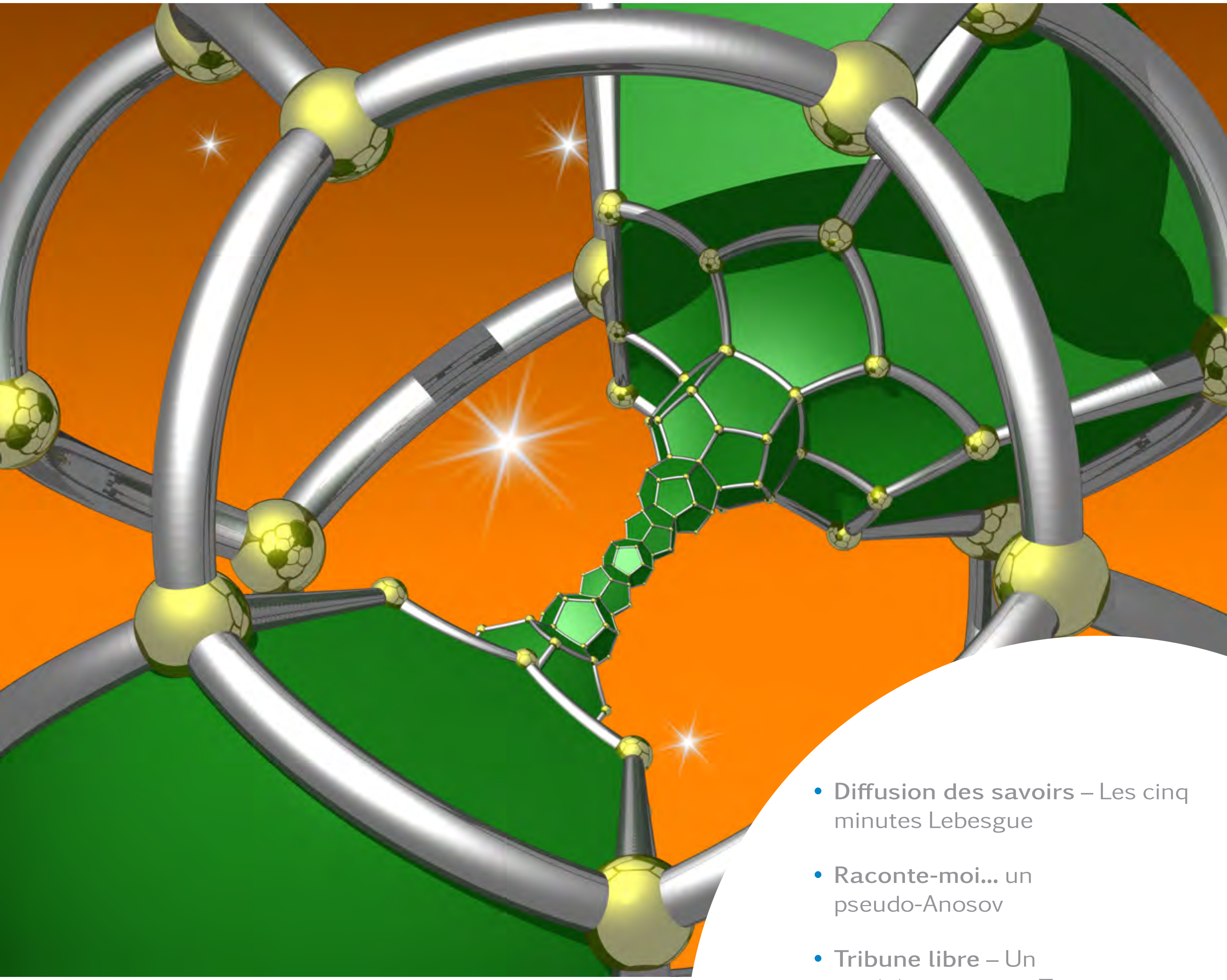
JANVIER 2017 – Nº 151

la Gazette des Mathématiciens



- **Diffusion des savoirs** – Les cinq minutes Lebesgue
- **Raconte-moi…** un pseudo-Anosov
- **Tribune libre** – Un mathématicien en Turquie
- **Carnet** – Hommage à Godement et Yoccoz

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France
SMF

À propos de la couverture. L'image de couverture, réalisée par Jos Leys, représente une portion du pavage de l'hypersphère par 120 dodécaèdres. Elle est tirée du nouveau projet collaboratif d'Henri Paul de Saint-Gervais intitulé *Analysis Situs : topologique algébrique des variétés*. Nous consacrerons un article à ce projet dans le prochain numéro de la *Gazette*. En attendant précipitez-vous sur analysis-situs.org pour y découvrir non seulement un cours de topologie algébrique truffé d'exemples mais surtout près de 300 vidéos et animations ainsi que le texte fondateur de la topologie algébrique ressaisi et commenté... (crédit : Jos Leys).

Nº 151

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Il y a tout juste un an, je ne pouvais débuter mon éditorial sans un mot concernant les terribles attentats qui venaient de frapper Paris. Aujourd'hui laisse place au constat effroyable d'une situation inchangée. Au moment où j'écris ces lignes de nouveaux actes de barbarie viennent d'endeuiller Berlin et Istanbul. La Turquie se trouve en particulier en proie à une crise profonde. Face aux peurs et à l'incompréhension, une montée du totalitarisme est à craindre. C'est pourquoi nous avons choisi de publier une lettre émanant d'un jeune mathématicien turc, Kivanç Ersoy. Celle-ci nous alerte sur le sort récemment réservé à de nombreux scientifiques dans son pays.

Voici pêle-mêle le contenu mathématiques de cette *Gazette*. Il y est question de relation entre théorie des nombres et topologie, mais aussi de quelques grands noms. L'étude des espaces de Banach de Grothendieck à Naor, les groupes moyennables et les algèbres de von Neumann, ou encore les homéomorphismes pseudo-Anosov. Je te laisse le soin d'y mettre de l'ordre au gré de tes envies.

La diffusion des mathématiques prend toute sa place à travers deux initiatives originales que nous avons souhaité mettre en lumière. À l'heure où l'on gazouille avec empressement sur les réseaux sociaux, les membres du centre Henri Lebesgue révolutionnent littéralement le format habituel des exposés mathématiques, allant jusqu'à réduire au tiers les quinze minutes de célébrité jusqu'ici promises à tous. En effet, les exposés de ce séminaire *new school* ne doivent satisfaire qu'à une seule contrainte : leur durée est de cinq minutes. Et pas une de plus ! La seconde initiative sur laquelle nous attirons ton attention est le rafraîchissant Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens. Pensé comme une joute mathématique, évidemment pacifique, il réunit des équipes de lycéens s'affrontant, craie en main, pour présenter tour à tour leurs idées, les critiquer et débattre ensemble.

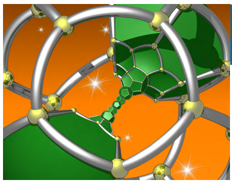
Nous revenons également en détail sur la troisième journée consacrée aux questions de parité en mathématiques qui s'est déroulée à l'IHP en juillet dernier. Parité toujours, une tribune libre est consacrée à la réaction de Christine Lescop suite à la parution d'un texte de Laurence Broze dans le numéro précédent. Enfin, nous rendons hommage à deux figures des mathématiques françaises qui nous ont récemment quittés : Roger Godement et Jean-Christophe Yoccoz.

Voici pour conclure une anecdote qui, aux yeux d'un autre Boris, serait *entièrement vraie*. Alors que je relisais quelques pages des *Choses* de Perec, me remettant difficilement d'une quinzaine de consumérisme effréné, l'idée même de possession m'accabla soudain. Je tâtai mes poches appesanties par de fraîches étrennes. N'était-il pas temps de me libérer ? Deux clics plus tard, je m'acquittai de ma cotisation annuelle envers notre chère SMF (somme modique si tu as moins de trente-cinq ans et même incroyablement nulle s'il s'agit de plus de ta première adhésion). Rêvassant à la prochaine *Gazette* qui me serait bientôt livrée à domicile par un courageux agent de la fonction publique, je me sentis alors le cœur léger, revigoré, prêt à affronter une nouvelle année. Une expérience expiatoire que je ne saurais trop te recommander…

En te souhaitant une excellente année 2017 et une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



Nº 151

Sommaire

Concours
Mathématiques SMF junior
Du 2 au 11 mai 2017
10 problèmes
à résoudre
en 10 jours !
Résolution
dynamique
dimension
mesure
Analyse
Géométrie
Topologie
espace
Problèmes
Recherche
exemple
Maths
Algèbre
variable
méthode
Combinatoire
calcul
Nombres
Probabilités
vectoriel
Inscris-toi !
Des prix à gagner de
250 à 750 euros,
des livres…
Tu es étudiant (e) en Master,
Licence, classe prépa ?
Tu veux faire des maths
en équipe et goûter au plaisir
de la recherche ?
http://smf.emath.fr/content/concours-smf-junior
Société
Mathématique
de France
SMF

Société Mathématique de France SMF

Nº 151

Mot du président

Chères et chers collègues,

Je commence bien sûr par vous souhaiter une excellente année 2017, avec de beaux articles et de pleines réussites dans tous vos projets, professionnels et personnels.

Nous sommes à peine début janvier et déjà les activités ont repris avec une grande intensité. En effet, cette année sera décisive sur bien des points.

Le monde politique et médiatique semble avoir réalisé l'importance des mathématiques dans la formation à tous les niveaux. Les mauvais résultats des études TIMSS et PISA, attestent des difficultés que nous avons constatées chez nos étudiants, et révèlent au grand jour des dysfonctionnements profonds, auxquels nous sommes liés. Cette prise de conscience collective – à en voir le nombre d'articles consacrés à ce sujet, et les nombreuses sollicitations reçues par la SMF et les autres associations – nous ouvre une fenêtre d'opportunités (peut-être assez courte) pour faire passer des messages que nous rabâchons depuis des années, notamment en cette période électorale. À l'initiative de la SMF, des tribunes sont en train d'être rédigées avec plusieurs sociétés savantes pour interpeler les futur(e)s candidat(e)s à l'élection présidentielle, mais pas seulement, car il faut que l'ensemble des acteurs (entreprises, formateurs, cabinets ministériels, think tanks, ...) soit saisi. Les sociétés savantes vont collectivement réclamer d'être plus statutairement représentées dans les comités décisionnaires sur ces questions : il est possible que pour une fois nous soyons écoutés et entendus. D'autres actions sont en cours, nous vous en tiendrons régulièrement informés.

Plus localement, la SMF est aussi engagée dans plusieurs projets d'ampleur en cette année 2017.

Le concours SMF junior est lancé, nous attendons vos sujets, et surtout nous sommes impatients de voir nos étudiants plancher entre les 2 et 11 mai prochains. Je vous invite à consulter le site de la SMF, et vos correspondants locaux, pour connaître les détails et vous lancer dans l'aventure!

La SMF va financer deux semaines par an de conférences au CIRM à partir de 2019, dont la spécificité sera d'être résolument tournées vers nos jeunes collègues : des mini-cours et des demi-journées dédiées aux thésards, post-docs, pour exposer leurs travaux devront être organisés. Cette promotion des jeunes et notamment des jeunes femmes est fondamentale pour la vitalité des mathématiques, et nous tenons à la favoriser.

La numérisation de notre collection *Astérisque* est en marche. Avec l'aide du CNRS, l'ensemble de nos volumes sera mis en ligne d'ici 2018, et gratuitement accessibles pour la grande majorité d'entre eux. Cette mise à disposition marque notre volonté, en tant que maison d'édition indépendante et tournée vers l'avenir, de partager ce patrimoine scientifique inestimable. Nous nous apprêtons également (dès ce mois de janvier!) à apposer un DOI aux articles et livres que nous publions : là encore, nous ne chômons pas!

Le grand chantier de la SMF pour 2017 est la refonte de notre site web et d'une partie de notre organisation informatique, afin de mettre en valeur toutes nos activités (prises de position, conférences et soutien de conférences, concours, publications, travail pour le CIRM, ...) mais également de nous assurer une sécurité et une stabilité de fonctionnement. Celle-ci va nous occuper une bonne partie de l'année, et nous espérons que le changement (prévu pour le second semestre de l'année) vous séduira, et vous incitera à consulter régulièrement nos actualités et nos publications.

Enfin, la SMF participe activement à l'extension du CIRM, à la fois en termes financier et humain. Plusieurs articles sur notre site et dans la Gazette détailleront cet ambitieux projet et les appels d'offres qui y sont liés.

Toutes ces actions sont envisageables grâce à l'implication des salariés de la SMF et de tous les bénévoles qui travaillent sans relâche pour moderniser notre société savante, mais surtout pour faire vivre la communauté mathématique à notre échelle. Ce n'est pas si facile de s'engager dans le monde associatif et la reconnaissance est parfois longue à venir : je les remercie sincèrement pour toute l'énergie qu'ils y mettent. Mais si vous voulez comme nous que la SMF continue à agir et développe de nouvelles actions, il faut que nous soyons plus nombreux. N'oubliez donc pas d'adhérer pour 2017 : cela nous aide évidemment à fonctionner, mais cela conforte notre engagement collectif. Une plus grande aide encore est celle que vous pourrez nous apporter dans la création, l'organisation, l'animation de nos événements. La SMF a besoin de tous vos soutiens.

Je termine cette lettre avec des pensées émues pour Ahmad El Soufi qui nous a quittés brutalement il y a peu. Ses collègues de Tours perdent un collègue, ami, mathématicien chaleureux, et la SMF s'associe à leur douleur et celle de sa famille.

Je vous renouvelle mes vœux pour cette année 2017.

Le 2 janvier 2017

Stéphane Seuret, président de la SMF

Théorie des nombres et topologie : une relation « tordue »

• N. Bergeron

Les entiers naturels, et plus généralement les nombres rationnels, nous sont familiers mais ne suffisent pas à résoudre toutes les équations polynomiales. Nous avons donc, depuis longtemps, pris l'habitude d'enrichir notre concept de « nombre » de la famille des nombres algébriques. On évoquera brièvement les plus simples d'entre eux, les irrationnels quadratiques. Ceux-ci sont assez bien compris mais le monde de tous les nombres algébriques reste bien mystérieux et le rêve de Kronecker de tous les décrire explicitement à l'aide de quelques fonctions analytiques naturelles n'est encore que très partiellement réalisé. Récemment la portée de ce rêve s'est largement étendue : la topologie de certains espaces « hyperboliques » entre en jeu. En particulier des classes homologiques *de torsion* s'avèrent utile pour décrire certains types de nombres algébriques. Et certaines analogies entre théorie des nombres et géométrie montrent qu'il existe beaucoup de telles classes de torsion !

1. Irrationnels quadratiques

La célèbre formule

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

exprime les solutions de l'équation polynomiale quadratique

$$aX^2+bX+c=0 \quad (a,b,c \in \mathbf{Q}) \qquad (1)$$

rationnellement en fonction de la racine carrée $\sqrt{D}$ du *discriminant* $D = b^2-4ac$. C'est le jeune Théétète que Platon, dans le dialogue éponyme, crédite de la découverte que si D est un entier naturel alors $\sqrt{D}$ est irrationnel sauf si D est le carré d'un nombre entier. La racine carrée du discriminant est ainsi d'abord vue comme une obstruction à résoudre en nombres rationnels l'équation (1). Mais, comme plus tard pour les nombres complexes, de simple obstruction la racine carrée $\sqrt{D}$ acquiert rapidement le statut de *nombre*. C'est le début de la théorie algébrique des nombres.

Un *irrationnel quadratique*, ou entier algébrique de degré 2, est simplement une racine d'un polynôme quadratique (1) avec $a = 1$ et b et c entiers. Si d est un entier, positif ou négatif, sans facteur carré, on lui associe un irrationnel quadratique particulier τ_d : si d est congru à 1 modulo 4, alors $\tau_d = \frac{1}{2}(1+\sqrt{d})$ et sinon $\tau_d = \sqrt{d}$. Ce sont bien des entiers algébriques : dans le premier cas τ_d est racine du polynôme $X^2 - X + \frac{1}{4}(1-d)$ et, dans le second cas, τ_d est racine de X^2-d. On singularise ces entiers algébriques car tout entier algébrique de degré 2 s'obtient comme combinaison linéaire à coefficients entiers de 1 et de l'un des τ_d.

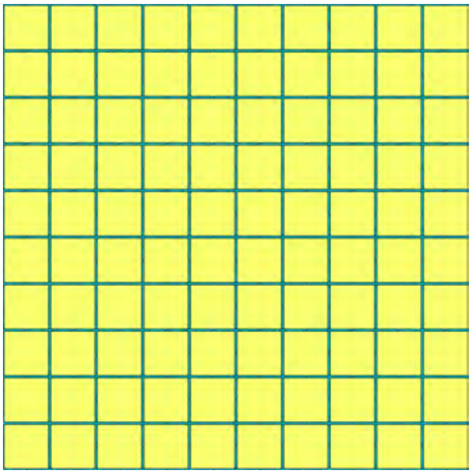
Comme $\mathbf{Z}$, l'ensemble

$$\mathbf{Z}[\tau_d] = \{a+b\tau_d \ : \ a,b \in \mathbf{Z}\}$$

des combinaisons linéaires à coefficients entiers de 1 et de τ_d est stable par addition, soustraction et multiplication; on dit que c'est un anneau, nous le noterons $\mathcal{O}_d$. Tout irrationnel quadratique est donc contenu dans l'un des $\mathcal{O}_d$.

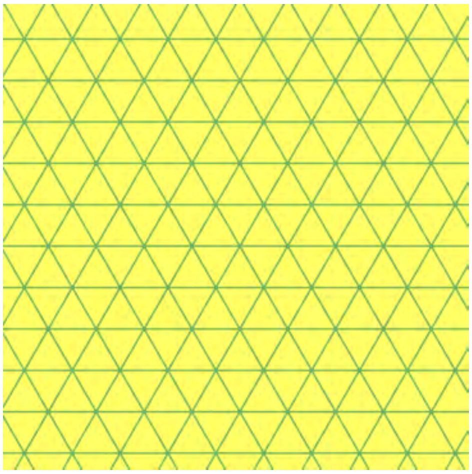
Exemple 1. L'anneau correspondant à $d = -1$ est généralement appelé anneau des *entiers de Gauss*. Il est constitué des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont des entiers. Ce sont donc les sommets du pavage du plan par des carrés unités. L'aire de chaque carré est égale à $1 = \frac{1}{2}\sqrt{|4d|}$.

Figure 1



Exemple 2. Lorsque $d = -3$ les nombres complexes appartenant à $\mathcal{O}_{-3}$ sont les sommets d'un pavage du plan par des triangles équilatéraux. L'aire de chaque triangle est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{|d|}$.

Figure 2



On appelle *discriminant* de $\mathcal{O}_d$ l'entier

$$D = \begin{cases} d & \text{si } d \equiv 1 \pmod 4 \\ 4d & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est aussi le discriminant du polynôme quadratique unitaire dont τ_d est racine; la racine carrée $\sqrt{|D|}$ est égale à deux fois l'aire d'un pavé fondamental du pavage du plan associé à $\mathcal{O}_d$.

Ayant maintenant de nouveaux anneaux (de nombres complexes) à notre disposition, on peut en explorer la structure. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux *unités* de $\mathcal{O}_d$. En général une *unité* u dans un anneau A de nombres complexes est un nombre dans A dont l'inverse $1/u$ appartient encore à A. Dans l'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$, les unités sont ± 1. Il n'est pas difficile de vérifier que les unités de $\mathcal{O}_{-1}$ sont les quatre éléments ± 1 et $\pm i$. La multiplication par chacune de ces unités induit une *symétrie* du pavage carré. De même, il y a 6 unités dans $\mathcal{O}_{-3}$ qui induisent à leur tour des symétries du pavage triangulaire.

Encadré 1 : irréductibles et nombre de classes

Dans un anneau A de nombres complexes, un élément est dit *irréductible* si ce n'est pas une unité et s'il ne peut être obtenu comme produit de deux non-unités de A.
Dans l'anneau des entiers relatifs $\mathbf{Z}$, les éléments irréductibles sont les $\pm p$ avec p premier et le théorème fondamental de l'arithmétique affirme que tout entier naturel strictement supérieur à 1 se décompose de manière unique en un produit de nombres premiers. On dit aussi que l'anneau $\mathbf{Z}$ est *factoriel*.
Un entier d sans facteur carré étant fixé, déterminer si l'anneau $\mathcal{O}_d$ est factoriel ou non est une question tout aussi fondamentale qui conduit à la notion d'*idéal*. Ainsi, dans $\mathcal{O}_{-5}$, on peut écrire $9 = 3 \times 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ de deux manières comme produits d'irréductibles. Mais l'idéal engendré par 9 se décompose lui de manière unique en produit d'idéaux premiers. Cela provient de ce que l'idéal engendré par 3 peut lui-même être décomposé en le produit des idéaux $(3, 1 + \sqrt{-5})$ et $(3, 1 - \sqrt{-5})$ qui sont premiers mais pas *principaux*, c'est-à-dire engendrés par un seul élément de $\mathcal{O}_{-5}$. Dans un anneau de nombres complexes l'existence d'idéaux non principaux est précisément l'obstruction à être factoriel. Et là encore, d'abord vus comme des obstructions les idéaux sont devenus nombres. Des nombres qui peuvent encore être multipliés et comprennent les « nombres usuels », éléments de $\mathcal{O}_d$, identifiés

aux idéaux principaux qu'ils engendrent. La différence entre l'ensemble de tous les idéaux et ceux d'entre eux qui sont principaux est mesurée par un groupe fini, *le groupe des classes d'idéaux*, dont on note le cardinal h_d. L'entier h_d est donc égal à 1 précisément lorsque l'anneau $\mathcal{O}_d$ est factoriel.

2. Groupes des unités

L'ensemble des unités $\mathcal{O}_d^\times$ dans $\mathcal{O}_d$ est stable par multiplication et passage à l'inverse, on dit qu'il forme un sous-groupe de $\mathbf{C}^\times$. Tout groupe commutatif H se décompose comme le produit

$$H = H_{\mathrm{libre}} \times H_{\mathrm{tors}}$$

d'un groupe abélien libre isomorphe à $\mathbf{Z}^r$ par un groupe fini – sa *partie de torsion*.

Le groupe $\mathcal{O}_d^\times$ est très différent selon que d est positif ou négatif. Si d est strictement positif le groupe $\mathcal{O}_d^\times$ est infini de partie libre isomorphe $\mathbf{Z}$ et sa partie de torsion est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, égale à ± 1. *A contrario*, si d est strictement négatif, le groupe $\mathcal{O}_d^\times = (\mathcal{O}_d^\times)_{\mathrm{tors}}$ est fini (cyclique) constitué de toutes les racines de l'unité contenues dans $\mathcal{O}_d^\times$; son cardinal est égal à 4 si $d = -1$, à 6 si $d = -3$ et à 2 sinon.

Lorsque d est strictement positif, le groupe $\mathcal{O}_d^\times$ est donc égal à

$$\{\pm \varepsilon_d^n \;:\; n \in \mathbf{Z}\}$$

où $\varepsilon_d \in \mathcal{O}_d^\times$ est l'unité, strictement supérieure à 1, minimale ; on l'appelle *unité fondamentale*. Déterminer ε_d revient essentiellement à résoudre l'équation de Pell-Fermat ; voir Encadré 2. Le comportement de ε_d avec d reste cependant largement mystérieux. Sa taille, plus précisément $\ln \varepsilon_d$, est appelée *régulateur* de $\mathcal{O}_d$.

Encadré 2 : équation de Pell-Fermat

C'est l'équation

$$X^2 - dY^2 = \pm 1$$

d'inconnues $(X, Y) \in \mathbf{Z}^2$. La résoudre revient essentiellement à déterminer ε_d. Ainsi $\varepsilon_2 = 1 + \sqrt{2}$ correspond à la plus petite solution $(X, Y) = (1, 1)$ de l'équation $X^2 - 2Y^2 = \pm 1$.
Le *problème des bœufs*, attribué à Archimède, suggère que l'étude de l'équation de Pell-Fermat remonte à l'antiquité. Pell n'a en tout cas rien à voir avec cette histoire. Et si Fermat l'a bel et bien étudiée – il met en particulier les mathématiciens anglais au défi de la résoudre dans le cas particulier où $d = 61$ – c'est à Bhaskara, mathématicien indien du XIIe siècle, que l'on doit la première méthode générale pour déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de « Pell-Fermat ». Bhaskara choisit d'ailleurs le cas particulier où $d = 61$ pour illustrer sa méthode. Ce n'est pas tout à fait un hasard : bien que cela ne soit pas évident, on peut déduire de la formule (2), qu'outre le discriminant D, le facteur le plus important affectant la taille de ε_d est h_d^{-1} et justement $h_{61} = 1$ est minimal. Chercher la plus petite solution de l'équation $X^2 - 61Y^2 = \pm 1$ « à tâtons » est donc particulièrement long (relativement à la taille de d). Fermat ne cherchait visiblement pas à faciliter la tâche de ses « amis » anglais.

Lorsque $d = 2$ on a une jolie expression analytique de $\ln \varepsilon_2$ que vous pouvez « vérifier » expérimentalement avec une calculatrice :

$$\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \pm\frac{1}{n} + \ldots$$

où n parcourt les nombres impairs et le signe devant $\frac{1}{n}$ est *plus* si $n \equiv 1$ ou $7 \pmod 8$ et *moins* si $n \equiv 3$ ou $5 \pmod 8$. On dispose en général d'une expression semblable pour ε_d mais elle fait intervenir le nombre de classes h_d (voir Encadré 1), c'est la *formule du nombre de classes* de Dirichlet.

– Si d est strictement positif, on a :

$$h_d \cdot \frac{\ln \varepsilon_d}{\sqrt{D}} = \sum_{n>0} \pm \frac{1}{n}, \tag{2}$$

où n parcourt l'ensemble des entiers premiers au discriminant D et les signes $\pm$ ne dépendent que du résidu de n modulo D.

– Si d est strictement négatif, il n'y a plus de régulateur mais cette fois $(\mathcal{O}_d^\times)_{\mathrm{tors}}$ peut être plus gros. On obtient :

$$\frac{h_d}{|(\mathcal{O}_d^\times)_{\mathrm{tors}}| \cdot \sqrt{D}} = \sum_{n>0} \pm \frac{1}{n}. \tag{3}$$

À l'aide de la formule (3), on peut montrer que h_d tend vers l'infini lorsque d tend vers $-\infty$. Il n'existe en particulier qu'un nombre fini de d strictement négatifs tels que $\mathcal{O}_d$ soit factoriel. *A contrario* on ne sait toujours pas s'il existe une infinité de $d > 0$ tels que $h_d = 1$. Il est en effet difficile de décorréler les contributions de h_d et du régulateur $\ln \varepsilon_d$ dans (2) lorsque d tend vers $+\infty$.

3. Généralisations matricielles

Le groupe des unités $\mathcal{O}_d^\times$ coïncide avec $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_d)$. On peut plus généralement continuer à explorer la structure de $\mathcal{O}_d$ en considérant les groupes de matrices $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_d)$. Étant donné un groupe Γ on peut lui associer un groupe commutatif – son abélianisé – en formant le quotient

$$\Gamma^{\mathrm{ab}} = \Gamma / \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in \Gamma \rangle.$$

La considération des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_d)^{\mathrm{ab}}$ conduit aux groupes de K-théorie de l'anneau $\mathcal{O}_d$ dont le premier capture essentiellement dans quelle mesure on peut réduire une matrice par pivot de Gauss sur $\mathcal{O}_d$. Contentons-nous plus simplement ici des matrices 2×2 mais ajoutons des conditions de congruence. Autrement dit, considérons non seulement l'abélianisé du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ mais, plus généralement, les abélianisés des sous-groupes

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d) \;\middle|\; N|c \right\} \qquad (N \in \mathcal{O}_d).$$

Là encore nous allons voir que la structure des groupes $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ est très différente selon que d est positif ou négatif.

Si d est strictement positif

Dans ce cas chaque groupe $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ est fini et « petit ». On peut relier cela au fait que, lorsque d est strictement positif, l'anneau $\mathcal{O}_d$ a un nombre infini d'unités : si $u \in \mathcal{O}_d^\times$ est une unité on peut en effet considérer les matrices

$$x = \left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{smallmatrix} \right) \text{ et } y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$$

qui appartiennent toutes les deux au groupe $\Gamma_0(N)$. Leur commutateur $[x, y]$ est égal à

$$xyx^{-1}y^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & u^2-1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right).$$

Le groupe de tous les commutateurs est donc « gros » et le quotient

$$\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} = \Gamma_0(N) / \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in \Gamma_0(N) \rangle$$

est « petit ».

Si d est strictement négatif

Alors le groupe des unités $\mathcal{O}_d^\times$ est fini et il y a déjà 35 ans Elstrodt, Grunewald and Mennicke remarquaient (expérimentalement) que, pour N grand (en norme), le groupe $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ semble avoir une partie libre de petit rang et une grosse partie torsion. Voici quelques données obtenues plus récemment par Şengün dans le cas $d = -1$:

- si $N = 9 + 4i$, on a $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^6$;
- si $N = 41 + 56i$ on a $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z}/4078793513671\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/292306033\mathbf{Z} \oplus \cdots$;
- si $N = 118 + 175i$ on a $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Z} \oplus T$ avec T fini de cardinal $> 10^{310}$.

Pour N grand, les nombres premiers divisant le cardinal de $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}_{\mathrm{tors}}$ ont tendance à être énormes et semblent être distribués aléatoirement.

Ce phénomène est encore loin d'être compris. Au delà du simple plaisir de voir surgir ici des nombres premiers gigantesques, il y a pourtant de bonnes raisons de chercher à mieux comprendre cette observation. Il découle en effet d'un formidable tour de force récent de Scholze qu'à tout facteur isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ on peut associer un nouvel anneau de nombres algébriques (une extension de $\mathcal{O}_d$) dont les propriétés arithmétiques sont déterminées par la classe de p-torsion dans $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$. Par exemple : les facteurs premiers du discriminant du nouvel anneau de nombres algébriques sont tous des facteurs premiers de Np.

Maintenant, pour mieux comprendre l'abondance de torsion dans les groupes $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}$ on est naturellement amené à considérer certains « espaces hyperboliques ». Expliquons ce lien.

4. Variétés hyperboliques de congruences

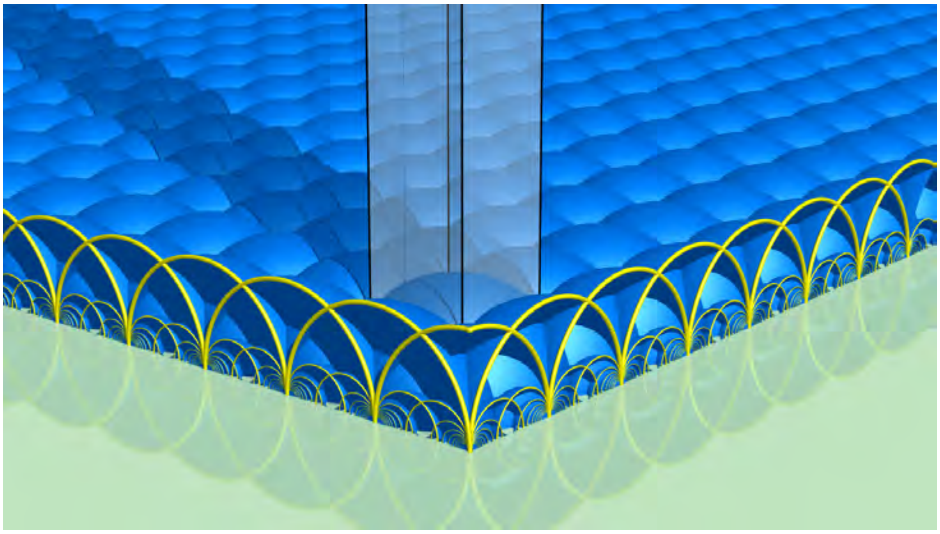
Les groupes $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$, avec $d < 0$, sont appelés *groupes de Bianchi*. Ce sont des sous-groupes discrets du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et en tant que tels ils opèrent naturellement (proprement) sur l'espace de dimension 3

$$\mathbf{H}^3 = \{(z, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \;:\; y > 0\}$$

par des transformations qui préservent la *métrique hyperbolique* $\frac{1}{y}\sqrt{|dz|^2 + dy^2}$. Il correspond donc à chaque groupe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ un pavage de $\mathbf{H}^3$ comme dans la figure 3.

Les pavés sont de (même) volume fini pour la métrique hyperbolique. On dit que $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ est un *réseau* de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. On mesure la complexité d'un tel réseau par le volume d'un pavé. Les groupes $\Gamma_0(N)$ ne sont que des exemples particuliers de réseaux *de congruences* dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. La plupart des autres réseaux de congruences opèrent en fait avec un quotient compact sur l'espace $\mathbf{H}^3$.

Figure 3 – Un pavé fondamental du pavage associé à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])$



Les quotients compacts forment un bon guide pour l'intuition. Or, plusieurs modèles suggèrent que, pour un quotient compact aléatoire $\Gamma\backslash\mathbf{H}^3$, le cardinal de la partie de torsion de Γ^{ab} est exponentiel en la complexité de Γ. Les quotients d'origine arithmétique ont souvent tendance, dans la mesure du possible, à suivre le comportement aléatoire. Avec Akshay Venkatesh nous avons plus précisément proposé la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Soit* $(\Gamma_N)_{N\in\mathbf{N}}$ *une suite de réseaux* de congruences *dans* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ *dont la suite des complexités* $V_N := \mathrm{vol}(\Gamma_N\backslash\mathbf{H}^3)$ *tend vers l'infini avec N. Alors, on a :*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\ln|(\Gamma_N^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tors}}|}{V_N}=\frac{1}{6\pi}.$$

Appliquée à la suite $(\Gamma_0(N))$, cette conjecture implique que pour N irréductible tendant vers l'infini, le cardinal de $\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}_{\mathrm{tors}}$ est exponentiel en $|N|^2$. Les données de Şengün tendent à confirmer cette conjecture, avec la constante $1/6\pi$ annoncée.

5. Vers une démonstration ?

Le membre de droite des formules (2) et (3) est l'évaluation en $s=1$ d'une fonction $s\mapsto\zeta_d(s)$ méromorphe sur $\mathbf{C}$ et égale à $\sum_{n>0}\pm\frac{1}{n^s}$ dans la région d'absolue convergence $\mathrm{Re}(s)>1$. Comme la fonction zéta de Riemann, la fonction $\zeta_d(s)$ peut être définie par un produit eulérien $\zeta_d(s)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{p})^s}\right)$, où le produit porte sur les idéaux premiers de $\mathcal{O}_d$ et $\mathrm{N}(\mathfrak{p})$ désigne la norme de l'idéal $\mathfrak{p}$. Cette fonction vérifie en outre une équation fonctionnelle dont il découle que l'ordre d'annulation en $s=0$ de $\zeta_d(s)$ est égal au rang m du groupe des unités $\mathcal{O}_d^{\times}$.[1] Et on peut reformuler les équations (2) et (3) sous la forme :

$$\frac{1}{m!}\zeta_d^{(m)}(0)=-\frac{h_dR_d}{|(\mathcal{O}_d^{\times})_{\mathrm{tors}}|},\tag{4}$$

où $R_d=1$ si d est négatif et $R_d=\ln\varepsilon_d$ si d est positif.

On dispose d'une formule analogue pour tout quotient hyperbolique compact $M=\Gamma\backslash\mathbf{H}^3$. Elle implique une fonction zéta naturelle, la *fonction zéta de Ruelle* définie par le produit eulérien

$$R(s)=\prod_{\gamma}\left(1-e^{-s\ell(\gamma)}\right),$$

où γ parcourt l'ensemble des courbes géodésiques fermées dans M qui sont *premières*, i.e. pas une courbe géodésique fermée parcourue plusieurs fois, et $\ell(\gamma)$ désigne la longueur de γ. La fonction $R(s)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe $\mathbf{C}$, son ordre d'annulation en 0 est un entier m qui ne dépend que de la topologie de M (il est égal à $4-2b_1(M)$, où $b_1(M)$ est le premier nombre de Betti de M) et il découle de travaux profond de Ray-Singer, Cheeger, Müller et Fried que

$$\frac{1}{m!}R^m(0)=\frac{R_1(M)^4\mathrm{vol}(M)^2}{|(\Gamma^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tors}}|^2},\tag{5}$$

1. On a $m=0$ si d est négatif et $m=1$ si d est positif.

où $R_1(M)$ – que l'on appelle encore régulateur – mesure la complexité de la partie libre de Γ^{ab} à l'aide de la métrique hyperbolique.

Le terme qui nous intéresse, le cardinal du groupe de torsion $(\Gamma^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tors}}$, joue un rôle analogue au nombre de classe h_d dans la formule (4) alors que $R_1(M)$ et $\mathrm{vol}(M)$ sont à rapprocher du régulateur R_d.

Lorsque M est « proche » de l'espace $\mathbb{H}^3$ – ce qui est bien le cas lorsque M est une variété de congruence de grand volume – on peut montrer que $\frac{1}{m!}R^m(0)$ est égal à $e^{(-\frac{1}{3\pi}+o(1))\mathrm{vol}(M)}$. Dans de nombreuses situations intéressantes du point de vue de la théorie des nombres le régulateur $R_1(M)$ est trivial et, avec Venkatesh, nous démontrons des résultats analogues à la conjecture 1. On obtient ainsi beaucoup de classes de torsion qui, d'après le théorème de Scholze évoqué plus haut, découpent des anneaux de nombres algébriques.

En général le régulateur $R_1(M)$ est non trivial et il n'y a pas de raison que sa contribution à (5) soit négligeable lorsque M approche $\mathbb{H}^3$. Avec Şengün et Venkatesh, nous montrons toutefois sur différents cas représentatifs que le long d'une suite (M_N) *de congruence* la contribution de $R_1(M_N)$ est essentiellement négligeable. On s'attend donc à ce que le membre de droite de (5) soit égal à $|\Gamma^{\mathrm{ab}}_{\mathrm{tors}}|^{-2}e^{o(\mathrm{vol}(M))}$ et donc que

$$\ln|\Gamma^{\mathrm{ab}}_{\mathrm{tors}}| = \frac{1}{6\pi}\mathrm{vol}(M) + o(\mathrm{vol}(M)).$$

Donner une démonstration complète de la conjecture 1 nécessitera encore de nouvelles idées mais c'est déjà une situation (rare) où l'on parvient à décorréler les contributions des termes « de torsion » des termes « régulateurs » dans une formule analytique de type « formule du nombre de classes ».

Il faudrait aussi mieux comprendre la manière dont sont répartis les diviseurs premiers des $|\Gamma_0(N)^{\mathrm{ab}}_{\mathrm{tors}}|$. C'est une autre histoire qui nous amènerait vers la théorie des représentations p-adiques...

Pour aller plus loin

Pour commencer, voici quelques livres de base en théorie algébrique des nombres :

– Davenport, H. *The Higher Arihmetic : An Introduction to the Theory of Numbers.* Cambridge University Press.
– Hardy, G. H. and Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford University Press.

Pour passer à un niveau supérieur, on pourra consulter :

– Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R. *Number Theory.* Academic Press.
– Cassels, J. and Fröhlich, A. *Algebraic Number Theory.* Academic Press.
– Serre, J.-P. *Cours d'arithmétique*, PUF.

En ce qui concerne la géométrie hyperbolique de dimension 3 et ses liens avec la théorie des nombres, on recommande :

– Elstrodt, J. Grunewald, F. and Mennicke, J. *Groups Acting on Hyperbolic Space.* Springer.
– Maclachlan, C. and Reid, A. *The Arithmetic of Hyperbolic* 3*-Manifolds.* Springer.

Et, pour ce qui concerne plus spécifiquement les travaux récents évoqués dans cet article on pourra consulter mon article pour les proceedings du 7e congrès européen ainsi que les références suivantes.

– Bergeron, N. and Venkatesh, A. *The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups*. J. Inst. Math. Jussieu, 12(2) :391-447, 2013.
– Bergeron, N., Haluk Sengun, M. and Venkatesh, *A. Torsion homology growth and cycle complexity of arithmetic manifolds*. Duke Math. J. 165 (2016) n° 9, 1629-1693.
– Scholze, P. *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*. Ann. of Math. (2), 182(3) : 945–1066, 2015.

Nicolas Bergeron

Sorbonne Universités, Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, UMR 7586, CNRS, Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité

`nicolas.bergeron@imj-prg.fr`

Nicolas Bergeron, professeur à l'université Pierre et Marie Curie, est spécialiste des variétés arithmétiques, en particulier de leur topologie et de leur spectre.

De Grothendieck à Naor : une promenade dans l'analyse métrique des espaces de Banach

• G. Godefroy

En juillet 1954, Alexandre Grothendieck rédige l'introduction de son « cours relativement complet sur la théorie des espaces vectoriels topologiques, ou plus précisément sur la partie de la théorie qui peut être considérée comme le prolongement direct et l'aboutissement des idées de S. Banach », publié à Sao Paulo sous le titre « espaces vectoriels topologiques ». Il y énonce que la théorie de Banach n'a pas été « réellement dépassée dans ces résultats essentiels » que sont les applications des théorèmes de Baire et de Hahn-Banach, mais mentionne pourtant un séminaire sur les « développements plus récents d'analyse tensorielle topologique », sans préciser qu'ils lui sont dus et qu'ils représentent un véritable dépassement des idées de Banach et de son école. De fait, ces résultats fondamentaux avaient été publiés par Grothendieck l'année précédente, toujours à Sao Paulo, dans son célèbre Résumé [6]. Bien loin d'être un « prolongement direct des idées de S. Banach », ils représentaient un changement de point de vue si profond qu'il fallut attendre 1968 et un article de Joram Lindenstrauss et Alexander Pelczynski pour que l'importance du Résumé soit internationalement reconnue. En effet, celui-ci inaugure l'étude des structures dures (métriques, finies-dimensionnelles, combinatoires) en analyse fonctionnelle, dont nous verrons quelques exemples ci-dessous. Cette direction de recherche a récemment vu l'émergence d'une composante non linéaire motivée, en particulier, par des questions d'informatique théorique, et dans laquelle de nombreux jeunes talents se sont illustrés depuis une quinzaine d'années. Dans cette nouvelle génération, Assaf Naor occupe une place centrale, et le lecteur constatera que ses travaux constituent le fil rouge de cette note.

