal ones. It was well known that for hyperbolic sets the property of local maximality could be expressed purely in terms of “inner dynamics”, that is, the dynamics on the set itself. More precisely, for hyperbolic sets local maximality is equivalent to the internal shadowing property: if a pseudotrajectory lies entirely in the set, then its shadowing trajectory lies also in the set, not merely in its neighbourhood. Anosov proved that, provided the set is hyperbolic, the property of local pre-maximality depends only on the inner dynamics. He was, however, not able to give an explicit description in this “inner” terms similar to the one available for locally maximal sets. This question remains open.

D.V. often stressed that he did not prove any of his theorems at his workplace at the Steklov Institute. Fortunately, control of attendance was generally not strict, so he could, being an “owl”, work at home in the evenings. When, during Andropov’s brief tenure as General Secretary, discipline was enforced, he came to the Steklov on time and slept in the armchair in his office. He liked to work during walks. He liked to recall how he discovered what later became his paper with A. Katok on smooth approximations by periodic maps. He had a baidarka³ trip with his friends along Ugra river, but as his boat was ahead of the others, he missed the place where they were supposed to come ashore. Ten kilometers down the stream, he and a friend discovered that their boat was alone. They decided to continue their trip to the next transport link to Moscow. They river. He and his friend were in a boat ahead of the others, and they missed the place where they supposed to come ashore. Ten kilometers down the stream, they discovered that their boat was alone. Unfortunately, they had neither food nor matches, so D.V.’s friend went back to the main group while D.V. waited for him ashore watching the boat. Since he had nothing to do, he started to think how to express geometrically some modification of an example by Schnirelman and Besicovitch of a disc homeomorphism with a dense orbit aiming to modify it to be smooth. When his friend returned, D.V. knew the answer. They continued the trip, and, apart from the satisfaction from the solution, D.V. would say, he was rewarded with marvelous nightingale singing every night.

Anosov had a very individual style of writing and

lecturing. He often started with a very detailed exposition of very simple things (say, a lecture on Denjoy Theorem would start with an explanation on how to lift a circle homeomorphism to a homeomorphism f of the line satisfying $f(x+1) = f(x) + 1$). He would only progress to the more sophisticated material when he became confident that his listeners had thoroughly mastered these basics. While at first these long introductions could sometimes seem excessive, it subsequently became clear how the details he stressed made subsequent steps easier, how every word he said was dictated by the architecture of the lecture as a whole. His written work has similarly extensive introductions. He attached a great importance to the skills of oral and written exposition of students he supervised, commenting their first presentations and first papers in circumstantial detail. In the Soviet Union, important mathematical monographs from abroad were all quickly translated into Russian. It was common practice that the scientific editor of a translation, typically a very prominent mathematician, would insert a comment now and then. As far as we can remember, however, nobody took this task as seriously as Dmitrii Victorovich Anosov, completing details left out by the author, offering shorter proofs, removing imprecisions, etc.

In 1997 Anosov succeeded Revaz Valerianovich Gamkrelidze (who himself had succeeded Pontryagin in 1988) as the Head of the Department of Differential Equations of the Steklov Mathematical Institute. Both of us started working at the Institute during his tenure as Head of Department. Quoting Pontryagin, Anosov liked to say “The first duty of a researcher at the Steklov institute is not to give trouble to the Accounts Department, that is, to come to take salary in due time”⁴.

For several years in the beginning of 2000s Anosov served as the Head of the Commission on Secondary Education of the Mathematical branch of the Russian Academy of Science. This was a high-stress post of substantial responsibility. At that time a broad education reform started that still continues to this day. Aping Western practices has been the reformers’ motto, an abysmal deterioration in the quality of education in Russia the inevitable outcome. In particular, a “unified state exam” was introduced, an exam for students graduating from secondary schools that simultaneously served as

3. Baidarka is a sort of kayak, that, disassembled, can be carried in a backpack. Very popular in Russia.

4. Before credit cards became ubiquitous, one received salary in person from an accountant; this was still an option as late as 2009.

an entrance exam to the University. While attempts at blocking the “unified exam” proved unsuccessful, it turned out to be possible to improve it to some extent; specifically, with Anosov’s active participation, multiple choice questions were excluded from the Maths “unified exam”.

In the Russian tradition, Anosov would regularly give lectures for high-school students. These lectures became basis for two books for high-school students: “From Newton to Kepler”, devoted to the history of Kepler’s laws for planet orbits and New-

ton’s laws of motion, and “Differential equations: solving and drawing”, dealing with several key examples of differential equations and providing an elementary introduction to concepts such as phase portrait and structural stability.

Anosov was a man of immense culture; in particular, a great admirer of the poems of the Count Alexei Konstantinovich Tolstoi and a devoted Wagnerian. He is survived by his widow Lydia Ivanovna Anosova, his daughter Olga Dmitrievna Anosova, and his two granddaughters.