Pourquoi donc se préoccuper de plonger des espaces métriques dans tel ou tel espace de Banach ? Quelle importance peut bien avoir la valeur numérique de la constante de Grothendieck ? Ces questions ne relèvent pas seulement de la curiosité intellectuelle. Elles sont porteuses de conséquences bien concrètes. Voyons pourquoi.

1. Le programme de Ribe

Le théorème de M. I. Kadec (1967) énonce que tout espace de Banach séparable de dimension infinie est homéomorphe à l'espace de Hilbert. Ce résultat a été étendu en 1981 au cas non séparable par H. Toruńczyk, qui a montré que deux espaces de Banach de même caractère de densité étaient homéomorphes (où le caractère de densité d'un espace est le minimum de l'ensemble des cardinaux des parties denses). La théorie topologique des espaces de Banach est donc en un sens triviale, mais ces premiers résultats ne disent rien de ce qui se passe si l'on considère des applications non supposées linéaires mais qui respectent tout ou partie de la structure métrique, et qui peuvent forcer l'isomorphisme : ainsi, le théorème classique de Mazur-Ulam énonce que toute isométrie surjective entre espaces de Banach est affine. En 1976, Martin Ribe publia un très intéressant théorème, qui énonce que deux espaces de Banach uniformément homéomorphes ont la même structure locale, en d'autres termes les mêmes sous-espaces de dimension finie à une constante d'isomorphisme près. Cela signifie donc que s'il existe une bijection f entre deux espaces de Banach X et Y telle que f et f^{-1} soient toutes les deux uniformément continues, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout sous-espace de dimension finie $E \subset X$, il existe un sous-espace $F \subset Y$ tel que F soit C-isomorphe à E (c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme linéaire T de E sur F tel que $\|T\|.\|T^{-1}\| \leqslant C$). En termes plus simples, X et Y ont les mêmes sous-espaces de dimension finie. La structure locale d'un espace de Banach est donc un invariant uniforme.

Une forme quantitative du théorème de Ribe a été donnée par Jean Bourgain en 1987. Pour l'énoncer, nous avons besoin d'une notation que nous emploierons dans toutes ces notes : si (M, d_M) et (N, d_N) sont deux espaces métriques et que $f : M \to N$ vérifie

$$a d_M(x,y) \leqslant d_N(f(x), f(y)) \leqslant A d_M(x,y) \qquad (1)$$

pour tout couple $(x,y) \in M^2$, la quantité $A/a = D(f)$ est appelée la distorsion de f. S'il existe une telle fonction f, on dit que M se plonge bi-lipschitziennement dans N. On notera alors

$$c_N(M) = \inf\{D(f);\ f : M \to N \text{ vrifie } (1)\}$$

et bien sûr $c_N(M) = +\infty$ s'il n'existe pas de telle fonction f. Dans le cas particulier où $N = L_p$ muni de sa norme usuelle, on notera simplement

$$c_{L_p}(M) = c_p(M).$$

Les cas $p = 2$ et $p = 1$ seront particulièrement importants. Avec cette notation, le théorème de discrétisation de Bourgain s'énonce ainsi : il existe une constante absolue $C > 0$ telle que si $\epsilon > 0$, si Y est un espace normé, X est un espace normé de dimension n et N est un δ-réseau de X avec

$$\delta < e^{-(n/\epsilon)^{Cn}}$$

alors $c_Y(N) \geqslant (1-\epsilon) c_Y(X)$. Rappelons que N est un δ-réseau de X si pour tout $x \in X$, on a

$$\inf\{\|x-y\|;\ y \in N\} \leqslant \delta.$$

Donc, si un réseau suffisamment fin de X se plonge bi-lipschitziennement dans Y, il en est de même de X tout entier. Le théorème de Ribe s'ensuit, puisqu'une application uniformément continue définie sur un espace normé devient lipschitzienne quand on la restreint à un réseau, avec un contrôle quantitatif. Le théorème de discrétisation suggère l'existence d'espaces métriques finis dont la présence constitue l'obstruction à une propriété locale des espaces de Banach.

Le théorème de Ribe a donné naissance au programme de Ribe, dans la terminologie de Joram Lindenstrauss et Jean Bourgain : étant donnée une propriété locale (p) des espaces de Banach, trouver une propriété (P) des espaces métriques M qui, lorsque M se trouve être un espace de Banach, coïncide avec (p). Le théorème de Ribe énonce que c'est possible en principe, mais cela ne peut être utile que si la propriété (P) est aussi simple et canonique que possible. Le programme de Ribe se propose donc de transférer des propriétés du champ structuré des espaces de Banach au monde plus large des espaces métriques. Il devient alors possible d'étudier les espaces métriques au moyen des connaissances et des intuitions procurées par la géométrie des espaces de Banach. Cette démarche, dont Assaf Naor est le représentant le plus éminent, s'est trouvée remarquablement efficace pour étudier les espaces métriques, et leur trouver des applications qui n'auraient peut-être pas été découvertes sans le programme de Ribe. Le monde des espaces métriques possède une riche structure cachée, qui se révèle lorsqu'un dictionnaire nous dit quelles propriétés (P) considérer, qui proviennent des propriétés locales des espaces de Banach.

Le programme de Ribe consiste donc en particulier, étant donnée une propriété locale (p), à trouver la bonne définition d'une propriété (P) des espaces métriques, et une fois celle-ci formulée à montrer effectivement que lorsque l'espace métrique considéré est un espace de Banach, (P) se réduit à (p). Et bien que cette démarche soit intéressante du point de vue des espaces de Banach, elle prend tout son sens lorsqu'elle permet de résoudre des problèmes sur les espaces métriques qui n'avaient a priori rien à voir avec les espaces normés. Notre référence centrale sur le programme de Ribe est [12], et le lecteur pourra consulter également l'exposé de Keith Ball au séminaire Bourbaki [1].

Un espace de Banach X est dit de type p, où $1 \leqslant p \leqslant 2$, s'il existe $C > 0$ telle que

$$2^{-n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_X \leqslant C(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p)^{1/p}$$

pour tous vecteurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ dans X. L'inégalité triangulaire montre que tout espace est de type 1, et donc le type p apparaît comme une inégalité triangulaire renforcée (modulo une randomisation). Les inégalités de Khintchine montrent qu'aucun espace de Banach ne peut être de type $p > 2$. Inversement, un espace de Banach est de cotype q, avec $2 \leqslant q < +\infty$ si l'on a

$$(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q)^{1/q} \leqslant C 2^{-n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_X$$

Là encore, les inégalités de Khintchine montrent que le cotype de tout espace est minoré par 2. Les espaces l_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ sont de type $\inf(p,2)$ et de cotype $\sup(p,2)$. Le théorème de Kwapień (1972) énonce qu'un espace de Banach X est isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement si X est de type 2 et de cotype 2.

Les amateurs de géométrie peuvent voir la définition du type comme une inégalité entre les longueurs des diagonales d'un parallélépipède et celles des arêtes, qui étend l'identité euclidienne du parallélogramme. La version non linéaire, due à Per Enflo, est la suivante : un cube géométrique d'un espace métrique M est un sous-ensemble de M indexé par $\{-1,1\}^n$. Une diagonale est un couple $(x_\epsilon, x_{-\epsilon})$, une arête est un couple (x_ϵ, x_δ) où ϵ et δ ne diffèrent que d'une coordonnée. Alors, M a par définition type métrique p si on a

$$2^{-n}\sum \text{diagonales} \leqslant C(2^{-n}\sum (\text{arêtes})^p)^{1/p}$$

Il est clair qu'un espace de Banach X de type métrique p a également type p, et une inégalité montrée par Gilles Pisier en 1986 montre (presque) la réciproque : si X est de type p alors il est de type métrique $p-\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Gilles Pisier avait également montré dès 1973 qu'un espace de Banach X avait un type non trivial $p > 1$ si et seulement s'il ne contenait pas uniformément les espaces l_1^n (donc, R^n muni de la norme $\|\,.\,\|_1$). Autrement dit, X n'a que le type trivial $p = 1$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout n, il existe un sous-espace E_n de X qui est C-isomorphe à l_1^n. Le résultat métrique correspondant a été montré en 1986 par J. Bourgain, V. Milman et H. Wolfson : un espace métrique M a un type $p > 1$ si et seulement s'il ne contient pas de copies uniformément bi-lipschitziennes des cubes de Hamming $H_n = (\{-1,1\}^n, \|\,.\,\|_1)$. Donc, la présence uniforme des cubes de Hamming dans un espace de Banach X (soit $\sup_n[c_X(H_n)] < \infty$) est l'obstruction métrique au type non trivial pour X.

Trouver une bonne définition du cotype métrique s'est avéré difficile, mais le problème a été résolu par Manor Mendel et Assaf Naor en 2008 : un espace métrique M est de cotype q s'il existe $C > 0$ telle que pour tout n, il existe k tel que pour toute fonction $f : \mathbb{Z}_{2k}^n \to M$, on a

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{x\in\mathbb{Z}_{2k}^n} d_M(f(x+ke_j), f(x))^q$$
$$\leqslant Ck^q/3^n \sum_{\epsilon\in\{-1,0,1\}^n}\sum_{x\in\mathbb{Z}_{2k}^n} d_M(f(x+\epsilon, f(x))^q$$

où e_j désigne l'élément de $\mathbb{Z}_{2k}^n$ qui vaut 1 au rang j et 0 ailleurs. Avec cette définition, un espace de Banach X est de cotype q si et seulement s'il a cotype métrique q, d'où un analogue métrique du théorème de Bernard Maurey et Gilles Pisier (1976) énonçant qu'un espace de Banach est de cotype $q < +\infty$ si et seulement s'il ne contient pas les espaces l_∞^n uniformément. M. Mendel et A. Naor en déduisent alors un théorème de dichotomie très général :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'espaces métriques. Alors exactement l'une des assertions suivantes est vraie :*

(i) pour tout espace métrique fini F et tout $\epsilon > 0$, il existe $M \in \mathcal{F}$ tel que $c_M(F) \leqslant 1+\epsilon$;

(ii) il existe $\alpha > 0$ et $K > 0$ tels que pour tout entier n il existe un espace métrique M_n à n points tel que pour tout $N \in \mathcal{F}$ on ait $c_N(M_n) \geqslant K(log n)^\alpha$.

En d'autre termes, si une famille $\mathcal{F}$ n'est pas quasi-isométriquement universelle pour les métriques finis, des espaces de cardinal n le montreront avec une distorsion qui grandira au moins comme une puissance de $log(n)$.

Nous disposons donc d'une approche métrique satisfaisante du type et du cotype : mentionnons pour ce dernier qu'un espace de Banach X a un cotype trivial $(+\infty)$ si et seulement s'il contient bilipschitziennement tous les espaces métriques localement finis [2] avec une distorsion majorée par une constante universelle. Rappelons maintenant qu'un espace de Banach X est dit super-réflexif lorsque tout espace Y qui a la même structure locale que X (donc uniformément les mêmes sous-espaces de dimension finie) est réflexif. La version métrique de la super-réflexivité a été donnée par J. Bourgain en 1986 : soit T_n^k l'arbre k-régulier de hauteur n équipé de la distance géodésique. Alors un espace de Banach X est super-réflexif si et seulement si pour tout $k \geqslant 3$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} c_X(T_n^k) = +\infty$$

et Bourgain montre également que pour k fixé, la quantité $c_2(T_n^k)$ est de l'ordre de $\sqrt{log\ n}$. Cela conduit naturellement à vouloir caractériser en termes métriques les propriétés quantitatives des normes puisque le théorème d'Enflo-Pisier énonce qu'un espace est super-réflexif si et seulement s'il admet une norme équivalente uniformément convexe et/ou uniformément lisse avec des modules de convexité et/ou de lissité contrôlés par une puissance du paramètre. J. R. Lee, M. Mendel, A. Naor et Y. Peres ont montré que l'existence d'une norme uniformément convexe avec un module en ϵ^q sur X était équivalente au type de Markov q (une notion métrique introduite par Keith Ball), mais à ce jour on ne dispose pas encore de caractérisation métrique des espaces pour lesquels existe une norme uniformément lisse dont le module est en η^p. Notons à ce propos que si deux espaces de Banach X et Y contiennent des réseaux Lipschitz-isomorphes (ce sera le cas si X et Y sont uniformément homéomorphes) et si X a une norme *asymptotiquement* uniformément lisse avec un module en puissance p, alors Y aura pour tout $\epsilon > 0$ une telle norme avec un module en puissance $(p-\epsilon)$, et cet $\epsilon > 0$ disparaît si X et Y sont Lipschitz-isomorphes ([4], voir Theorem 3.2 dans [5]).

Le résultat le plus important de la théorie locale des espaces de Banach est sans doute le théorème de Dvoretzky. Son importance dans le programme de Ribe, et les idées qu'il a suscitées, sont si grandes qu'il mérite un chapitre à lui seul.

2. Les versions non linéaires du Théorème de Dvoretzky

En 1961, Aryeh Dvoretzky résout positivement une conjecture formulée en 1956 par Grothendieck en établissant le théorème fondamental suivant : soit n un entier, et $\epsilon > 0$. Il existe un entier $N = N(n,\epsilon)$ tel que si X est un espace normé de dimension N, il existe une application linéaire $T : l_2^n \to X$ telle que $\|T\|.\|T^{-1}\| < (1+\epsilon)(1-\epsilon)$ (où bien sûr T^{-1} est définie sur l'image de T). En d'autres termes, tout espace normé de dimension suffisamment grande contient des sections presque sphériques. Des travaux de T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. Milman et finalement de Yehoram Gordon (1985) montrent plus précisément qu'il existe une constante universelle c telle que si $0 < \epsilon < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre $N(n,\epsilon) = exp[cn\epsilon^{-2}]$.

Le Théorème de Dvoretzky adjoint au programme de Ribe suggère la conjecture suivante : étant donné un espace métrique fini M, il existe un grand sous-ensemble S de M tel que $c_2(S)$ soit petit, et donc qui se plonge dans l'espace euclidien avec une distorsion contrôlée. Les travaux d'Assaf Naor, parfois en collaboration avec Manor Mendel, établissent précisément cette conjecture, riche d'applications. Notre référence principale pour ce sujet sera [10]. Ce travail démontre le rôle central joué par les espaces ultramétriques, que nous décrivons maintenant.

Un espace métrique M est dit ultramétrique si pour tous x, y et z dans M, on a

$$d(x,z) \leqslant \sup[d(x,y), d(y,z)].$$

Si M supposé fini est ultramétrique, la relation R définie par : xRy si $d(x,y) < diam(M)$, est une relation d'équivalence. En appliquant cette remarque à chaque classe d'équivalence (elle-même ultramétrique) et en itérant, on peut identifier M aux feuilles d'un arbre muni de la distance géodésique, et il s'ensuit en particulier qu'un espace fini, et plus généralement, un compact ultramétrique M se plonge isométriquement dans l'espace de Hilbert : $c_2(M) = 1$. Le résultat central de travaux de Mendel et Naor est le théorème du squelette ultramétrique [11], que voici :

Théorème 2. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $c_\epsilon \in [1,+\infty)$ telle que : pour tout espace métrique compact M et toute mesure de probabilité μ sur M, il existe un sous-ensemble compact S de M et une mesure de probabilité ν supportée par S tels que S se plonge dans un espace ultramétrique avec distorsion au plus $9/\epsilon$, et pour tous $(x,r) \in M \times [0,+\infty)$, on a $\nu(B(x,r) \cap S) \leqslant (\mu(B(x,c_\epsilon r)))^{1-\epsilon}$.*

Cette ubiquité des espaces ultramétriques, dont la découverte est à mettre au crédit du programme de Ribe, est riche de conséquences. Voici un premier corollaire :

Corollaire 1. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier n, tout espace métrique fini M de cardinal n contient un sous-ensemble S de cardinal au moins $n^{1-\epsilon}$ qui se plonge dans un espace ultramétrique avec distorsion au plus $(9/\epsilon)$.*

En effet, appliquons le théorème à la probabilité uniforme μ sur M, et à $r = 0$. Comme ν est une probabilité sur le sous-ensemble S, il existe $x \in S$ tel que $\nu(\{x\}) \geqslant 1/|S|$. Mais $\nu(\{x\}) \leqslant \mu(\{x\})^{1-\epsilon} = 1/n^{1-\epsilon}$. Donc $|S| \geqslant n^{1-\epsilon}$.

Assaf Naor et Terence Tao ont montré que dans le corollaire 1, on pouvait remplacer $(9/\epsilon)$ par une borne $D(\epsilon)$ qui tend vers 2 lorsque ϵ tend vers 1 : c'est un aspect du « changement de phase à la distorsion 2 » découvert par Y. Bartal, N. Linial, M. Mendel et A. Naor de la taille maximum du sous-ensemble approximativement euclidien d'un espace métrique de cardinal n, qui lorsqu'on franchit la distorsion 2 passe d'une puissance de n à $log(n)$. Assaf Naor et ces mêmes co-auteurs ont également montré qu'il existait des espaces métriques de cardinal n pour lesquels le corollaire donnait un résultat optimal d'extractions de sous-ensembles plongeables dans l'espace euclidien. Ainsi, à un facteur universel près, la meilleure façon de trouver un sous-ensemble approximativement euclidien est en fait de le trouver approximativement ultramétrique.

Le corollaire ci-dessous utilise une probabilité μ non triviale.

Corollaire 2. *Pour tout $\epsilon \in (0,1)$ et tout $\alpha \in (0,+\infty)$, tout compact métrique M de dimension de Hausdorff supérieure à α contient un sous-ensemble fermé de dimension de Hausdorff supérieure à $(1-\epsilon)\alpha$ qui se plonge dans un espace ultramétrique avec distorsion au plus $(9/\epsilon)$.*

Pour déduire ce corollaire du théorème 2, on utilise une mesure de Frostman μ sur M, c'est-à-dire telle que $\mu(B(x,r)) \leqslant Cr^{\alpha}$ pour tous les couples (x,r), et un calcul facile montre que S convient. La dimension de S est là encore optimale, même pour les sous-ensembles approximativement euclidiens. Une belle application de ce corollaire due à T. Keleti, A. Mathe et O. Zindulka, est que si K est un compact métrique de dimension de Hausdorff supérieure à $n \in \mathbb{N}$, il existe une surjection lipschitzienne de K sur $[0,1]^n$.

Le théorème 2 est lié au théorème des mesures majorantes de Michel Talagrand [16]. Rappelons que si X est un espace métrique et $\mathcal{P}_X$ l'ensemble des probabilités sur X, la fonctionnelle $\gamma_2(X)$ de Fernique-Talagrand est définie par la formule

$$\gamma_2(X) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_X} \sup_{x\in X} \int_0^{+\infty} \sqrt{-log(\mu(B(x,r)))}dr.$$

Un point crucial de la démonstration est de construire dans tout espace métrique fini X un sous-ensemble S qui se plonge (avec une majoration absolue de la distorsion) dans un espace ultramétrique et tel qu'on ait $\gamma_2(X) \leqslant C\gamma_2(S)$. Il se trouve ainsi que le théorème 2 permet de montrer le théorème des mesures majorantes, en le faisant apparaître comme le résultat d'une intégration sur r d'estimations ponctuelles. On peut saisir le lien entre les deux théorèmes par le rôle joué par les arbres à branches orthogonales, qui représentent des processus gaussiens à accroissements indépendants et permettent aussi le plongement euclidien des espaces ultramétriques.

Le corollaire 1 possède aussi des applications en informatique théorique. C'est d'ailleurs bien naturel, puisqu'un ensemble essentiellement euclidien constitue un domaine où l'algèbre linéaire et les nombreux algorithmes qu'elle recèle vont déployer toute leur puissance. Rappelons d'ailleurs que Naor, aujourd'hui au Département de mathématiques de l'université de Princeton, était auparavant membre de *Microsoft Research*. Donc, considérons le problème des distances approchées (*approximate distance oracle*). Un espace métrique à n points est complètement déterminé par la donnée des distances entre points, donc par $n(n-1)/2$ données. Mais l'inégalité triangulaire montre que ces données ne sont pas indépendantes. Il existe donc une certaine redondance, qui invite à chercher un sous-ensemble essentiel de distances qui permette d'estimer toutes les autres avec une précision donnée à l'avance. Le corollaire 1 permet à M. Mendel et A. Naor de montrer l'existence d'un « oracle à temps constant » pour les distances approchées, comme suit :

Corollaire 3. *Soit $D > 1$. Tout espace métrique M à n points peut être préparé (preprocessed) en temps $O(n^2)$, de façon à stocker des données en nombre $O(n^{1+O(1/D)})$ de telle sorte qu'étant donnés $(x,y) \in M^2$, on obtient en temps uniformément borné un nombre $E(x,y)$ qui satisfait à $d(x,y) \leqslant E(x,y) \leqslant Dd(x,y)$.*

L'importance de ce résultat (quantitativement amélioré en 2014 par S. Chechik par des méthodes similaires) est que le temps de recherche (*querry time*) est borné par une constante universelle et ne dépend donc pas de D ni de n. Au prix d'une certaine distorsion D, on peut donc contrôler à la fois le temps de recherche et la taille du stock de données.

3. L'inégalité de Grothendieck et l'optimisation combinatoire

Dans l'article de 1953 qui fonde la théorie métrique des produits tensoriels et la théorie moderne des opérateurs linéaires continus entre espaces de Banach [6], Alexandre Grothendieck a montré l'inégalité suivante : il existe une constante K_G telle que, si S_H désigne la sphère unité de l'espace de Hilbert (noté le plus souvent H), on a pour tous les entiers n et m et toute matrice réelle (a_{ij})

$$\sup\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle;\ (x_i),(y_j) \subset S_H\}$$

$$\leqslant K_G \sup\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\epsilon_i\delta_j;\ \epsilon_i = \pm 1, \delta_j = \pm 1\}. \qquad (2)$$

En d'autres termes, lorsqu'on remplace dans le membre de gauche l'espace de Hilbert par la droite réelle, le supremum calculé est du même ordre de grandeur. Il existe une version complexe de cette inégalité, qui ne se distingue de la version réelle que par la valeur de la constante K_G.

Dans son article fondateur, Grothendieck applique cette inégalité aux opérateurs linéaires, en montrant, parmi bien d'autres résultats, que tout opérateur T de L_∞ dans L_1 est 2-sommant, donc factorise par l'espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'il existe des opérateurs $A : L_\infty \to H$ et $B : H \to L_1$ tels que $T = BA$. Une référence incontournable sur les applications de l'inégalité de Grothendieck est désormais l'article de 2012 de Gilles Pisier [15].

Le lien entre l'inégalité de Grothendieck et l'optimisation combinatoire, pour lequel notre référence est l'article [7], vient de l'interprétation de cette inégalité (2) comme relaxation vectorielle de l'estimation d'un supremum. Étant donné un convexe compact assez régulier K de matrices symétriques $k \times k$ semi-définies positives et une matrice (c_{ij}), on peut calculer en temps polynomial le maximum de la quantité

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_{ij}$$

sur toutes les matrices (x_{ij}) appartenant à K. Le calcul du membre de gauche de (2) relève de ce mode de calcul (appelé *semidefinite programming*, pour lequel nous nous référons à [14]) et peut donc s'effectuer en temps polynomial en k avec une précision arbitraire. C'est par conséquent le cas du membre de droite de (2), à la constante K_G près bien sûr. Remarquons que ce membre de droite est la norme de la matrice (a_{ij}), considérée comme application linéaire de l_∞^n dans l_1^m.

Suivons Noga Alon et Assaf Naor dans leur découverte du lien entre l'inégalité (2) et l'estimation de la *cut norm* d'une matrice $m \times n$, $A = (a_{ij})$, définie par

$$\|A\|_{cut} = \max_{S,T} \Big|\sum_{i\in S, j\in T} a_{ij}\Big|$$

où le maximum est pris sur les sous-ensembles $S \subset \{1,\dots,m\}$ et $T \subset \{1,\dots n\}$. Soit B la matrice de taille $(m+1)\times(n+1)$ obtenue en adjoignant à A une colonne et une ligne, de façon à ce que toutes les lignes et toutes les colonnes de B soient de somme nulle. Un calcul direct assez simple montre que

$$\|A\|_{cut} = \frac{1}{4}\|B\|_{\infty\to 1}.$$

La programmation semi-définie permet de calculer la quantité $\|B\|_{\infty\to 1}$ en temps polynomial, à la constante K_G près. Il en va de même pour la norme $\|A\|_{cut}$, et il existe donc un algorithme à durée polynomiale qui calcule une quantité $\alpha(A)$ telle que

$$\|A\|_{cut} \leqslant \alpha(A) \leqslant C\|A\|_{cut} \tag{3}$$

avec $C = K_G$. Cependant, à moins que $P = NP$, un tel algorithme n'existe pas dès lors que $C < 13/12$, et P. Raghavendra et D. Steurer ont montré que modulo la conjecture combinatoire notée (UGC) (*unique games conjecture*) la constante de Grothendieck est optimale pour l'existence d'un algorithme à temps polynomial fournissant $\alpha(A)$ satisfaisant à (3). Nous reviendrons ci-dessous sur la valeur numérique de la constante de Grothendieck.

Le lemme de régularité de Szemeredi énonce informellement que tout graphe combinatoire G (un ensemble fini V de sommets joints ou non deux à deux par des arêtes formant un ensemble $E \subset V^2$) peut être partitionné en un nombre contrôlé de sous-ensembles qui interagissent entre eux de façon pseudo-aléatoire. Plus précisément, si X et Y sont des sous-ensembles disjoints de V, on note $e(X,Y) = |(X\times Y)\cap E|$ le cardinal de l'ensemble des arêtes qui joignent X et Y. Si $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$, on dit que le couple (X,Y) est (ϵ,δ)-régulier si dès lors que $S \subset X$ et $T \subset Y$ satisfont à $|S| \geqslant \delta|X|$ et $|T| \geqslant \delta|Y|$, on a

$$\Big|\frac{e(S,T)}{|S|.|T|} - \frac{e(X,Y)}{|X|.|Y|}\Big| \leqslant \epsilon.$$

Cette presque-uniformité des quantités $e(S,T)/|S|.|T|$ signifie que le couple (X,Y) est pseudo-aléatoire, c'est-à-dire proche d'un graphe bipartite où chaque couple $(x,y) \in X\times Y$ est joint par une arête de façon indépendante avec probabilité $e(X,Y)/|X|.|Y|$. Le point crucial, pour pouvoir construire des partitions de Szemeredi en temps polynomial, est de déterminer en temps polynomial si un couple (X,Y) est proche d'être (ϵ,δ)- régulier. Pour cela, N. Alon et A. Naor considèrent, étant donnés deux sous-ensembles disjoints X et Y de cardinal n de V la matrice $A = (a_{xy})$ indexée par $(X\times Y)$, telle que

$$a_{xy} = 1 - \frac{e(X,Y)}{|X|.|Y|}$$

si $(x,y) \in E$, et

$$a_{xy} = -\frac{e(X,Y)}{|X|.|Y|}$$

sinon. La matrice A est donc la différence de la matrice d'adjacence du graphe G restreinte à $X\times Y$ et d'une matrice dont tous les termes sont égaux à la probabilité escomptée pour que deux sommets de X et Y soient reliés. Il est facile de vérifier que si (X,Y) n'est pas (ϵ,δ)-régulier, alors $\|A\|_{cut} \geqslant \epsilon\delta^2 n^2$. L'algorithme de calcul de la norme cut (à K_G près) en temps polynomial permet alors de décider en temps polynomial si (X,Y) est (ϵ,δ)- régulier, ou bien de trouver un couple de parties de X et Y qui témoignent qu'il ne l'est pas (pour d'autres valeurs de ϵ et δ). Cela demande également une rapidité polynomiale pour la procédure d'arrondi (*rounding*) que nous décrivons maintenant.

L'objectif de cette procédure est de trouver les choix de signes (ϵ_i) et (δ_j) dont l'existence est promise par l'inégalité (2), et qui réalisent cette inégalité. Nous suivons pour cela une méthode conçue par Jean-Louis Krivine en 1977. Soient f et g deux fonctions mesurables impaires de $\mathbb{R}^k$ dans $\{-1,1\}$. Soient G_1 et G_2 deux vecteurs aléatoires gaussiens indépendants dans $\mathbb{R}^k$. Pour $t \in (-1,1)$, on pose

$$H_{f,g}(t) = \mathbb{E}[f(\frac{1}{\sqrt{2}}G_1)g(\frac{t}{\sqrt{2}}G_1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}G_2)].$$

Sous une condition simple, une méthode analytique permet de calculer un scalaire $c(f,g)$ tel que si $(x_i),(y_j)$ sont des vecteurs de norme 1 dans (2), il existe des vecteurs unités $(u_i),(v_j)$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$ tels que pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on ait

$$\langle u_i, v_j\rangle = H_{f,g}^{-1}(c(f,g)\langle x_i, y_j\rangle.$$

Soit alors G une matrice $k \times (m+n)$ aléatoire dont les coefficients sont des gaussiennes standard indépendantes. Si on pose

$$\epsilon_i = f(\frac{1}{\sqrt{2}}Gu_i),\ \delta_j = g(\frac{1}{\sqrt{2}}Gv_j)$$

on trouve

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\epsilon_i\delta_j] = c(f,g)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle.$$

Cette identité produit l'algorithme d'arrondi en temps polynomial pour produire un choix de signe adéquat pour (2), applicable également aux couples (ϵ,δ)-réguliers de Szemeredi. D'autre part, elle permet de borner K_G puisqu'elle montre que pour tout couple (f,g) on a $c(f,g)^{-1} \geqslant K_G$. En utilisant $f = g = signe(x)$, Jean-Louis Krivine a montré par cette approche que $K_G \leqslant \pi/(2log(1+\sqrt{2}))$ et c'est le meilleur résultat possible lorsqu'on considère des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$. Cependant, M. Braverman, M. Makarychev, K. Makarychev et A. Naor ont montré en 2011 que si $f = g$ correspond à la partition du plan de part et d'autre du graphe du polynôme $y = c(x^5 - 10x^3 + 15x)$ avec $c > 0$ bien choisie, l'estimation obtenue est meilleure que celle de Krivine, ce qui a résolu un problème resté ouvert depuis 1977. Les estimations actuelles de la constante de Grothendieck sont donc

$$\frac{\pi}{2}e^{\eta_0^2} = 1{,}676... \leqslant K_G < \pi/(2log(1+\sqrt{2})) = 1{,}782...$$

où $\eta_0 = 0{,}25573...$ est l'unique solution de l'équation

$$1 - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\eta e^{-z^2/2}dz = \frac{2}{\pi}e^{-\eta^2}.$$

Cette borne inférieure a été obtenue en 1991 par J. A. Reeds dans un travail non publié.

M. Braverman, M. Makarychev, K. Makarychev et A. Naor ont conjecturé que le meilleur schéma de Krivine en dimension 2 correspond à deux partitions impaires f et g distinctes, où f est la « peau de tigre » ci-dessous :

FIGURE 1

Il est vraisemblable que des schémas de Krivine en dimension $k \geqslant 3$ vont conduire à des majorations plus serrées de la constante de Grothendieck.

Poursuivons à présent les idées d'Assaf Naor et de ses collaborateurs sur les aspects combinatoires de l'inégalité (2). Soit G un graphe à n sommets notés $\{1,\ldots n\}$, et $E \subset \{1,\ldots n\}^2$ l'ensemble de ses arêtes. La constante de Grothendieck de G, notée $K(G)$, est la plus petite constante K telle que

$$\sup_{(x_i)\subset S_H}\sum_{(i,j)\in E} a_{ij}\langle x_i, x_j\rangle \leqslant K \sup_{\epsilon_i=\pm 1}\sum_{(i,j)\in E} a_{ij}\epsilon_i\epsilon_j \qquad (4)$$

pour toute matrice réelle $A = (a_{ij})$. L'inégalité de Grothendieck (2) est le cas particulier de (4) qui correspond aux graphes bipartites (en d'autres termes, de nombre chromatique 2), et par conséquent

$$K_G = \sup_n \{K(G);\ G \text{ graphe bipartite à } n \text{ sommets}\}.$$

D'autre part, si K_n désigne le graphe complet à n sommets, la constante de Grothendieck correspondante est de l'ordre de $log(n)$. La constante de Grothendieck d'un graphe G est clairement liée à la combinatoire de G et possède donc son intérêt propre. Mais d'autre part, le terme de droite de (4) relève de la physique statistique : si G pondéré par la matrice A représente les interactions possibles de n particules affectées d'un spin $\epsilon_i = \pm 1$, l'énergie totale du système dans le modèle d'Ising du verre de spin constitué par ces particules est $E = -(\sum_{(i,j)\in E} a_{ij}\epsilon_i\epsilon_j)$. Une configuration des spins $(\epsilon_i) \in \{-1,1\}^n$ représente un état de base (*ground state*) s'il minimise l'énergie totale.

Trouver un état de base du verre de spin revient donc à maximiser le membre de droite de (4). Il est connu que cela peut se faire en temps polynomial pour les graphes planaires, et que c'est un problème NP-complet si G est une grille en dimension 3. Mais puisque la quantité du membre de gauche de (4) relève de la programmation semi-définie, le membre de droite peut être calculé en temps polynomial au facteur $K(G)$ près.

Concluons cette section en mentionnant des travaux de M. Charikar et A. Wirth, sur le cas des graphes $G = (V, E)$ dont les arêtes sont pondérées par 1 ou -1 suivant que les sommets sont considérés comme « semblables » ou « différents », l'absence d'arêtes signifiant donc qu'aucun jugement n'est porté sur la similarité des sommets correspondants. Le problème à résoudre est naturellement de partitionner le graphe G de façon à maximiser le nombre de similitudes entre membres d'un même sous-ensemble de la partition et le nombre de différences entre membres de sous-ensembles différents. Il se trouve que le point crucial (*bottleneck*) de la construction est l'obtention d'une partition en deux sous-ensembles, qui revient là encore à maximiser le membre de droite de (4) et relève donc des mêmes techniques.

4. Extensions de fonctions lipschitziennes

Soit M un espace métrique et S un sous-ensemble non vide de M. Une formule remontant à Mac Shane (1934) montre que toute fonction lipschitzienne $f : S \to \mathbb{R}$ s'étend en une fonction de même constante de Lipschitz sur M. Il suffit en effet de poser

$$\bar{f}(m) = \inf\{f(s) + Lip(f)d(m,s);\ s \in S\}$$

pour obtenir un tel prolongement. Rappelons qu'une fonction $f : M \to N$ entre deux espaces métriques est dite lipschitzienne s'il existe $C > 0$ telle que $d_N(f(x), f(y)) \leqslant Cd_M(x,y)$ pour tout $(x,y) \in M^2$, et que le minimum des constantes C pour lesquelles ces inégalités sont satisfaites s'appelle la constante de Lipschitz de f et est notée $Lip(f)$.

La formule de Mac Shane est bien utile mais elle a deux défauts : d'une part, elle n'est pas linéaire en f ; d'autre part, elle utilise crucialement la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$. Par conséquent elle n'est guère utilisable pour la question similaire du prolongement des fonctions lipschitziennes à valeurs dans un espace de Banach. Un résultat positif contemporain de la formule de Mac Shane est le théorème de Kirszbraun, qui énonce que si S est un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H, toute application lipschitzienne de S dans H admet un prolongement de même constante de Lipschitz à tout H. Cependant, Joram Lindenstrauss a montré dès 1963 que ce résultat ne s'étendait pas aux espaces de Banach, même en acceptant un prolongement de constante de Lipschitz arbitraire. Ce cadre élargi pose d'ailleurs des problèmes spécifiques, puisqu'une technique d'extension « point par point » adjointe au lemme de Zorn ne donnera rien si la constante de Lipschitz explose en cours de construction. Dans sa thèse (sous la direction de J. Lindenstrauss, lui-même élève de Dvoretzky), Assaf Naor a montré en particulier qu'une application lipschitzienne d'un sous-ensemble S d'un espace de Hilbert H dans un espace de Banach X ne pouvait pas en général s'étendre de façon lipschitzienne à tout H, même lorsque par exemple $X = L_4$. Le théorème de Kirszbraun est donc essentiellement optimal. Mais du côté positif, A. Naor, Y. Peres, O. Schramm et S. Sheffield ont établi la version non linéaire d'un résultat classique de Bernard Maurey : toute fonction lipschitzienne d'un sous-ensemble S d'un espace 2- uniformément lisse X dans un espace 2-uniformément convexe Y s'étend lipschitziennement à X tout entier.

Ce théorème n'est que l'un des résultats de prolongements lipschitziens dus à Assaf Naor, et notre référence pour la suite de cette section est son article de 2005 avec James R. Lee [9]. L'un des obstacles à surmonter dans ces questions de prolongement est de passer d'une extension locale à une extension globale, et pour cela l'une des idées de Lee et Naor consiste à utiliser des partitions de l'unité subordonnées à un recouvrement aléatoire, et à obtenir la régularité voulue en prenant une moyenne. Cette idée d'analyse est combinée avec des décompositions particulières, qui trouvent leur origine en informatique théorique et sont ici adaptées à des ensembles infinis, en prenant garde à respecter des conditions de mesurabilité.

Soyons maintenant plus précis, en présentant le concept le moins technique de cette approche, les partitions douces (*gentle*) de l'unité. Si M est un espace métrique, S un sous-ensemble fermé de M et (Ω,μ) un espace mesuré, et si $K>0$, une fonction $\Psi:\Omega\times M\to(0,+\infty)$ est une partition de l'unité K-douce relativement à S si on a :

(i) pour tout $x\in M\backslash S$, la fonction $\omega\to\Psi(\omega,x)$ est mesurable et $\int_\Omega \Psi(\omega,x)d\mu(\omega)=1$;

(ii) si $x\in S$, on a $\Psi(\omega,x)=0$ pour tout $\omega\in\Omega$;

(iii) il existe une fonction borelienne $\gamma:\Omega\to S$ telle que pour tout $(x,y)\in M^2$,

$$\int_\Omega d(\gamma(\omega),x).|\Psi(\omega,x)-\Psi(\omega,y)|d\mu(\omega)\leqslant Kd(x,y).$$

Si f est une fonction lipschitzienne définie sur S à valeurs dans un espace de Banach Z, on pose pour tout $x\in M\backslash S$

$$\overline{f}(x)=\int_\Omega f(\gamma(\omega))\Psi(\omega,x)d\mu(\omega)$$

et $\overline{f}(x)=f(x)$ si $x\in S$. Il n'est pas difficile de vérifier que $\overline{f}$, qui bien sûr prolonge f, est lipschitzienne et vérifie $Lip(\overline{f})\leqslant 3KLip(f)$. Notons au passage que le prolongement $\overline{f}$ obtenu par cette formule dépend linéairement de f.

Le problème est maintenant d'établir l'existence de partitions douces. Lee et Naor montrent qu'une condition suffisante pour cela, portant sur le sous-ensemble S, est qu'il soit *doublant*. Rappelons qu'un espace métrique M est dit doublant, de constante de doublement $\lambda(M)$, si toute boule de M est contenue dans l'union de $\lambda(M)$ boules de rayon moitié. Ils montrent alors le résultat suivant :

Théorème 3. *Il existe une constante universelle $C>0$ telle que si M un espace métrique doublant, de constante de doublement $\lambda(M)$, Y est un espace métrique contenant isométriquement M, et Z un espace de Banach, alors toute fonction lipschitzienne $f:M\to Z$ se prolonge en une fonction lipschitzienne $\overline{f}:Y\to Z$ telle que $Lip(\overline{f})\leqslant Clog(\lambda(M))Lip(f)$.*

Ce théorème étend et unifie des résultats préalables de W. B. Johnson, J. Lindenstrauss et G. Schechtman : en effet, si M est un espace métrique fini de cardinal n, alors $log(\lambda(M))=O(log(n))$, et d'autre part si M est un sous-ensemble d'un espace $\mathbb{R}^d$ alors $Log(\lambda(M))=O(d)$. Notons que dans le cas des espaces de cardinal n, Lee et Naor montrent qu'en fait une extension existe qui satisfait à $Lip(\overline{f})\leqslant C(log(n)/log(log(n)))Lip(f)$.

James R. Lee et Assaf Naor montrent également que dans le théorème 3, on peut remplacer l'espace doublant M par un sous-ensemble d'une surface de Riemann de genre g, et qu'alors on a $Lip(\overline{f})\leqslant C(g+1)Lip(f)$. D'autre part, un graphe G exclut un graphe H si on ne peut pas trouver H à partir de G en itérant les opérations suivantes : enlever une arête, réduire une arête à rien en identifiant les deux sommets joints par cette arête. Lee et Naor montrent alors que si un graphe G exclut le graphe complet à n sommets K_n, alors $G=M$ satisfait à la conclusion du théorème 3 avec $Lip(\overline{f})\leqslant Cn^2Lip(f)$. Ainsi, les arbres (c'est-à-dire les graphes qui excluent K_3) vérifient uniformément le théorème 3, ce qui est un théorème de Jiri Matoušek. D'autre part, les graphes planaires (qui excluent K_5) vérifient cette même conclusion, à la constante près. Notons que le théorème 3 permet également de montrer que si M est un espace métrique doublant, l'espace libre $\mathcal{F}(M)$ sur M a la propriété d'approximation bornée de Grothendieck [8].

5. Plongements lipschitziens

Commençons cette section par les espaces métriques doublants M, donc ceux pour lesquels existe une constante $\lambda(M)$ telle que toute boule de M soit contenue dans l'union de $\lambda(M)$ boules de rayon moitié. Patrice Assouad a démontré en 1983 le remarquable résultat suivant : soit (M,d) un espace doublant. Pour tout $\alpha\in(0,1)$, on note M_α l'espace M muni de la distance d^α définie par $d^\alpha(x,y)=[d(x,y)]^\alpha$. Il existe alors $N(\alpha)$ tel que l'espace M_α se plonge bi-lipschitziennement dans $l_2^{N(\alpha)}$, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}^{N(\alpha)}$ muni de la distance euclidienne. L'opération qui consiste à remplacer une distance d par d^α avec $0<\alpha<1$ s'appelle (même en français) le *snowflaking*. Le théorème d'Assouad a été amélioré en 2012 par Assaf Naor et Ofer Neiman, comme suit : si $K>0$ et $\epsilon\in(0,1/2)$, il existe $N=N(K)$ et $D=D(K,\epsilon)$ tel que si M est un espace métrique K-doublant, alors $M_{1-\epsilon}$ se plonge bi-lipschitziennement dans $l_2^{N(K)}$ avec distorsion $D(K,\epsilon)$. Le progrès sur le résultat original d'Assouad est que la dimension N ne dépend plus de ϵ.

Un autre résultat fondateur de la théorie des plongements lipschitziens a été montré par Jean Bourgain en 1986 : tout espace métrique fini de cardinal $|M|$ se plonge dans l'espace de Hilbert avec une distorsion $D = O(log(|M|))$. Il convient de rapprocher ce résultat du théorème de Fritz John, qui énonce que la distance de Banach-Mazur d'un espace normé de dimension n à l_2^n est majorée par $\sqrt{n}$. L'exemple des cubes $M = \{0,1\}^k$ pourrait suggérer que l'analogue métrique de la dimension d'un espace fini M est $log(|M|)$, et l'estimation attendue serait donc $O(\sqrt{log(|M|})$. La majoration de Bourgain est cependant optimale, et cela s'ensuit en particulier d'un phénomène proprement non linéaire : l'existence des graphes expanseurs. Assaf Naor et ses collaborateurs ont produit d'autres exemples issus de l'analyse harmonique, ainsi qu'un lien remarquable avec le théorème d'Assouad : tout espace métrique fini M de constante de doublement $\lambda(M)$ se plonge dans l'espace de Hilbert avec une distorsion $D = O(\sqrt{log(\lambda(M))log(|M|}})$. Le théorème de Bourgain s'ensuit alors de la majoration triviale $\lambda(M) \leqslant |M|$. Mentionnons au passage un lemme important de réduction de dimension, dû à Bill Johnson et Joram Lindenstrauss : si M est un sous-ensemble fini de l'espace de Hilbert H et $\epsilon > 0$, il existe une application bi-lipschitzienne $f : M \to l_2^n$ (qui est en fait la restriction d'une application linéaire de H dans H) de distorsion $D(f) < 1+\epsilon$, avec $n = O(log(|M|)/\epsilon^2))$. Dans un travail commun publié en 2010, Bill Johnson et Assaf Naor ont montré qu'un espace de Banach X qui vérifie la conclusion de ce lemme est très proche d'un espace de Hilbert, sans être nécessairement Hilbertien lui-même. En particulier, L^p ne vérifie cette conclusion que si $p = 2$.

Examinons maintenant, en suivant la contribution d'Assaf Naor au congrès international de Hyderabad en 2010 [13], les liens entre ces théorèmes de plongement, le groupe de Heisenberg et les algorithmes de résolution du problème de la coupe minimale (*sparsest cut problem*). Ces liens relèvent en particulier de la théorie géométrique des groupes, pour laquelle on se référera par exemple à la conférence Bourbaki d'Étienne Ghys [3] et bien sûr aux travaux de M. Gromov. Notons $\mathbb{H}$ le groupe de Heisenberg, considéré comme l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure de groupe non commutatif donnée par

$$(a,b,c).(a',b',c') = (a+a', b+b', c+c'+ab'-ba').$$

Nous notons $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ son sous-groupe discret $\mathbb{Z}^3$. Lorsqu'on munit $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ de la distance des mots associée à une famille finie de générateurs (équivalente à la distance dite de Carnot-Carathéodory), on obtient un espace métrique doublant. Il s'ensuit du théorème de différentiabilité de Pierre Pansu que cet espace doublant ne se plonge pas bi-lipschitziennement dans l'espace de Hilbert, ce qui montre la nécessité du *snowflaking* dans le théorème d'Assouad. Plus généralement, le théorème de Pansu implique que $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ ne se plonge pas dans L_p avec $1 < p < +\infty$, mais n'est pas applicable aux plongements éventuels dans L_1.

Rappelons qu'un espace métrique (M,d) est dit *de type négatif* si son snowflaking $M_{1/2} = (M, d^{1/2})$ se plonge isométriquement dans l'espace de Hilbert. L'espace L_1 est de type négatif. Le groupe $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ équipé d'une distance équivalente est également de type négatif. Nous allons maintenant décrire le lien entre ces métriques particulières et le problème de la coupe minimale. Soient C et D deux fonctions symétriques de $\{1,\dots n\}\times\{1,\dots n\} \to (0,+\infty)$, appelées Capacité et Demande. Si S est un sous-ensemble non vide de $\{1,\dots n\}$, on pose

$$\Phi(S) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(i,j)|\mathbf{1}_S(i) - \mathbf{1}_S(j)|}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D(i,j)|\mathbf{1}_S(i) - \mathbf{1}_S(j)|}.$$

On cherche alors à estimer la quantité $\Phi^*(C,D) = \min_S \Phi(S)$, qui est donc le plus petit rapport capacité/demande relativement aux coupes entre S et son complémentaire, d'où l'appellation de coupe minimale. Le cas particulier où $C(i,j) = 1$ si i et j sont joints par une arête et $C(i,j) = 0$ sinon et où $D = 1$ est le problème de l'isopérimètrie de G : trouver un sous-ensemble S tel que le rapport du cardinal de sa frontière (c'est-à-dire des arêtes entre S et $V\setminus S$) sur son cardinal est le plus petit possible. Il est connu que le calcul de $\Phi^*(C,D)$ est NP-complet, et sous la conjecture combinatoire (UGC) c'est même le cas de l'estimation de $\Phi^*(C,D)$ à une constante près : nous ne pouvons donc pas nous attendre dans ce cas à trouver une « constante de Grothendieck » comme dans la section III ci-dessus. Nous allons cependant suivre dans l'article de Naor une démarche analogue.

Un premier point est d'utiliser un argument de génératrice extrémale pour montrer l'égalité

$$\Phi^*(C,D) = \min_{(f_i)\subset L_1} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(i,j)\|f_i - f_j\|_1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D(i,j)\|f_i - f_j\|_1}. \qquad (5)$$

On peut alors relaxer ce problème de minimisation dans l'espace de toutes les métriques sur $\{1,\dots,n\}$, ce qui conduit à un problème de programmation linéaire résoluble en temps polynomial. Mais par le théorème de Bourgain, une distance minimisante sera à distance contrôlée par $log(n)$ d'une distance euclidienne, donc d'une distance plongeable dans L_1 (qui contient isométriquement l_2 via une suite de variables gaussiennes indépendantes). On déduit alors de (5) qu'on a résolu le problème de la coupe minimale en temps polynomial, à un facteur $log(n)$ près. Une plongée dans la preuve du théorème de Bourgain permet d'avoir également un ensemble S qui réalise une petite coupe.

Mais il est possible de faire mieux, en utilisant le fait que la métrique de L_1 est de type négatif. Définissons $M(C,D)$ comme étant le minimum de la quantité $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(i,j)d_{ij}$ sous la contrainte que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D(i,j)d_{ij} = 1$ et d_{ij} est une métrique de type négatif. Comme dans la section III, on peut calculer en temps polynomial la quantité $M(C,D)$ par la programmation semi-définie. Il est clair que $M(C,D) \leqslant \Phi^*(C,D)$. L'équation (5) ci-dessus montre d'autre part que $\Phi^*(C,D) \leqslant C_n M(C,D)$, où on pose

$$C_n = \sup\{c_1(\{1,\dots,n\},d);\ d \text{ métrique de type négatif}\}$$

et cette inégalité est exactement optimale. Pour résoudre approximativement le problème de la coupe minimale en temps polynomial, nous sommes donc conduits à examiner les plongements d'espaces métriques finis de type négatif dans L_1. Et d'une part, Assaf Naor montre (avec S. Arora et J. R. Lee) que $c_1(M) \leqslant c_2(M) = O(log(|M|)^{1/2+o(1)})$ si M est de type négatif, mais d'autre part (avec J. Cheeger et B. Kleiner) que $c_1(M_n) \geqslant (log(n))^c$ pour un certain $c > 0$ si M_n est le sous-ensemble $\{1,\dots,n\}^3$ de $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$. La quantité $o(1)$ qui apparaît dans le premier résultat est une scorie de la démonstration, contrôlée par $(loglog logn)/(loglogn)$, et il est vraisemblable qu'elle puisse être éliminée; c'est en tout cas possible dans le cas particulier du problème isopérimétrique. Des travaux récents (2014) de Vincent Lafforgue et Assaf Naor suggèrent que la constante c du deuxième résultat est égale à 1/2, ce qui serait la valeur optimale. Quoi qu'il en soit, les plongements bi-lipschitziens des espaces métriques de type négatif dans L_1 fournissent une solution du problème de la coupe minimale en temps polynomial, à une proportion $O(\sqrt{logn})$ près.

Il faut maintenant achever cette esquisse des travaux récents de théorie métrique des espaces normés, en invitant bien sûr le lecteur à consulter les articles eux-mêmes. Concluons simplement en intégrant l'approche contemporaine dans une perspective historique : au siècle dernier, les théorèmes d'existence en analyse ont le plus souvent été obtenus par des méthodes topologiques plus ou moins constructives, reposant par exemple sur la compacité ou la complétude, ou encore sur des résultats combinatoires fins. Puis les méthodes probabilistes ont déployé toute leur puissance, en établissant par des méthodes aléatoires l'existence de nombreux objets qui échappaient parfois à une construction explicite. L'explosion spectaculaire des moyens de calcul nous invite désormais à ne plus nous contenter de théorèmes d'existence non constructifs, donc insatisfaisants pour les utilisateurs, mais à déterminer si et comment un algorithme peut expliciter l'objet mathématique recherché, optimal ou proche de l'être. Les travaux que nous avons présentés relèvent clairement de cette troisième génération. Suivons ces nouveaux progrès : le vingt-et-unième siècle ne fait que commencer.

Références

[1] K. Ball. « The Ribe programme ». *Astérisque*, nº 352 (2013). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, Exp. 1047, viii, 147–159.

[2] F. Baudier et G. Lancien. « Embeddings of locally finite metric spaces into Banach spaces ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **136**, nº 3 (2008), 1029–1033 (electronic).

[3] É. Ghys. « Les groupes hyperboliques ». *Astérisque*, nº 189-190 (1990). Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90, Exp. 722, 203–238.

[4] G. Godefroy, N. J. Kalton et G. Lancien. « Szlenk indices and uniform homeomorphisms ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**, nº 10 (2001), 3895–3918 (electronic).

[5] G. Godefroy, G. Lancien et V. Zizler. « The non-linear geometry of Banach spaces after Nigel Kalton ». *Rocky Mountain J. Math.* **44**, nº 5 (2014), p. 1529–1583.

[6] A. Grothendieck. « Résumé de La Théorie Métrique Des Produits Tensoriels Topologiques ». *Resenhas* **2**, nº 4 (1996), p. 401–480.

[7] S. Khot et A. Naor. « Grothendieck-type inequalities in combinatorial optimization ». *Comm. Pure Appl. Math.* **65**, nº 7 (2012), p. 992–1035.

[8] G. Lancien et E. Pernecká. « Approximation Properties and Schauder Decompositions in Lipschitz-Free Spaces ». *J. Funct. Anal.* **264**, n° 10 (2013), p. 2323–2334.

[9] J. R. Lee et A. Naor. « Extending Lipschitz functions via random metric partitions ». *Invent. Math.* **160**, n° 1 (2005), p. 59–95.

[10] M. Mendel et A. Naor. « Ramsey partitions and proximity data structures ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **9**, n° 2 (2007), p. 253–275.

[11] M. Mendel et A. Naor. « Ultrametric skeletons ». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, n° 48 (2013), p. 19256–19262.

[12] A. Naor. « An introduction to the Ribe program ». *Jpn. J. Math.* **7**, n° 2 (2012), p. 167–233.

[13] A. Naor. « L_1 embeddings of the Heisenberg group and fast estimation of graph isoperimetry ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, p. 1549–1575.

[14] P. Pansu. « Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell,. . .) ». *Astérisque*, n° 352 (2013). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, Exp. 1045, vii, 83–120.

[15] G. Pisier. « Grothendieck's theorem, past and present ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **49**, n° 2 (2012), p. 237–323.

[16] M. Talagrand. « Regularity of Gaussian processes ». *Acta Math.* **159**, n° 1-2 (1987), p. 99–149.

Gilles Godefroy

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

Gilles Godefroy est Directeur de recherches au CNRS Ses travaux concernent l'analyse fonctionnelle, et en particulier la géométrie des espaces de Banach. Il s'intéresse également à la diffusion des mathématiques.

Groupes, actions et algèbres de von Neumann

• C. Houdayer

1. Introduction

Une construction célèbre due à Murray-von Neumann [9] permet d'associer à toute action d'un groupe discret dénombrable par transformations mesurables sur un espace mesuré standard une algèbre de von Neumann. Une question centrale en Algèbres d'Opérateurs est de déterminer quelle information l'algèbre de von Neumann ainsi construite retient du groupe et de l'action.

Les travaux fondamentaux de Connes [3] ont permis de complètement classifier les algèbres de von Neumann *moyennables*. Depuis les années 2000, la théorie *déformation/rigidité* de Popa permet, dans certains cas, de classifier les algèbres de von Neumann associées aux actions des groupes non-moyennables.

On verra que le problème de l'unicité de la sous-algèbre de Cartan dans les algèbres de von Neumann des actions est fondamental car il permet de ramener le problème de la classification des algèbres de von Neumann à celui de la classification des actions à équivalence orbitale près.

Le but de cet article est de présenter des résultats de classification et de rigidité pour les algèbres de von Neumann associées aux actions des groupes libres.

2. Groupes non-moyennables

La notion de *moyennabilité* pour les groupes a été introduite par von Neumann (1929) pour expliquer entre autres le célèbre paradoxe de Banach-Tarski (1924) qui affirme qu'il est possible de couper une boule de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ en un nombre fini de morceaux et de réassembler ces morceaux pour former deux boules identiques à la première, à un déplacement près.

Pour tout groupe discret Γ, on note $\mathcal{P}(\Gamma)$ l'ensemble des parties de Γ.

Définition. On dit qu'un groupe discret Γ est *moyennable* s'il existe une application $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(\Gamma) \to [0,1]$ finiment additive, de masse totale égale à 1 et invariante par translation à gauche.

On appelle *moyenne* une application $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(\Gamma) \to [0,1]$ comme dans la définition ci-dessus. La notion de « moyenne » est bien sûr à contraster avec celle de « mesure » où on demande la condition plus forte de σ-additivité. Un groupe discret dénombrable est fini si et seulement s'il possède une mesure $\mu : \mathcal{P}(\Gamma) \to [0,1]$ σ-additive, de masse totale égale à 1 et invariante par translation à gauche. En revanche, il existe de nombreux groupes discrets infinis qui sont moyennables. Par exemple, le groupe cyclique infini $\mathbb{Z}$ est moyennable. Pour le voir, on définit la moyenne $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to [0,1]$ par la formule

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}(A) := \lim_{n \to \mathcal{U}} \frac{|A \cap \{-n, \dots, n\}|}{2n+1} \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{Z},$$

où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Il est immédiat de vérifier que la moyenne $\mathfrak{m}_{\mathcal{U}}$ ainsi obtenue est finiment additive, de masse totale égale à 1 et invariante par translation à gauche. Comme le suggère l'exemple précédent, la moyenne $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(\Gamma) \to [0,1]$ qui apparaît dans la définition ci-dessus n'est pas obtenue de manière explicite et requiert l'axiome du choix. De plus, une telle moyenne ne charge pas les atomes lorsque le groupe est infini.

D'un point de vue plus géométrique, un groupe Γ est moyennable si et seulement si pour tout compact K et toute action $\Gamma \curvearrowright K$ par homéomorphismes, c'est-à-dire un morphisme de groupes $\pi : \Gamma \to \mathrm{Homéo}(X)$, il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur K invariante sous l'action de Γ, c'est-à-dire $\pi(\gamma)_* \mu = \mu$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On voit qu'avec cette nouvelle caractérisation géométrique de la moyennabilité, le théorème du point fixe de Markov-Kakutani permet de montrer que tout groupe abélien est moyennable. La notion de moyennabilité est stable par passage au sous-groupe, limite inductive, quotient et extension.

Von Neumann (1929) a montré que le groupe libre à deux générateurs $\mathbf{F}_2 = \langle a, b\rangle$ n'est pas moyennable. Le groupe libre $\mathbf{F}_2$ est le groupe engendré par les générateurs a et b avec comme seules relations $aa^{-1} = a^{-1}a = bb^{-1} = b^{-1}b = e$. La preuve de la non-moyennabilité de $\mathbf{F}_2$ est très simple. On suppose par contradiction qu'il existe une moyenne $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(\mathbf{F}_2) \to [0,1]$ finiment additive, de masse totale égale à 1 et invariante par translation à gauche. On note W_a (resp. $W_{a^{-1}}$, W_b et $W_{b^{-1}}$) l'ensemble des mots réduits dans $\mathbf{F}_2$ qui commencent par la lettre a (resp. a^{-1}, b et b^{-1}). Puisque $aW_a, aW_b, aW_{b^{-1}}$ sont deux à deux disjoints et $aW_a \sqcup aW_b \sqcup aW_{b^{-1}} \subset W_a$, on a

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(W_a) &\geqslant \mathfrak{m}(aW_a \sqcup aW_b \sqcup aW_{b^{-1}})\\ &= \mathfrak{m}(aW_a) + \mathfrak{m}(aW_b) + \mathfrak{m}(aW_{b^{-1}})\\ &= \mathfrak{m}(W_a) + \mathfrak{m}(W_b) + \mathfrak{m}(W_{b^{-1}}).\end{aligned}$$

Ceci entraîne que $\mathfrak{m}(W_b) = \mathfrak{m}(W_{b^{-1}}) = 0$. De la même manière, on obtient aussi $\mathfrak{m}(W_a) = \mathfrak{m}(W_{a^{-1}}) = 0$. Puisque $\mathfrak{m}(\{e\}) = 0$ (la moyenne $\mathfrak{m}$ ne charge pas les atomes), on a alors

$$1 = \mathfrak{m}(W_a) + \mathfrak{m}(W_{a^{-1}}) + \mathfrak{m}(W_b) + \mathfrak{m}(W_{b^{-1}}) + \mathfrak{m}(\{e\}) = 0$$

ce qui est une contradiction. En conclusion, le groupe libre $\mathbf{F}_2$ n'est pas moyennable. Il est de plus intéressant de remarquer que tout groupe Γ qui contient $\mathbf{F}_2$ en tant que sous-groupe n'est pas moyennable.

Exemple. Voici quelques classes importantes de groupes *discrets* non-moyennables.

1. Le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices
$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$
est isomorphe à $\mathbf{F}_2$. Ainsi, le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'est pas moyennable. On remarque de plus que $\mathbf{F}_2 < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe d'indice 12. On dit alors que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est « virtuellement » libre.
2. Le sous-groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ engendré par les rotations
$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$$
est isomorphe à $\mathbf{F}_2$. Ainsi, le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas moyennable en tant que groupe discret. Ceci permet en particulier d'expliquer le célèbre paradoxe de Banach-Tarski.
3. Les groupes hyperboliques au sens de Gromov non élémentaires (à savoir non virtuellement cycliques) ne sont pas moyennables.
4. Les réseaux Γ des groupes de Lie G réels simples de rang réel supérieur ou égal à 1 sont non-moyennables.
5. Il existe aussi des groupes discrets dénombrables non-moyennables qui ne contiennent pas $\mathbf{F}_2$ en tant que sous-groupe. La question de l'existence de tels groupes avait été posée par von Neumann en 1929. Elle a été résolue par Ol'shanskii en 1980.

3. Théorie ergodique des actions de groupes

Quelques généralités sur les actions de groupes

On s'intéresse à des actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ de groupes discrets dénombrables sur des espaces mesurés standards par transformations mesurables. On rappelle le résultat de Rokhlin qui affirme qu'un espace mesuré standard sans atome (X,μ) est isomorphe à $([0,1], \mathrm{Leb})$ où le segment $[0,1]$ est muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue (simplement notée Leb). On suppose toujours que l'action est *non-singulière*, c'est-à-dire, pour tout $\gamma \in \Gamma$, les mesures $\gamma_*\mu$ et μ sont équivalentes au sens où elles ont les mêmes ensembles négligeables. Dans le cas où la mesure μ est de probabilité et l'action préserve μ, c'est-à-dire, $\gamma_*\mu = \mu$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, on dit alors que l'action préserve la mesure de probabilité (*pmp*).

Définition. L'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est

- *(essentiellement) libre* lorsque le stabilisateur de μ-presque tout point de X est trivial. De manière équivalente, pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, l'ensemble mesurable $\{x \in X : \gamma \cdot x = x\}$ est μ-négligeable.
- *ergodique* lorsque tout sous-ensemble mesurable de X qui est invariant sous l'action de Γ est soit μ-négligeable soit μ-conégligeable. Autrement dit, le système dynamique mesuré provenant de l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ ne peut être « divisé » en deux sous-systèmes dynamiques mesurés non triviaux.

Les actions libres ergodiques se répartissent en trois types. On dit que l'action libre ergodique $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est de

– *type* I lorsque μ est supportée sur une orbite, c'est-à-dire, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est transitive. Il s'agit alors de l'action par translation à gauche $\Gamma \curvearrowright (\Gamma, \mu_{\text{comptage}})$ où $\mu_{\text{comptage}}(A) = |A|$ pour tout $A \subset \Gamma$.
– *type* II lorsqu'il existe une mesure σ-finie ν sur X qui est sans atome, invariante sous l'action de Γ et équivalente à μ. On dit alors que l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est de *type* II_1 lorsque $\nu(X) < +\infty$ et de *type* II_∞ lorsque $\nu(X) = +\infty$.
– *type* III lorsqu'il n'existe aucune mesure σ-finie sur X qui est invariante sous l'action de Γ et équivalente à μ.

Exemple. On illustre la notion d'action par trois exemples de nature différente.

1. **Action de Bernoulli.** Tout groupe infini Γ admet au moins une action pmp libre ergodique. Il s'agit de l'action par *décalage de Bernoulli* $\Gamma \curvearrowright ([0,1]^\Gamma, \mathrm{Leb}^{\otimes\Gamma})$ définie par

$$\gamma \cdot (x_g)_{g\in\Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g\in\Gamma}.$$

L'action de Bernoulli $\Gamma \curvearrowright ([0,1]^\Gamma, \mathrm{Leb}^{\otimes\Gamma})$ est de type II_1.

2. **Action par translation.** Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à gauche λ_G (unique à constante multiplicative près). On rappelle que λ_G est finie si le groupe G est compact et que λ_G est infinie si le groupe G est non-compact. Soit $\Gamma < G$ un sous-groupe dénombrable quelconque. Alors l'*action par translation à gauche* $\Gamma \curvearrowright (G, \lambda_G)$ définie par $\gamma \cdot g = \gamma g$ préserve la mesure de Haar λ_G. L'action par translation à gauche est toujours libre. Elle est de plus ergodique lorsque $\Gamma < G$ est dense.

Supposons à présent que G n'est pas dénombrable et $\Gamma < G$ est dénombrable et dense. Alors l'action par translation à gauche $\Gamma \curvearrowright (G, \lambda_G)$ est de type II_1 lorsque G est compact et de type II_∞ lorsque G est non compact.

3. **Action sur les espaces homogènes.** Soit $H < G$ un sous-groupe fermé d'un groupe localement compact. L'espace quotient homogène G/H est naturellement muni d'une mesure de probabilité borélienne régulière G-quasi-invariante $\nu_{G/H}$ unique à équivalence près. Soit $\Gamma < G$ un sous-groupe dénombrable quelconque. L'*action sur l'espace homogène* $\Gamma \curvearrowright (G/H, \nu_{G/H})$ est définie par $\gamma \cdot gH = \gamma gH$. On fixe à présent $n \geqslant 2$, $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) < G$.

   (a) Dans le cas où $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) < G$, l'action $\Gamma \curvearrowright (G/H, \nu_{G/H})$ est libre ergodique de type II_1.
   (b) Dans le cas où $H = \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{n-1} < G$, l'action $\Gamma \curvearrowright (G/H, \nu_{G/H})$ n'est rien d'autre que l'action linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$ et est donc libre ergodique de type II_∞.
   (c) Dans le cas où $H < G$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, l'action $\Gamma \curvearrowright (G/H, \nu_{G/H})$ est libre ergodique de type III.

Actions de groupes de type III

L'absence de mesure finie invariante rend l'étude des actions de type III particulièrement difficile. Un outil indispensable pour étudier les actions de type III est l'*extension de Maharam*.

Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action libre ergodique de type III. L'extension de Maharam de $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est l'action libre $\Gamma \curvearrowright (X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$ définie par

$$\gamma \cdot (x,t) = \left(\gamma \cdot x, t + \ln\left(\frac{\mathrm{d}\gamma_*\mu}{\mathrm{d}\mu}(x)\right)\right)$$

où $\mathrm{d}m(t) = \exp(-t)\,\mathrm{d}t$. On remarque que la mesure infinie $\mu \otimes m$ sur $X \times \mathbb{R}$ est préservée sous l'action de Γ. En revanche, l'action $\Gamma \curvearrowright (X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$ n'est pas nécessairement ergodique. On note alors (Z, η) l'espace mesuré standard des composantes ergodiques de l'action $\Gamma \curvearrowright (X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$. L'action $\mathbb{R} \curvearrowright (X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$ définie par $s \cdot (x,t) = (x, s+t)$ commute avec l'action $\Gamma \curvearrowright (X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$ et induit alors une action ergodique $\mathbb{R} \curvearrowright (Z,\eta)$ sur l'espace des composantes ergodiques appelée *flot de Radon-Nikodym*.

Définition. On dit que l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est de type

– III_0 lorsque le flot de Radon-Nikodym $\mathbb{R} \curvearrowright (Z,\eta)$ est proprement ergodique, c'est-à-dire, toutes les orbites sous l'action de $\mathbb{R}$ sont de mesure nulle.
– III_λ avec $\lambda \in]0,1[$ lorsque le flot de Radon-Nikodym $\mathbb{R} \curvearrowright (Z,\eta)$ est essentiellement transitif et mesurablement isomorphe à $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}/\ln(\lambda)\mathbb{Z}$.
– III_1 lorsque (Z,η) est réduit à un point. Dans ce cas, l'extension de Maharam $\Gamma \curvearrowright (X \times \mathbb{R}, \mu \otimes m)$ est ergodique et donc de type II_∞.

Dans l'exemple précédent où $n \geqslant 2$, $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $H < G$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, on peut montrer que l'action $\Gamma \curvearrowright (G/H, \nu_{G/H})$ est de type III_1. Dans ce cas, l'extension de Maharam est mesurablement isomorphe à $\Gamma \curvearrowright (G/L, \nu_{G/L})$ où $L < H$ est le noyau de l'homomorphisme modulaire $\Delta_H : H \to \mathbb{R}_+^*$ défini par $\lambda_H(Uh) = \Delta_H(h)\lambda_H(U)$ pour tout sous-ensemble borélien $U \subset H$ et toute mesure de Haar à gauche λ_H sur H.

Comme pour les groupes, il est possible de définir une notion de moyennabilité pour les actions. On dit qu'une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ d'un groupe discret dénombrable sur un espace mesuré standard est *moyennable* lorsqu'il existe une application linéaire positive Γ-équivariante $\Phi : \mathrm{L}^\infty(\Gamma \times X) \to \mathrm{L}^\infty(X)$ telle que $\Phi(1 \otimes f) = f$ pour tout $f \in \mathrm{L}^\infty(X)$. L'application $\Phi : \mathrm{L}^\infty(\Gamma \times X) \to \mathrm{L}^\infty(X)$ peut être regardée comme une généralisation de la notion de moyenne rencontrée précédemment pour les groupes moyennables. Comme pour les groupes moyennables, il est possible de donner une interprétation géométrique de la notion d'action moyennable bien qu'il ne s'agisse plus nécessairement d'une équivalence. Si $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est une action moyennable, alors pour tout compact K et toute action $\Gamma \curvearrowright K$ par homéomorphismes, il existe une application mesurable Γ-équivariante $X \to \mathrm{Prob}(K)$, où $\mathrm{Prob}(K)$ est l'espace compact de toutes les mesures de probabilité boréliennes sur K.

Si Γ est moyennable, alors toutes ses actions sont moyennables. En effet, si Γ est moyennable, il est facile de voir que la moyenne $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(\Gamma) \to [0,1]$ s'étend en une forme linéaire $\varphi : \ell^\infty(\Gamma) \to \mathbb{C}$ positive, invariante par translation à gauche et telle que $\varphi(1) = 1$. Pour toute action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, on peut alors définir $\Phi : \mathrm{L}^\infty(\Gamma \times X) \to \mathrm{L}^\infty(X)$ par $\Phi(F)(x) = \varphi(F(\cdot, x))$ pour tout $F \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma \times X)$. Il est immédiat de voir que $\Phi : \mathrm{L}^\infty(\Gamma \times X) \to \mathrm{L}^\infty(X)$ ainsi définie est linéaire positive Γ-équivariante et satisfait à $\Phi(1 \otimes f) = f$ pour tout $f \in \mathrm{L}^\infty(X)$.

Exemple. Voici quelques exemples d'actions moyennables de groupes non-moyennables.

1. L'action linéaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ est libre ergodique de type II_∞ et moyennable.
2. L'action par transformations homographiques $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ est libre ergodique de type III_1 et moyennable.
3. Soit $H < G$ un sous-groupe fermé moyennable d'un groupe localement compact tel que l'espace quotient G/H est compact. Soit $\Gamma < G$ un sous-groupe discret. Alors l'action sur l'espace homogène $\Gamma \curvearrowright G/H$ est moyennable.

Il est intéressant et important de noter que tout groupe non-moyennable admet au moins une action moyennable ergodique : il s'agit de l'action du groupe sur l'une de ses frontières de Poisson-Furstenberg. Dans le cas du groupe libre $\mathbf{F}_2$, une frontière de Poisson-Furstenberg peut être réalisée concrètement comme l'action $\mathbf{F}_2 \curvearrowright \partial\mathbf{F}_2$ du groupe libre $\mathbf{F}_2$ sur son bord de Gromov $\partial\mathbf{F}_2$ muni de la mesure de sortie ν associée à la marche aléatoire de loi donnée par $\mu = \frac{1}{4}(\delta_a + \delta_{a^{-1}} + \delta_b + \delta_{b^{-1}})$. Il se trouve que le bord de Gromov $\partial\mathbf{F}_2$ n'est rien d'autre que l'ensemble des mots réduits infinis à droite sur l'alphabet $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Le bord de Gromov $\partial\mathbf{F}_2$ est naturellement muni d'une structure d'espace compact et l'action par multiplication à gauche $\mathbf{F}_2 \curvearrowright \partial\mathbf{F}_2$ est une action par homéomorphismes.

La notion de moyennabilité pour les actions de groupes a été introduite par Zimmer et est un outil fondamental dans l'étude des propriétés asymptotiques et structurelles des groupes non-moyennables.

Actions de groupes et équivalence orbitale

On dit que deux actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ sont *mesurablement conjuguées* lorsqu'il existe un isomorphisme de groupe $\delta : \Gamma \to \Lambda$ et un isomorphisme mesurable $\Delta : X \to Y$ tel que $\Delta_*\mu = \nu$ et $\Delta(\gamma \cdot x) = \delta(\gamma) \cdot \Delta(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et μ-presque tout $x \in X$.

À toute action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, on associe la *relation d'équivalence orbitale* $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ définie par

$$(x, y) \in \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X) \quad \text{si et seulement si} \quad \Gamma \cdot x = \Gamma \cdot y.$$

La relation d'équivalence orbitale $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ rend compte de la partition en orbites de l'espace X sous l'action de Γ. On peut alors définir une notion plus « faible » d'isomorphisme entre deux actions. On dit que deux actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ sont *orbitalement équivalentes (OE)* lorsqu'il existe un isomorphisme mesurable $\Delta : X \to Y$ tel que $\Delta_*\mu = \nu$ et $\Delta(\Gamma \cdot x) = \Lambda \cdot \Delta(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$. Il est clair que si les actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ sont mesurablement conjuguées, alors elles sont orbitalement équivalentes.

La notion d'équivalence orbitale est en général beaucoup plus faible que celle de conjugaison mesurable. En effet, la théorie de l'entropie de Kolmogorov-Sinai (1959) a permis de montrer que le groupe $\mathbb{Z}$ admet un continuum d'actions pmp libres ergodiques à conjugaison mesurable près. En revanche, Dye (1963) a montré le résultat surprenant que toutes les actions pmp libres ergodiques de $\mathbb{Z}$ sont orbitalement équivalentes entre elles. Ce résultat a été généralisé par Ornstein-Weiss (1981) pour tous les groupes moyennables infinis. Ainsi, toutes les actions pmp libres ergodiques des groupes moyennables infinis sont orbitalement équivalentes entre elles. Enfin, plus généralement, en combinant les résultats de Krieger (1975) et Connes-Feldman-Weiss (1981), le flot de Radon-Nikodym défini précédemment classifie complètement les actions libres ergodiques des groupes moyennables infinis à équivalence orbitale près.

4. Algèbres de von Neumann

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. On note $\mathbf{B}(H)$ l'algèbre de tous les opérateurs linéaires bornés $T : H \to H$. Munie de la norme d'opérateurs $\|\cdot\|$ définie par

$$\|T\| := \sup\{\|T\xi\|_H : \xi \in H, \|\xi\|_H \leqslant 1\}$$

et de l'involution $T \mapsto T^*$ définie par

$$\langle T^*\xi, \eta\rangle_H := \langle \xi, T\eta\rangle_H \quad \text{pour tous } \xi, \eta \in H,$$

l'algèbre $\mathbf{B}(H)$ est une $*$-algèbre de Banach unifère. On appelle C^*-*algèbre* toute sous-$*$-algèbre de $\mathbf{B}(H)$ fermée pour la topologie normique.

Il est possible de définir sur $\mathbf{B}(H)$ une topologie plus « faible » que la topologie normique. On dit qu'une suite (généralisée) $(T_i)_{i\in I}$ *converge faiblement* vers 0 lorsque $\lim_{i\in I}\langle T_i\xi, \eta\rangle_H = 0$ pour tous $\xi, \eta \in H$. Il est facile de voir que la topologie faible est strictement plus faible que la topologie normique lorsque H est de dimension infinie. La topologie faible sur $\mathbf{B}(H)$ est très utile car la boule unité $\{T \in \mathbf{B}(H) : \|T\| \leqslant 1\}$ est toujours faiblement compacte.

Pour tout sous-ensemble non vide $\mathcal{S} \subset \mathbf{B}(H)$, on définit le *commutant* de $\mathcal{S}$ par

$$\mathcal{S}' := \{T \in \mathbf{B}(H) : ST = TS, \forall S \in \mathcal{S}\}.$$

On remarque que le commutant $\mathcal{S}'$ est toujours fermé pour la topologie faible. Le *bicommutant* de $\mathcal{S}$ est alors défini par $\mathcal{S}'' := (\mathcal{S}')'$. On a toujours $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}''$.

Le célèbre théorème du bicommutant de von Neumann (1936) donne une caractérisation à la fois topologique et algébrique des sous-$*$-algèbres unifères faiblement fermées de $\mathbf{B}(H)$.

Théorème/Définition. *On dit qu'une sous-$*$-algèbre unifère $M \subset \mathbf{B}(H)$ est une* algèbre de von Neumann *lorsque l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *M est faiblement fermée ;*
2. *$M'' = M$.*

La définition ci-dessus incite donc à penser au bicommutant $\mathcal{S}''$ comme à une « fermeture algébrique » de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Une classe intéressante d'algèbres de von Neumann est fournie par la théorie de la mesure. On se donne un espace de probabilité standard (X, μ). On peut représenter $\mathrm{L}^\infty(X,\mu) \subset \mathbf{B}(\mathrm{L}^2(X,\mu))$ en faisant agir par « multiplication » toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ sur l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(X,\mu)$. En effet, pour tout $f \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ et tout $\xi \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$, on a $f\xi \in \mathrm{L}^2(X,\mu)$. Il est alors facile de montrer que $\mathrm{L}^\infty(X,\mu) = \mathrm{L}^\infty(X,\mu)' \cap \mathbf{B}(\mathrm{L}^2(X,\mu))$. Ainsi, $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ est une algèbre de von Neumann abélienne et même maximale abélienne dans $\mathbf{B}(\mathrm{L}^2(X,\mu))$. Réciproquement, on montre grâce au théorème spectral que toute algèbre de von Neumann abélienne A est $*$-isomorphe à $\mathrm{L}^\infty(Y,\nu)$ pour un certain espace de probabilité (Y,ν). Pour toute algèbre de von Neumann M, le centre de M défini par $\mathcal{Z}(M) := M' \cap M$ est une algèbre de von Neumann abélienne.

On appelle *facteur* toute algèbre de von Neumann dont le centre $\mathcal{Z}(M)$ est réduit à $\mathbb{C}1$. Un facteur est donc une algèbre de von Neumann la « moins » commutative possible. Les travaux fondateurs de Murray-von Neumann (1936) ont permis de montrer que pour classifier les algèbres de von Neumann, il suffit de classifier les facteurs. En effet, Murray-von Neumann (1936) ont montré que toute algèbre de von Neumann M peut s'écrire comme une « intégrale directe » de facteurs, c'est-à-dire, $M = \int_{y\in Y} M_y \,\mathrm{d}\nu(y)$ où $\mathcal{Z}(M) = \mathrm{L}^\infty(Y,\nu)$ et $(M_y)_{y\in Y}$ est une famille « mesurable » de facteurs.

Murray-von Neumann [9] ont développé une théorie des types pour les facteurs analogue à celle des types pour les actions libres ergodiques qu'on a définie dans la section précédente. On dit qu'un facteur est de

- *type* I lorsque M est $*$-isomorphe à $\mathbf{B}(\mathcal{K})$ pour un certain espace de Hilbert $\mathcal{K}$. On dit alors que M est de *type* I_n avec $n = \dim \mathcal{K}$;
- *type* II lorsque M n'est pas de type I mais possède une *trace*Tr qui étend la notion de mesure σ-finie invariante pour une action de groupes. On dit alors que M est de *type* II_1 lorsque $\mathrm{Tr}(1) < +\infty$ et de *type* II_∞ lorsque $\mathrm{Tr}(1) = +\infty$;
- *type* III lorsque M ne possède pas de trace comme ci-dessus.

Bien plus tard, Connes [4] a établi une classification des facteurs de type III analogue à celle des actions libres ergodiques de type III. La classification de Connes est beaucoup plus sophistiquée à définir que dans le cas des actions libres ergodiques et on ne la présentera pas dans ce texte. Dans le contexte des facteurs de type III, le *flot des poids* de Connes-Tomita-Takesaki étend la notion de flot de Radon-Nikodym d'une action de groupes. On reviendra sur ces points après avoir discuté la construction de Murray-von Neumann.

La théorie ergodique des actions de groupes permet de construire de beaux exemples de facteurs. Soit $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ une action d'un groupe discret dénombrable sur un espace mesuré standard. On définit l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\Gamma) \otimes \mathrm{L}^2(X,\mu)$ et les représentations

$$\begin{aligned}\pi : \mathrm{L}^\infty(X,\mu) \to \mathbf{B}(H) : \pi(f)(\delta_g \otimes \xi) \\ = \delta_g \otimes ((f\xi)\circ g^{-1}), \quad g \in \Gamma, \xi \in \mathrm{L}^2(X,\mu)\end{aligned}$$

et

$$u : \Gamma \to \mathcal{U}(H) : u_\gamma(\delta_g \otimes \xi) = \delta_{\gamma g} \otimes \xi, \quad g \in \Gamma, \xi \in \mathrm{L}^2(X,\mu).$$

Le couple (π, u) satisfait à la *relation de covariance* suivante :

$$u_\gamma \pi(f) u_\gamma^* = \pi(f \circ \gamma^{-1}), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall f \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu).$$

Il suit de la relation ci-dessus que l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left\{\pi(f), u_\gamma : f \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu), \gamma \in \Gamma\right\}$ est une sous-$*$-algèbre unifère de $\mathbf{B}(H)$.