Alexander BUFETOV

alexander.bufetov@univ-amu.fr

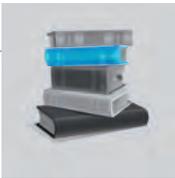
Alexander Bufetov est directeur de recherche au CNRS, affecté à l’Institut de Mathématiques de Marseille. Ses thèmes de recherche sont la théorie ergodique, les groupes de dimension infinie et les processus stochastiques.



Alexey KLIMENKO

klimenko05@mail.ru

Alexei Klimenko est chercheur à l’Institut Steklov des Mathématiques de l’Académie des sciences russe. Ses recherches portent sur la théorie ergodique lisse et des actions de groupes, la dynamique symbolique ainsi que sur le chaos dynamique.



LIVRES



Higher Order Fourier Analysis

Terence Tao

American Mathematical Soc., 2012. 202 p. ISBN : 9780821891957

Le livre de T. Tao se compose d'un très long chapitre de 130 pages, suivi d'un chapitre plus court (40 pages) de commentaires sur les articles récents liés au chapitre 1 et sur les principales techniques employées.

Une première remarque : ce livre n'est pas à mettre entre toutes les mains ! Il traite en effet de résultats datant souvent de moins de dix ans, dont les preuves sont fort difficiles, du point de vue conceptuel ou technique.

Une seconde remarque, venant tempérer la première, est que la lecture locale de l'ouvrage (crayon à la main quand même) est assez plaisante et on retrouve ici les qualités de l'auteur : les choses sont racontées, commentées, répétées avec la volonté de dégager des idées directrices, et le lecteur bénéficiera de la « vision panoramique » de T. Tao et de son goût pour les longues digressions et les longues routes de traverse.

Venons-en plus précisément au contenu et à son rapport avec le titre.

Le sujet principal du **chapitre 1** est l'équirépartition des suites de points d'un espace suivant une mesure, le point de départ étant le critère de H. Weyl avec les sommes d'exponentielles, qui fait le pont entre équirépartition et analyse de Fourier. Une distinction soignée est faite ici entre le cas « asymptotique » (le cas classique) et le cas « single-scale » (plus difficile) dans lequel on gèle la taille de l'échantillon et fait des estimations a priori. Un des premiers grands résultats de ce chapitre est une preuve complète du théorème de Roth sur les progressions arithmétiques de longueur 3 dans les ensembles d'entiers de densité positive. L'analyse de Fourier intervient ici de façon convaincante, avec la forme trilinéaire (où M désigne une moyenne discrète)

$$\Lambda(f, g, h) = M[f(n)g(n+r)h(n+2r)] = \sum \widehat{f}(\alpha)\widehat{g}(-2\alpha)\widehat{h}(\alpha), \quad |\Lambda(f, g, h)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \|\widehat{h}\|_\infty.$$

Une seconde preuve, sans Fourier, se rapproche des méthodes utilisées par l'auteur avec B. Green pour prouver l'existence de progressions arithmétiques arbitrairement longues dans les nombres premiers. Les choses deviennent ensuite franchement difficiles et spécialisées, avec les normes de Gowers, les conjectures inverses, et les nil-suites. Un deuxième grand résultat, parmi beaucoup d'autres, est l'extension par B. Green du théorème de Roth au cas des sous-ensembles de nombres premiers de densité positive à l'intérieur de ces nombres premiers, la preuve étant plus esquissée que dans le cas de Roth.

Le **chapitre 2** plus court et moins technique dégage quelques grandes méthodes issues des articles utilisés dans le chapitre 1.

Principes de compacité (ou ultralimites). Deux applications convaincantes sont données de ces méthodes de type « abstract nonsense » pour citer l'auteur lui-même, à savoir la version quantitative du théorème de Gromov sur les groupes à croissance polynomiale à partir de sa version qualitative, et la preuve du théorème de Szemerédi (Roth pour les progressions arithmétiques de longueur quelconque) à partir du théorème ergodique de multi-mélange de Furstenberg. Cette dernière preuve est particulièrement claire et agréable à suivre.

Espaces de Hilbert d'ordre supérieur. Cette partie présente les espaces (utilisés au chapitre 1 avec les nilsuites par exemple) munis d'un « produit scalaire » généralisant le cas hilbertien, comme les espaces L^{2^k} avec k entier, ou des espaces définis de façon plus axiomatique, comme dans les travaux récents de Gowers, et Host-Kra.

Les principes d'incertitude type Heisenberg ou autres. Cette partie m'a semblé plus protéiforme, mais contient une heuristique intéressante sur le principe de la phase stationnaire et les intégrales de Fourier.