L'objet de la définition suivante est centrale dans cet article.

Définition (Murray-von Neumann [9]). L'algèbre de von Neumann *group measure space construction* associée à l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est définie par

$$\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X) := \left\{\pi(f), u_\gamma : f \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu), \gamma \in \Gamma\right\}'' \subset \mathbf{B}(H).$$

Pour alléger les notations, on note simplement $A := \pi(\mathrm{L}^\infty(X,\mu)) \subset \mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X) =: M$. Dans le cas où le groupe Γ est le groupe trivial, M n'est rien d'autre que l'algèbre de von Neumann abélienne $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$.

Dans le cas où l'espace (X,μ) est réduit à un point, M est appelée l'*algèbre de von Neumann du groupe* Γ et l'on écrit $M := \mathrm{L}(\Gamma) \subset \mathbf{B}(\ell^2(\Gamma))$. On note $(\delta_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ la base canonique de l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$ définie par $\delta_\gamma(g) = \delta_{\gamma,g}$ pour tous $\gamma, g \in \Gamma$. L'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}(\Gamma)$ est un facteur si et seulement si le groupe Γ est à *classes de conjugaison infinies* (*cci*), c'est-à-dire, pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, la classe de conjugaison $\{h\gamma h^{-1} : h \in \Gamma\}$ est infinie. Puisque la forme linéaire $\mathrm{L}(\Gamma) \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle x\delta_e, \delta_e\rangle_{\ell^2(\Gamma)}$ définit une trace telle que $\mathrm{Tr}(1) = 1$, on voit que $\mathrm{L}(\Gamma)$ est un facteur de type II_1 si Γ est infini et cci. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, l'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}(\mathbf{F}_n)$ est un facteur de type II_1 appelé *facteur de groupe libre* de rang n.

On suppose à présent que l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est libre et ergodique. Dans ce cas, la sous-algèbre $A \subset M$ est *maximale abélienne* au sens où $A' \cap M = A$ et M est de plus un facteur. On montre alors que le type de l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et le type du facteur $\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$ coïncident. De plus, dans le cas de type III :

- le type de l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ (défini précédemment) et le type du facteur $\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$ défini par Connes coïncident ;
- le flot de Radon-Nikodym de l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ (défini précédemment) coïncide avec le flot des poids de Connes-Tomita-Takesaki du facteur $\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$.

Une algèbre de von Neumann $M \subset \mathbf{B}(H)$ est dite *moyennable* lorsqu'il existe une application linéaire $\Psi : \mathbf{B}(H) \to M$ positive de norme 1 telle que $\Psi(T) = T$ pour tout $T \in M$. Cette définition ne dépend pas de l'espace de Hilbert H sur lequel est représentée l'algèbre de von Neumann M. Lorsque Γ est un groupe moyennable, l'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$ est moyennable pour n'importe quelle action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$. Plus généralement, pour toute action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, l'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$ est moyennable si et seulement si l'action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ est moyennable.

Connes [3] a montré le résultat très profond que toute algèbre de von Neumann moyennable M est *approximativement de dimension finie*, c'est-à-dire, il existe une suite croissante de sous-$*$-algèbres unifères de dimension finie $Q_n \subset M$ telle que $M = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n)''$. Les travaux de Connes [4, 3] et Haagerup [5] ont permis de montrer que le flot des poids de Connes-Tomita-Takesaki classifie complètement les facteurs moyennables à isomorphisme près.

Il y a donc un parallèle très frappant entre la classification des actions à équivalence orbitale près et la classification des facteurs à $*$-isomorphisme près. On a vu que le flot de Radon-Nykodym est un invariant complet d'équivalence orbitale pour les actions libres ergodiques moyennables et le flot des poids de Connes-Tomita-Takesaki est un invariant complet d'isomorphisme pour les facteurs moyennables.

On précisera dans la section suivante le lien profond qui existe entre équivalence orbitale des actions libres ergodiques et isomorphisme des facteurs et on énoncera des résultats de classification au-delà du cas moyennable.

5. Problème de la sous-algèbre de Cartan

Dans la section précédente, on a vu qu'à toute action libre ergodique $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$, on associe une paire d'algèbres de von Neumann $A := \pi(\mathrm{L}^\infty(X,\mu)) \subset \mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X) =: M$. Dans la suite, on identifiera toujours $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ avec $A = \pi(\mathrm{L}^\infty(X,\mu))$. La sous-algèbre $A \subset M$ satisfait aux trois propriétés fondamentales suivantes :

1. la projection $\mathrm{E}_A : M \to A : fu_g \mapsto f\delta_{e,g}$ définit une application linéaire positive et *normale*, c'est-à-dire, faiblement continue sur la boule unité $\{T \in M : \|T\| \leqslant 1\}$;
2. $A \subset M$ est *maximale abélienne*, c'est-à-dire, $A' \cap M = A$;
3. le sous-groupe *normalisateur* $\mathcal{N}_M(A) = \{u \in \mathcal{U}(M) : uAu^* = A\}$ engendre l'algèbre de von Neumann M.

On dit alors que $A \subset M$ est une *sous-algèbre de Cartan*.

L'observation suivante due à Singer (1955) est cruciale pour comprendre le lien entre relation d'équivalence orbitale $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ et « group measure space construction » $\mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$.

Proposition. *Soient $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ deux actions libres ergodiques sur des espaces mesurés standards. Soit $\Delta : X \to Y$ un isomorphisme mesurable tel que $\theta_*\mu = \nu$. On note $\Delta_* : \mathrm{L}^\infty(Y,\nu) \to \mathrm{L}^\infty(X,\mu) : f \mapsto f \circ \Delta$ l'isomorphisme correspondant des algèbres de von Neumann abéliennes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\Delta : X \to Y$ réalise une équivalence orbitale entre les actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$, c'est-à-dire, $\Delta(\Gamma \cdot x) = \Lambda \cdot \Delta(x)$ pour μ-presque tout $x \in X$;*
2. *l'isomorphisme $\Delta_* : \mathrm{L}^\infty(Y,\nu) \to \mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ s'étend en un isomorphisme $\Delta_* : \mathrm{L}(\Lambda \curvearrowright Y) \to \mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$ d'algèbres de von Neumann.*

La proposition ci-dessus montre que connaître la relation d'équivalence orbitale $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ est équivalent à connaître la paire d'algèbres de von Neumann $\mathrm{L}^\infty(X,\mu) \subset \mathrm{L}(\Gamma \curvearrowright X)$. Un problème naturel est de savoir si une algèbre de von Neumann donnée possède ou non une sous-algèbre de Cartan et si oui, s'il est possible de classifier ces sous-algèbres de Cartan à conjugaison (unitaire) près.

En utilisant sa théorie des *probabilités libres*, Voiculescu [12] a montré que les facteurs de groupes libres $\mathrm{L}(\mathbf{F}_n)$ pour $n \geqslant 2$ ne possèdent pas de sous-algèbre de Cartan. Ainsi, les facteurs de groupes libres de peuvent pas être obtenus à partir d'une relation d'équivalence définie sur un espace de probabilité standard. Cette absence de sous-algèbre de Cartan rend le problème de la classification des facteurs de groupes libres très difficile.

En utilisant la théorie de *déformation/rigidité* de Popa, Ozawa-Popa [10] ont renforcé le résultat de Voiculescu en montrant la dichotomie suivante : tout sous-facteur d'un facteur de groupe libre est soit moyennable (à savoir approximativement de dimension finie) soit ne possède aucune sous-algèbre de Cartan. Les méthodes d'Ozawa-Popa ont ensuite été généralisées par Popa-Vaes [11] qui ont obtenu le résultat de rigidité fondamental suivant.

Théorème (Popa-Vaes, [11]). *Pour tout $m \geqslant 2$ et toute action $\mathbf{F}_m \curvearrowright (X,\mu)$ pmp libre ergodique, le facteur de type II_1 $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$ possède $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ comme unique sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près. Ceci signifie que pour toute sous-algèbre de Cartan $A \subset \mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$, il existe un unitaire $u \in \mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$ tel que $uAu^* = \mathrm{L}^\infty(X,\mu)$.*

Autrement dit, il existe une et une seule relation d'équivalence *pmp* définie sur un espace de probabilité standard qui engendre le facteur $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$: il s'agit de la relation d'équivalence orbitale $\mathcal{R}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$. Le théorème précédent donne de plus un résultat de classification pour les actions pmp des groupes libres. En effet, en utilisant les résultats de Gaboriau (2000) sur le *coût* des relations d'équivalence pmp, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire. *Pour tous $m, n \geqslant 2$ avec $m \neq n$ et toutes les actions pmp libres ergodiques $\mathbf{F}_m \curvearrowright (X,\mu)$ et $\mathbf{F}_n \curvearrowright (Y,\nu)$, on a $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X) \ncong \mathrm{L}(\mathbf{F}_n \curvearrowright Y)$.*

Le théorème de Popa-Vaes montre que si $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X) \cong \mathrm{L}(\mathbf{F}_n \curvearrowright Y)$ alors les actions $\mathbf{F}_m \curvearrowright X$ et $\mathbf{F}_n \curvearrowright Y$ sont orbitalement équivalentes. Ensuite, le résultat de Gaboriau sur le coût des relations d'équivalence montre que

$$m = \mathrm{Coût}(\mathcal{R}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)) = \mathrm{Coût}(\mathcal{R}(\mathbf{F}_n \curvearrowright Y)) = n.$$

Le corollaire précédent permet de classifier les algèbres de von Neumann associées aux actions pmp des groupes libres. En revanche, le célèbre problème de Murray-von Neumann sur la classification des facteurs de groupes libres est quant à lui toujours ouvert.

Problème. *Soient* $m, n \geqslant 2$. *Est-ce que* $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m) \cong \mathrm{L}(\mathbf{F}_n) \Rightarrow m = n$?

Comme on l'a mentionné auparavant, l'absence de sous-algèbre de Cartan dans les facteurs de groupes libres nous empêche de pouvoir utiliser les outils de la théorie ergodique des relations d'équivalence comme le coût ou les invariants ℓ^2 de Gaboriau.

En collaboration avec Vaes [8], nous avons étendu le théorème de Popa-Vaes au cadre des actions non-singulières non-moyennables de type III des groupes libres. La preuve repose sur une combinaison des méthodes de Popa-Vaes et de la théorie modulaire de Connes-Tomita-Takesaki.

Théorème A (H-Vaes, [8]). *Pour tout* $m \geqslant 2$ *et toute action* $\mathbf{F}_m \curvearrowright (X, \mu)$ non-singulière non-moyennable *libre ergodique, le facteur* $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$ *possède* $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ *comme unique sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près. Ceci signifie que pour toute sous-algèbre de Cartan* $A \subset \mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$, *il existe un unitaire* $u \in \mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$ *tel que* $uAu^* = \mathrm{L}^\infty(X, \mu)$.

La construction suivante permet d'obtenir de nombreux exemples d'actions *non-singulières non-moyennables* libres ergodiques de $\mathbf{F}_2$. En effet, on écrit $\mathbf{F}_2 = \langle a, b \rangle$ et on note $\pi : \mathbf{F}_2 \to \mathbb{Z}$ l'unique homomorphisme surjectif défini par $\pi(a) = 1$ et $\pi(b) = 0$. Soit $\mathbb{Z} \curvearrowright (Y, \nu)$ une action non-singulière libre ergodique quelconque. L'action « diagonale » $\mathbf{F}_2 \curvearrowright ([0,1]^{\mathbf{F}_2} \times Y, \mathrm{Leb}^{\otimes \mathbf{F}_2} \otimes \nu)$ définie par

$$\gamma \cdot ((x_g)_{g \in \mathbf{F}_2}, y) = ((x_{\gamma^{-1} g})_{g \in \mathbf{F}_2}, \pi(\gamma) \cdot y)$$

est non-singulière non-moyennable libre ergodique et son flot de Radon-Nikodym est le même que celui de l'action $\mathbb{Z} \curvearrowright (Y, \nu)$. Puisque le groupe $\mathbb{Z}$ admet des actions non-singulières libres ergodiques avec un flot de Radon-Nikodym prescrit, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire B (H-Vaes, [8]). *À tout flot de Radon-Nikodym correspond une action non-singulière non-moyennable libre ergodique* $\mathbf{F}_2 \curvearrowright (X, \mu)$ *tel que le facteur* $\mathrm{L}(\mathbf{F}_2 \curvearrowright X)$ *possède* $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ *comme unique sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près.*

Le théorème de Popa-Vaes ainsi que le Théorème A sont vrais plus généralement pour tous les groupes hyperboliques non-élémentaires et tous les sous-groupes discrets non-moyennables des groupes de Lie simples connexes de rang réel égal à 1. Une des propriétés cruciales du groupe libre utilisée dans la preuve des théorèmes précédents est le fait que, bien qu'étant non-moyennable, le groupe libre admet une action « moyennable à l'infini » sur son bord de Gromov.

En collaboration avec Boutonnet et Raum [1], nous avons montré qu'un produit libre non-trivial d'algèbres de von Neumann arbitraires n'a jamais de sous-algèbre de Cartan. Ce résultat a complètement résolu la question de l'existence de sous-algèbre de Cartan dans les produits libres et a généralisé des travaux antérieurs de Voiculescu (1995), Jung (2005), Ozawa-Popa (2007) et Ioana (2012).

Les analogues de type III des facteurs de groupes libres sont les facteurs d'Araki-Woods libres introduits par Shlyakhtenko au milieu des années 90. En collaboration avec Ricard [6], nous avons démontré que les facteurs d'Araki-Woods libres n'ont pas de sous-algèbre de Cartan. Très récemment, nous avons démontré avec Boutonnet et Vaes [2] que les facteurs d'Araki-Woods libres satisfont à la propriété structurelle de « solidité forte » qui avait été découverte par Ozawa-Popa pour les facteurs de groupes libres dans [10] [1]. Nous avons ainsi obtenu les premiers exemples de facteurs de type III fortement solides.

Enfin très récemment, en collaboration avec Shlyakhtenko et Vaes [7], nous avons obtenu une classification complète d'une grande famille de facteurs d'Araki-Woods libres au delà du cas presque périodique qui avait été résolu par Shlyakhtenko au milieu des années 90. Pour ce faire, nous avons introduit de nouveaux outils qui seront très utiles dans le futur pour la classification des facteurs de type III non-moyennables.

6. Conclusion

La structure des facteurs $\mathrm{L}(\mathbf{F}_m \curvearrowright X)$ associés aux actions non-singulières non-moyennables libres ergodiques des groupes libres est à présent bien comprise. On sait que ces facteurs possèdent une unique sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près. Dans le cas pmp, ces facteurs se souviennent de plus du rang m. En revanche, la classification des facteurs de groupes libres $\mathrm{L}(\mathbf{F}_n)$ pour

1. Une algèbre de von Neumann M est dite fortement solide lorsque pour toute sous-algèbre moyennable $Q \subset M$ qui est l'image d'une espérance conditionnelle normale $\mathrm{E}_Q : M \to Q$, la sous-algèbre de von Neumann engendrée par le normalisateur $\mathcal{N}_M(Q) = \{u \in \mathcal{U}(M) : uQu^* = Q\}$ reste moyennable.

$n \geqslant 2$ reste encore très ouverte et ni la théorie des *probabilités libres* de Voiculescu ni la théorie de *déformation/rigidité* de Popa ne permettent pour le moment de résoudre ce problème.

Dans une autre direction, il serait très intéressant de montrer que les actions non-singulières non-moyennables libres ergodiques des réseaux Γ des groupes de Lie G simples connexes de rang supérieur (par exemple $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) < \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = G$ pour $n \geqslant 3$) donnent des facteurs avec une unique sous-algèbre de Cartan à conjugaison unitaire près. Ceci permettrait notamment d'obtenir de nouveaux phénomènes de « super-rigidité » dans le cadre des algèbres de von Neumann.

Références

[1] R. Boutonnet, C. Houdayer et S. Raum. « Amalgamated Free Product Type III Factors with at Most One Cartan Subalgebra ». *Compos. Math.* **150**, nº 1 (2014), p. 143–174.

[2] R. Boutonnet, C. Houdayer et S. Vaes. « Strong Solidity of Free Araki-Woods Factors » (15 déc. 2015). arXiv : 1512.04820.

[3] A. Connes. « Classification of Injective Factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$ ». *Ann. of Math. (2)* **104**, nº 1 (1976), p. 73–115.

[4] A. Connes. « Une Classification Des Facteurs de Type III ». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1973), p. 133–252.

[5] U. Haagerup. « Connes' Bicentralizer Problem and Uniqueness of the Injective Factor of Type III_1 ». *Acta Math.* **158** (1-2 1987), p. 95–148.

[6] C. Houdayer et É. Ricard. « Approximation Properties and Absence of Cartan Subalgebra for Free Araki-Woods Factors ». *Adv. Math.* **228**, nº 2 (2011), p. 764–802.

[7] C. Houdayer, D. Shlyakhtenko et S. Vaes. « Classification of a Family of Non Almost Periodic Free Araki-Woods Factors ». *Prépublication. arXiv:1605.06057* (2016).

[8] C. Houdayer et S. Vaes. « Type III Factors with Unique Cartan Decomposition ». *J. Math. Pures Appl. (9)* **100**, nº 4 (2013), p. 564–590.

[9] F. J. Murray et J. von Neumann. « On Rings of Operators. IV ». *Ann. of Math. (2)* **44** (1943), p. 716–808.

[10] N. Ozawa et S. Popa. « On a Class of II_1 Factors with at Most One Cartan Subalgebra ». *Annals of Mathematics* **172**, nº 1 (2010), p. 713–749. eprint : 20752280.

[11] S. Popa et S. Vaes. « Unique Cartan Decomposition for II_1 Factors Arising from Arbitrary Actions of Hyperbolic Groups ». *J. Reine Angew. Math.* **694** (2014), p. 215–239.

[12] D. Voiculescu. « The Analogues of Entropy and of Fisher's Information Measure in Free Probability Theory. III. The Absence of Cartan Subalgebras ». *Geom. Funct. Anal.* **6**, nº 1 (1996), p. 172–199.

Cyril Houdayer

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, université Paris-Sud, cnrs, université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

cyril.houdayer@math.u-psud.fr

Cyril Houdayer est professeur à l'université Paris-Sud. Ses travaux de recherche portent sur l'étude des algèbres de von Neumann, une branche de l'analyse fonctionnelle. Il s'intéresse aussi à la théorie ergodique et à la théorie des représentations des groupes. Il est lauréat du projet erc Starting Grant gan 637601 dont l'objet est l'étude de la structure et la classification des algèbres de von Neumann associées à la théorie des probabilités libres de Voiculescu et aux actions ergodiques des groupes non-moyennables.

L'auteur remercie Rémi Boutonnet, Amaury Freslon et Amine Marrakchi ainsi que les relecteurs anonymes pour leurs commentaires utiles.

Les 5 minutes Lebesgue

- X. Caruso
- B. Grébert
- X. Lachambre
- S. Vũ Ngọc

Le centre Henri Lebesgue (chl) est un LabEx entièrement dédié aux mathématiques qui regroupe les principaux laboratoires de la région ouest : l'irmar (à Rennes), l'Éns de Rennes, le lmjl (à Nantes), le larema (à Angers), le lmba (à Brest et à Vannes). Un de ses objectifs est de promouvoir, auprès des collègues d'une part et du grand public d'autre part, les activités de recherche et de diffusion conduites au sein des laboratoires suscités. C'est dans cette optique qu'il a récemment été à l'initiative d'un nouveau séminaire filmé : « *Les 5 minutes Lebesgue* ». Les exposés du séminaire sont mis en ligne sur la page web du chl : `www.lebesgue.fr/5min` ainsi que sur sa chaîne YouTube : `www.lebesgue.fr/youtube`. Le séminaire est actuellement organisé par Xavier Caruso et San Vũ Ngọc pour la partie rennaise et Benoît Grébert pour la partie nantaise. Xhensila Lachambre, chargée de suivi et de coordination du centre Henri Lebesgue, intervient également de manière déterminante dans le bon déroulement du séminaire par son soutien logistique efficace.

1. L'esprit des *5 minutes Lebesgue*

Chaque semaine, un chercheur, un enseignant-chercheur, un ingénieur ou un doctorant membre ou rattaché à l'un des laboratoires du chl propose un exposé de cinq minutes. La contrainte de temps est stricte mais, à part cela, aucune directive n'est donnée aux orateurs, ni sur le niveau, ni sur le thème – si ce n'est, bien sûr, que le sujet abordé puisse se rattacher d'une manière ou d'une autre aux mathématiques, à l'enseignement des mathématiques ou encore à la vie des laboratoires de mathématiques. Cette liberté laissée aux intervenants est très importante à nos yeux car elle apparaît comme la clé de la diversité des *5 minutes Lebesgue* supposée refléter la diversité des mathématiques ainsi que des pratiques qu'on peut en avoir.

De la même manière, bien que pour l'instant, tous les exposés du séminaire aient eu lieu dans un cadre académique très classique (au tableau ou sur transparents), nous étudions sérieusement la possibilité de franchir les murs de la salle, voire ceux du bâtiment, dans l'idée de réaliser des épisodes de la série dans une ambiance moins studieuse et plus décontractée.

Ce désir de diversité explique également le choix que nous avons faits de limiter la durée des exposés à cinq minutes. Il est vrai que, cinq minutes, c'est très court mais c'est tout à fait suffisant pour présenter un objet, pour expliquer une idée ou pour faire passer un message. Cinq minutes, c'est suffisant pour convaincre son public de l'intérêt de son sujet et l'encourager à se documenter davantage par la suite (une liste de références bibliographiques accompagne chaque exposé). Cinq minutes, c'est le bon format pour la découverte, pour ne pas noyer le spectateur dans un excès de technicité mais lui faire sentir pourtant la beauté d'une théorie, l'intérêt d'un concept, l'utilité d'une méthode et enfin… tout cela mis ensemble, lui faire cerner, d'une part, l'unité des mathématiques au-delà de ses ramifications apparentes et, d'autre part, son intérêt et son utilité pour aimer et comprendre le monde dans lequel nous vivons.

2. Déroulement d'une séance

Plusieurs laboratoires sont impliqués dans les *5 minutes Lebesgue* et, bien entendu, chacun est libre d'organiser le séminaire à sa manière, dans ses locaux. Voyons un peu plus en détails comment cela se passe à Rennes et à Nantes.

2.1 – À Rennes

À Rennes, le séminaire a lieu le mardi à 15h45 juste avant la pause gourmande du laboratoire. Les préparatifs commencent généralement un quart d'heure d'avant : notre responsable informatique apporte et installe le matériel vidéo, nous préparons la salle (*e.g* ouverture de la cloison amovible), nous équipons l'orateur ou l'oratrice d'un microphone et lui communiquons les derniers conseils utiles (*e.g.* commencer par se présenter en une phrase).

La salle de séminaire avec son matériel audiovisuel

Rapidement, le public s'installe. Nous lançons le chronomètre et l'exposé peut commencer. Bien entendu, pour ne pas perturber le bon déroulement de l'exposé qui a été calibrée à la seconde près, aucune question n'est autorisée pendant les cinq minutes ! Par contre, les échanges avec le public sont permis – et encouragés – une fois que l'exposé est terminé et que la caméra a été coupée. La discussion s'étale généralement jusqu'à 16h où l'appel de la pause gourmande prend le dessus.

2.2 – À Nantes

À Nantes, les *5 minutes Lebesgue* sont à l'honneur une fois par mois, habituellement le premier vendredi à 15h30. Les réglages caméra et les dernières répétitions (attention : cinq minutes pas plus !) ont lieu le midi et nous récupérons la salle des séminaires et son matériels vidéo à 15h après le séminaire hebdomadaire d'analyse. Le public nombreux (une trentaine de personne) arrive quelques minutes avant le lancement de la séance. Quand tout le monde est installé et que le calme est revenu, le top départ est donné pour cinq minutes de réjouissances mathématiques ! À la fin de l'exposé le public peut intervenir, poser des questions à l'orateur ou apporter d'autres éclairages. Vers 15h45 nous passons à la deuxième partie de la séance : le visionnage sur grand écran des dernières vidéos de la série. En général nous avons droit à deux ou trois exposés. Ensuite tout le monde se dirige vers la passerelle où quelques mignardises de la petite boulangerie nous attendent pour agrémenter les discussions.

3. Évaluation du niveau

Afin de guider l'internaute, un système de symbôles et de couleurs permet de répartir les exposés en cinq catégories en fonction du public pressenti :

- Collégiens et grand public intéressé par les maths
- Lycéen passionné de maths ou étudiant en première ou deuxième année en filière scientifique
- Étudiant à partir de la troisième année en filière scientifique ou enseignant en mathématiques
- Personne ayant suivi des études de mathématiques (mais ne travaillant plus aujourd'hui dans le domaine)
- Chercheur en mathématiques

L'évaluation du niveau des exposés est cependant un exercice difficile. Afin de le résoudre au mieux, nous nous sommes dotés d'un comité de 9 personnes issues de différents milieux : une non-mathématicienne, un collégien, un enseignant en lycée, un professeur en classes préparatoires, une élève d'une grande école, un ingénieur, une physicienne et, enfin, deux chercheurs en mathématiques. À la sortie de chaque nouvel épisode pour lui attribuer une couleur, les membres du comité sont invités à sélectionner la ou les catégories dans lesquelles ils pensent que la vidéo s'insère le mieux. L'avis du comité est consultatif ; il est néanmoins suivi autant que cela est possible car il arrive régulièrement qu'une même vidéo suscite des retours très variés.

4. Impact du séminaire

Le séminaire n'a débuté qu'en novembre 2015 ; il n'est donc pas encore facile de dresser un bilan fiable et pertinent. Voilà pourquoi nous nous contenterons de donner quelques chiffres clé qui permettent de situer et de mesurer l'impact des *5 minutes Lebesgue*.

Depuis la création de la série, nous avons mis en ligne environ **30 épisodes** de la série. En cumulé, nous totalisons plus de **30 000 vues** (pour une durée moyenne de visionnage d'environ 3 minutes par épisode) ; la moitié des exposés ont été visionnés plus de **1 000 fois** chacun et certains épisodes dépassent les **2 000 vues**. Notre chaîne YouTube compte plus de **600 abonnés** ; ces personnes sont informées, chaque semaine, des nouveaux épisodes de la série qui sont mis en ligne. Depuis quelques mois, la parution d'une vidéo donne également lieu à un *tweet* sur le compte Tweeter du CHL.

Toutes les deux semaines, un exposé des *5 minutes Lebesgue* donne lieu à un billet sur la revue en ligne *Images des Mathématiques*. À l'occasion de la semaine des mathématiques, plusieurs épisodes de la série ont été diffusés sur le site *Echosciences Bretagne*. De même, les *5 minutes Lebesgue* sont régulièrement diffusées sur la webTV de l'université de Nantes.

Un résultat de recherche obtenu grâce à des lycéens

- T. BUDZINSKI
- G. LUCCHINI ARTECHE

Nous présentons une démonstration élémentaire d'une question posée par Fouvry, Kowalski et Michel sur les solutions de l'équation $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+t=0$ sur un corps fini, en utilisant des résultats obtenus par des lycéens lors de leur participation au Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens.

1. Introduction

Le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens $\mathbb{TFJM}^2$ qui existe depuis 2011, est un tournoi de mathématiques destiné aux élèves de lycée. Il se distingue d'autres compétitions comme les Olympiades de mathématiques en proposant des problèmes ouverts dont les énoncés sont connus à l'avance, et en étant organisé par équipes. Guidées par des encadrants, les équipes composées de 4, 5 ou 6 élèves ont environ trois mois pour réfléchir aux problèmes proposés. Lors du tournoi, les différentes équipes présentent leurs résultats et en discutent avec les autres équipes sous la forme de « joutes » mathématiques (voir l'article décrivant le $\mathbb{TFJM}^2$ plus loin dans ce même numéro). Les problèmes proposés sont inhabituels pour la plupart des élèves, car ils n'admettent pas, à la connaissance du jury, de solution complète. Pour les équipes, il s'agit donc de comprendre le problème, de résoudre des cas particuliers, de repérer les difficultés...

Le but de ce texte est de montrer à quel point le $\mathbb{TFJM}^2$ peut amener les élèves de lycée à entreprendre une démarche de recherche scientifique. Cette histoire date de l'édition 2014 et commence par un post dans le blog mathématique d'Emmanuel Kowalski, daté du 29 juin 2012.[1] Celui-ci, intitulé « A bijective challenge », commençait comme suit :

Étienne Fouvry, Philippe Michel and myself have just finished a new paper,[2] which is available on my web page and will soon be also on arXiv. [...] Today I want to discuss a by-product that we found particularly nice (and amusing). It can be phrased as a rather elementary-looking challenge: given a prime number p, and an element t of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ which is

1. `https://blogs.ethz.ch/kowalski/?s=isogenies`
2. Pour les curieux, il s'agit de l'article [2].

neither 0, 4 or -4 modulo p, let $N_p(t)$ be the number of solutions $(x,y) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\})^2$ of the congruence

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + t = 0.$$

The challenge is to prove, bijectively if possible, that

$$N_p(t) = N_p\left(\frac{16}{t}\right).$$

[...] This sounds simple and elegant enough that an elementary proof should exist, but our argument is a bit involved. First, the number $N_p(t)$ is the number of points modulo p of the curve with equation above, whose projective (smooth) model is an elliptic curve, say E_t, over $\mathbb{F}_p$. Then we checked using Magma that E_t and $E_{16/t}$ are isogenous over $\mathbb{F}_p$, and this is well-known to imply that the two curves have the same number of points modulo p.

[...] The best explanation of this has probably to do with the relation between the family of elliptic curves and the modular curve $Y_0(8)$ (a relation whose existence follows from Beauville's classification of stable families of elliptic curves over $\mathbb{P}^1$ with four singular fibers, as C. Hall pointed out), but we didn't succeed in getting a proof of all our statements using that link. In fact, we almost expected to find the identities above already spelled out in some corner or other of the literature on modular curves and universal families of elliptic curvers thereon, but we did not find anything.

Cette question de Fouvry, Kowalski et Michel a été reprise pour l'édition 2014 du $\mathbb{TFJM}^2$, ainsi que pour sa version internationale, l'ITYM. Bien entendu, on ne peut pas lancer des élèves de lycée directement sur une question ouverte comme celle-ci. C'est pourquoi l'énoncé a été modifié de la façon suivante pour amener les élèves à la question de ces chercheurs sans pour autant la leur poser frontalement. Voici l'énoncé précis de ce problème lors du $\mathbb{TFJM}^2$:

Soit p un nombre premier impair. On considère l'ensemble $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ des entiers modulo p. On note $\mathbb{F}_p^*$ l'ensemble des éléments inversibles de cet ensemble, i.e. les $x \in \mathbb{F}_p$ tels qu'il existe $y \in \mathbb{F}_p$ vérifiant $xy \equiv 1 \pmod p$. Pour $x \in \mathbb{F}_p^*$, on note $\frac{1}{x}$ un tel élément y (remarquer qu'il est unique dans $\mathbb{F}_p$).

Dans ce problème, on veut étudier l'équation

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = t,$$

où $x, y \in \mathbb{F}_p^*$ et $t \in \mathbb{F}_p$. On note $N_p(t)$ le nombre de solutions en x et y pour un t fixé.

1. *Quel est le cardinal de l'ensemble*

   $$A := \{x + \frac{1}{x} | x \in \mathbb{F}_p^*\}?$$

   Et celui des ensembles

   $$A+A := \{a+b \,|\, a,b \in A\} \text{ et } A\cdot A = \{a\cdot b \,|\, a,b \in A\}?$$

   On pourra commencer par les calculer explicitement pour des petites valeurs de p.

2. *Calculer $N_p(0)$.*

3. *Pour des petites valeurs de p, calculer explicitement $N_p(t)$ pour tout t.*

4. *Existe-t-il des couples (a,b) avec $a \in \mathbb{F}_p^*$ et $b \in \mathbb{F}_p$ tels que $N_p(t) = N_p(at+b)$ pour tout $t \in \mathbb{F}_p$? Existe-t-il $a \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $N_p(t) = N_p(a\frac{1}{t})$ pour tout $t \in \mathbb{F}_p^*$? Étudier d'autres transformations possibles de t laissant stable la valeur de N_p.*

5. *Généraliser ces résultats, à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour n quelconque (on pourra commencer avec les puissances des nombres premiers), puis aux corps finis quelconques.*

Comme on pourra le remarquer, on s'est permis de poser des questions *a priori* plus difficiles que celle posée par Fouvry-Kowalski-Michel (qui est cachée dans la question 4). Ceci est un facteur commun de tous les problèmes posés au $\mathbb{TFJM}^2$, le but étant que le problème soit ouvert même pour les jurys qui évalueront les élèves lors du tournoi (ces jurys sont composés de chercheurs, doctorants et étudiants de master ou de grandes écoles).

Ce qui fait l'intérêt de ce problème en particulier, c'est qu'il est issu d'une question posée par des vrais chercheurs en mathématiques à d'autres chercheurs, donc toute solution devient *ipso facto* un résultat de recherche (certes pas de la plus haute importance, mais de la vraie recherche tout de même). Et c'est en mettant ensemble les différentes solutions des élèves qui ont participé au $\mathbb{TFJM}^2$ 2014 que l'on a réussi à trouver une réponse élémentaire à la question de Fouvry-Kowalski-Michel. Grâce au $\mathbb{TFJM}^2$, des lycéens français ont donc fait un véritable petit apport à la recherche mathématique. On présente leurs arguments dans ce qui suit.

2. La preuve

2.1 – Énoncé du théorème et résultats préliminaires

Dans toute la suite p désigne un nombre premier impair. Pour tout $t \in \mathbb{F}_p$, on note $M_p(t)$ le nombre de solutions dans $\mathbb{F}_p^*$ de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = t, \tag{1}$$

et $N_p(t)$ le nombre de solutions dans $(\mathbb{F}_p^*)^2$ de l'équation

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = t. \tag{2}$$

Notre but est de montrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Pour tout $t \in \mathbb{F}_p^*$, on a $N_p\left(\frac{16}{t}\right) = N_p(t)$.*

La preuve du résultat consiste en un comptage plus ou moins explicite des solutions. On établit d'abord une borne supérieure sur les quantités $N_p(t)$, puis on montre que les quantités $N_p\left(\frac{16}{t}\right)$ et $N_p(t)$ sont congrues modulo p. Ayant toutes ces informations, un simple argument de parité conclut l'affaire.

On commence par donner une formule relativement explicite pour $N_p(t)$: on a

$$N_p(t) = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a) M_p(t-a). \tag{3}$$

On cherche donc à calculer explicitement les $M_p(a)$.

L'équation (1) pour $t = a$ est équivalente à $x^2 - ax + 1 = 0$, qui est une équation quadratique de discriminant $a^2 - 4$. Elle a donc une solution si $a^2 - 4 = 0$, deux si $a^2 - 4$ est un carré et aucune si $a^2 - 4$ n'est pas un carré. On rappelle donc la définition du symbole de Legendre :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \equiv 0 \pmod p, \\ +1 & \text{si } a \text{ est un carré non nul modulo } p, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sachant que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique d'ordre $p-1$, ce symbole peut aussi être calculé par ce qu'on appelle le critère d'Euler :

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

À l'aide de ce symbole, on voit que l'on peut exprimer les valeurs de M_p comme suit :

$$M_p(a) = 1 + \left(\frac{a^2-4}{p}\right). \tag{4}$$

Ces formules nous permettent de prouver deux résultats élémentaires sur les valeurs $N_p(t)$. Le premier est la borne supérieure annoncée plus haut, le deuxième concerne la parité de ces valeurs, ce qui sera utile à la fin de la preuve.

Lemme 1. *Pour tout $t \in \mathbb{F}_p$ on a*

$$N_p(t) \leqslant N_p(0) = 2p - 4.$$

Preuve. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (3) on obtient

$$\begin{aligned} N_p(t) &\leqslant \sqrt{\left(\sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a)^2\right)\left(\sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(t-a)^2\right)} \\ &= \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a)^2 = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a) M_p(-a) = N_p(0), \end{aligned}$$

où $M_p(a) = M_p(-a)$ d'après (4).

Pour calculer $N_p(0)$, on étudie la répartition des valeurs de M_p. D'une part, la formule (4) nous dit que $M_p(2) = M_p(-2) = 1$ et M_p vaut 0 ou 2 partout ailleurs. D'autre part on a

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a) = p - 1,$$

donc M_p prend $\frac{p-1}{2}$ fois la valeur 0, deux fois la valeur 1 et $\frac{p-3}{2}$ fois la valeur 2. On obtient donc

$$N_p(0) = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} M_p(a)^2 = 2 \cdot 1 + \frac{p-3}{2} \cdot 4 = 2p - 4.$$

□

Lemme 2. *$N_p(t)$ est impair si et seulement si $t \equiv \pm 4$* (mod p).

Preuve. Le cas $t = 0$ découle immédiatement du lemme 1. Supposons $t \neq 0$ et soit $a \in \mathbb{F}_p$: si $M_p(a) M_p(t-a)$ est impair, alors $a, t-a \in \{-2, 2\}$ d'après la formule (4), donc (a, t) vaut $(2, 4)$ ou $(-2, -4)$. Ainsi, si $t \notin \{-4, 4\}$ alors tous les termes de la somme (3) sont pairs donc $N_p(t)$ est pair. Si $t \in \{-4, 4\}$ alors le terme correspondant à $a = \frac{t}{2}$ est impair et tous les autres sont pairs donc $N_p(t)$ est impair. □

2.2 – Un argument inspiré de la preuve de Chevalley-Warning

Le théorème de Chevalley-Warning est un résultat classique de la théorie des corps finis.

Théorème 2 (Chevalley-Warning). *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p et soit $P(x_1,\dots,x_n)$ un polynôme de degré d à coefficients dans $\mathbb{F}$. Alors, si $n > d$, le nombre de solutions de l'équation $P = 0$ est congru à 0 modulo p.*

En particulier, si $(0,\dots,0)$ est une solution (par exemple, si P est homogène), alors il existe une solution non triviale.

La preuve de ce théorème, qui est bien classique (cf. par exemple le premier chapitre de [3]), consiste en une description astucieuse de l'ensemble des solutions qui utilise le petit théorème de Fermat. La même technique nous permettra de démontrer dans la suite le résultat suivant :

Proposition 1. *Pour tout $t \in \mathbb{F}_p^*$ on a $N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv N_p(t)$ (mod p).*

Preuve. L'équation (2) est équivalente à

$$x^2y+xy^2+x+y-txy = 0, \quad \text{avec} \quad (x,y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2, \quad (5)$$

donc $(x^2y + xy^2 + x + y - txy)^{p-1}$ vaut 0 si (x,y) est solution et 1 sinon, d'après le petit théorème de Fermat. On peut ainsi compter les couples non-solutions modulo p :

$$(p-1)^2 - N_p(t) \equiv \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} (x^2y+xy^2+x+y-txy)^{p-1} \pmod p.$$

En développant le polynôme et en remplaçant t par $-t$ (la bijection évidente $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ donne $N_p(t) = N_p(-t)$), on obtient que $N_p(t)$ est congru modulo p à :

$$1 - \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} \sum_{\sum k_i = p-1} \frac{(p-1)!}{k_1!\dots k_5!} (x^2y)^{k_1}(xy^2)^{k_2} x^{k_3} y^{k_4} (txy)^{k_5}.$$

Et en rappelant que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ d'après le théorème de Wilson, on obtient que $N_p(t)$ est congru modulo p à :

$$\begin{aligned}
&1 + \sum_{\sum k_i = p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!\dots k_5!} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} x^{2k_1+k_2+k_3+k_5} y^{k_1+2k_2+k_4+k_5},\\
&= 1 + \sum_{\sum k_i = p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!\dots k_5!} \sum_{x,y\in\mathbb{F}_p^*} x^{p-1+k_1-k_4} y^{p-1+k_2-k_3},\\
&= 1 + \sum_{\sum k_i = p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!\dots k_5!} \left(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} x^{k_1-k_4}\right)\left(\sum_{y\in\mathbb{F}_p^*} y^{k_2-k_3}\right).
\end{aligned}$$

On a maintenant besoin du lemme suivant, clé dans la preuve de Chevalley-Warning.

Lemme 3. *Soit $a \in \mathbb{Z}$. Alors $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} x^a$ vaut -1 si $p-1$ divise a, et 0 sinon.*

Preuve. Si $p-1$ divise a, chacun des $p-1$ termes de la somme vaut 1 d'après le petit théorème de Fermat, d'où le résultat. Sinon, soit g un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$. On a

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p^*} x^a = \sum_{i=0}^{p-2} g^{ia} = \frac{g^{a(p-1)}-1}{g^a-1} = 0.$$

□

D'après le lemme, si le terme correspondant à $(k_1,\dots,k_5)$ est non nul, alors $k_1 - k_4$ et $k_2 - k_3$ sont divisibles par $p-1$, donc valent 0, $p-1$ ou $1-p$. Si par exemple $k_1 - k_4 = p-1$, alors $k_1 = p-1$ et $k_2 = \dots = k_5 = 0$, et la contribution de ce terme vaut $\frac{1}{(p-1)!}(-1)(-1) = -1$, et de même lorsque k_2, k_3 ou k_4 vaut $p-1$. Dans tous les autres termes non nuls, on a $k_1 = k_4$ et $k_2 = k_3$ d'où

$$N_p(t) \equiv -3 + \sum_{2k_1+2k_2+k_5=p-1} \frac{t^{k_5}}{k_1!^2 k_2!^2 k_5!} \pmod p. \quad (6)$$

Remarque. C'est à partir d'ici que notre preuve diffère de celle du théorème de Chevalley-Warning : alors que l'hypothèse sur le degré dans Chevalley-Warning garantit que tous les termes non triviaux sont nuls, il reste ici un certain nombre de termes à contrôler, le degré de (5) étant plus élevé que le nombre de variables.

On cherche donc à regrouper les termes de (6) selon la valeur de k_5. On constate que, $p-1$ étant pair, k_5 est toujours pair. Soit donc k_5 pair dans $[\![0, p-1]\!]$ fixé. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{2k_1+2k_2=p-1-k_5} \frac{t^{k_5}}{k_1!^2 k_2!^2 k_5!}
&= \frac{t^{k_5}}{k_5!\left(\frac{p-1-k_5}{2}\right)!^2} \sum_{k_1+k_2=\frac{p-1-k_5}{2}} \binom{\frac{p-1-k_5}{2}}{k_1}^2\\
&= \frac{t^{k_5}}{k_5!\left(\frac{p-1-k_5}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k_5}{\frac{p-1-k_5}{2}}, \quad (7)
\end{aligned}$$

où la dernière ligne utilise l'égalité $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. C'est un cas particulier de l'identité de Vandermonde, qu'on peut obtenir par exemple par double-comptage.

Donc, en appliquant (6) et (7) respectivement à t et $\frac{16}{t}$, on a d'une part

$$N_p(t) \equiv -3 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p-1} \frac{1}{k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k}{\frac{p-1-k}{2}} t^k \pmod p,$$

et d'autre part

$$N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv -3 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p-1} \frac{1}{k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k}{\frac{p-1-k}{2}} \left(\frac{16}{t}\right)^k \pmod p,$$

ce qui donne, en échangeant k et $p-1-k$,

$$N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv -3 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{p-1} \frac{1}{(p-1-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!^2} \binom{k}{\frac{k}{2}} \frac{t^k}{16^k} \pmod p.$$

Pour en déduire $N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv N_p(t) \pmod p$, il suffit donc de démontrer que pour tout k pair dans $[\![0, p-1]\!]$ on a

$$\frac{1}{k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2} \binom{p-1-k}{\frac{p-1-k}{2}} \equiv \frac{1}{(p-1-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!^2} \binom{k}{\frac{k}{2}} \frac{1}{16^k} \pmod p,$$

ou encore, en chassant les dénominateurs et en prenant des racines carrées,

$$(p-1-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!^2 4^k \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} k!\left(\frac{p-1-k}{2}\right)!^2 \pmod p,$$

ce qui se fait directement par récurrence sur k. □

2.3 – Le coup de grâce

D'après la proposition 1, on a $N_p\left(\frac{16}{t}\right) \equiv N_p(t) \pmod p$, donc $N_p\left(\frac{16}{t}\right) - N_p(t)$ est divisible par p. De plus, on sait que $N_p(t)$ et $N_p\left(\frac{16}{t}\right)$ sont positifs et majorés par $N_p(0) = 2p-4$ d'après le lemme 1, donc leur différence ne peut valoir que $-p$, 0 ou p. Enfin, $N_p(t)$ est impair si et seulement si t vaut -4 ou 4 d'après le lemme 2. Les quantités $N_p(t)$ et $N_p\left(\frac{16}{t}\right)$ ont alors la même parité et leur différence doit donc valoir 0, d'où le résultat.

3. Quelques commentaires sur la preuve

Nous sommes partis des solutions présentées par les deux équipes françaises qui participaient au tournoi international, dont l'une était encadrée par le premier auteur. Ces équipes étaient donc les meilleures équipes du $\mathbb{TFJM}^2$ 2014, et elles ont eu l'occasion d'échanger avec les autres participants à la compétition nationale. Cela fait de ces solutions un effort commun de plusieurs élèves de très haut niveau.

Ainsi, les résultats de la section 2.1 sont entièrement dus aux participants du tournoi. Ils ont été modifiés dans ce texte pour gagner en brieveté et répondre spécifiquement à l'énoncé original de Fouvry-Kowalski-Michel. Comme il a été démontré dans la section 2.3, ces résultats suffisent pour réduire la preuve de l'égalité en une preuve de congruence modulo p. C'est là que l'expérience a joué un rôle, puisque c'est leur encadrant (*i.e.* le premier auteur) qui a vu que les idées appliquées dans Chevalley-Warning pouvaient être utiles pour démontrer une telle affirmation. La section 2.2 a été donc rédigée par ses soins.

Il est cependant important de remarquer que le niveau des techniques utilisées dans cette démonstration reste très basique, y compris dans la section 2.2. C'est pourquoi on ne doute aucunement qu'elle aurait été à la portée des élèves si jamais leur encadrant leur avait suggéré, tel un directeur de thèse, d'aller lire la démonstration de Chavelley-Warning pour y trouver des pistes. Malheureusement, cette idée n'est venue à l'esprit du premier auteur qu'après le tournoi international.

Enfin, nous tenons à mentionner que, malgré le fait d'avoir trouvé une preuve élémentaire à la question de Fouvry-Kowalski-Michel, le défi n'est pas pour autant complètement relevé. En effet, ces chercheurs demandent une preuve non seulement élémentaire, mais *bijective* de l'énoncé du théorème 1, alors que notre preuve établit seulement que les deux ensembles ont le même cardinal. D'autres preuves non-bijectives ont d'ailleurs été trouvées avant celle du $\mathbb{TFJM}^2$, mais toujours avec des outils plus complexes. Il y a notamment :

- la preuve mentionnée sur le blog de Kowalski, reposant sur des calculs informatiques sur des courbes elliptiques ;
- une preuve (non publiée) par David Zywina, reposant sur l'étude de certaines formes modulaires, comme il était suggéré à la fin du post de Kowalski ;
- un résultat encore plus général sur les représentations ℓ-adiques du groupe fondamental d'une courbe, dû à Deligne et Flicker (cf. [1]), qui implique aussi l'énoncé.

Après les courbes elliptiques, les formes modulaires, les représentations ℓ-adiques et Chevalley-Warning, à vous de trouver une meilleure preuve !

Références

[1] P. Deligne et Y. Z. Flicker. « Counting local systems with principal unipotent local monodromy ». *Ann. of Math. (2)* **178**, nº 3 (2013), p. 921–982. issn : 0003-486X.

[2] É. Fouvry, E. Kowalski et P. Michel. « Algebraic twists of modular forms and Hecke orbits ». *Geom. Funct. Anal.* **25**, nº 2 (2015), p. 580–657. issn : 1016-443X.

[3] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, nº 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1977, p. 188.

Thomas Budzinski

dma, Éns et université Paris-Sud

thomas.budzinski@ens.fr

Thomas Budzinski est enseignant contractuel (« Caïman ») à l'Éns et doctorant à l'université Paris-Sud. Il travaille sur les cartes aléatoires.

Giancarlo Lucchini Arteche

cmls, École polytechnique

giancarlo.lucchini-arteche@polytechnique.edu

Giancarlo Lucchini Arteche est post-doc « Lecteur Hadamard » au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'École polytechnique. Ses recherches portent sur les groupes algébriques et les espaces homogènes, notamment sur leurs aspects arithmétiques. Il est co-organisateur du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens $\mathbb{TFJM}^2$.

Nous tenons à remercier Ramon Moreira Nunes pour avoir attiré notre attention sur cette question pendant l'organisation du $\mathbb{TFJM}^2$ 2014, ainsi que pour avoir servi de contact avec Emmanuel Kowalski par la suite. Nous remercions aussi ce dernier pour son soutien et pour avoir pointé les autres preuves existantes.

Le Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

• M. Lequesne
• G. Lucchini Arteche

1. Qu'est-ce que le $\mathbb{TFJM}^2$?

Le *Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens* ($\mathbb{TFJM}^2$) est une compétition de mathématiques qui propose à des élèves de lycée de travailler par équipe sur une série de problèmes ouverts pendant plusieurs mois. Il est organisé par l'association *Animath* et par une grande équipe d'anciens participants, aujourd'hui tous en études supérieures.

1.1 – Un peu d'histoire

C'est David Zmiaikou, jeune mathématicien biélorusse, qui est à l'origine du $\mathbb{TFJM}^2$, ainsi que de sa version internationale, l'itym (International Tournament of Young Mathematicians). Pendant ses années en tant que doctorant à l'université Paris-Sud, il a eu l'idée d'organiser un tournoi international à l'image des tournois de mathématiques en Biélorussie. Avec l'aide de Bernardo da Costa, également doctorant à la faculté d'Orsay, et avec le soutien de l'association *Animath*, le premier tournoi international des jeunes mathématiciens a eu lieu en 2009 dans les installations de l'université avec la participation de six équipes provenant de quatre pays différents : Biélorussie, Bulgarie, France et Russie.

En 2011, deux ans après le succès du premier tournoi, un troisième doctorant, Igor Kortchemski, s'est ajouté à ce groupe pour créer la version française du tournoi, en partie pour mieux préparer les équipes françaises envoyées à l'ITYM.

C'est ainsi que le $\mathbb{TFJM}^2$ est né, accueillant pour sa première édition quatre équipes venues de Paris, Versailles et Strasbourg.

Le $\mathbb{TFJM}^2$ s'est bien développé depuis. En effet, il accueillait déjà dix-huit équipes en 2014 et, pour l'édition 2015, il a fait un grand saut en proposant pour la première fois des tournois régionaux aux quatre coins de la France.

1.2 – Le format

Le $\mathbb{TFJM}^2$ se compose aujourd'hui de deux étapes : des tournois régionaux répartis partout en France, puis une finale nationale à l'École polytechnique et à l'ENSTA Paristech. Une liste contenant entre 8 et 12 problèmes est publiée chaque année en décembre. Ainsi les élèves peuvent regarder les problèmes pendant leurs vacances et commencer à travailler pendant le mois de janvier. Ils sont encadrés pour cela par des professeurs de lycée, mais aussi par des étudiants, doctorants ou chercheurs des universités voisines. En 2017, des tournois régionaux sont prévus dans les villes de Lille, Lyon, Paris, Rennes, Strasbourg et Toulouse lors d'un week-end pendant le mois d'avril. La finale nationale aura lieu pour sa part au mois de mai.

Lors des différents tournois, les équipes s'affrontent par poules sous la forme de « joutes mathématiques ». Dans celles-ci, chaque équipe occupe à tour de rôle trois fonctions :

- *présenter la solution* d'un problème sur lequel ses membres ont travaillé ;
- *critiquer la solution* qui a été présentée : chercher les imprécisions, demander des explications et lancer un débat constructif qui a lieu au tableau ;
- *évaluer le débat* et éventuellement le prolonger s'il y reste des choses intéressantes à discuter ;

le tout devant un jury formé de chercheurs, professeurs, doctorants et étudiants de master ou de grandes écoles.

Un débat au tableau lors du $\mathbb{TFJM}^2$.

Outre leur prestation orale, les élèves sont aussi incités à évaluer les solutions écrites par leurs camarades. Ils rédigent pour cela des notes de synthèse sur la solution qui va être présentée. Celles-ci sont également évaluées par le jury.

Les solutions sont soumises une semaine avant chaque tournoi. Peu après, un tirage au sort a lieu pendant lequel se décident la formation des poules, les problèmes qui seront présentés et l'ordre des présentations.

2. Une rencontre avec la recherche

On voit ainsi que, à la différence des mathématiques que les participants rencontrent au lycée et dans d'autres compétitions, ce tournoi leur propose une vraie rencontre avec la recherche en mathématiques. En effet :

1. Les problèmes proposés sont complètement ouverts puisque personne n'en connaît la solution générale, pas même leurs auteurs. Les élèves doivent donc chercher par eux-mêmes en ayant droit à toutes les ressources possibles, y compris des résultats intermédiaires trouvés dans des livres, voire sur internet. En cela, ils ont la même liberté qu'un chercheur dans son laboratoire face à ses problèmes mathématiques quotidiens.
2. Le travail se fait par équipes. On peut alors travailler à plusieurs sur un même problème, en répartissant les tâches en fonction des compétences de chacun. On peut se relire les uns les autres et on peut aussi travailler sur plusieurs problèmes à la fois. Les problèmes recouvrant divers domaines des mathématiques, l'équipe entière simule ainsi un « mini-laboratoire » de recherche !
3. Le rôle de l'encadrant est à mettre en parallèle avec celui d'un directeur de thèse. En ef-

fet, il est là pour aider les élèves lorsqu'ils se trouvent dans une impasse, pour leur donner des outils qui les aideront à trouver la solution et pour leur donner des pistes de recherche, sans toutefois leur donner directement la solution.

4. Les débats qui ont lieu au tableau lors du tournoi n'ont rien à envier aux discussions que les chercheurs ont tous les jours dans un laboratoire de mathématiques. En effet, il s'agit de quelqu'un qui présente ses résultats de manière concise et de son interlocuteur qui lui fait remarquer là où il a été imprécis, tout comme un chercheur qui présente ses travaux au collègue du bureau voisin pour être sûr que tout semble correct.
5. Le travail de relecture des solutions des autres équipes est similaire au travail des rapporteurs d'articles de recherche. De plus, le fait de lire d'autres solutions aide les élèves à comprendre ce qui a pu manquer en pédagogie dans leurs propres textes. C'est également dans cette dynamique, en lisant de plus en plus d'articles, qu'un chercheur apprend petit à petit à en écrire de meilleurs.

Le tournoi permet aussi les échanges entre élèves et chercheurs de premier niveau, lesquels participent de façon bénévole en tant que jurys. Les présidents de jury interagissent notamment avec les élèves après le premier tour de chaque tournoi pour faire un compte-rendu des débats afin de les faire progresser dans la présentation de résultats scientifiques. En outre, depuis 2013, les élèves assistent à des exposés donnés par des chercheurs lors des cérémonies d'ouverture ou de clôture.

3. Les participants

Bien que le rêve des organisateurs du $\mathbb{TFJM}^2$ soit de donner une vraie expérience de recherche à tous les élèves de lycée, il faut avouer que ce tournoi s'adresse aux meilleurs et plus motivés d'entre eux. En effet, afin de pouvoir mener à bien une réflexion poussée il est nécessaire que ces élèves soient suffisamment à l'aise avec les connaissances mathématiques que requiert le programme de lycée. Le format des énoncés est déjà un défi important en soi dû à l'usage d'un langage mathématique qui est parfois un peu lourd, même si tout est fait pour simplifier au maximum les concepts et ne pas alourdir les notations. Mais cela fait partie du défi : ils ont du temps pour digérer ces nouveaux concepts, définitions et notations, éventuellement avec l'aide de leurs encadrants. D'ailleurs, ce sont souvent ces problèmes qui sont les plus plébiscités par les élèves car ceux qui ont un énoncé simple sont souvent les plus difficiles, tout comme en recherche !

Le tournoi s'adresse donc à tous les lycéens de Première ou Terminale scientifique ayant un bon niveau en mathématiques mais surtout une grande curiosité et la volonté d'aller chercher un peu plus loin que le programme scolaire. Ainsi, dans chaque lycée on pourrait constituer une équipe avec les meilleurs élèves de Première ou Terminale, encadrés par un ou deux professeurs. On notera que l'on a parfois vu des participants plus jeunes (en Seconde, voire au collège) faire équipe avec des camarades plus âgés, et également des élèves qui n'étaient pas en filière scientifique mais néanmoins très intéressés par les mathématiques.

Parfois, certains établissements possèdent déjà un club de mathématiques animé par un enseignant et ce sont les élèves du club qui forment une équipe. Le $\mathbb{TFJM}^2$ fournit ainsi à ces clubs du contenu pour travailler pendant toute la première moitié du deuxième semestre. Ces lycéens se réunissent ensuite une fois par semaine avec les professeurs pour échanger sur leurs avancées, et échangent entre eux par mail, pendant les trois mois qui précèdent le tournoi (la fréquence peut s'intensifier à l'approche du tournoi).

Ainsi, le public du tournoi ne se restreint pas aux établissements les plus réputés, bien que ceux-ci restent encore sur-représentés. Il existe de nombreux exemples d'équipes d'établissements pas particulièrement réputés qui ont réalisé de très bonnes performances. L'ouverture des tournois régionaux a permis d'accueillir un public plus large et nous souhaitons continuer dans ce sens. Certaines équipes plus faibles s'attaquent aux problèmes avec leurs propres moyens, souvent moins théoriques et plus expérimentaux, mais vont parfois bien loin dans le tournoi. Cela est dû notamment au fait que les élèves s'approprient très bien les quelques concepts qu'ils ont pu traiter et ont développé de bonnes capacités pédagogiques mises en valeur lors du débat oral.

Le principal facteur limitant reste certainement l'investissement horaire important que le tournoi demande de la part des encadrants. Ce sont en effet des professeurs qui décident d'encadrer bénévolement leurs élèves et de sacrifier plusieurs soirées et week-ends, souvent sans reconnaissance de leur hiérarchie.

4. Le TFJM^2 en chiffres

4.1 – Un tournoi en pleine croissance

Après un premier tournoi en 2011 avec seulement 17 participants, le TFJM^2 a atteint un cap en 2014 avec 106 participants. Cela a motivé la création des tournois régionaux en 2015, lesquels rassemblent depuis plus de 150 participants. Le nombre de tournois n'a cessé d'augmenter : quatre tournois régionaux en 2015, puis cinq en 2016 et six en 2017. L'objectif à long terme serait de parvenir à en organiser un par académie.

4.2 – Un tournoi ouvert à tous

L'édition 2016 du tournoi, avec ses cinq tournois régionaux, a réuni des participants scolarisés dans 16 académies distinctes, de Nantes à Montpellier, en passant par Nancy-Metz. Ceci est possible grâce au format du tournoi, qui permet de travailler en temps libre et à distance. D'ailleurs, des équipes mixtes inter-départementales participent chaque année.

Le TFJM^2 se veut également de plus en plus mixte avec une part de mathématiciennes toujours croissante : de 12% de filles en 2012, ce pourcentage est en augmentation constante et a atteint 23% en 2016 (l'année 2011 n'est pas représentative compte tenu du nombre total de participants).

Nombre total de participants par année.

Pourcentage de participantes par année.

Matthieu LEQUESNE

École polytechnique

matthieu.lequesne@polytechnique.org

Matthieu Lequesne est étudiant à l'École polytechnique. Il suit le Master Parisien de Recherche en Informatique et s'intéresse à la crytpographie. Il est co-organisateur du TFJM^2 et de sa version internationale ITYM. Il organise également d'autres activités pour lycéens via l'association *Animath*, dont le concours *Alkindi* lancé en 2016.

Giancarlo LUCCHINI ARTECHE

CMLS, École polytechnique

giancarlo.lucchini-arteche@polytechnique.edu

Giancarlo Lucchini Arteche est post-doc « Lecteur Hadamard » au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz de l'École polytechnique. Ses recherches portent sur les groupes algébriques et les espaces homogènes, notamment sur leurs aspects arithmétiques. Il est co-organisateur du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens TFJM^2.

Troisième journée parité en mathématiques

Ce compte-rendu résulte de la prise de notes de quelques volontaires lors de la troisième journée parité en mathématiques qui a eu lieu le 8 juillet 2016.

- A. Burel
- J. Leblond
- B. Schapira
- R. Texier-Picard

Après les premières éditions, centrées en 2011 sur les carrières des mathématicien-ne-s puis en 2013 sur l'enseignement des mathématiques, la troisième journée parité, organisée par une équipe renouvelée, s'est concentrée sur les stéréotypes et le sexisme inconscient. Comme les premières fois, le public était au rendez-vous, et l'amphithéâtre Hermite de l'IHP très rempli. Les hommes étaient bien présents, bien que que minoritaires comme lors des premières éditions. Le public était assez jeune en moyenne, avec de nombreuses têtes nouvelles, ce qui est encourageant. Les présentations des conférencières et conférenciers sont disponibles sur la page de la journée [1]. Nous en présentons des résumés ci-dessous.

Recrutements et carrières

Laurence Broze [2]

Laurence Broze nous rappelle cette année encore que la proportion de femmes reste très faible en mathématiques, la section 25 restant la moins féminisée de toutes les sections universitaires, avec 14% de femmes, et 18% chez les MCF, tandis que la section 26 suscite plus d'espoir, avec 27% de femmes, et 39% chez les MCF.

Elle se concentre ensuite sur la composition des comités de sélection. Nous renvoyons à son article dans la *Gazette* [3] . Elle salue en particulier les efforts notables de nombreux laboratoires pour proposer des comités plus féminisés que les minima légaux. *D'après la loi Sauvadet de mars 2012 et le décret du 23 avril 2015, les comités MCF doivent être composés d'un minimum de 40% de personnes de chaque sexe, tandis que les comités PR 25 et 26, jusqu'à avril 2017, doivent avoir respectivement au moins 14% et 30% de femmes, avec un minimum de deux femmes par comité.* Laurence Broze note que les comités qui ne respectent pas strictement la loi sont le plus souvent proches des 40%. Elle conclut que contrairement aux inquiétudes initiales, les mathématicien-ne-s sont en mesure de respecter la loi, et que ces quotas sont une bonne solution.

Un débat s'engage sur ce point, plusieurs auditrices estimant que certaines mathématiciennes sont trop sollicitées (comités de sélection, jury d'agrégation, de CAPES, CNU, etc.), ou regrettant que des comités se tiennent avec des femmes hors sujet, voire non mathématiciennes. La salle et l'oratrice proposent des réponses à ces objections : certains membres des comités pourraient être choisis hors des thématiques du recrutement, il faudrait solliciter d'autres femmes, pas toujours les mêmes, et les femmes trop sollicitées peuvent proposer d'autres noms. La question reste cependant vive, comme en témoigne le texte de Christine Lescop [4] dans le présent numéro de la *Gazette*.

Rappelons au passage que les femmes dans les comités ne favorisent pas les femmes, et ne sont pas moins sexistes que les hommes. Toutefois leur

1. `http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2016`
2. Chiffres et statistiques sur les recrutements et évolutions de carrière en mathématiques par L. Broze, Professeure (Lille), présidente de l'association Femmes et Mathématiques `http://www.femmes-et-maths.fr/`.
3. *Recrutements en mathématiques : premier bilan de la réforme des comités de sélection*, Laurence Broze, *Gazette des Mathématiciens*, octobre 2016.
4. *Attention aux effets pervers des contraintes disproportionnées de représentation féminine!, Gazette des Mathématiciens*, janvier 2017.

présence permet d'éviter les remarques sexistes primaires, et les candidates réussissent mieux leurs auditions face à des comités suffisamment mixtes. Les quotas restent une solution de dernier recours, dont il faudrait pouvoir se passer. Si l'on formait et recrutait plus de mathématiciennes, le problème ne serait-il pas résolu ?

Le syndrome de l'imposteur

Kevin Chassangre [5]

Kevin Chassangre nous présente ce qu'on appelle le syndrome de l'imposteur : à un moment ou un autre de leur carrière, 62 à 70% des personnes douteraient de la réalité ou de la légitimité de leurs succès. Leur réussite ne viendrait-elle pas d'une part de chance ou d'opportunité et non d'une réelle compétence ? Ces pensées négatives sont surmontables à petites doses mais peuvent polluer l'existence et devenir paralysantes. Ce sont les souffrances caractéristiques du syndrome de l'imposteur.

Celui-ci est également lié à la peur de réussir et peut devenir un handicap au quotidien, tant dans la carrière professionnelle que dans d'autres domaines : familial, social, scolaire, etc. Doutant de leur légitimité et de leurs compétences, les personnes atteintes fuient la discussion avec leurs collègues et les situations qui pourraient mettre à jour leur sentiment d'incompétence. Elles vivent ainsi dans la peur d'être démasquées. Ce syndrome a été mis en évidence par Pauline Rose Clance, professeure américaine, dans les années 80 chez ses patients, puis aussi chez ses collègues, surtout universitaires, et enfin chez elle. Ce syndrome, dont l'intensité varie de très faible (simple doute, manque de confiance en soi de temps en temps) à la pathologie, est composé de trois grands facteurs : l'impression de tromper les autres, de « mauvaises attributions » (attribuer son succès au hasard, à la chance, à des facteurs extérieurs), ainsi que la peur d'être démasqué-e comme incompétent-e.

Ce syndrome toucherait autant les hommes que les femmes. Kevin Chassangre évoque des solutions pour le surmonter : d'abord l'identifier, ensuite en parler, puis apprendre à se relaxer, prendre conscience de ses atouts, et enfin revoir ses objectifs, éviter un certain perfectionnisme et mieux s'accepter.

Il conclut par quelques témoignages recueillis cette année au sein de la communauté mathématique, de personnes touchées ou non par ce syndrome, à divers degrés : sans souffrance (sentiment de confiance en soi, efficacité, compétence) jusqu'à la pathologie (troubles anxieux, sentiment d'incompétence intense).

Ce syndrome de l'imposteur intéresse beaucoup les participant-e-s, comme cause possible de la moindre présence des femmes en mathématiques. L'exposé a été perçu de manières très différentes par des membres de l'auditoire. Certains y ont trouvé des explications à leurs propres expériences alors qu'il a laissé d'autres sur leur faim. De nombreuses questions de l'auditoire concernaient par ailleurs les autres sources sociales possibles de ce syndrome : le fait d'être « transfuge de classe », issu-e d'un milieu moins favorisé, ou encore le fait d'être membre d'une minorité (comme les femmes en mathématiques).

L'insmi et la parité

Sinnou David [6]

Sinnou David nous présente des chiffres sur les femmes et les mathématiques en France au 31/12/2015, ainsi que sur les actions de l'insmi. En mathématiques, au cnrs, il y a environ 15% de femmes parmi les cr, et 20% chez les dr. Ces chiffres étonnants sont souvent attribués au fait que de nombreux cr hommes passent pr, et pas les femmes. La proportion de femmes parmi les dr est passée de 15% en 2009 à 21% en 2015, alors que parmi les cr elle stagne à 14% [7]. Rappelons que la proportion de femmes parmi les doctorant-e-s en mathématiques est de 21%.

La comparaison avec les instituts proches, l'ins2i (informatique, traitement du signal et des images, automatique, robotique), l'inp (physique) et l'in2p3 (physique nucléaire) est très intéressante. C'est à l'ins2i que la situation est la plus favorable : la proportion de femmes parmi les cr est depuis 2009 de 23%, ce qui correspond au vivier, i.e. la proportion de femmes parmi les doctorant-e-s. La proportion de femmes parmi les dr est passée de 15 à 22% sur la période, le plafond de verre remontant donc nettement. À l'inp, la proportion de femmes parmi les cr a légèrement diminué de 23 à 22% entre 2009 et 2015, tandis que chez les dr elle est

5. Psychologue, doctorant en psychopathologie, Toulouse.
6. Sur les actions de l'insmi et du cnrs en faveur de la parité par Sinnou David, directeur adjoint de l'insmi, cnrs, Paris.
7. Soit 32 femmes sur 223 cr, et 35 femmes sur 169 dr.

passée de 17 à 20%. À l'IN2P3, les femmes sont passées de 27 à 20% chez les CR, et de 17 à 20% chez les DR, sur la même période. Dans les deux instituts de physique, la présence des femmes au CNRS est inférieure à celle dans le vivier de doctorant-e-s.

Le projet Integer. Sinnou David a dressé un bref bilan du *projet Integer*, financé par la Commission européenne de 2011 à 2015, et doté de 3,25 millions d'euros. Ce projet ciblait trois institutions européennes, dont le CNRS en France, et avait pour but de créer des changements structurels durables. Au CNRS, l'INSMI et l'INP ont été particulièrement concernés, étant les plus mauvais élèves en la matière. L'objectif était de créer ces changements par plusieurs moyens : impliquer les dirigeants, agir sur les structures organisationnelles, favoriser l'équilibre vie privée/vie professionnelle, agir sur les progressions de carrière. Les réalisations au sein de l'INSMI ont été entre autres les projets *PEPS égalité* en 2015, une journée de formation sur *les étapes clé de la carrière*, une sensibilisation sur les questions de parité avec l'IMJ-PRG. Les projets *PEPS égalité* ont rencontré un grand succès (grand nombre de projets de qualité déposés en un temps très court) malgré des difficultés administratives. Ce type de petit financement, facile à demander et à obtenir répond à un réel besoin. À noter, en 2016, les *PEPS jeunes chercheurs* ont rencontré eux aussi un grand succès, et 28% des projets financés étaient portés par des femmes.

Parmi les actions récurrentes de l'INSMI, il y a la vigilance autour des grossesses et congés maternité. Pour l'obtention d'une délégation CNRS, le retour de congé maladie/maternité/parental est maintenant un critère prioritaire. Lors du financement d'un projet de recherche, il est parfois possible de reporter le financement en cas de grossesse suivant la décision d'attribution du financement. Par ailleurs, il faut une vigilance dans les comités (jurys de concours, PEDR, comités nationaux) sur ces questions de parité.

Sinnou David nous montre également quelques cartes de l'Europe et des évolutions récentes : stagnation de la France autour de 20% de femmes parmi les mathématicien-ne-s, évolution positive des pays scandinaves qui partaient d'extrêmement bas, rattrapage très rapide de l'Allemagne qui partait de très bas. L'Italie, avec 35% de mathématiciennes, ou le Portugal avec 42%, restent des exceptions.

Femmes dans la vie scientifique, 1931-1945

Michèle Audin [8]

Michèle Audin nous offre la « pause culture de la journée », pour parler des femmes scientifiques en France de 1931 à 1945. Exposé dense qui nous permet d'agrandir notre catalogue de modèles de femmes scientifiques.

Elle cite des passages de son livre *Mademoiselle Haas* [9] et renvoie à celui de Nathalie Pigeaud Micaud *Les femmes du laboratoire de Marie Curie* [10]. Par exemple, le 24 avril 1939 à l'Académie des sciences, dans les Comptes-Rendus de l'Académie, dix femmes furent citées : dix articles sur 49, dix auteurs sur 67, et parmi elles, sept sont dénommées Mademoiselle. Au Bulletin de la SMF entre 1931 et 1945, seules trois femmes publièrent : Marie Charpentier (1934), Marie-Louise Dubreil-Jacotin (1936), et Jacqueline Ferrand (1942, 1944).

Michèle Audin s'appuie également sur les archives du Séminaire Hadamard, seul séminaire à Paris de 1920 à 1933, dont les activités prirent fin en 1937 suite au Front Populaire, et du Séminaire Julia, créé en 1933, qui disparaîtra en 1939, et dont on dispose d'archives très complètes avec exposés rédigés. Parmi les abonné-e-s inscrit-e-s pour recevoir les exposés, on trouve Mme Chevalley, Mme Dubreil, Mlle Charpentier (alors enseignante en lycée), Mme Germaine Ayrault, Mlle Yeoudith Sokolka (mathématicienne israélienne alors en visite à Paris). Parmi les orateurs, sur la période, seule Mme Dubreil exposa une fois. Dans les archives du 13/11/1933 on lit : « Thé aimablement servi par Mmes Dubreil et Chevalley ». Marie Charpentier, méconnue, vécut de 1903 à 1994. Elle soutint sa thèse en 1931, passa l'année suivante à Harvard, puis obtint un poste à Rennes en 1942. Sur Zentralblatt, apparaissent 33 publications de Marie Charpentier, surtout dans les années 1930. Elle était provinciale, issue d'un milieu modeste, eut plusieurs postes en lycée avant l'université (norme de l'époque) tandis que Marie-Louise Dubreil-Jacotin était issue d'un milieu favorisé, passée par l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, mariée à un mathématicien.

Michèle Audin évoque longuement Pauline Ramart-Lucas, née en 1880 à Paris, morte en 1953. Elle était issue de classes très populaires (de père

8. Paris, Strasbourg.
9. L'Arbalète, Gallimard, 2016
10. Éditions Glyphe, 2013

forgeron et mère domestique), était mère célibataire en 1898, époque à laquelle elle était ouvrière, fleuriste spécialisée dans la confection de fleurs artificielles. En 1935 on la retrouve... professeure à la Sorbonne, sur la chaire de chimie organique, et seule femme professeure du fait du décès de Marie Curie ! Elle publiait beaucoup. En octobre 1940, elle fut mise à la retraite suite à de « glorieux » décrets de l'État français. M. Audin nous rappelle qu'en effet, outre les premiers décrets antisémites, en octobre 1940, furent décrétées l'interdiction provisoire du recrutement de femmes mariées dans les administrations publiques, et des mesures destinées à encourager ou imposer l'éviction des femmes alors employées dans les administrations. Mme Pauline Ramart-Lucas continua à travailler et fut réintégrée à la Libération. Elle mourut en 1953.

Dans les années 1940, les mathématiciennes publiantes sont Jacqueline Ferrand, bien connue, mais aussi Marie-Hélène Schwartz [11], fille de Paul Lévy, femme de Laurent Schwartz. Fin 1941, elle fut empêchée de publier par la politique antisémite de Vichy. Les CRAS refusèrent les auteurs juifs après 1941 (allant ainsi au-delà des exigences antisémites de l'État français, voir aussi l'article de M. Audin sur J. Feldbau dans la Revue d'Histoire des Mathématiques). Marie-Hélène Schwartz, décédée récemment, eut une carrière très longue et honorable, publiant jusqu'à un âge avancé.

Dans la jeune génération de cette époque, Paulette Libermann, issue d'un milieu très populaire, élève à l'École normale supérieure de Sèvres en 1938, fut empêchée de passer l'agrégation en 1940. Élie Cartan lui donna alors un travail de recherches (DES) : « Propriétés projectives des courbes gauches. Leur interprétation dans l'espace à cinq dimensions et le plan ». Elle partit se cacher à Lyon pendant l'occupation. En 1942, elle alla voir Charles Ehresmann à Clermont-Ferrand. À la Libération, elle passa l'agrégation, prit un poste en lycée de jeunes filles à Strasbourg, entra au CNRS puis devient professeure d'université. Notamment, elle fonda la géométrie symplectique. Il lui arrivait de dire avec un malin sourire « c'est grâce à la politique antisémite de Vichy que je suis devenue mathématicienne ».

Le sexisme ordinaire

Isabelle Collet [12]

Isabelle Collet commence par présenter quelques images. Sur l'une d'entre elles, à un garçon qui ne comprend pas un exercice de mathématiques, on dit : « Wow, you suck at maths » ; à une fille : « wow, girls suck at maths ». La conférencière note que de petites remarques qui peuvent sembler anodines à l'université sont en réalité la suite d'une longue série commençant à la maternelle.

Elle rappelle ensuite la distinction entre le *sexe* et le *genre*, ce dernier étant formé par les différences socialement construites sans lien avec le sexe biologique. Ainsi, on dira que les filles sont coquettes, douces, jouent à la poupée, ne savent pas lire une carte, tandis que les garçons sont turbulents et ne sont pas multitâches. Quand ces différences concernent des compétences, celles-ci sont hiérarchisées : les compétences dites masculines sont supposées valoir plus que les compétences dites féminines.

Le désintérêt actuel des femmes pour les sciences est historiquement ancré. Aux 17^{e} et 18^{e} siècles, la logique mathématique est qualifiée de desséchante, i.e. elle rendrait stérile. En 1687, Fénelon, pourtant progressiste pour son époque, a écrit un traité d'éducation pour filles. Selon lui il ne faut absolument pas les transformer en « savantes ridicules ». Traditionnellement, la formation des filles est pratique et domestique, et n'ouvre sur aucun métier. En 1891, « nombreuses sont les jeunes filles qui aiment et comprennent l'arithmétique ; assez rares au contraire sont celles qui se consacrent à la botanique ». En 1893, Jules Verne écrit que « les cours de chimie des filles leur serviront à savoir confectionner un pot-au-feu ». Là encore, la formation ne doit pas mener à un métier, et J. Verne écrit cela sans doute pour faire passer cet enseignement de chimie. L'oratrice nous montre un imagier de chez Nathan de 1987 (1987 !!) ; les parties du corps d'une fille et d'un garçon sont désignées (nez, bouche, oreille, main), mais seul l'intérieur de la tête du garçon contient un cerveau !

La représentation des scientifiques dans les manuels : côté filles, il y a la blonde qui ne comprend rien, ou bien l'horrible prof de maths mégère qui a traumatisé les élèves. Côté garçons, il y a le savant fou vieux à blouse blanche sympathique, ou encore

11. `http://images.math.cnrs.fr/+Marie-Helene-Schwartz+`
12. (Scènes de) sexisme ordinaire... de la maternelle à l'université, I. Collet, Genève, et le collectif Sangs Mêlés.

le gentil prof de maths qui plane. Chez Fleurus, dans une collection de livres sur les métiers, pour la météorologie le météorologue est... un homme, tandis que la speakerine est... une femme ; pour la volcanologie, trois hommes en combinaison moderne ont une approche sereine d'un volcan, tandis que trois autres personnages sont terrifiés : un homme préhistorique, un chien et... une femme. Les stéréotypes sexistes sont véhiculés au travers d'autres images. Isabelle Collet nous présente des exemples tirés de livres pour enfants, par exemple dans une bande dessinée de Peanuts où la jeune fille parle de son livre de mathématiques auquel elle ne comprend rien. Autre exemple, lors d'une exposition en informatique, une voix off de femme pose des questions et une voix off d'homme y répond.

Adhésion entre soi et le prototype. I. Collet relate une expérience où l'on demande à des élèves de TS, d'une part ce qu'ils pensent être les qualités type d'une mère, puis celles d'un-e scientifique (le prototype), et d'autre part quelles sont leurs propres qualités. Les jeunes femmes se perçoivent avec des qualités associées à une mère : docilité, émotivité, sensibilité, préoccupation pour autrui, conformisme, tandis que les jeunes hommes se perçoivent avec celles d'un scientifique : ambition, combativité, audace, indépendance. À la question « Que veux-tu faire plus tard », les jeunes femmes répondent qu'elles veulent aider ; les jeunes hommes, qu'ils veulent produire, étudier, découvrir. Les études Pisa donnent des niveaux globalement équivalents entre filles et garçons, mais celles-là y trouvent moins d'intérêt, de plaisir, de motivation, et plus de stress, d'anxiété. Le test classique de la *figure de Rey*, utilisé par Huguet-Régnier, a mis en évidence que les performances des filles et des garçons dans un exercice dépendent de la façon dont on le présente, soit comme un exercice de géométrie, soit de dessin. La qualification de test de géométrie active la *menace du stéréotype*[13]. Une question devrait toujours être posée aux enseignant-e-s : qu'évaluez-vous réellement, la compétence ou le sentiment de compétence ? Pour expliquer ce phénomène, Huguet et Régnier ont réalisé des IRM du cerveau sur des étudiant-e-s soumis à des tests de mathématiques. Le résultat met bien en valeur l'activation chez les filles de certaines zones du cerveau contrôlant l'anxiété dans des situations de « menace du stéréotype ».

Comment reconnaître le sexisme ordinaire ? On peut distinguer un certain nombre de formes de ce type de sexisme.

Le sexisme hostile. « On devrait te garder un an de plus en thèse pour faire le ménage et des goûters » ; « Aucune femme n'a fait d'apport majeur en maths » (entendu à Genève) ; « elle est pire qu'un homme » (elle fait pareil, mais pour une femme ce n'est pas bien) ; « Quand on voit à quoi ressemblent les informaticiennes, il vaut mieux qu'il n'y en ait pas plus » ; « Si l'on recrute plus de femmes, le niveau va baisser » ; Les plaisanteries sexistes ou les photos de femmes en petite tenue sont à mettre également dans cette catégorie.

Le déni. « Les hommes aussi... ont des enfants, veulent articuler vie familiale et vie professionnelle, ne veulent pas passer tout leur temps au travail » (C'est vrai pour un certain nombre d'hommes, mais le partage des tâches domestiques reste encore très inégalitaire et pèse surtout sur les carrières des femmes. Une étude d'Alban Jacquemard[14] sur les hommes sortis de l'ÉNA, affichant un discours très égalitaire, montre que beaucoup de ces hommes tirent profit de leurs positions féministes et ne cèdent en réalité pas la place aux femmes. Inversement, ceux qui mettent en œuvre leur discours ne progressent pas dans leur carrière) ; « Les femmes n'aiment pas, ne veulent pas... on va pas les forcer » (I. Collet rappelle à ce sujet que les stéréotypes sexistes pèsent sur la représentation qu'ont les femmes de leurs choix possibles) ; « au fond les hommes sont discriminés : pendant le congé maternité, le h-index progresse, donc compter un an dans le cv pour une maternité désavantage les hommes ».

Le sexisme bienveillant. Compliments qui ramènent les femmes à des qualités supposées féminines, le physique, le charme, la douceur, etc. Cela conduit par exemple à confier aux femmes les groupes de TD les plus faibles (car elles sont censées être plus pédagogues), ainsi que les tâches organisationnelles (car elles sont plus organisées). À l'inverse, on ne sollicite pas les femmes pour des postes à responsabilité, afin ne pas leur mettre trop de pression, à cause des enfants...

Les réactions de défense face à la dénonciation. Le fait est que personne n'accepte d'être traité de sexiste ! Donc on tourne en ridicule les journées parité, le féminisme, l'association *Femmes & Maths*, on fait des plaisanteries au second degré.

13. Voir journée 2011 `http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2013/V.Bonnot-24Juin2013.pdf`
14. https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00608896/document

Que faire ? Appeler le sexisme du sexisme. Ne pas faire d'erreur d'attribution, même si l'on n'arrive pas à retourner la plaisanterie, l'insulte. Rappelons que tenir des propos publics sexistes, même sous forme de plaisanterie, doit être considéré comme grave, a fortiori une insulte sexiste, même quand le travail réalisé est mauvais (distinguons : ton travail est mauvais/tu es nulle/tu ferais mieux de faire autre chose).