En conclusion, le titre peut paraître un peu trompeur en ce qui concerne l'analyse de Fourier classique, finalement assez discrète ici. Mais il s'agit vraiment d'une *autre* analyse de Fourier, encore à l'état de chantier (« nascent » pour citer l'auteur). Cette remarque mise à part, le livre de Tao est un livre riche et dense, et un plaidoyer pour le caractère interactif de beaucoup de branches des mathématiques. Son contenu ne se dévoilera pas du premier coup au lecteur, et il s'agit vraiment d'un livre de recherche avancée. Mais qui pourrait rendre de grands services aux chercheurs en théorie ergodique ou théorie des nombres, et être une source d'inspiration et de réflexion pour les autres.

Hervé QUEFFÉLEC
Université Lille 1



Résumés des cours au Collège de France: 1973-2000

Jacques Tits

Société Mathématique de France, 2013. 390 p. ISBN : 9782856297742

.....

Ce livre regroupe les résumés des cours de Jacques Tits au Collège de France dans la chaire de Théorie des groupes, de 1973 à 2000. Il va intéresser tout mathématicien concerné par l'un quelconque des aspects de la théorie des groupes, mais aussi beaucoup de géomètres et même des physiciens théoriciens intéressés par la relativité générale. Sa valeur historique est également importante.

La renommée de Jacques Tits n'est plus à faire. Pour présenter l'étendue de ses travaux, je vais me contenter de citer la motivation du comité qui lui décerna le prix Abel en 2008 : « Tits a créé une vision, nouvelle et hautement éclairante, des groupes comme objets géométriques. Il a introduit ce que l'on nomme maintenant un immeuble de Tits, qui encode en termes géométriques la structure algébrique des groupes linéaires. La théorie des immeubles est un principe unificateur central avec une palette étonnante d'applications, par exemple dans la classification de groupes algébriques, de groupes de Lie et de groupes finis simples, dans les groupes de Kac-Moody (utilisés par les physiciens théoriciens) dans la géométrie combinatoire (utilisée en informatique) et dans l'étude des phénomènes de rigidité dans les espaces à courbure négative. L'approche géométrique de Tits a été essentielle pour l'étude et la réalisation des groupes finis simples sporadiques, dont le Monstre. Il a aussi établi la célèbre alternative de Tits : tout groupe linéaire finiment engendré soit est virtuellement résoluble, soit contient une copie du groupe libre à deux générateurs. Ce résultat a inspiré de nombreuses variantes et applications. »

À l'exception de cette alternative, ce livre reprend tous ces thèmes, puisqu'il rend compte, au fur et à mesure, d'une grosse seconde moitié de la production scientifique de Jacques Tits. On peut citer les sujets principaux suivants :

- la théorie des immeubles (sphériques, affines, jumelés, ...) avec les problèmes de construction et de classification ; en particulier la « propriété de Moufang » étudiée dès 1973/1974 est encore l'objet du cours de 1999/2000 ;

- en lien avec les immeubles, la structure, la classification des groupes algébriques réductifs sur tout corps ou sur les corps locaux ;
- la construction et la structure des groupes de Kac-Moody (avec leurs immeubles jumelés) ;
- les groupes finis simples sporadiques, avec en particulier une construction simplifiée du « monstre » de Griess-Fisher (devenu « géant amical ») ;
- la rigidité des sous-groupes discrets de covolume fini des groupes de Lie réels, d'après Margulis ; les groupes arithmétiques ;
- les propriétés des groupes pseudo-réductifs (et aussi des éléments unipotents) sur les corps imparfaits ;
- des problèmes de théorie des groupes en relativité einsteinienne et chrono-géométrie.

Plusieurs de ces thèmes sont traités dans des cours à plusieurs années d'écart ; on voit ainsi évoluer les théories. Cette évolution est aussi soulignée par des notes, dues à J. Tits ou aux éditeurs, qui indiquent les dernières précisions connues.

Bien sûr les résultats essentiels de Jacques Tits ont été publiés par lui avec plus de détails dans des revues classiques. Ils figurent dans ses « Œuvres », publiées en 2013 par la Société Mathématique Européenne. Mais ce n'est pas le cas de nombre de résultats figurant dans ce livre. En particulier les nouvelles démonstrations, souvent bien plus simples, de résultats déjà connus, ou certaines généralisations de ces résultats, qui sont expliquées ou esquissées dans ces résumés de cours, ne sont pas reprises par ailleurs. Ce livre constitue donc une mine de théorèmes et d'idées. Il va éviter à bien des mathématiciens la recherche difficile des résumés dont ils ont besoin dans les Annuaires du Collège de France, et leur permettre, comme à moi, de découvrir des points de vue éclairants dans des thèmes voisins.

Guy ROUSSEAU
Université de Lorraine, Nancy