Suite à une question dans l'auditoire, Rozenn Texier revient sur les études de Huguet et Régnier. Des expériences, dites de falsification, ont montré que si l'on annonce avant le test que statistiquement sur ce test, il n'y a plus de différence entre les résultats suivant le sexe, les résultats s'inversent et les femmes réussissent mieux que les hommes. Isabelle Collet insiste sur le fait qu'il faut former les enseignant-e-s à ces questions. Le public mentionne également la réalité du harcèlement sexuel, même dans le milieu des mathématiques. La conférencière signale à ce sujet l'existence d'un vademecum « Le harcèlement sexuel dans l'Enseignement supérieur et la recherche », édité par l'ANEF [15], le CLASCHES [16] et la CPED [17] et téléchargeable sur le site de ces trois associations. Une doctorante mentionne le manque de moyens global à l'université, qui fait que les pressions structurelles s'aggravent, ce qui nuit en particulier aux femmes.

Sur les femmes dans les ÉNS

Yves Laszlo [18]

Yves Laszlo nous présente une enquête [19] sur les classes préparatoires scientifiques « Filles + sciences = une équation insoluble ? », par Marianne Blanchard, Sophie Orange et Arnaud Pierrel [20].

Quelques chiffres. Arrivé comme directeur adjoint à l'ÉNS il y a quatre ans, l'orateur a constaté l'absence de jeunes filles dans les filières maths-info. Plus précisément, en 2013, à l'ÉNS (sciences et lettres), les effectifs sont de 852 élèves, dont 575 garçons et 217 filles. En sciences, globalement, il y a 8% de filles, en sciences de la vie environ 50%. En CPGE, elles forment 34% de l'ensemble des trois filières BCPST, MP et PC [21]. Enfin, 29% des inscrits aux concours sciences de l'ÉNS sont des filles, 20% au concours MP/PC. Elles ne sont plus que 17% parmi les admis. En dehors de toute conception éthique ou philosophique, Y. Laszlo considère que c'est une aberration de perdre la moitié du vivier [22].

Comment agir au niveau de l'ÉNS [23] *?* Y. Laszlo mentionne une ancienne étude de Laurent Desvillettes selon laquelle quand les énoncés des problèmes sont sur-découpés, il y a un biais qui favoriserait les garçons. Au concours, deux modes de correction ont été mis en place, avec copies anonymes et bonus de 15% aux personnes qui étaient vraiment entrées dans une partie. Le résultat a été décevant : soit cela ne changeait rien, soit cela favorisait les garçons. Ce serait donc une fausse bonne idée.

Les causes du problème. Trois questions sont traitées dans l'enquête de Blanchard, Orange et Pierrel : ce qui se joue avant et pendant les CPGE, et ce qui se joue pendant le concours. Notons que les inégalités sociales se construisent de manière cumulative, si bien que ces trois étapes s'additionnent négativement. En fin de seconde, parmi les garçons qui se sentent bons en mathématiques, 8/10 vont en S. Pour les filles, 6/10. Les filles sont meilleures au lycée mais ont tendance à plus fortement quitter les sciences après le bac que les garçons. Il existe une autocensure des élèves, des familles, et un double handicap pour les filles issues des classes populaires. Les femmes sont surreprésentées en droit, en classe prépa commerce, en lettres et dans les filières courtes, et sous-représentées en sciences dures, y compris à l'université. L'étude montre que les femmes préfèrent la chimie ainsi que les professions de santé alors que ces dernières sont très fortement compétitives. L'interprétation des auteurs du rapport est que la santé est considérée comme le domaine du *care*, donc asso-

15. `www.anef.org/`
16. `https://clasches.fr/`
17. `https://www.unistra.fr/index.php?id=cped`
18. ÉNS, Paris.
19. Voir la synthèse de cette enquête rédigée par A. Pierrel, *Les filières scientifiques d'excellence : un imprenable bastion masculin ?*, *Gazette des Mathématiciens* 144, avril 2015.
20. Éditions Rue d'Ulm, Presses de l'École normale supérieure, `www.cepremap.fr/depot/opus/pshzas7Td/OPUS42.pdf`
21. Note des rédacteurs du compte-rendu : mais il y a de fortes disparités selon les filières, et les admis aux ÉNS viennent de classes étoilées d'un très petit nombre de prépas prestigieuses, parmi les moins féminisées sans doute.
22. Il rappelle que nul n'est à l'abri des stéréotypes, lui-même ayant rédigé jadis un cours contenant des photos d'hommes à propos de théorèmes, et des photos de seulement deux femmes, présentes uniquement pour illustrer un trait d'humour.
23. La petite taille de l'ÉNS est compensée par sa forte importance symbolique dans le supérieur.

ciée au féminin. Une autre explication serait que les femmes choisiraient moins des disciplines pour lesquelles les compétences sont supposées être innées, comme les mathématiques, en faveur de celles qui sont perçues comme acquises, comme les sciences du vivant.

Chaque étape du cursus a son lot de disparition de jeunes femmes : passage en 1re s, en cpge, en filière étoilée. En cpge, si l'on regarde les bulletins, on constate une double autocensure des filles : à résultats équivalents, elles sont moins nombreuses à demander une classe étoilée et à s'inscrire au concours éns. Il y a donc un biais de sélection à l'inscription au concours. Il y a aussi un biais de sélection dans le concours, et un phénomène d'autocorrection implicite à l'oral. On perd les femmes à l'admissibilité. Selon Yves Laszlo, l'un des problème est l'extrême sélectivité de l'Éns. En médecine, quand le numerus clausus était très bas, le domaine était particulièrement masculin. Quand le numerus a été relevé, les femmes sont apparues en haut des classements des internats.

Les actions de l'Éns.

– Actions de communication : une websérie disponible sur Youtube [24], une action [25] « X-Éns au féminin » pour aller à la rencontre des jeunes femmes dans les classes préparatoires, ainsi que des tentatives de travailler en commun avec le ministère de l'Éducation nationale.
– Au sein de Paris Sciences Lettres [26] a été mis en place un cycle cpes d'études pluridisciplinaires. Cette formation est sélective, avec 40% de boursiers, et rencontre un fort succès auprès des jeunes femmes, qui forment 40% du contingent. L'éns a par ailleurs ouvert un concours spécifique pour les étudiant-e-s de ce cycle.
– Concernant le recrutement des enseignants-chercheurs de l'Éns, la question de l'efficacité de la parité dans les comités de sélection a été posée. Un rapport aux présidents des comités sur le pourcentage de femmes candidates, auditionnées et classées, avec une justification exigée en cas de décrochage. Sur la durée, cela mène sans aucun doute à une prise de conscience de notre milieu. Une autre recommandation est de juger sur les cinq meilleures publications plutôt que sur le volume de publications.
– Programmation des réunions entre 12h et 14h avec plateau repas.

Au concours pc le nombre de femmes qui rentrent à l'éns augmente depuis trois ans. Serait-ce le début de quelque chose ?

Dans le public, Rozenn Texier-Picard (Éns Rennes) demande si l'Éns Ulm voudrait s'associer au travail commun mené par les Éns de Lyon, Cachan, Rennes sur le biais de genre dans le concours mp. Quelqu'un rappelle que du temps de l'Éns Sèvres, les promotions comptaient 50% de filles de cadres supérieurs, et 50% de filles des classes moyennes ou populaires.

Conclusion

Comme en 2011 et 2013, la journée a suscité de nombreuses questions et discussions, et un peu de frustration après la clôture, faute de pouvoir les poursuivre. Que faire ? Une discussion à bâtons rompus a évoqué les pistes suivantes :

– Organiser des rencontres au sein des conférences (canum, smf, smai, cemracs), à l'image de ce qui se fait par exemple au msri. Organiser des rencontres régulières dans les laboratoires pour parler de ces questions, ou un groupe de travail comme à l'imj. Organiser des journées *Filles & Maths, une équation lumineuse*. Ces journées parité [27] servent de boite à outils (diapositives par exemple), utiles dans les lycées. Mobiliser l'apmep sur ces questions ? En débattre au sein des sociétés savantes, des syndicats. Proposer des formations doctorales et aux étudiant-e-s de prépa agreg/capes sur ces problèmes. Adhérer à *Femmes & Maths*, se servir de l'association pour agir.
– Féminiser les noms et fonctions : autrice, chercheuse, rapporteuse/trice, agrégée, enseignante, directrice, maîtresse de conférences, professeure, invitée, etc.). Créer une charte de la parité comme à l'inria [28].

24. https ://www.youtube.com/playlist ?list=PLp–TwPwLx1WFBxYxOtSrVWPBJoXmDED1
25. http ://www.lajauneetlarouge.com/article/le-projet-x-ens-au-feminin-aller-la-rencontre-des-filles-en-prepa
26. Communauté de vingt-deux universités et établissements d'enseignement supérieur et de recherche.
27. Qui organisera la prochaine journée maths & parité (2018) ?
28. `https://parite.inria.fr/charte-parite-et-egalite-des-chances/`

… un pseudo-Anosov

• E. Lanneau

Les Anosov linéaires, et plus généralement les systèmes ou flots d'Anosov ainsi que leurs analogies hyperboliques, ont joué un rôle prépondérant dans la théorie des systèmes dynamiques [1, 7, 2] [1].

Leurs cousins, les homéomorphismes *pseudo-Anosov*, tout aussi intéressants et importants, semblent cependant moins bien connus. Contrairement à la théorie des systèmes d'Anosov, pour laquelle on connaît assez bien les contours, bon nombre de questions fondamentales « simples » sur les homéomorphismes pseudo-Anosov restent encore complètement ouvertes aujourd'hui.

1. Un exemple instructif

Commençons par un exemple naïf mais qui est, dans un certain sens, beaucoup plus qu'un exemple. Toute matrice $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ agit (linéairement) sur le plan $\mathbb{R}^2$. La dynamique induite n'est pas très intéressante (les orbites tournent en cercles ou bien partent à l'infini). Une manière de la rendre plus riche est de « passer au quotient » : comme A préserve bijectivement le réseau $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$, il induit un difféomorphisme ψ du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ donné par $\psi((x,y)+\mathbb{Z}^2) = A(x,y)+\mathbb{Z}^2$.

La dynamique de ψ est dictée par les valeurs propres λ, λ^{-1} de A. Il y a trois possibilités :

1. λ et λ^{-1} sont complexes conjuguées ($\lambda \neq \pm 1$) : ψ est d'ordre fini ;
2. $\lambda = \lambda^{-1} = \pm 1$: ψ est réductible c.-à-d. préserve une courbe fermée sur le tore ;
3. λ et λ^{-1} sont distincts irrationnels : ψ est de type Anosov.

Le deuxième cas (parabolique) implique que ψ provient d'une application sur une surface plus simple (ici un anneau). Le dernier cas (hyperbolique) est de loin le plus riche pour la dynamique (ψ a beaucoup de points périodiques, beaucoup de points d'orbites denses, etc.). La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (appelée cat map car on illustre traditionnellement sa dynamique en montrant comment elle distord une image de chat) en est une belle illustration, pour laquelle $\lambda = (3+\sqrt{5})/2$ [5].

Ces applications, bien que très simples, capturent bon nombre des propriétés d'un ouvert de difféomorphismes du tore T^2 : c'est le fameux résultat d'Anosov [1] sur la stabilité structurelle. Il affirme que tout difféomorphisme ϕ suffisamment proche d'un hyperbolique ψ (pour la topologie C^1) est topologiquement conjugué à ψ : il existe un homéomorphisme $h \in \mathrm{Homeo}(T^2)$ tel que $\phi = h \circ \psi \circ h^{-1}$. Ainsi ϕ et ψ sont les mêmes, quitte à changer de coordonnées. Ces difféomorphismes d'Anosov donnent donc des renseignements importants sur des ouverts du groupe $\mathrm{Diff}^+(T^2)$. Leurs analogies hyperboliques ont occupé les mathématiciens depuis ce temps : ce sont les acteurs principaux du groupe $\mathrm{Diff}^+(S_g)$ des difféomorphismes d'une surface S_g de genre g.

Mais ces difféomorphismes d'Anosov sont si importants, qu'ils sont aussi les acteurs d'une autre famille de groupes : les groupes modulaires. Dans les années 1970, Thurston [9] a généralisé l'analyse faite sur le tore au cas des surfaces compactes, étendant alors la notion d'Anosov à celle de pseudo-Anosov.

2. Feuilletages et homéomorphismes pseudo-Anosov

2.1 – Feuilletages mesurés

Une particularité importante d'un Anosov linéaire du tore est qu'il laisse invariant deux feuille-

1. On pourra consulter l'article de A. Bufetov et A. Klimenko dans la *Gazette* (n° 143, janvier 2015).

tages $\mathcal{F}^u$ et $\mathcal{F}^s$ en « droites » de pentes constantes (dirigées selon les vecteurs propres associés à λ et λ^{-1}). Ces feuilletages viennent en outre avec une structure supplémentaire : ils sont intégrables au sens où l'on peut les définir globalement comme le noyau d'une 1-forme différentielle fermée $d\nu$. On a donc une mesure μ_s définie sur les arcs α transverses aux feuilles de $\mathcal{F}^s$ mesurant l'épaisseur du paquet de feuilles traversant α : $\mu_s(\alpha) = \int_\alpha d\nu_s$.

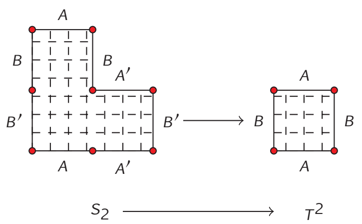
La mesure est invariante au sens où si on bouge les extrémités de α tout en restant dans une même feuille, la mesure reste inchangée. La donnée $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ est un *feuilletage mesuré*. Bien sûr notre Anosov préserve ces feuilletages et dilate/-contracte les mesures : on peut penser que ψ dilate par un facteur λ dans la direction de $\mathcal{F}_u$ et contracte par le même facteur dans la direction de $\mathcal{F}_s$.

Sur une surface de genre plus grand, la notion de feuilletage mesuré existe aussi, mais la formule de Gauß–Bonnet nous force à l'étendre aux feuilletages singuliers. Pour les paires transverses de feuilletages mesurés, il y a une façon très élégante de le faire à l'aide des surfaces de demi-translation.

Si $\Sigma \subset S_g$ est un ensemble fini, une structure de demi-translation sur (S_g, Σ) est un atlas $\omega = (U_\alpha, z_\alpha)$ de $S \backslash \Sigma$ pour lequel les changements de cartes sont de la forme $z \mapsto \pm z + \text{cst}$ et tel que chaque point de Σ possède un voisinage isométrique à un revêtement fini de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Le tiré en arrière des feuilletages horizontaux et verticaux de $\mathbb{R}^2$ définit alors une paire de feuilletages mesurés transverses sur S_g.

Exemple 1. La figure ci-dessous, à gauche, représente une structure de demi-translation sur une surface S_2 : on recolle les côtés ayant la même étiquette. On pourra vérifier que les sommets du polygone en forme de L représentent un seul point sur S_2, qui est singulier. Il y a deux feuilletages mesurés évidents (horizontaux et verticaux) dont les mesures transverses sont dy et dx, respectivement.

Figure 1 – Revêtement triple du tore standard : surface à trois carreaux

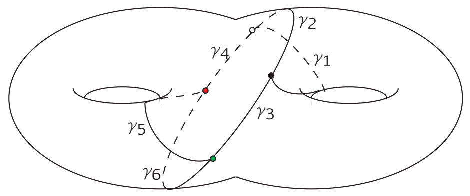


Attention ! Il existe des feuilletages mesurés ne provenant *pas* de cette construction, et de fait n'admettant pas de feuilletage mesuré transverse. Dans l'exemple suivant, on recolle deux cylindres, feuilletés en cercles, selon la figure : les bords du premier cylindre sont les arcs γ_1, γ_2 et $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6$ et ceux du second cylindre sont γ_5, γ_6 et $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$. La mesure transverse est donnée par la « fonction hauteur ». On pourra observer qu'il n'existe pas de feuilletage transverse : sinon les cylindres auraient des bords de mêmes longueurs. Or le système linéaire

$$\begin{cases} |\gamma_1| + |\gamma_2| & = & |\gamma_1| + |\gamma_3| + |\gamma_4| + |\gamma_6| \\ |\gamma_5| + |\gamma_6| & = & |\gamma_2| + |\gamma_3| + |\gamma_4| + |\gamma_5| \end{cases}$$

n'admet pas de solutions strictement positives.

Figure 2 – Feuilletage mesuré sur une surface de genre deux avec 4 singularités (d'après Hubbard–Masur)



2.2 – Homéomorphismes pseudo-Anosov

Un homéomorphisme $\psi : S \to S$ est de type pseudo-Anosov s'il existe une paire de feuilletages mesurés transverses $(\mathcal{F}^u, \mu_u)$ et $(\mathcal{F}^s, \mu_s)$ sur S_g, appelés instables et stables respectivement, et un nombre $\lambda > 1$ (facteur d'expansion de ψ) tels que

$$\psi \cdot (\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \cdot \mu_u), \text{ et}$$
$$\psi \cdot (\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1} \cdot \mu_s).$$

Une manière équivalente de le formuler est de dire que ψ est un difféomorphisme affine sur $S \backslash \Sigma$ (pour la métrique euclidienne définie ci-dessus) et que sa différentielle $D\psi = \begin{pmatrix} \pm\lambda & 0 \\ 0 & \pm\lambda^{-1} \end{pmatrix}$ est hyperbolique c.-à-d. $|\mathrm{tr}(D\psi)| > 2$ (en général ψ n'est pas différentiable aux points de Σ). Le groupe formé de toutes les différentielles $D\psi$ avec ψ affine pour l'atlas ω est le *groupe de Veech* $\mathrm{SL}(S, \omega) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Bien que très naturelle, il n'est pas si aisé de construire des exemples satisfaisant à cette définition (du moins en genre différent de 1). Un moyen détourné d'y parvenir est de relever des Anosov linéaires du tore à des revêtements.

Exemple 2. L'Anosov linéaire du tore $\psi : T^2 \to T^2$, de différentielle $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se relève (voir Exemple 1) en un pseudo-Anosov $\widetilde{\psi}: S_2 \to S_2$ tel que $D\widetilde{\psi} = A$, comme on l'expliquera dans la partie 4.

3. Groupe modulaire

Les homéomorphismes pseudo-Anosov forment les briques élémentaires de l'étude des groupes modulaires des surfaces. Le groupe dont il est question est toujours le groupe $\mathrm{Diff}^+(S_g)$, mais cette fois ci à déformation continue (on dira isotopie) près. Le groupe modulaire est le groupe quotient $\mathrm{Mod}(S_g) = \mathrm{Diff}^+(S_g)/\mathrm{Diff}(S_g)_0$ par le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité.

Souvent les définitions diffèrent d'une source à une autre : groupe des difféomorphismes, groupe des homéomorphismes. Peu importe : les groupes quotients sont isomorphes (même si les groupes $\mathrm{Diff}^+(S_g)$ et $\mathrm{Homeo}^+(S_g)$ sont bien différents !).

3.1 – Classification de Nielsen–Thurston

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème de classification des homéomorphismes des surfaces, qui est très proche de celui sur le tore. Tout $f \in \mathrm{Homeo}^+(S_g)$ est, à isotopie près, soit :

1. périodique, il existe m tel que $f^m = \mathrm{Id}$;
2. réductible, f préserve une famille de courbes fermées simples ;
3. de type pseudo-Anosov.

Dans le deuxième cas, un itéré de f préserve donc une sous-surface (à bords). Comme on peut appliquer de nouveau le théorème à cette sous-surface, le troisième cas est de loin le plus intéressant !

3.2 – Groupes modulaires classiques

Le groupe modulaire du disque fermé est assez simple à décrire (ici notre surface possède un bord : on demande que les homéomorphismes soient l'identité sur celui-ci). Une telle application ϕ de $\overline{D(0,1)}$ peut aisément être déformée par l'isotopie agissant comme ϕ sur un petit disque de rayon $t < 1$ et étant l'identité ailleurs. En coordonnées cela donne

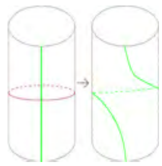
$$F(z,t) = \begin{cases} t\phi(z/t) \text{ si } z \in D(0,t) \text{ et } t \neq 0 \\ z, \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a bien $F(\cdot,0) = \mathrm{Id}$ et $F(\cdot,1) = \psi$. Avec cette idée on montre facilement que le groupe modulaire du disque et de la sphère est $\{\mathrm{Id}\}$.

Cette approche, bien que simpliste, est fondamentale : Magnus a remarqué en 1934 que l'action des isotopies sur les trous permet de relier deux groupes a priori différents, le groupe modulaire du disque avec n trous et le groupe des tresses avec n brins.

Le premier exemple non trivial de groupe modulaire est celui du cylindre plat $\mathcal{C}$. Si γ est une courbe simple fermée orientée reliant les deux composantes de bords de $\mathcal{C}$ alors l'homéomorphisme T_γ qui twiste le cylindre le long de γ est non trivial dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{C}) =< T_\gamma >\simeq \mathbb{Z}$.

Figure 3 – Twist de Dehn le long d'une courbe



T_γ a une expression très simple dans la paramétrisation $\mathcal{C} = \mathbb{R}/w\mathbb{Z} \times [0;h]$:

$$T_\gamma(x,y) = (x + w/h \cdot y, y) = (x + \mu^{-1} y, y)$$

où $\mu = h/w$ est le module du cylindre $\mathcal{C}$. C'est même un difféomorphisme et $DT_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \mu^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Au passage remarquons que comme toute surface S_g contient un anneau $\mathcal{C}$, on peut définir par analogie $T_\gamma \in \mathrm{Mod}(S_g)$ le long d'une courbe simple fermée γ (puisque T_γ est l'identité sur le bord de l'anneau). Ces éléments jouent un rôle important dans l'étude du groupe modulaire : on les appelle *twists de Dehn*.

3.3 – Groupe modulaire du tore

En écrivant $T^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on peut définir deux twists de Dehn le long des deux courbes $\alpha = (1,0)$ et $\beta = (0,1)$, cela fournit un « gros » sous-groupe de $\mathrm{Mod}(T^2)$: $< T_\alpha, T_\gamma >=< \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} >= \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (on identifie ici un twist de Dehn avec sa différentielle).

En fait en faisant agir un homéomorphisme de T^2 sur l'homologie $H_1(T^2,\mathbb{Z}) =< \alpha, \beta >\simeq \mathbb{Z}^2$ on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Mod}(T^2) \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

qui nous fournit une description assez précise du groupe modulaire des surfaces de genre 1.

3.4 – Groupe modulaire d'une surface

Tout comme on comprend $\mathrm{Mod}(T^2)$ à l'aide de l'action sur les courbes, on peut étudier $\mathrm{Mod}(S_g)$ au travers de l'action de $\mathrm{Diff}^+(S_g)$ sur les courbes simples fermées de S_g. Cette fois c'est beaucoup plus compliqué qu'il n'y paraît car une telle courbe peut être extrêmement compliquée.

En laissant agir les homéomorphismes sur l'homologie $H_1(S_g, \mathbb{Z})$, on obtient une première approche « linéaire » du groupe modulaire (en choisissant une base symplectique pour le nombre d'intersection) :

$$\mathrm{Mod}(S_g) \to \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}).$$

Cet homomorphisme est surjectif (en fait tout élément de $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ est réalisé par un pseudo-Anosov, même si on ne sait pas toujours caractériser ceux fixant un feuilletage mesuré orientable). En revanche si $g \geqslant 2$ son noyau (le groupe de Torelli) est très grand.

On termine cette section par un résultat analogue au fait bien connu que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices de transvections :

le groupe $\mathrm{Mod}(S_g)$ est engendré par un nombre fini de twists de Dehn (Dehn, 1922).

Le nombre (optimal) de générateurs est $2g+1$ (Humphries, 1977).

4. Diverses constructions

Construire des homéomorphismes pseudo-Anosov n'est pas une mince affaire...

Voici une idée simple mais fructueuse. Un twist de Dehn affine T_γ possède une différentielle parabolique : $|\mathrm{tr}(DT_\gamma)| = 2$. En appliquant la maxime « le produit de paraboliques est "généralement" hyperbolique », il est possible de montrer (pour des courbes γ et η bien choisies) que $|\mathrm{tr}(DT_\gamma T_\eta)| > 2$ c.-à-d. $T_\gamma \circ T_\eta$ est pseudo-Anosov. C'est la construction de Thurston–Veech, popularisée lors d'un exposé de Hubbard au C.I.R.M. à Marseille en 2003, et qui est maintenant connue sous le nom de construction bouillabaisse.

Exemple 3. Dans l'Exemple 1, la surface de gauche S_2 est decoupée horizontalement selon deux cylindres de hauteurs 1 ayant pour âmes α_1, α_2, de longueurs 1 et 2. Ainsi $DT_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $DT_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme chaque twist de Dehn T_{α_i} est l'identité sur les bords des cylindres, le « multi-twist » $T_h = T_{\alpha_1}^2 \circ T_{\alpha_2}$ est un difféomorphisme de $S_2 \backslash \Sigma$ dont la différentielle est *constante* et égale à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour des raisons de symétries, le multi-twist vertical $T_v = T_{\beta_1} \circ T_{\beta_2}^2$ est aussi affine et a une différentielle égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

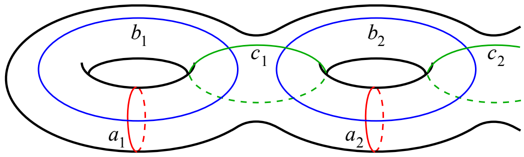
On vérifie alors que $D(T_h \circ T_v) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: c'est notre Exemple 2, qui est pseudo-Anosov !

Exemple 4. Considérons sur une surface de genre 2 les multi-courbes $\alpha = \{2a_1, a_2, c_1\}$ et $\beta = \{b_1, b_2\}$ (représentées par la figure ci-dessous). Le produit des deux multi-twists $T_\alpha \circ T_\beta$ où

$$T_\alpha = T_{a_1}^2 \circ T_{a_2} \circ T_{c_1} \qquad \text{et} \qquad T_\beta = T_{b_1} \circ T_{b_2}$$

est un élément de type pseudo-Anosov ψ. Son facteur d'expansion $\lambda(\psi)$ est la plus grande racine ($\simeq 1.72$) du polynôme $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$.

FIGURE 4 – Construction bouillabaisse



Cette idée produit ainsi beaucoup d'homéomorphismes pseudo-Anosov. Un théorème de Fathi précise même cela. Considérons une famille de courbes distinctes (à isotopie près) $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ remplissant S ($S \backslash \cup_i \gamma_i$ est une union de disques). Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k, \text{ si } \forall i, |n_i| \geqslant N, \text{ alors } T_{\gamma_1} \circ \cdots \circ T_{\gamma_k} \text{ est isotope à un pseudo-Anosov.}$$

Un corollaire étonnant est que si ψ est pseudo-Anosov et γ une courbe fermée simple alors $T_\gamma^n \circ \psi$ est isotope à un pseudo-Anosov, sauf peut-être pour au plus 7 valeurs consécutives d'entiers n !

Il existe d'autres constructions que nous n'aurons pas le temps d'expliquer ici, mais qui sont algorithmiques et qui permettent de décrire, pour certaines, tous les pseudo-Anosov. En voici quelques-unes :

1. induction sur les réseaux ferroviaires ;
2. induction de Rauzy–Veech ;
3. sections de flots sur des 3-variétés hyperboliques.

La première induction a été très largement étudiée par Papadopoulos et Penner.

5. Abondance

On est tenté de dire que la plupart des éléments de $\mathrm{Mod}(S_g)$ sont de type pseudo-Anosov. L'intuition vient du genre 1 : si on choisit une matrice « au hasard » dans $\mathrm{Mod}(S_1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, elle a de forte chance d'être hyperbolique (sa trace en valeur absolue est plus grande que 2). Mais il faut faire attention car tous ces groupes sont discrets...

Une façon raisonnable de définir le mot « hasard » ici est de fixer un ensemble de générateurs de $\mathrm{Mod}(S_g)$ (par exemple des twists de Dehn) et de regarder les mots de longueur bornée (ou encore une boule de rayon N centrée en l'identité dans le graphe de Cayley).

On peut alors montrer que la proportion d'éléments pseudo-Anosov dans la boule de rayon N tend vers 1 avec une vitesse exponentielle lorsque N tend vers l'infini. Il existe aussi des versions de ce résultat utilisant le langage des marches aléatoires.

6. Comptage

Un autre moyen de montrer l'abondance des homéomorphismes pseudo-Anosov est de les compter. Notons

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_g(T) = \{&\text{classes de conjugaisons de } \psi\,;\\ &\psi \text{ est pseudo-Anosov et } \ln(\lambda(\psi)) < T\}.\end{aligned}$$

Veech est le premier à s'être intéressé à l'étude du comportement asymptotique de $\#\mathcal{G}_g(T)$ quand T tend vers l'infini. Son travail, initié en 1986, a finalement culminé avec la formule de Eskin–Mirzakhani :

$$\#\mathcal{G}_g(T) \sim_{T\to\infty} \frac{e^{(6g-6)T}}{(6g-6)T}.$$

Les techniques, dynamiques, utilisent les propriétés du flot géodésique sur l'espace de modules $\mathcal{M}_g$ en s'inspirant du travail de Margulis.

Le point clé est de faire le parallèle entre la classe de conjugaison de ψ et une courbe fermée sur $\mathcal{M}_g$; le nombre $\ln(\lambda(\psi))$ devenant alors la longueur de cette courbe dans une certaine métrique (la métrique de Teichmüller).

7. Facteurs d'expansion

Étonnamment on ne connaît que peu de chose sur les facteurs d'expansion des homéomorphismes pseudo-Anosov.

7.1 – Réalisation

En regardant l'action en homologie, on déduit facilement que λ est une valeur propre d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un nombre algébrique (c.-à-d. la racine d'un polynôme irréductible $P \in \mathbb{Q}[X]$) de degré borné par $3g-3$. En fait, Thurston a montré que c'est un nombre bi-*Perron* :

$$\forall \alpha \neq \lambda, \lambda^{-1},\ P(\alpha) = 0 \implies \lambda^{-1} < \alpha < \lambda.$$

La réciproque (c.-à-d. si un nombre bi-Perron est un facteur d'expansion) est à ce jour complètement ouverte ! C'est d'ailleurs le sujet de l'un des derniers manuscrits de Thurston [8].

7.2 – Minimisation

Les conjectures ne manquent pas dans ce domaine. La plus facile à énoncer concerne toujours λ. À g fixé, un argument reliant racines et coefficients montre que l'ensemble

$$\mathrm{Spec}_g = \left\{\lambda(\psi),\ \psi : S_g \to S_g \text{ est pseudo-Anosov}\right\} \subset \mathbb{R}$$

est discret. Quel est son plus petit élément

$$\delta_g = \min(\mathrm{Spec}_g)\ ?$$

C'est une question totalement ouverte ! On sait que $\delta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\delta_2 =$ la plus grande racine de $X^4-X^3-X^2-X+1 \simeq 1.72$ (comparer avec l'Exemple 4), mais cela s'arrête là. Il n'est pas difficile de majorer δ_g (il suffit de trouver un exemple). C'est un peu plus subtil, mais on peut aussi le minorer. Pour tout $g \geqslant 2$:

$$\frac{\ln(2)}{6} \leqslant |\chi(S_g)| \cdot \ln(\delta_g) \leqslant 2 \cdot \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$$

où $\chi(S_g) = 2-2g$. On en déduit facilement

$$\limsup_{g\to\infty} g \ln(\delta_g) \leqslant \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2}).$$

McMullen conjecture que $(g\ln(\delta_g))_g$ converge, mais ce n'est pas encore démontré. Le point clé est de réussir à obtenir une minoration de la limite inférieure de cette suite.

Voici un résultat récent sur les matrices qui va dans ce sens et qui, étonnament, n'était pas connu avant. McMullen [6] a montré que pour tout $g \geqslant 1$, la plus petite valeur du rayon spectral $\rho(A)$ d'une matrice primitive $A \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ (c.-à-d. il existe n tel que tous les coefficients de A^n soient strictement positifs) est donnée par la plus grande racine du polynôme

$$X^{2g} - X^g(1 + X + X^{-1}) + 1.$$

En particulier $\rho(A)^g \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Même si ce problème est proche du précédent, cela ne donne pas tout à fait la solution...

La discussion des sections précédentes évoque un lien évident entre ces problèmes, de nature géométrique, et le problème de minorer des valeurs propres de matrices, qui est de nature algébrique. Tout ceci n'est pas sans rappeler un problème classique : le problème de Lehmer.

7.3 – Directions propres des homéomorphismes pseudo-Anosov

Toutes les questions ci-dessus sont relatives aux valeurs propres des matrices (le facteur d'expansion λ). Que dire des directions des vecteurs propres ? Cette section est très courte car on ne connaît à peu près rien sur ce sujet ! Il semble très difficile de caractériser ces directions pour le moment, même s'il existe des résultats partiels pour les surfaces de genre 2.

8. Suspensions et volumes

Il existe un lien remarquable entre la dynamique des homéomorphismes pseudo-Anosov en dimension 2 et la géométrie en dimension 3. Ce saut de dimension s'effectue à l'aide de la construction (très générale) de suspension. À chaque $f : S_g \to S_g$ on associe l'objet de dimension 3

$$M_f = S_g \times [0,1]/(1,x) \sim (0, f(x)).$$

Un autre célèbre théorème de Thurston affirme que $f = \psi$ est pseudo-Anosov si et seulement si M_ψ est une 3-variété hyperbolique. Elle a donc un volume. Il est cependant très difficile de l'exprimer aisément. Kojima et McShane ont récemment établi cette belle inégalité, reliant complexité dynamique et complexité géométrique : $\ln(\lambda(\psi)) \geqslant \frac{1}{3\pi|\chi(S_g)|}\mathrm{vol}(M_\psi)$, où $\chi(S_g) = 2 - 2g$.

9. Pour en savoir plus

Le livre de Fathi-Laudenbach-Poenaru [4] est une très bonne introduction au sujet, contenant de nombreux détails. Il repose sur les travaux de Thurston [9].

Le livre de Farb–Margalit [3] est une introduction plus moderne au groupe modulaire ; il contient tous les prérequis et détails de leur étude.

Pour aller plus loin, la littérature est vaste. Les travaux récents de Agol, Hironaka, Leininger, Margalit reprennent bien l'historique des résultats et proposent des approches nouvelles afin d'attaquer les problèmes évoqués ci-dessus.

Références

[1] D. Anosov. « Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature ». *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute* **90**, nº 1 (1967), p. 235.

[2] V. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. 1980.

[3] B. Farb et D. Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups*. **49**. 2011.

[4] A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poénaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*. **66**. 1979.

[5] É. Ghys. « Variations autour du théorème de récurrence de Poincaré ». *J. de Maths des élèves de l'Éns Lyon* **1** (1994).

[6] C. T. McMullen. « Entropy and the clique polynomial ». *J. Topology* **8**, nº 1 (2014), p. 184–212.

[7] S. Smale. « Differentiable dynamical systems ». *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), p. 747–817.

[8] W. P. Thurston. « Entropy in Dimension One ». *ArXiV:1402.2008* (2008), p. 1–38.

[9] W. P. Thurston. « On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces ». *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (1988), p. 417–431.

Erwan Lanneau

Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes, BP 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères, France
erwan.lanneau@univ-grenoble-alpes.fr
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lanneau/

Erwan Lanneau est Professeur à l'université Grenoble-Alpes. Ses travaux portent sur la géométrie, la topologie et les systèmes dynamiques et sur les interactions entre ces trois domaines.

L'auteur remercie Pierre Dehornoy, Sébastien Gouëzel, Pascal Hubert, Vlad Sergiescu et Pierre Will pour leurs relectures et leurs suggestions avisées.

Kivanç Ersoy, un mathématicien en Turquie

• K. Ersoy

Depuis plus d'un an, nos collègues universitaires turcs ont été victimes d'une répression massive tant au niveau pénal que disciplinaire. Kivanç Ersoy est Assistant Professor en théorie des groupes à Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul. Voici son témoignage.

Je suis Kıvanç Ersoy, un mathématicien de Turquie qui travaille dans le domaine de la théorie des groupes, notamment sur les groupes algébriques linéaires et les groupes localement finis. J'ai été placé en garde à vue le 14 mars 2016 et emprisonné le 15 mars. Je suis resté 40 jours en prison. Je remercie tous les collègues qui m'ont apporté leur soutien pendant ma détention. Pourquoi mes collègues et moi avons-nous été détenus ? Avant de répondre, il faut revenir à l'origine de cette histoire.

En 2002, j'ai obtenu ma licence en mathématiques à l'université Odtü et j'ai commencé mon master. La même année, l'akp (Parti de la justice et du développement), dont Recep Tayyip Erdoğan était le leader, est arrivé au pouvoir. Durant les premières années, ce parti avait le soutien de certains intellectuels libéraux et il prétendait lutter contre « la tutelle militaire kémaliste ». Il a gagné de nouveau les élections en 2007, et remporté le referendum de 2010. L'akp, qui agissait alors de concert avec la confrérie Gülen, un autre groupe islamique, s'est attaché à faire taire ses opposants dans l'armée, la justice, les universités et le monde de la presse, en manipulant des procès (Ergenekon, Balyoz, Devrimci Karargah, kck). Alors que les opposants kémalistes de l'akp étaient jugés dans les procès Ergenekon et Balyoz, les opposants de gauche étaient poursuivis dans le dossier Devrimci Karargah, et les Kurdes à travers le procès kck. Alors que l'alliance de l'akp et de la Confrérie ne ménageait pas ses efforts pour faire taire les opposants, les tendances de plus en plus autoritaires de la personnalité d'Erdoğan devenaient flagrantes. Il a multiplié les provocations : faisant fi des sensibilités de la communauté alévie, 15% de la population de Turquie, il a donné au troisième pont sur le Bosphore le nom du sultan Yavuz Selim, qui avait instigué des massacres d'Alevis de grande ampleur au xvi^{e} siècle ; les avions de l'armée turque ont bombardé des civils, dont beaucoup d'enfants, dans le village kurde de Uludere/Roboski, à la frontière irakienne ; il a multiplié les références aux « femmes comme il faut », a défendu l'interdiction de l'avortement, qui plus est en assimilant celui-ci au massacre d'Uludere, déclarant : « Tout avortement est un Uludere ». Il s'est ainsi attiré les foudres des Alévis, des Kurdes et du mouvement féministe. Lorsqu'a été dévoilé le plan de destruction du parc de Gezi, seul espace vert du centre d'Istanbul, au profit d'un centre commercial, la police a violemment chargé les jeunes qui manifestaient. Cela a été la goutte d'eau qui a fait déborder le vase. La réaction face à la violence policière a jeté dans la rue les opposants aux pratiques autoritaires du pouvoir.

Le mouvement de Gezi qui a commencé le 29 mai 2013 s'est achevé le 15 juin, avec la violente intervention des forces de police, qui ont détruit les tentes. Cependant, les opposants politisés pendant Gezi, et hostiles aux tendances autoritaires du pouvoir, ont cherché de nouvelles voies pour se retrouver et s'unir. Avant les élections du 7 juin 2015, l'un des co-présidents du Parti démocratique des peuples (hdp) s'est adressé à Erdoğan pour l'avertir : "Nous ne te ferons pas Président". Pour tous les opposants à Erdoğan, voir l'hdp franchir le barrage électoral de 10% a créé un nouvel espoir, celui d'arrêter cette tendance autoritaire.

L'hdp a obtenu 13,1% des voix aux élections du 7 juin 2015. En entrant à l'Assemblée avec 80 députés, il a fait perdre à l'akp sa majorité. Mais le refus d'Erdoğan d'accepter ces résultats, en empêchant la formation d'une coalition, a conduit le pays une nouvelle fois aux urnes le 1er novembre. Durant cette période, à Suruç, le 20 juillet 2015, une bombe a massacré de jeunes socialistes qui apportaient des jouets aux enfants de Kobane ; à la gare d'Ankara, le 10 octobre 2015, une bombe de Daech a tué plus de 100 participants au meeting pour la démocratie, qui rassemblait des opposants. Ainsi, le climat dans lequel ont eu lieu les élections du 1er novembre 2015 était à l'opposé de l'espoir accompagnant celles du 7 juin. Après les élections du 1er novembre, l'AKP a retrouvé une majorité à l'Assemblée et Erdoğan a entrepris une politique de destruction à l'encontre du peuple kurde qui n'avait pas voté pour son parti. Durant les derniers mois de 2015, des couvre-feux ont été imposés dans les départements kurdes, les coupures d'eau et d'électricité se sont multipliées. Cette situation était évoquée dans le texte de la pétition « Nous ne serons pas complices de ce crime », dont nous sommes signataires :

> L'État turc, en imposant depuis plusieurs semaines le couvre-feu à Sur, Silvan, Nusaybin, Cizre, Silopi et dans de nombreuses villes des provinces kurdes, condamne leurs habitants à la famine. Il bombarde avec des armes lourdes utilisées en temps de guerre. Il viole les droits fondamentaux, pourtant garantis par la Constitution et les conventions internationales dont il est signataire : le droit à la vie, à la liberté et à la sécurité, l'interdiction de la torture et des mauvais traitements.
>
> Ce massacre délibéré et planifié est une violation grave du droit international, des lois turques et des obligations qui incombent à la Turquie en vertu des traités internationaux dont elle est signataire.

« Ces violences exercées par l'État envers ses citoyens » ont suscité une réaction de l'initiative des universitaires pour la paix, fondée en 2012 pendant le processus de paix. En signant le texte « Nous ne serons pas complices de ce crime », nous avons demandé l'arrêt immédiat de ces violations des droits de l'homme. En quelques jours, la pétition a rassemblé 1128 signatures. 1128 universitaires de Turquie et hors de Turquie avaient « refusé d'être complices », tels les intellectuels français qui avaient critiqué leur propre État, la France, pendant la guerre d'Algérie. Le 11 janvier 2016, la pétition « Nous ne serons pas complices de ce crime » a été présentée à la presse avec la signature des 1128 universitaires.

La réaction d'Erdoğan n'a pas tardé. Quelques jours plus tard, alors qu'une bombe de Daech avait tué des touristes devant la mosquée bleue, l'un des quartiers les plus centraux et touristiques d'Istanbul, il consacra deux minutes à cet attentat, et une demi-heure à la pétition, en nous désignant tous comme cibles : « Vous, pseudo-intellectuels, traîtres à la patrie, vous représentez l'obscurité ! »

Un certain nombre de présidents d'universités, conseils d'administration et procureurs ont considéré que ces mots étaient des « instructions » et sont passés à l'action. Malgré tout, nos collègues nous ont soutenus et le nombre de signatures est passé de 1128 à 2212. Dans de nombreuses universités, des poursuites ont alors été lancées contre les signataires et plus de 30 collègues d'universités privées ont été licenciés. C'est la raison pour laquelle, au nom du groupe des Universitaires pour la Paix d'Istanbul, nous avons préparé un texte protestant contre ces licenciements. Esra Mungan, psychologue, Muzaffer Kaya, sociologue, Meral Camcı, linguiste, et moi-même l'avons lu lors d'une conférence de presse, le 10 mars 2016. Nous avons répété : « Nous avons demandé la paix, nous demandons la paix, nous sommes déterminés, nous ne reculerons pas. Nous condamnons les licenciements de nos collègues, nous serons tous solidaires ».

Quatre jours après cette conférence de presse, les équipes de police qui sont venues pour nous placer en garde à vue ne nous ont pas trouvés chez nous. Esra et moi étions dans nos universités respectives. Muzaffer et Meral avaient été licenciés, ils n'étaient pas à l'université mais Muzaffer était à la crèche avec son fils et Meral à l'étranger avec sa fille. Esra, Muzaffer et moi sommes allés de nous-même à la Direction de la Police. Et le jour suivant, nous avons été placés en détention du fait d' « un risque de fuite » ! Quant à Meral, elle a eu beau rentrer de l'étranger alors que sa mise en détention était presque certaine, elle a été aussi emprisonnée du fait d'« un risque de fuite » !.

Durant notre détention, nous avons été touchés par le soutien sans relâche de nos collègues de Turquie et hors de Turquie. Nos collègues qui organisaient des veilles devant les prisons ont montré un exemple de responsabilité intellectuelle.

Nous avons été remis en liberté lors de la première audience, le 22 avril. Le procureur a recommandé d'abandonner l'acte d'accusation pour « propagande en faveur d'une organisation terroriste » et de nous juger pour « Insulte à la nation turque ». Le 27 septembre, comme il n'y avait toujours pas de décision en ce sens, l'audience a été repoussée. Le procès se poursuit, la prochaine audience est le 22 décembre.

L'actualité turque de ces derniers mois a été très chargée : le 15 juillet a vu une tentative de coup d'État de la Confrérie Gülen, ancienne alliée d'Erdoğan. La proclamation de l'état d'urgence (OHAL) qui l'a suivi, le 20 juillet, a achevé de réduire à néant les droits démocratiques déjà si fragiles. Dans le cadre de l'OHAL, toutes les décisions sont prises par des décrets-lois du gouvernement, remplaçant les lois votées par l'Assemblée. Ces décrets-lois ont licencié en une nuit, sans enquête, sans interrogatoire et sans possibilité de défense, des dizaines de milliers de personnes. Bien que la plupart aient été soupçonnés d'être membres de la confrérie, un grand nombre d'individus sans aucune relation avec la confrérie, des gens de gauche, des socialistes, des démocrates et des Universitaires pour la Paix ont été licenciés par les décrets-lois. Les passeports des fonctionnaires licenciés ont été confisqués, leur sortie du territoire et leur accès à un autre emploi ont été interdits.

La situation politique en Turquie continue d'être inquiétante. Nous, citoyens de Turquie pour la paix et la démocratie et Universitaires pour la paix, continuons la lutte. Quel qu'en soit le prix, nous ne reculerons pas : nous demandons la paix, la démocratie, la liberté.

Attention aux effets pervers des contraintes disproportionnées de représentation féminine !

• C. Lescop

Dans son numéro d'octobre 2016, la *Gazette des Mathématiciens* a publié un article de Laurence Broze[1] sur la parité dans les comités de sélection.

Nous attirons ici l'attention sur certains effets pervers des contraintes disproportionnées de représentation féminine dans diverses instances, et nous présentons une motion sur la participation des femmes aux comités de sélection.

Contexte

Comme rappelé dans l'article [1], le décret 2014-997 du 2 septembre 2014 stipule

> Les comités de sélection comprennent une proportion minimale de 40% de personnes de chaque sexe et au moins deux personnes de chaque sexe. Un décret en Conseil d'État fixe la liste des disciplines, dans lesquelles, compte tenu de la répartition entre les sexes des enseignants-chercheurs, il peut être dérogé à la proportion minimale de 40%, ainsi que la proportion minimale dérogatoire que doit respecter chacune de ces disciplines.

et le décret du 21 avril 2015 stipule

> Pour une durée de deux ans à compter de l'entrée en vigueur du présent décret, la liste des disciplines pouvant déroger à la proportion minimale de 40 % de personnes de chaque sexe au sein de chaque comité de sélection institué en vue des concours de recrutement des professeurs des universités et les proportions minimales dérogatoires que doivent respecter chacune de ces disciplines sont fixées ainsi qu'il suit (... Mathématiques 25 : 14%, Mathématiques Appliquées 26 : 30% ...).

1. http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2016/150/smf_gazette_150_48-56.pdf [1]

Selon des statistiques publiées par Laurence Broze sur le site de *femmes et mathématiques* [2], il y avait, en 2015, 33 PR femmes pour 497 PR hommes (6,2%) et 156 MCF femmes pour 701 MCF hommes (18,2%), en section 25 du CNU. Selon le bilan social 2015 du CNRS [6], il y avait, en 2015, 35 DR femmes pour 134 DR hommes (20,7%) et 32 CR femmes pour 191 CR hommes (14,4%) à l'INSMI (qui comprend les sections 25 et 26 du CNU).

Dans ce contexte, la charge de travail des femmes pour les comités de sélection en section 25 est supérieure de plus de deux fois à celle des hommes pour les comités PR, et de plus de trois fois pour les comités MCF. Ces minima stricts théoriques ne tiennent pas compte du minimum de deux représentantes par comité, des effets d'arrondis sur les petits nombres, et du zèle de certains comités. En réalité, le rapport entre la charge de travail des femmes pour les comités de sélection en section 25 et celle des hommes est plus proche de 4. Les femmes accomplissent ce travail supplémentaire au détriment de leur travail de recherche, plus susceptible de leur apporter une véritable reconnaissance scientifique.

Un article [4] de Joya Misra, Jennifer Hickes Lundquist, Elissa Holmes et Stephanie Agiomavritis met en évidence une surcharge importante en travail d'intérêt collectif des femmes *associate professor* par rapport aux hommes *associate professor* (de l'ordre de 5 heures par semaine) [2] et suggère que c'est une des principales causes d'un « plafond d'ivoire » qui empêcherait les femmes d'accéder aux postes de *full professor*.

Une étude influente et médiatisée [5] de Corinne A. Moss-Racusina, John F. Dovidiob, Victoria L. Brescollc, Mark J. Grahama, et Jo Handelsmana met en évidence des discriminations importantes liées au genre en science, mais elle montre aussi que les femmes ne discriminent malheureusement pas moins les femmes que ne le font les hommes.

Avec moins de 30% de femmes étudiantes dans les filières scientifiques, en classe préparatoire comme à l'université [3], et en tenant compte des statistiques déjà citées, il paraît disproportionné, et pénalisant pour les mathématiciennes, de viser à court terme des taux de représentation des femmes de 40% dans les instances d'évaluation et dans les instances administratives, en mathématiques.

Conclusion

Je suis personnellement opposée à des quotas dans les comités de sélection qui imposent aux femmes une charge de travail plus de deux fois plus importante que celle de nos collègues masculins. Je pense que la sursollicitation dans les instances administratives et dans les instances d'évaluation des femmes mathématiciennes nuit à leur activité scientifique, et que cette sursollicitation dessert donc la cause qu'elle est censée défendre.

Démarche

J'ai recueilli des témoignages, propositions ou opinions, auprès de mathématiciennes. Ils sont disponibles à l'adresse `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lescop/parity/TemParity.pdf` ou à la fin de ce texte.

J'ai aussi recueilli des signatures sur la motion suivante.

Motion

Nous refusons de participer significativement proportionnellement plus que les hommes aux tâches incombant aux comités de sélection. Nous rappelons notre droit à refuser de participer à ces comités, même lorsque leur fonctionnement est mis en péril par des quotas disproportionnés de représentation féminine que nous ne revendiquons pas.

Signatures

Claire Amiot, algébriste, MCF, Institut Fourier, Grenoble ; Marie-Claude Arnaud, dynamicienne, PR, laboratoire de mathématiques d'Avignon ; Sylvie Benzoni-Gavage, PR, université Claude Bernard Lyon 1 ; Anne Broise, théorie ergodique, MCF, laboratoire de mathématiques d'Orsay ; Zoé Chatzidakis, DR, DMA, ÉNS Paris ; Sara Checcoli, théoricienne des nombres, MCF, Institut Fourier, Grenoble ; Sophie Chemla, algébriste, université Pierre et Marie Curie ; Loren Coquille, probabiliste, MCF, Institut Fourier, Grenoble ; Camille Coron, probabiliste, MCF, laboratoire de mathématiques d'Orsay ; Isabelle Gallagher, PR, université Paris-Diderot, Paris ; Catherine Gille, MCF, IMJ-PRG, université Paris-Diderot ; Sandrine Grellier, mathématicienne, professeur à l'université d'Orléans ; Caroline Gruson, théorie des représentations, PR, université de Lorraine ; Christine Huyghe, CR CNRS (géométrie arithmétique), Strasbourg ; Élise Janvresse, professeur à l'uni-

2. « women associate professors ... spent nearly five hours more a week on service. »
3. en 2011, selon les données du ministère [3].

versité de Picardie Jules Verne, section 26 ; Clémence Labrousse, mcf à l'université de Picardie Jules Verne ; Ana G. Lecuona, topologue, mcf, i2m, Marseille ; Christine Lescop, topologue, dr, Institut Fourier, Grenoble ; Catriona Maclean, géomètre, mcf, Institut Fourier, Grenoble ; Ariane Mézard, pr, université Pierre et Marie Curie ; Evelyne Miot, cr cnrs, Institut Fourier, Grenoble ; Sophie Morier-Genoud, mcf, université Pierre et Marie Curie ; Luisa Paoluzzi, topologue, professeur, Institut mathématique de Marseille ; Anne Pichon, géomètre, pr, université Aix-Marseille ; Jasmin Raissy, dynamicienne, maître de conférence, Toulouse ; Marusia Rebolledo, théorie des nombres, mcf, université Clermont Auvergne ; Pascale Roesch, professeur à l'université de Toulouse ; Laure Saint-Raymond, professeur à l'université Pierre et Marie Curie ; Marielle Simon, chargée de recherches, inria Lille Nord Europe ; Anne Vaugon, géomètre, mcf, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay ; Claire Voisin, Collège de France.

Témoignages, positions

Témoignage de Marusia Rebolledo. Au problème de la surcharge de travail imposée par les quotas s'ajoute un autre effet pervers : celui de la non-lisibilité : nous propose-t-on ces charges pour notre compétence ou notre genre ? Pour moi, c'est l'effet le plus pervers. En premier lieu pour notre propre confiance en nous mais aussi pour la lecture que peuvent en faire les collègues (hommes ou pas).

Dès lors, c'est un peu une double peine : nous avons plus de travail mais en plus, ce travail n'est probablement pas reconnu à sa juste valeur (puisque demeure le doute que nous soyons dans ces comités « parce que nous sommes des femmes »).

Texte de Caroline Gruson. Nous rencontrons des problèmes grandissants avec les « quotas de femmes » dans les instances universitaires. Dans certaines disciplines scientifiques, les femmes sont fortement sous-représentées et donc :

– nous sommes en permanence sollicitées pour participer à des comités de sélection, siéger au cnu, au CoNRS, apparaître sur les listes électorales des différents conseils de nos universités, sans compter la parité maintenant demandée dans les jurys de thèse...
– les responsables de listes qui doivent contacter les femmes ont bien des difficultés à remplir les quotas.

Le problème que cela pose est très simple : pour faire notre travail dans ces instances, nous devons avoir une bonne information scientifique et être des chercheuses actives, ce qui demande du temps et de la disponibilité – dont nous ne disposons pas toujours vu la quantité de choses qu'on nous demande au titre de la parité.

Dans un certain nombre de discussions on entend que pour faire partie d'un jury de thèse, il n'est pas nécessaire d'être un expert du sujet traité : de qui se moque-t-on ? Est-il souhaitable de faire entrer des femmes non compétentes sur le domaine de recherche simplement pour obtenir une proportion qui fasse joli sur le papier ? Est-ce qu'il est normal de dire d'une femme présente dans une instance ou un jury qu'elle siège en tant que femme et pas es-qualités ? Cette posture présente un fort risque : entraîner les femmes à refuser toute participation pour ne pas subir les remarques parfois très maladroites de certains collègues. Un certain nombre de femmes refusent déjà publiquement de faire partie des comités de sélection au titre de cet argument.

D'autre part, croit-on réellement que la seule présence de femmes dans les instances améliorera la proportion de femmes recrutées ? Cela semble illusoire pour plusieurs raisons, dont la première est une question de vivier : parmi les candidat(e)s aux postes offerts au concours, la proportion de femmes n'est pas énorme : peut-être faudrait-il penser, en amont, à former davantage de femmes aux métiers de la recherche ? Une piste possible serait de réaliser une version moderne des « écoles normales de jeunes filles », par exemple en recrutant les élèves des Éns par des concours différents pour hommes et femmes puisque la mixité du concours, par exemple en mathématiques, n'a pas abouti à la parité des recrutements. Mais bien entendu une telle politique serait considérée comme rétrograde...

Enfin, pour les mathématiques en tout cas, le nombre beaucoup trop faible de postes ouverts aux concours d'enseignants-chercheurs et de chercheurs rend difficile de mettre en place une stratégie purement volontariste en termes de parité.

Position de Luisa Paoluzzi. J'ai décidé de ne plus accepter d'être membre de CdS ou d'autres comités, suite à l'entrée en vigueur de la loi du 12 mars 2012 imposant un quota minimal de 40% de femmes dans les instances de la fonction publique.

À mon avis, il n'est pas du tout clair que cette initiative portera à un rééquilibrage des pourcentages hommes/femmes dans certains secteurs de l'emploi public. Ce qui est certain, en revanche, est que, dans le milieu des enseignants-chercheurs en mathématiques, cette pratique aura comme conséquence une augmentation du nombre de comités et instances auxquels chaque femme devra participer, due au fait que les femmes seront, grosso modo, quatre fois plus sollicitées que leurs collègues hommes pour accomplir ce type de tâche.

Je considère ironique, et même plutôt désolant, qu'une loi dont le but affiché est de défendre l'égalité professionnelle hommes-femmes, ait comme conséquence immédiate une surcharge de travail importante pour les femmes, à parité d'emploi occupé.

À l'heure actuelle, je trouve toute requête de participation aux comités et aux autres instances désagréable voire dégradante, car il est impossible de ne pas imaginer qu'elle n'est pas issue purement de la constatation que mon sexe est d'un genre plutôt que d'un autre, alors qu'auparavant elle relevait de la considération que les collègues portaient à mon égard en tant qu'enseignant-chercheur ou à leur estimation de mon adéquation avec la tâche à accomplir.

« Grâce » à cette loi, et pour la première fois dans ma vie, je me sens discriminée au travail à cause de mon sexe. Cela n'avait jamais été le cas dans le passé, même dans un milieu bien connu pour être à très forte majorité masculine.

Références

[1] L. Broze. « Recrutements en mathématiques : premier bilan de la réforme des comités de sélection ». *Gazette des Mathematiciens*, n° 150 (2015). URL : `http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2016/150/smf_gazette_150_48-56.pdf`.

[2] L. Broze. « Statistiques ». *Site femmes et mathématiques* (2016). URL : `http://www.femmes-et-maths.fr/?page_id=1504`.

[3] Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. « Égalité entre les femmes et les hommes. Chiffres clés de la parité dans l'enseignement supérieur et la recherche » (2011). URL : `http://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/Charte_egalite_femmes_hommes/90/6/Chiffres_parite_couv_vdef_239906.pdf`.

[4] J. Misra et al. « The Ivory Ceiling of Service Work ». *Academe* **97**, n° 1 (2011), p. 22. URL : `https://www.aaup.org/article/ivory-ceiling-service-work#.WB2dTbWVukB`.

[5] C. A. Moss-Racusin et al. « Science Faculty's Subtle Gender Biases Favor Male Students ». *PNAS* **109**, n° 41 (2012). URL : `http://www.pnas.org/content/109/41/16474.full`.

[6] Observatoire des métiers et de l'emploi scientifique. « Base bilan social » (2015). URL : `https://www.dgdr.cnrs.fr/drh/omes/documents/pdf/2015/Livret%20global%20_FIM_CH%202015_INSTITUTS.pdf`.

Christine Lescop

Université Grenoble Alpes

Ce texte a été rédigé avec l'aide de Catriona Maclean.

Concours spécial d'accès au corps des agrégés pour les docteurs

Le Ministère de l'Éducation nationale vient de créer un concours spécial d'accès au corps des agrégés pour les titulaires d'un doctorat (décret 2016-656 du 20 mai 2016). Cinq disciplines sont concernées par l'ouverture de ce nouveau concours en 2017 : Mathématiques, Physique-Chimie, Biochimie, Langues et Lettres. Les mathématiques peuvent offrir une opportunité intéressante aux docteurs compte tenu du grand nombre d'enseignants recrutés chaque année dans ce domaine (actuellement plus de 400 places ouvertes au concours par an... mais ces chiffres peuvent bien sûr évoluer en fonction des politiques gouvernementales et des besoins de l'Éducation nationale).

Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016 [1]. Le programme de ce concours spécial est identique à celui du concours standard. En revanche, le jury, la délibération et le classement du concours spécial et du concours standard sont distincts. On retiendra qu'il n'y a qu'*une seule* épreuve écrite d'admissibilité (durée 6h, un exemple de sujet et son corrigé sont disponibles sur le site `http://agreg.org/`) et trois épreuves orales d'admission :

- une épreuve de mathématiques (durée de la préparation : trois heures ; durée de l'épreuve : une heure). Deux sujets au choix sont proposés par le jury au candidat dans une sélection qui mêle des leçons d'Analyse-Probabilités (AP) et de Mathématiques Générales (MG). Il est possible que le tirage comporte deux sujets AP ou deux sujets MG. La sélection de sujets qui sera utilisée en 2017 est publique, toujours via le site `http://agreg.org/` ;
- une épreuve de modélisation [2] dans l'une des 4 options
  - option A : probabilités et statistiques ;
  - option B : calcul scientifique ;
  - option C : algèbre et calcul formel ;
  - option D : informatique.

  Comme pour le concours standard, cette épreuve s'appuie sur un texte scientifique de 6 pages environ que le candidat doit exploiter pour mettre en évidence ses connaissances. L'épreuve doit aussi donner lieu à une illustration sur ordinateur. Des exemples de textes proposés au concours sont accessibles sur le site `http://agreg.org/` où il est aussi possible de prendre connaissance de l'environnement informatique utilisé pour les épreuves.
- une épreuve de *mise en perspective didactique d'un dossier de recherche* (durée de préparation : une heure ; durée de l'épreuve : une heure). Cette épreuve est véritablement spécifique au concours spécial et vise à mettre en valeur le parcours des candidats. Pour cette épreuve le candidat transmet au jury, par voie électronique au moins dix jours avant le début des épreuves d'admission, un dossier scientifique (format PDF) présentant son parcours, ses travaux de recherche et, le cas échéant, ses activités d'enseignement et de valorisation de la recherche (brevets, activités de vulgarisation, caractère pluri-disciplinaire des travaux, etc.). Le dossier ne doit pas excéder douze pages, annexes comprises. Des détails quant à l'organisation de l'épreuve pourront être apportés ultérieurement sur le site `http://agreg.org/`. Lors de la première partie de l'épreuve, le candidat présente au jury la nature, les enjeux et les résultats de son travail de recherche et en propose une mise en perspective didactique. Il répond également à une question qui lui sera communiquée par le jury au début de l'heure de préparation. Cet exposé est suivi d'un entretien avec le jury prenant appui sur le dossier et l'exposé du candidat. L'épreuve doit permettre au jury d'appré-

1. `https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000032938522&dateTexte=&categorieLien=id`
2. On devrait dire de *modélisation mathématique* pour ne pas oublier que cette épreuve vise à mettre en pratique des outils mais ne contient pas moins de contenu disciplinaire ou d'exigence de rigueur que la première épreuve.

cier l'aptitude du candidat à :

– rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes. Il ne s'agit donc pas d'un exposé de type « séminaire » et les commissions du jury seront constituées de manière à ne pas introduire de biais lié à la participation d'un expert du sujet de recherche des candidats ;
– dégager ce qui dans les acquis de sa formation à et par la recherche, qu'il s'agisse de savoirs ou de savoir-faire, peut être mobilisé dans le cadre des enseignements qu'il serait appelé à dispenser dans la discipline du concours ;
– appréhender de façon pertinente les missions confiées à un professeur agrégé.

Le format de l'épreuve se veut aussi très ouvert aux candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils auront l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications pratiques, etc. et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles (aux environs du 10 mai). Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier postuler à ce concours n'a de sens que s'ils ont, sans être forcément titulaires d'un doctorat, un parcours et une expérience pouvant être mis en valeur dans la troisième épreuve. Il est important de savoir que :

– ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un état membre de l'Union Européenne, d'un état faisant partie de l'accord sur l'Espace Économique Européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération Suisse ou de la Principauté de Monaco ;
– parmi les profils des candidats titulaires d'un doctorat qui se sont présentés aux concours des années précédentes, on relève une proportion non négligeable de personnes ayant suivi un cursus scientifique mais pas forcément centré sur les mathématiques.

L'analyse des résultats des sessions antérieures du concours mérite d'être commentée. Depuis 2009, le nombre de candidats à l'agrégation externe de mathématiques qui se déclarent docteurs a plus que doublé : 131 en 2009, 338 en 2016. Dans le même temps, le nombre d'inscrits est passé de 2300 à 3300. Le nombre d'admissibles dans cette population est passé de 22 à 60, mais avec une barre d'admissibilité qui a fortement décru ces dernières années. Le nombre d'admis-docteurs est globalement de l'ordre de la quinzaine depuis 2011. Ainsi, le ratio reçus/inscrits n'est que de 1/20 pour les docteurs alors qu'il est de l'ordre de 1/3 pour les étudiants.

Parmi ces candidats docteurs la population est en fait assez héterogène :

- tous n'ont pas une thèse en mathématiques ou en informatique,
- il y a une proportion non négligeable de docteurs dont la thèse est « ancienne » pour qui ce concours constitue plutôt une opportunité de réorientation de carrière,
- enfin, nous constatons aussi que certains des non admis ont des thèses récentes en mathématiques et enseignent à l'université.

Ces données indiquent d'une part qu'il y a un véritable vivier de candidats docteurs intéressés par une orientation vers les carrières de l'enseignement. Mais, d'autre part, le concours de l'agrégation est exigeant ; il réclame une maîtrise approfondie et un recul important sur tout le programme des niveaux L1-L3, et de bonnes connaissances sur des notions de niveau M1, parfois M2. La réussite à ce concours repose sur une préparation soigneuse, notamment pour acquérir la nécessaire capacité de synthèse entre des champs techniques variés. Il est probable qu'à l'heure actuelle les candidats docteurs, par nature très spécialisés, soient mal préparés aux épreuves du concours. S'ils ont probablement recul et capacité de synthèse au-dessus de ceux d'étudiants moins mûrs, ils sont souvent pris en défaut sur la rigueur et l'organisation du discours concernant les bases même des sujets abordés. Ainsi, que le doctorat du candidat relève des mathématiques ou d'une autre discipline scientifique, le concours de l'agrégation de mathématiques reste délicat et demande une préparation soigneuse.

Les départements de mathématiques des universités offrent une telle préparation et devraient encourager

– les doctorants ou docteurs en mathématiques (par exemple ceux venant d'autres pays de

Tableau 1 – Évolution du nombre de postes et des inscrits, admissibles et admis (population totale et population déclarée docteur)

	2006	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Postes	290	288	308	391	395	457	467
Inscrits	2849	2500	2673	2673	3001	3252	3765
Doc. inscrits	188	178	218	224	249	304	338
Admissibles		648	571	675	786	789	816
Doc. admissibles	33	42	38	32	49	53	60
Admis		288	308	323	275	274	304
Doc. admis		13	13	15	7	12	18

l'Union Européenne) qui n'auraient pas passé l'agrégation durant leur cursus,
– les doctorants ou docteurs d'autres disciplines qui seraient tentés par ces opportunités de carrière,

à venir suivre les enseignements correspondants. Une discussion avec les Écoles Doctorales doit permettre de valider la participation à ces enseignements au titre de la formation doctorale en vue de l'insertion professionnelle (par exemple les cours d'Analyse et de Modélisation pour un étudiant effectuant une thèse en Algèbre...). Cette formation en cours de thèse serait assurément un « plus » en termes de culture mathématique. Les préparations, notamment les plus petites d'entre elles, parfois menacées par la faiblesse de leurs effectifs, y gagneraient une population motivée, un peu plus mature, capable de jouer un rôle d'émulation intéressant dans les promotions.

En termes de carrière en tant qu'agrégé, il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat. Lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte. Il ne semble pas, à notre connaissance tout au moins, que le création de ce concours spécial s'accompagne d'un projet de développement des postes de prag dans l'enseignement supérieur. Par ailleurs l'Inspection Générale, qui recommande de consulter le site `http://igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17` pour tout savoir sur ce qui suit la réussite au concours de l'agrégation (standard ou spécial), est à la recherche d'agrégés ayant un parcours professionnel riche, une expérience de la recherche, des compétences en informatique, et demande de plus en plus une thèse pour une affectation en cpge.

Pour le directoire de l'agrégation de mathématiques : V. Bonnaillie, J.-Y. Chemin, T. Goudon, C. Torossian, J. Yebbou.

Projet Louis D. « Jeunes Géomètres »

Appel à candidatures

La Fondation Louis D. – Florence de C., en collaboration avec l'Institut de France, récompense chaque année des associations, des fondations, des personnes morales ou des organisations non gouvernementales menant une action à caractère caritatif ou culturel, ou dont le but est d'encourager la recherche scientifique.[1] En 2016, la Fondation a remis un grand Prix scientifique dans le but d'aider des recherches sur le thème « Géométrie, géométrie algébrique, géométrie différentielle, systèmes dynamiques ». Sur proposition de l'Académie des Sciences, le prix a été décerné conjointement à François Labourie (université de Nice-Sophia Antipolis) et à Marcelo Viana (Unité Mixte Internationale cnrs-impa).[2] Il finance un projet « Jeunes géomètres » proposé par François Labourie et un projet franco-brésilien en systèmes dynamiques proposé par Marcelo Viana.

1. `http://grands-prix.institut-de-france.fr/fondation-louis-d`
2. `http://grands-prix.institut-de-france.fr/sites/grands-prix.institut-de-france.fr/files/cp_louisd.pdf`

Nous décrivons ici les grandes lignes du projet « Jeunes géomètres »[3].

Public et ambitions

Le but du projet « Jeunes Géomètres » est de soutenir l'activité de recherche des jeunes et très jeunes chercheurs en géométrie, particulièrement autour des sujets suivants : sous-groupes discrets des groupes de Lie et structures géométriques sur les variétés, géométrie différentielle complexe et symplectique, systèmes dynamiques et théorie ergodique.

Le public visé est celui des doctorants, ou des jeunes docteurs jusqu'à cinq ans après leur thèse, rattachés à un laboratoire français. Les post-doctorants en poste à l'étranger ayant soutenu leur thèse en France et souhaitant engager une collaboration avec un laboratoire situé en France pourront également être financés.

Actions à soutenir

Le financement ne doit pas se substituer à une source de financement normal ou récurrent. Le but est de soutenir des projets de recherche à l'initiative des jeunes chercheurs eux-mêmes.

Le projet soutiendra de manière privilégiée les actions suivantes :

– week-ends de lectures/ateliers de travail destinés à de jeunes chercheurs et organisés par ces derniers, par exemple sur le modèle des « log cabin workshops » financés par le réseau de recherche GEAR aux États-Unis.[4] On peut ainsi imaginer que cinq ou six jeunes chercheurs se réunissent pendant un week-end, ou qu'une quinzaine de jeunes chercheurs se réunissent pendant une semaine, afin d'approfondir un angle de recherche qui leur semble important ou prometteur ;
– financement de délégations de recherche de six mois pour les jeunes maîtres de conférences, particulièrement dans le cadre d'une participation à un programme de recherche ou d'une invitation de longue durée à l'étranger ;
– Financement d'ateliers ou de colloques spécifiquement en direction des jeunes chercheurs.

Le projet pourra également soutenir les actions suivantes :

– invitations de moyenne durée (quinze jours à un mois) d'un ou plusieurs jeunes chercheurs en vue d'une collaboration avec un autre jeune chercheur ;
– missions de moyenne et longue durée à l'étranger dans le cadre d'une collaboration ou de la participation à un programme d'un institut de recherche ;
– participation à des écoles d'été.

Coordinateurs

Le projet est coordonné par François Labourie, lauréat du grand Prix scientifique de la Fondation Louis D. 2016, et animé par Fanny Kassel, Nefton Pali et Barbara Schapira.

Budget

Le projet se propose de fonctionner sur quatre ans à partir de septembre 2016. Le budget total, qui comprend une part dédiée aux recherches des coordinateurs, est de 225 000 euros. Les coordinateurs se réunissent virtuellement tous les deux mois pour prendre les décisions budgétaires.

Fonctionnement et candidatures.

Les candidats à une subvention doivent présenter leur projet sous la forme suivante :

1. lettre de motivation et de présentation du *projet scientifique* (une à deux pages) ;
2. *curriculum vitae* du candidat ou des organisateurs, comportant une liste de publications ;
3. pour les ateliers, colloques, missions ou invitations, un projet de *budget* précisant le budget global et la contribution demandée au projet « Jeunes Géomètres » ;
4. dans le cas d'une délégation, une lettre du directeur de département indiquant qu'il n'y pas d'obstruction de principe à l'attribution d'une délégation de recherche financée par le projet « Jeunes Géomètres ».

Les candidature doivent être envoyées par courrier électronique (pdf) à F. Labourie ainsi qu'à au moins un des animateurs ou animatrices le plus proche scientifiquement du projet. Un court rapport sera demandé à l'issue de l'activité subventionnée.

3. Pour plus de détails, consulter `http://math.unice.fr/~labourie/LouisD/index.html`
4. `http://gear.math.illinois.edu/programs/workshops/Log-Cabin-Meetings.html`

Roger Godement

1921-2016

Roger Godement est décédé le 21 juillet 2016. Mathématicien exceptionnel, élève d'Henri Cartan, il a fait partie de Bourbaki. Roger Godement a été professeur à la Faculté des Sciences de Paris, puis a participé à la création du Département de mathématiques de Paris 7. Ses collègues et amis lui rendent hommage dans les textes qui suivent.

Roger Godement en 1984

Claude Bardos

Dans mes années à l'Éns, Godement jouissait auprès des élèves d'un prestige immense tant pour ses contributions mathématiques que pour sa liberté d'esprit et pour son militantisme contre la politique française en Algérie. Mais je n'ai pas eu immédiatement la chance de suivre ses cours ou le courage d'essayer d'interagir avec lui (j'étais trop impressionné). Mon premier contact a été de faire partie du groupe d'étudiants de l'unef volontaires pour monter la garde devant la porte de son appartement qui venait d'être détruit par une charge de plastic posée par l'oas.

Et ce n'est qu'en 1963 avec la parution de son livre *Cours d'Algèbre* que j'ai commencé à entrevoir sa pensée mathématique. Ce livre a représenté pour ma génération – en particulier pour les étudiants en mathématiques non algébristes *stricto sensu* – une véritable rupture avec le passé. À cette époque les étudiants consultaient presque uniquement les ouvrages écrits en français. Dans ce domaine il n'y avait pas d'ouvrage pour répondre à notre attente. Pas facile de s'y retrouver entre le livre, populaire chez les ex-taupins, de Lentin et Rivaud, les *Éléments de Calcul Tensoriel* de Lichnerowicz et les nombreuses pages de Bourbaki nécessaires pour accéder aux mêmes concepts.

J'ai tout de suite réalisé que c'était le livre que j'attendais, en particulier pour me familiariser sans larmes avec ce dont j'aurais besoin dans la suite de ma carrière. Avec un nombre de pages raisonnables l'auteur réussissait à faire une synthèse du sujet, bien sûr jusqu'aux applications, et avec de nombreux exercices. Le tout était présenté dans un style simple et chaleureux avec des conseils de lectures, en particulier sur l'ouverture vers la littérature étrangère et, comme cela a été souvent évoqué, des commentaires politiques, en particulier sur les « événements d'Algérie » comme illustration des raisonnements inspirés par la logique intuitive. C'est à partir de ce moment que j'ai suivi avec le maximum d'attention les productions pédagogiques de Godement.

Dans la suite de son engagement Godement passa l'année scolaire 63-64 à l'université d'Alger. Je lui ai succédé pour l'année 64-65 comme scientifique du contingent. Le service militaire existait toujours à cette époque et la coopération scientifique venait d'être créée par de Gaulle (pour en assurer le succès à Alger, il avait confié le poste d'attaché culturel dans la nouvelle ambassade de France à Stéphane Hessel). Avant de partir je suis allé consulter Godement – probablement la première fois que j'ai eu une conversation privée avec lui. Il n'a pas été très loquace et pour l'essentiel m'a souhaité bon courage. Mais dès mon arrivée j'ai trouvé à la faculté d'Alger de substantielles traces de son passage. Comme l'ont écrit Martin Zerner et Amar el Kolli dans leur article sur les Mathématiques à l'université d'Alger [1]

> À la veille de l'indépendance, on ne trouve, à la faculté des sciences d'Alger, aucun enseignant de mathématiques algérien. À la fin de l'année 1961-62, tous les professeurs et la plupart des autres enseignants sont partis. Un petit nombre d'assistants et de maîtres-assistants sont restés. Trois agrégés sont recrutés à la Faculté, parmi lesquels Rachid Touri, qui sera bientôt nommé doyen. L'enseignement est assuré, tant mal que bien, avec des assistants tout juste titulaires de la licence.

Ainsi Godement avait-il réalisé que la première chose à faire pour ce département serait de le doter d'un cours élémentaire d'analyse très solide. Cela servirait à la fois comme socle pour l'enseignement local, comme vitrine vis-à-vis du monde extérieur et comme monnaie d'échange pour obtenir les publications des grandes universités, ce qui, alors que le web et arxiv.org n'existaient pas, s'avérait précieux.

Il s'était donc mis au travail tout seul et avait réalisé (bien sûr sans micro et sans traitement de texte mais avec une machine IBM à boule – on changeait de boule pour taper des symboles mathématiques) environ 400 stencils pour deux fascicules d'un polycopié intitulé *Introduction à l'Analyse Mathématique*. L'ensemble a été publié par la section Faculté des sciences d'Alger de l'Union Nationale des Étudiants Algériens avec en préambule des remerciements chaleureux :

> Nous avons eu à apprécier, de par sa présence à notre université durant l'année 1963-64, les hautes qualités humaines, la justesse des conseils fraternels et la valeur de l'enseignement prodigués par Roger Godement à notre jeune université.

Noël Favrelière, rappelé (comme sous-officier) au moment de la guerre d'Algérie, avait déserté plutôt que de collaborer à l'exécution d'un prisonnier. Lors de son retour clandestin en France en 1962 il avait bénéficié de l'aide et de l'amitié de Godement. Avant ces événements Favrelière faisait partie de la communauté des peintres de Montparnasse. Ainsi Godement lui a-t-il demandé d'illustrer la couverture de ces fascicules. Favrelière a proposé une image très sobre : une branche de sinusoïde séparant la couverture en deux régions, en dessous toujours blanc, au-dessus colorié. Pour le premier fascicule la couleur du dessus est noire. La nuit coloniale! Le second est vert – couleur de l'Algérie indépendante. Pour le troisième cela aurait dû être rouge... le socialisme. Mais avec l'évolution des choses le troisième tome n'a pas vu le jour sous cette forme.

Ceci posé, compte tenu de la qualité de ses contributions, et de son prestige, son *Cours d'Algèbre* chez Hermann et son *Introduction à l'Analyse Mathématique* représentaient durant mon année à Alger les bases de l'enseignement, aussi bien en premier cycle que pour le début du second cycle. À mon retour du service militaire en janvier 65 j'ai obtenu un poste de chargé de recherche au CNRS pour faire une thèse sous la direction de Jacques-Louis Lions, mais pour garder un contact avec l'enseignement j'ai accepté de faire du « monitorat » dans le certificat de mathématiques 2 enseigné dans ce qui était encore la faculté des sciences de Paris. Il s'agissait d'un gros certificat de maîtrise avec deux super, mais de tous points de vue très différents, enseignants magistraux : Roger Godement et Paul Malliavin. Malliavin avait pris en charge la géométrie différentielle avec une introduction à la notion de variété et Godement l'analyse dans le style de ses ouvrages ultérieurs. J'ai donc collaboré à son enseignement et du coup aussi assisté enfin à une partie de ses cours. Comme d'autres l'ont souligné, son enseignement n'était pas standard : en plus de faire des insertions politiques (bien motivées), il ne parlait pas très fort, déambulait le long du tableau en toussotant et enfin en donnant plutôt les motivations et les idées de base que la description complète et linéaire des preuves. Mais ce qui est frappant c'est que cela marchait et que sa démarche en fin de compte contribuait beaucoup à fixer l'attention des étudiants, tout à fait épatés. Moi, dans ce boulot de moniteur, j'ai sûrement appris beaucoup plus que ce que les étudiants ont retiré de mon encadrement.

En plus Godement fournissait aux étudiants et aux enseignants des notes de cours. Ces notes étaient dans la continuation du cours d'Alger et

1. *Cahiers de recherche sur l'éducation et les savoirs* **9** (2010).

préfiguraient ce qui allait devenir son livre *Analyse Mathématique* publié entre 1998 et 2004, après son départ à la retraite, en 4 volumes. J'ai donc suivi la réalisation de ce merveilleux ouvrage. Grand cours d'analyse, dans la tradition de ceux qu'ont laissés les enseignants de l'École polytechnique (depuis Fourier et Cauchy) mais avec un point vue naturellement moderne et un style propre. Comme on l'observe, cela part de son cours d'Alger et cela se termine dans le volume 4 par un chapitre XII avec le titre évocateur *Le jardin des Délices Modulaires ou l'Opium des mathématiciens*.

L'auteur y rappelle donc comment l'hypothèse sur les zéros de la fonction zeta de Riemann est équivalente au comportement asymptotique de la distribution des nombres premiers. Il insiste aussi sur le fait que, comme pour le théorème de Fermat (maintenant démontré), la preuve de cette hypothèse devrait s'avérer prodigieusement plus intéressante que le résultat lui-même. Naturellement cette section contient de précieux développements historiques et des spéculations sur les outils qui permettraient de conclure. Évoquant l'utilisation de l'analyse harmonique non-commutative l'auteur écrit « *Le mieux est de faire comme les anglais en pareil cas : wait and see.* »

Mais pour en arriver à cet état de la question, il a offert un merveilleux parcours dans l'ensemble des techniques de l'analyse, accompagné d'une foule de commentaires dont il a toujours souligné l'importance.

Enfin il faut être reconnaissant à l'équipe de Springer (d'ailleurs chaleureusement remerciée par Godement en conclusion) pour l'excellente mise en forme de cette publication, et aussi et surtout pour n'avoir censuré aucune des remarques historiques et politiques qui parsèment l'ouvrage. En plus de la richesse des informations qu'elles apportent, elles témoignent de la radicalisation de la pensée de Godement. Dans le *Cours d'Algèbre* les remarques de ce type fustigeaient avant tout le colonialisme. Ensuite l'auteur, d'ailleurs comme Grothendieck, s'est consacré à la responsabilité du chercheur (avant tout du mathématicien) vis-à-vis du politique et essentiellement du militaire. Avec à la fois ses capacités de travail, sa lucidité et sa volonté (selon cette expression de La Fontaine) de toujours choisir sans hésiter la liberté du loup plutôt que la soupe du chien. À ce sujet je voudrais ajouter deux remarques.

- Pour fustiger les collaborations entre scientifiques industriels et militaires, qui remontent comme il le reconnaît à Archimède, et qui ont impliqué entre autres Euler, il évoque essentiellement l'attrait de la soupe du chien. Mais la fascination des scientifiques pour les applications est un phénomène bien plus complexe et qui dans la suite de sa pensée mériterait une analyse bien plus fine.
- Son point de vue radical ne l'a pas conduit à un dogmatisme qui aurait pu limiter ses amitiés. Je peux en témoigner : j'ai toujours avec lui fait état de mes collaborations avec J.-L. Lions, avec R. Dautray et avec les participants du projet Hermès (la tentative de navette spatiale européenne) et cela ne l'a pas empêché de m'accorder sans réserve son amitié.

Dans l'enseignement de Godement, soit par voie orale soit par ses écrits, depuis son cours d'Algèbre et son polycopié d'Alger jusqu'aux derniers chapitres du quatrième volume du livre d'Analyse, on retrouve en permanence ces lignes de force. Le besoin de découvrir et d'innover en toute liberté de pensée, la joie de transmettre ses connaissances dans l'affection avec le lecteur...

Jean-Pierre Kahane

Roger Godement, une référence et un ami

Roger Godement a été pour moi une référence et un ami. Nous ne nous voyions pas souvent, et la dernière fois, il y a quelque temps, je veux dire quelques années, c'était à l'improviste au bas de l'avenue des Gobelins, et nous avons repris au café la conversation sur l'état du monde comme si nous nous étions quittés la veille. Or l'avant-dernière fois était il y a près d'un demi-siècle.

En vérité, j'ai retrouvé Godement plus récemment, en lisant ou en découvrant des textes de lui, dans ses livres ou dans d'autres. Il écrit admirablement. Il peut être très simple et classique, je pense au cours qu'il a donné à Alger en 1964. Il nous laisse un monument avec les 900 pages de son « Analyse mathématique ». À côté d'un exposé mathématique impeccable il évoque l'École polytechnique comme un « pensionnat militaire grand standing », ou les armes thermonucléaires au détour d'une phrase, il se livre à des confidences émouvantes quand il évoque Sonia, dont ma femme et moi avons connu et aimé la forte et séduisante personnalité, il humanise à la Leibniz l'écriture des distributions de Schwartz, il met en valeur Liouville contre Cauchy, les incidentes abondent. Et puis, la postface de 90 pages sur « science, technologie, armement » est aussi dans sa manière : sérieux, documenté, vigoureux. C'est une référence solide pour la situation du monde aujourd'hui.

Ma première rencontre avec Godement a été la lecture de sa contribution au livre de François Le Lionnais sur « les grands courants de la pensée mathématique ». Le livre a paru en 1948, et je l'ai lu, mal lu, en 1949. Le Lionnais l'a articulé en trois parties : le temple mathématique, l'épopée mathématique, et les influences. L'épopée se divise en « passé », « présent », et « avenir ». Pour l'avenir, deux contributeurs seulement, André Weil et Roger Godement ; vous voyez l'âge qu'avait Godement, il était déjà reconnu comme un maître de l'analyse harmonique et une promesse pour son développement. Lisant mal, j'ai confondu les deux dans mon souvenir, un fondateur et un jeune membre de Bourbaki, et je croyais qu'ils m'avaient éloigné de la même façon de la pensée de Bourbaki. Or, les relisant, ils sont très différents. Weil est éblouissant et parfois insupportable ; c'est là qu'il utilise le terme de « caisse de résonnance » pour les mathématiciens qui ne sont pas des phares, il le veut péjoratif et j'ai eu la fierté de m'y situer. Godement est sérieux ; il se consacre aux théories modernes, qu'il appelle aussi « multivalentes », face aux théories classiques, « univalentes », et il prolonge son propos en évoquant longuement « le rôle croissant que jouent les nouvelles théories de la physique dans le développement des mathématiques ». Ce n'est pas l'image qu'on se fait parfois de Bourbaki. L'ensemble de son exposé n'a pas une ride.

J'ai retrouvé André Weil et Godement comme bourbakistes d'autre façon et bien plus tard, quand on célébrait le centenaire d'André Weil. J'avais rendu visite à Henri Cartan pour donner chair à un exposé que je devais faire à New Delhi sur Weil, il répondait à mes questions avec la précision que je lui connaissais, je me lève au bout d'une heure pour prendre congé, et alors : « j'ai peut-être quelque chose pour vous ». Oui, le quelque chose, c'était le dépôt qu'il avait fait aux Archives de l'Académie des sciences du manuscrit que Weil lui avait adressé, de prison, en 1940, comme premier jet pour la Théorie de l'Intégration de Bourbaki. Weil n'avait pas de machine à écrire, c'est le seul manuscrit mathématique qu'on lui connaisse, et il est impressionnant à tous égards. Rien à voir avec le livre publié par Bourbaki. Rien à voir avec ses propres travaux. Un essai pour introduire l'intégration qui s'inspire, sans succès selon moi, de l'axiomatique de Kolmogoroff parue quelques années plus tôt, et qu'il considérait comme l'acte de naissance des probabilités comme partie des mathématiques. Bourbaki n'a pas suivi. Les jeunes, Schwartz, Godement, ont imposé la définition de la mesure comme forme linéaire. Contrairement à ce que j'avais toujours pensé, Bourbaki sur l'intégration ne doit rien à Weil et ce n'est pas l'approche de Bourbaki qui a amené Schwartz à sa définition des distributions comme formes linéaires, c'est le contraire. Godement a connu les objections faites à l'approche de Bourbaki, mais il y est toujours resté fidèle.

Voici un souvenir plus personnel. C'était en 1969, en famille à la campagne, nous avions eu beaucoup en commun depuis 1961, et nous n'allions pas voter de la même façon au second tour des élections présidentielles de l'époque. Le directeur littéraire de PUF, Philippe Garcin, m'avait demandé de diriger la partie mathématique d'une collection « sup » qu'il lançait : petit format, petit prix, niveau élevé, contenu intéressant sans préalable. Fort d'une mauvaise expérience avec un autre éditeur, qui avait abouti à la non-publication d'une excellente traduction, j'avais posé comme condition qu'il lance la publication sans étude de marché. Je n'avais pas encore de texte. Pour lancer la collection, je souhaitais un livre de Godement. J'en reviens donc à notre entretien à la campagne. Non, désolé, Godement n'est pas partant. Mais il est intéressé et il me signale le cours de Serre à l'ÉNS, rédigé et quasi tout prêt. Je contacte Jean-Pierre Serre et en même temps Jean-Louis Krivine, le « cours d'arithmétique » et « la théorie axiomatique des ensembles » me sont remis très vite, je les porte à Philippe Garçin, et quelques semaines après ils sont tirés à 10 000 exemplaires chacun. C'était une autre époque qu'aujourd'hui, et aussi d'excellents livres : les 10 000 exemplaires n'ont pas suffi, un nouveau tirage de 10 000 a été fait l'année suivante. Personne ne peut se douter que le succès de la collection a tenu à une conversation avec Roger Godement.

Cela est un infime détail dans la vie de Godement, mais il ne m'étonnerait pas qu'il y ait un grand nombre de petits détails de cet ordre. L'influence de ses articles et de ses livres a été considérable, et sans doute aussi l'influence de sa personnalité, bourrue en apparence, fine et généreuse en vérité. Si l'on parlait de politique avec lui, et des mathématiques en face de la politique, de la science et de la guerre, de l'inconscience ambiante autour des dangers, on pouvait avoir l'impression qu'il était foncièrement pessimiste et qu'il se battait sans espoir. Mais c'est une image incomplète et faussée. Il faut donner tout son poids à la phrase qui termine son Cours d'analyse, une bouffée de confiance et d'espoir au delà de la mise en garde : « Science is for life, not death. »

Hervé Jacquet

Les travaux de Roger Godement

Je voudrais présenter quelques remarques personnelles sur les travaux de Godement.

Motivé par la théorie des groupes abéliens localement compacts qu'il avait contribué à créer, et la théorie des groupes compacts, Godement a cherché à développer une théorie générale des représentations unitaires des groupes localement compacts. Cette théorie générale confortait l'idée que les représentations de dimension infinie étaient des objets raisonnables. Elle est encore utile. Par exemple, j'ai eu l'occasion d'utiliser la décomposition abstraite d'une représentation unitaire en somme de représentations irréductibles. Mais dans le cas des groupes réductifs réels ou p-adiques, il convient d'introduire une notion de représentation plus algébrique (modules d'Harish-Chandra ou représentations admissibles), quitte à revenir in fine aux représentations unitaires.

Godement s'est intéressé à la théorie des formes automorphes, comme en témoignent ses nombreux exposés au Séminaire Bourbaki. Très tôt, il a proposé d'adopter le point de vue des groupes adéliques et des représentations unitaires. Cela apparaît dans son article sur la théorie de la réduction. De même, les résultats de son article *Analyse Spectrale des fonctions modulaires* sont présentés comme la décomposition de la représentation de $SL(2,\mathbb{A})$ sur l'espace

$$L^2(SL(2,\mathbb{A})/SL(2,\mathbb{Q}))$$

en une somme de représentations irréductibles. Dans le cas d'un groupe arbitraire, il a toujours maintenu que les théorèmes généraux de décomposition des représentations unitaires conduiraient nécessairement à une théorie des séries d'Eisenstein. En tout cas, il a contribué directement à la théorie des séries d'Eisenstein. Je signale son lemme sur la convergence des séries d'Eisenstein ainsi que le prolongement analytique des séries d'Eisenstein attachées à un sous-groupe de Borel d'un groupe déployé ; la méthode reposait sur le théorème de Hartogs. Bien sûr, il a tout de suite reconnu l'importance des travaux de Langlands sur les séries d'Eisenstein et a donné dans le séminaire Bourbaki une introduction (adélique) enthousiaste à ces travaux.

Godement s'est aussi intéressé aux travaux de Weil sur ce que nous appelons maintenant le théorème réciproque (Converse Theorem). Dans un exposé à Paris il avait proposé d'adopter un point de vue adèlique. De plus, dans une lettre à Weil, il avait indiqué que l'on pouvait utiliser la représentation intégrale des fonctions de Whittaker qui se trouvait dans ma thèse pour obtenir des propriétés analytiques de leurs transformées de Mellin ; toutefois, il n'avait pas obtenu leur équation fonctionnelle. Enfin, après la publication du livre de Jacquet-Langlands, il a écrit des notes sur cette théorie.

Comme de nombreux mathématiciens, Godement a beaucoup travaillé sur les fonctions zêta des algèbres simples. Dans ses exposés sur la question, Godement considérait des intégrales à valeurs opérateurs de la forme

$$\int_{G(\mathbb{A})} \Phi(x)|\det x|^s \rho(x) d^\times x\,;$$

le groupe G est le groupe multiplicatif d'une algèbre simple H ; la fonction Φ est une fonction de Schwartz-Bruhat sur $H(\mathbb{A})$ et det est le déterminant réduit. La représentation ρ est la représentation dans un espace de fonctions automorphes convenable, par exemple, l'espace des fonctions cuspidales dans le cas du groupe $GL(n)$. L'intégrale converge lorsque la partie réelle de s est assez grande et il s'agit de faire le prolongement analytique de cette intégrale. De même, dans la théorie locale, il considérait des intégrales à valeurs opérateurs.

Le point de vue adopté dans le livre Godement-Jacquet est un peu différent. On considère plutôt des intégrales scalaires de la forme

$$\int_{G(\mathbb{A})} \Phi(x)|\det x|^s f(x) d^\times x,$$

où f est un coefficient matriciel d'une représentation irréductible π qui apparaît dans l'espace des formes cuspidales. Le prolongement analytique d'une telle intégrale étant obtenu, on écrit cette intégrale comme produit d'intégrales analogues locales et on arrive enfin au prolongement analytique et à l'équation fonctionnelle d'une fonction $L(s,\pi)$, produit de facteurs locaux déterminés par les composants locaux de la représentation π. Dans l'équation fonctionnelle

$$L(s,\pi)=\epsilon(s,\pi)L(1-s,\tilde{\pi}),$$

le facteur ϵ est produit de facteurs locaux déterminés par les composantes locales de π. Le point de vue adopté est évidemment celui de la thèse de Tate ou du livre de Jacquet-Langlands.

Notons que pour étendre cette théorie à des représentations autres que cuspidales, il n'est pas nécessaire de faire directement une nouvelle analyse des intégrales globales, comme le pensait Godement. Par exemple, pour la représentation triviale, Godement étudiait en détail les propriétés analytiques d'une intégrale de la forme

$$\int_{G(\mathbb{A})}\Phi(x)|\det x|^s d^\times x.$$

Or la théorie locale montre directement que l'intégrale est un multiple holomorphe d'un produit de translatées de la fonction ζ du corps de base. Rappelons que les conjectures de Langlands prédisent que toutes les fonctions L–automorphes sont des produits de fonctions L attachées à des représentations automorphes cuspidales de $GL(n)$.

En passant, je note aussi une élégante contribution de Godement à la théorie des groupes algébriques nilpotents. Soit N un tel groupe défini sur $\mathbb{Q}$. On considère la représentation de $N(\mathbb{A})$ sur $L^2(N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}))$. Calvin Moore avait démontré que cette représentation se décompose sans multiplicité en somme directe de représentations irréductibles ; de plus, on peut décrire ces représentations en termes de la théorie de Kirillov et Howe. Godement avait une démonstration très simple de ce fait utilisant la formule des traces et la formule de Poisson sur l'algèbre de Lie de N.

Godement n'était pas un directeur de thèse orthodoxe. Après son séminaire à l'Éns sur les fonctions sphériques, lorsque je lui ai timidement demandé d'être mon patron de thèse pour le cnrs, il m'a répondu : « oui, mais je m'en fous ». Il m'a d'abord proposé d'étudier la théorie spectrale des formes automorphes en partant de la décomposition abstraite des représentations unitaires en somme de représentations irréductibles. Plus tard, il m'a donné à lire les notes d'un cours qu'il avait fait sur les formes automorphes de $GL(2)$, holomorphes ou non. La série de Fourier d'une telle forme fait intervenir des fonctions de Whittaker (au sens classique) dépendant d'un paramètre s avec une équation fonctionnelle en $s\to -s$. J'y ai vu une analogie avec l'équation fonctionnelle des fonctions sphériques et cela a été le point de départ de ma thèse.

Le traitement des séries d'Eisenstein pour $GL(2)$, l'adoption systématique du point de vue adélique et les exposés de Godement sur les fonctions zêta m'ont beaucoup aidé dans mes travaux ultérieurs.

En conclusion, je suis certain que les autres étudiants de Godement seront d'accord avec moi : l'influence de Godement sur la théorie des représentations unitaires et des représentations automorphes a été considérable ; elle s'est manifestée directement, et à travers les travaux de ses étudiants.

Roger Godement à Berkeley en 1970

Jean-Christophe Yoccoz

1957-2016

Jean-Christophe Yoccoz est décédé le 3 septembre 2016. Professeur au collège de France, académicien, récipiendaire de la médaille Fields en 1994, il était une des grandes figures des mathématiques françaises. Avant un numéro spécial de la *Gazette* qui lui sera entièrement consacré, deux de ses plus proches collègues et amis nous livrent quelques souvenirs.

Jacob Palis

Jean-Christophe Yoccoz and Brazil/IMPA

I met Jean-Christophe for the first time at the University of Orsay, in 1980. I had an invitation to a Conference on Dynamical Systems in Warwick, organized by Christopher Zeeman, and I thought it was a good idea to stop at Paris to visit the IHÉS (Institut des Hautes Études Scientifiques), in Bures-sur-Yvette, and French colleagues.

At IHÉS, I heard from my French colleague Albert Fathi, that a brilliant young student of Michel Herman was giving a lecture at Orsay. So, for the first time, I crossed the river Yvette to go from Bures to Orsay, to hear his talk.

Certainly I was very much impressed by his presentation. The lecture was excellent, and after it we had the chance to talk about the possibility of him visiting the Institute for Pure and Applied Mathematics – IMPA, at Rio de Janeiro, for a number of months. He reacted quite well to the idea and did mention the possibility of coming to Brazil through the French Military Service. At first, I reacted with surprise, but then found it a very good idea.

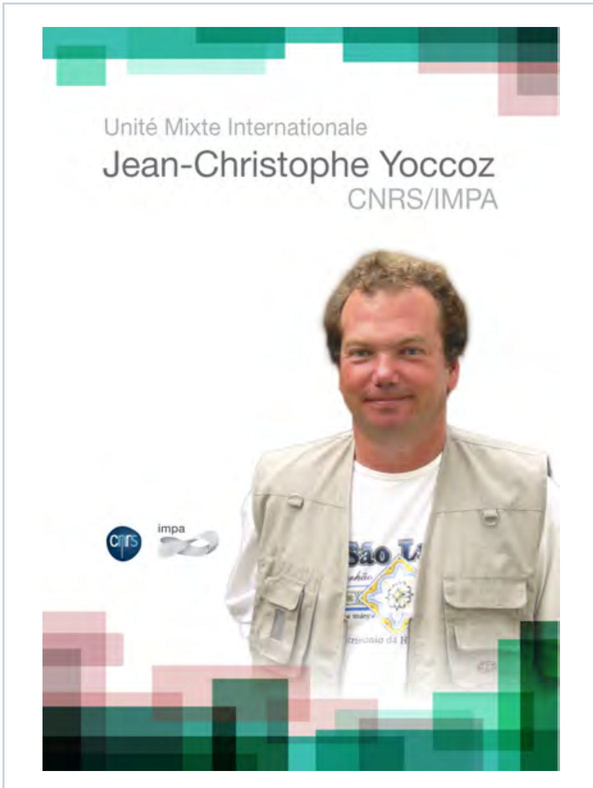
I happily joined the group of French dynamicists going to Warwick, and Jean-Christophe was one of them.

> Since my first stay at IMPA, from 1981 to 1983, I have come back many times, and always with the greatest pleasure and scientific interest. [...] My collaboration with researchers from IMPA has been very fruitful, and the contact with numerous gifted young students, becoming full-grown mathematicians, from all of Latin America and even Europe, is very stimulating. [...] I would like such an institute in Paris. Hoping to come back very soon, and many more times.

These words were written by Jean-Christophe in IMPA Visitors' Album.

This story was inspired by IMPA's Honorary Researcher, Étienne Ghys, a great friend, who, some time ago, insisted that Jean-Christophe and I only met for the first time in Brazil.

IMPA, as a CNRS Unité Mixte Internationale, is now named, upon a proposal to CNRS by IMPA's Director, Prof. Marcelo Viana, after Jean-Christophe Yoccoz.



Stefano Marmi

Souvenirs de Jean-Christophe

Trieste 1988. J'ai rencontré pour la première fois Jean-Christophe au mois de septembre 1988 à Trieste. Palis et Zeeman avaient organisé une école d'été de systèmes dynamiques à l'ICTP et j'y participais comme étudiant. Jean-Christophe venait de démontrer qu'une condition diophantienne un peu spéciale, qu'on appelle condition de Brjuno, était non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour la convergence de la linéarisation du polynôme quadratique. C'était un progrès fondamental sur un problème qui avait occupé sans succès de très grands mathématiciens.

Il est arrivé à Trieste pour la conférence et il a donné un exposé sur son travail dans une salle pleine. Le souvenir de Jean-Christophe lors de ce séminaire est encore très vivace dans ma mémoire, tout comme l'admiration du public qui l'écoutait. Il expliquait comment construire de façon rigoureuse une suite de renormalisations qui, sous la condition de Brjuno, convergent à la transformation linéarisante. Il s'agit d'une approche géométrique très fine qui, grâce à une étude quantitative poussée des propriétés de cette suite de renormalisations, lui permet d'aboutir aussi à la construction de contre-exemples dès que la condition de Brjuno est violée. D'autre part, je me souviens de n'avoir pas bien compris ce qu'il racontait, les techniques de la preuve me passaient complètement au-dessus de la tête... Mais j'avais travaillé sur quelque chose de très proche, l'estimation numérique du rayon de convergence de la linéarisation du polynôme quadratique. J'avais calculé ce rayon pour dix mille nombres de rotation et j'avais fait un graphique un peu surprenant [1]. Suivant le conseil de Palis je l'ai montré à Jean-Christophe : initialement il fut un peu sceptique mais on a commencé à discuter ensemble.

Pendant des heures Jean-Christophe m'expliquait son travail au cours de longues promenades dans le parc du château de Maximilien d'Autriche à Grignano (Trieste). Je n'oublierai jamais la passion et l'enthousiasme qu'il manifestait, mais aussi sa patience et sa gentillesse (il a dû les pratiquer beaucoup avec moi, à cette occasion déjà mais surtout durant les vingt-huit années suivantes... Car je l'interrompais toujours aussi souvent pour demander des explications).

C'était le début d'une collaboration et d'une amitié qui ont profondément changé ma vie.

Orsay, Florence, Paris, Cetraro, Udine : 1990-2000. Après cette rencontre à Trieste, Pierre Moussa et moi avons commencé à travailler avec Jean-Christophe sur les propriétés de la fonction de Brjuno. On voulait explorer le caractère « modulaire » codifié par l'équation fonctionnelle qui la définit.

À partir de 1990 et pendant 9 ans, j'ai été maître de conférences à Florence et j'avais la chance d'avoir tout mon enseignement concentré sur un semestre. J'étais donc libre de passer à Paris plusieurs mois par an. Jean-Christophe et Pierre sont eux aussi passés régulièrement par Florence et nous avons donc fini par nous retrouver souvent.

Faire des mathématiques avec Jean-Christophe était très exigeant, très prenant, mais c'était aussi un grand plaisir : on commençait tôt le matin, Jean-Christophe et moi (tôt pour moi, à 7h30-8 heures, mais Jean-Christophe était déjà actif depuis quelques heures...) avec Pierre qui nous rejoignait plus tard (merci Pierre, ceci me donnait la chance d'écouter une deuxième fois Jean-Christophe expliquer au tableau ce qu'il avait fait à l'aube, et le temps de mieux réfléchir sur ce qu'on essayait de faire depuis deux-trois heures...). Pendant les moments de pause, les discussions étaient aussi passionnantes et passionnées que quand on faisait des mathématiques. Petit à petit, je suis arrivé à connaître Jean-Christophe très bien, et à l'admiration du mathématicien s'est ajoutée l'affection pour un ami généreux, très vivant et plein d'intérêts : il aimait la musique, la littérature et l'art. Il aimait jouer aux échecs, au poker mais aussi à la pétanque et il suivait assidûment l'actualité sportive (du rugby qu'il avait pratiqué quand il était étudiant, au curling...). Les discussions sur le dernier match de foot entre l'Italie et la France pouvaient durer longtemps et amener au sabotage de la démonstration d'une proposition...

En 1998 nous avons organisé une école CIMECIME à Cetraro sur les petits diviseurs : les cours étaient donnés par Jean-Christophe, Eliasson, Herman, Kuksin et Mather mais il y avait aussi une très belle plage... Jean-Christophe était à Cetraro

1. Le graphique suggérait que la fonction qui donne la condition de Brjuno interpolait le rayon de convergence de façon continue, une version faible d'une conjecture que Moussa, Yoccoz et moi avons énoncée dans un article en 1994. La continuité a été démontrée dix ans plus tard par Xavier Buff et Arnaud Chéritat.

avec sa femme et son fils. Il y avait aussi ses étudiants, son directeur de thèse, de belles mathématiques à raconter et à écouter, la mer Tyrrhénienne, les dîners gourmands, la musique et la danse.

La même année, en automne, Jean-Christophe a commencé aussi à nous parler de l'espace de Teichmüller et des transformations d'échange d'intervalles : il avait décidé de se lancer dans ce sujet, qui l'avait passionné depuis qu'il était étudiant et qu'il avait suivi le fameux séminaire sur les travaux de Thurston organisé à la fin des années 1970 à Orsay par Fathi, Laudenbach et Poenaru. Giovanni Forni venait de montrer qu'on pouvait résoudre sous certaines conditions l'équation cohomologique pour les flots linéaires sur les surfaces de translations et nous décidâmes de comprendre un peu mieux la nature du problème de petits diviseurs associé, en cherchant notamment à rendre explicites les conditions arithmétiques suffisantes pour résoudre ce type d'équations. Après une année dédiée à essayer de construire une généralisation de l'algorithme des fractions continues au moyen de train tracks, nous découvrîmes (à Udine en 1999) le travail d'Anton Zorich qui nous indiqua la bonne façon d'attaquer le problème.

Loctudy, Collège de France, Pise, Sienne, Bonn, Stockholm : 2001-2012. Jean-Christophe et moi sommes en vacances mathématiques en juillet 2001 dans sa maison de famille à Loctudy : je découvre la Bretagne, l'île de Sein, la Pointe du Raz, la passion de Jean-Christophe pour les longues promenades, le kayak, le bateau, les crêpes et les galettes (du même ordre de grandeur que la passion pour « la pizza » que j'ai toujours exploitée sans pudeur pour l'attirer en Italie).

Jean-Christophe voyageait beaucoup quand il n'était pas occupé par son cours au Collège de France, où il avait été nommé professeur en 1996. Néanmoins, à partir de 2001 il a visité régulièrement l'École normale supérieure à Pise où je suis professeur. Il venait souvent aussi à Sienne où j'habite avec ma famille. Il est avec nous le jour du baptême de mon fils aîné en 2001.

Au printemps 2004, il a donné un cours à l'ÉNS de Pise dans le cadre de la chaire De Giorgi-Venturi de l'université franco-italienne : il a habité durant trois mois à Pise dans un petit appartement du Collège Puteano sur la Piazza dei Cavalieri. Il a su maintenir une étonnante frugalité tout au long de sa carrière.

Il rencontre à cette occasion Luca Marchese, qui obtiendra son doctorat en cotutelle entre l'ÉNS Pise et Orsay sous la direction de Jean-Christophe et de moi-même. L'héritage de Jean-Christophe en mathématiques ne se limite pas à la profondeur et à l'originalité de ses contributions mais continue grâce à ses nombreux élèves. Il a été un grand maître : il dédiait temps, passion et énergie à ses étudiants avec une très grande générosité.

Jean-Christophe avait un grand respect pour les gens et il était capable d'écouter et de se confronter avec les opinions des autres tout en restant ferme dans ses convictions. Mais je me souviens de l'avoir entendu plusieurs fois défendre le point de vue que l'intelligence implique la capacité d'adapter les idées aux faits plutôt que le contraire : il aimait maintenir une cohérence méthodologique plutôt qu'idéologique sur beaucoup de sujets (pas seulement en mathématiques).

Notre travail sur les surfaces de translations et sur les transformations d'échange d'intervalles non-linéaires a beaucoup progressé lors de longs séjours à Bonn et à Stockholm : Jean-Christophe s'était lancé tout entier dans le domaine. Mais c'est en 2009 à Bonn que nous avons eu de très belles discussions avec Don Zagier au bistrot en bas de l'Institut Max Planck sur les formes modulaires quantiques et la (possible) relation avec la fonction de Brjuno : la vitesse et l'originalité des échanges mathématiques entre Don et Jean-Christophe étaient absolument étonnantes et je suis très reconnaissant à ma chance d'en avoir été témoin.

27 septembre 2012. Je reçois un courrier électronique de Jean-Christophe :

> Cher Stefano,
> J'ai de sérieux problèmes de santé (diagnostiqués en début de semaine) qui vont m'amener à passer pas mal de temps à l'hôpital ces prochaines semaines (j'ai annulé mon voyage à Hong-Kong). Je ne sais pas si tu as déjà pris ton billet pour la première semaine de novembre, mais en l'état, il ne me paraît pas raisonnable de maintenir ta visite (sauf évidemment si tu as d'autres choses à faire à Paris). Désolé de ce contretemps. Je te tiendrai au courant de l'évolution des choses.

Peu après nous nous parlons au téléphone. Il m'explique ce qu'il a. Je pense à mon père qui a eu la même maladie, à comment cela s'est mal passé...

mais c'était dans les années 1968-1972, et je me répète : « aujourd'hui ce n'est pas la même chose ».

2013-2016. Jean-Christophe a su maintenir une sérénité et un courage exemplaires durant toutes les quatre années de sa maladie. Il ne se plaignait jamais. Son exemple est immense.

Il aimait les mathématiques et la vie comme très peu ont été en mesure de le faire. En 2014 dans une interview il a déclaré

> pour moi, le plus important, c'est le plaisir que je prends à faire des mathématiques. Un plaisir esthétique proche de celui ressenti par un artiste qui crée une œuvre. Ce sentiment a toujours été le moteur de mon travail et il ne m'a jamais quitté.

Et ainsi restera-t-il dans la mémoire de tous ceux qui ont eu le privilège de le connaître.

Je remercie Bassam Fayad et Sébastien Gouëzel pour leur relecture soigneuse de mon texte.

La France mathématique de la III^{e} République avant la Grande Guerre
Hélène Gispert
Société Mathématique de France, 2015. 358 p. ISBN : 978-2-85629-797-1

La Société Mathématique de France a eu l'heureuse initiative de rééditer l'ouvrage d'Hélène Gispert, *La France mathématique*[a] qui était épuisé depuis fort longtemps. L'auteur a choisi à l'occasion de cette réédition de conserver le texte original en l'accompagnant d'une longue préface qui met en perspective ce texte datant de 25 ans en regard des différentes dynamiques de recherche apparues depuis et concernant les communautés mathématiques, l'enseignement des mathématiques, l'histoire des pôles scientifiques, la circulation des mathématiques...

Hélène Gispert se proposait en 1991 d'étudier la communauté mathématique française et sa production durant le dernier tiers du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle, à partir d'une étude des membres de la jeune Société Mathématique de France (SMF)[b]. À cette fin, Hélène Gispert avait réalisé une base de données biographiques et bibliographiques des membres de la SMF. L'analyse quantitative de cette population et de ce corpus était alors confrontée à des études plus qualitatives centrées sur des thèmes comme les circonstances académiques de la création de la SMF, les bouleversements institutionnels du monde universitaire dans les années 1880, la place des mathématiques au tournant du XX^{e} siècle, l'évolution des divers domaines des mathématiques et le développement d'une nouvelle école d'analyse française. Dans les années 1990, comme cela a été souligné par de nombreux commentateurs[c], envisager de centrer un travail en histoire des mathématiques sur une telle analyse quantitative était novateur ; depuis, avec la mise à disposition d'outils numériques faciles d'accès et celle, à partir des années 2000 des bases bibliographiques électroniques (*Jahrbuch*, *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, *Zentralblatt*, *Mathematical Reviews*...) ou de bibliothèques virtuelles de journaux mathématiques (Numdam, la collection Mathematica du Göttinger Digitalisierungzentrum...)[d], ce type de travaux s'est multiplié en même temps que les approches fondées sur des analyses de collectifs, de population ou de corpus. En même temps, avec le développement de ces méthodes, se sont développées les approches historiques des questions de circulation, de diffusion, de transmission ou d'enseignement.

Hélène Gispert faisait apparaître la nécessité de relativiser la thèse (qui est encore souvent défendue) du déclin de la science française durant la deuxième moitié du XIX^{e} siècle en montrant que, si l'on peut parler d'une quasi absence dans les années 1870 de contributions françaises dans des champs novateurs développés à la suite des travaux de Gauss, Riemann ou Weierstrass en analyse ou à partir de ceux de Cayley et Sylvester en algèbre, les mathématiciens français restent malgré tout très actifs dans leurs domaines de prédilection comme la géométrie infinitésimale ou la physique mathématique. De même, elle montrait que l'apparition de la nouvelle école d'analyse (Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue) était à penser en même temps que l'inversion des hiérarchies entre l'École polytechnique et l'École normale supérieure, le développement des universités de province, l'analyse du corpus des thèses[e], l'internationalisation de la science et l'organisation des congrès internationaux des mathématiciens, le contexte scientiste des débuts de la III^{e} République, la question de la modernité (par le biais de la discussion sur les enjeux sociaux des mathématiques).

Dans son introduction de la nouvelle édition, Hélène Gispert souligne que la vision de son ouvrage à travers les lunettes de la SMF reste trop parcellaire en oubliant une grande partie du monde de l'enseignement, à savoir celui de l'ordre primaire [f] qui pourtant aura son mot à dire au moment de la réforme des lycées de 1902 [g] et par lequel vont passer plusieurs des acteurs importants de la France mathématique au XXe siècle, à commencer par E. Borel et H. Lebesgue. La facette provinciale de la France mathématique est aussi en partie masquée par le filtre de la population des membres de la SMF (ainsi que par celui du quasi monopole parisien dans la délivrance des doctorats). De même, le filtre de la SMF tire la description de la France mathématique vers les mathématiques pures marginalisant l'activité d'institutions comme le bureau des longitudes ou la formation des ingénieurs.

Dans l'introduction de la seconde édition, Hélène Gispert propose à partir de la relecture de son ouvrage de dresser une cartographie différentielle de la France mathématique au tournant du XXe siècle qui complexifierait la notion de cadre national en fonction des thématiques, des pratiques, des institutions, des différents systèmes de formation, des dynamiques sociales et scientifiques, qui donnerait toute leur épaisseur aux agents opérant dans des institutions comme le Conservatoire national des arts et métiers, dans des sociétés comme l'association française pour l'avancement des sciences, dans des contextes comme celui de la promotion de la science et du progrès technique...

En 1991, l'ouvrage d'Hélène Gispert était indispensable pour ceux qui étaient intéressés par l'histoire des mathématiques de la période contemporaine à la fois par les résultats nouveaux qu'il proposait et par le programme de recherche qu'il visait, à savoir, comme B. Belhoste le disait à l'époque, « dégager, par-delà l'étude de quelques grandes figures de la science mathématique, les caractères généraux – intellectuels, culturels, professionnels, institutionnels – de toute une communauté ». Il avait fait date, comme on l'a souligné plus haut, de par sa méthodologie confrontant méthodes quantitatives et analyses qualitatives. En confrontant le texte original de 1991 aux travaux en histoire des sciences mathématiques de la fin du XIXe et du début du XXe siècles menés depuis, l'introduction de la nouvelle édition donne à cet ouvrage un nouveau relief : en acquérant cette dimension réflexive, l'ouvrage devient aussi une contribution importante à l'histoire des dynamiques opérant dans le champ de l'histoire des sciences mathématiques aux XIXe et XXe siècles.

Philippe Nabonnand
Université de Lorraine

---

a. Hélène Gispert, La France mathématique : la Société mathématique de France, 1870-1914, *Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences*, nouvelle série, nº 34, 1991. Dans cette édition, le texte d'Hélène Gispert était accompagné de 5 études qui sont accessibles sur le site de la SMF (`http://smf4.emath.fr/Publications/LaSerieT/2015/3/html/smf_la-serie-t_3.php`).

b. La SMF est fondée en 1872.

c. Voir par exemple, les recensions de cet ouvrage par Bruno Belhoste en 1994 dans l'*Histoire de l'éducation*, par Amy Dahan Dalmedico en 1993 dans la *Revue d'Histoire des sciences* ou l'article de Catherine Goldstein, Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914, *Acta historiae rerum naturalium technicarum*, 3 (1999), p. 186-214.

d. À l'époque, la réalisation de cette base s'était faite « à la main » en consultant les volumes du *Bulletin de la Société mathématique de France* et du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.

e. La *France mathématique* propose en annexe les rapports sur les thèses des membres de la Société mathématique de France. Ce corpus est particulièrement pertinent pour analyser les dynamiques des thèmes de recherche en France pendant cette période.

f. Comme le signale Hélène Gispert, l'ordre primaire est constitué du primaire élémentaire, des écoles primaires supérieures, des écoles normales primaires et des écoles normales primaires supérieures (Saint-Cloud et Fontenay). L'ordre primaire forme les enfants des classes populaires et moyennes, soit à peu près 97% de la population scolarisée. Les programmes dans l'ordre primaire accordent une place beaucoup plus importante aux sciences alors que ceux de l'enseignement secondaire restent pour l'essentiel structurés dans la tradition des humanités, ce qui expliquent en partie l'importance de cette voie de formation dans les débats autour de la réforme des lycées de 1902.

g. Un des objectifs de cette réforme était introduire une filière avec un fort contenu en sciences et en langues vivantes.

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 Paris cedex 05

Tél : (33) 1 44 27 67 96
Fax : (33) 140 46 90 96
Mél : smf@dma.ens.fr

Association fondée en 1872, reconnue d'utilité publique par décret du 11 février 1888

http://smf.emath.fr

COTISATION INDIVIDUELLE 2017

Nom : ....

Prénom: ....

Adresse : ....

....

....

....

Téléphone : ....

Fax : ....

e-mail : ....

Je ne souhaite pas recevoir des informations par email ❒

Je ne souhaite pas figurer dans l'annuaire électronique ❒

Entourer les options choisies

Cotisations SMF	
SMF	70 €
SMF membre bienfaiteur	150 €
SMF/SFdS	97 €
SMF/SMAI	93 €
SMF/SFdS/SMAI : s'adresser directement au secrétariat de la SFdS	

Cotisations SMF à tarif réduit	
SMF retraité-e	50 €
SMF ≤ à 35 ans	25 €
SMF conjoint-e	20 €
SMF réciprocité	37 €
SMF/SMAI retraité-e	90 €
SMF/SMAI ≤ 35 ans	50 €
Membres des sociétés partenaires : UPS, femmes et maths, APMEP, SIF	48 €

Dons > 8 €	
Société Mathématique de France	..... €
CIMPA	..... €

SME	
SME	25 €

Abonnements (facultatifs)			
	Electronique	Papier + électronique Europe	Papier + électronique hors Europe
Annales de l'ÉNS	420 €	531 €	574 €
Astérisque	350 €	469 €	511 €
Bulletin	95 €	130 €	148 €
Mémoires	79 €	119 €	142 €
Bulletin et Mémoires	174 €	249 €	290 €
Revue d'histoire des mathématiques	45 €	67 €	76 €

PAIEMENT et INDICATIONS : voir au verso

INDICATIONS

Cotisations :

- *Cotisation « SMF »* : donne droit à la Gazette.
- *Cotisation « SMF+SMAI »* : donne droit à la Gazette et à Matapli.
- *Cotisation « conjoint(e) »* : accessible à tout conjoint d'un membre SMF, elle donne droit à la carte de membre et au vote lors de l'Assemblée Générale (mais pas à la Gazette).
  Nom du conjoint : ……………………………………………………………….
- *Cotisation « Sociétés partenaires »* : tarif réservé aux adhérent(e)s de « Femmes & mathématiques », aux adhérents de l'UPS, de l'APMEP et de la SIF. Pour une adhésion groupée SMF/SMAI/SfdS, s'adresser directement au secrétariat de la SfdS (sfds@ihp.jussieu.fr).
- *Cotisation « SME »* : si vous êtes membre de la SMF et que vous désirez adhérer à la SME, la SMF peut recueillir votre cotisation en euro (avant le 31/01/2017) et la transmettre.
- *Cotisations « AMS, SMJ, SMS et SMB »* : pour des raisons administratives et fiscales, nous vous demandons de bien vouloir effectuer votre paiement directement auprès de ces sociétés en mentionnant votre appartenance à la SMF. Le tarif réduit est maintenu, mais la SMF n'assure plus le transfert des cotisations.
- *Cotisation « réciprocité »* : tarif réservé uniquement aux adhérent(e)s des Sociétés avec lesquelles la SMF a des accords de réciprocité et qui ne résident pas en France (voir liste sur le serveur de la SMF).

J'atteste sur l'honneur être membre de la Société Mathématique suivante :
....

et bénéficie à ce titre du tarif préférentiel fixé par accord de réciprocité.

Membre bienfaiteur :

La cotisation à 150 € ouvre droit à une déduction fiscale sur une partie du montant assimilé à un don (80 euro). Un reçu fiscal vous sera envoyé à réception.

Dons :

Seuls les dons ouvrent droit à une déduction fiscale. Des reçus fiscaux vous seront envoyés par la SMF.

Abonnements électroniques :

Accessibles aux abonnés. Les abonnés doivent donc, après avoir effectué leur règlement, remplir le formulaire électronique pour indiquer le numéro IP de leur machine (http://smf4.emath.fr/Publications/EditionsElectroniques/DemandeAcces.cgi).

Délai de réglement :

En cas de réadhésion tardive (après le 1/3/2017), la distribution de la Gazette sera assurée uniquement dans la mesure des stocks disponibles

Modalités de paiement :

Il est possible d'effectuer votre paiement via le site web de la SMF (http://smf.emath.fr/content/adherents).
Les adhérent(e)s SMF ne résidant pas en France sont priés d'effectuer leur paiement de préférence par carte bancaire. Pour les paiements par chèque bancaire étranger, merci de rajouter **15 euro** pour la prise en charge des frais bancaires.

PAIEMENT	
Chèque bancaire à l'ordre de la SMF** Banque : .... N° du chèque : .... **Carte bancaire (visa, mastercard)** N° : .... Date d'expiration : .... Cryptogramme :	**TOTAL**** = ... Date : Signature :

Cadre réservé à la SMF
Paiement le :
Crédit le :


Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France
un texte,
un mathématicien
2017
mercredi 18 janvier 18h30
Jean-Paul Laumond
LAAS CNRS, Toulouse
Poincaré et la robotique :
la géométrie pour agir par le mouvement
mercredi 22 février 18h30
Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan de Lorraine, Nancy
Paul Erdös et l'anatomie
des nombres entiers
mercredi 22 mars 18h30
San Vũ Ngọc
IRMAR, université Rennes 1
De l'horloge de Huygens
à l'équation
de Schrödinger :
un monde d'oscillations
mercredi 26 avril 18h30
Agnès Desolneux
ENS Cachan
Buffon et le hasard
en géométrie
BnF
Société
Mathématique
de France
SMF
Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre – http://smf.emath.fr/BNF/2017

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.