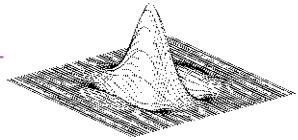
Des ondelettes pour comprimer une image



Stéphane Mallat

Qu'elles soient stockées numériquement dans des mémoires informatiques ou qu'elles voyagent à travers Internet, les images occupent beaucoup de place. Heureusement, il est possible de les « condenser » sans altérer leur qualité !

Figure 1. Ces trois images illustrent la puissance des méthodes de compression actuelles. L'image originale (A) est constituée de 512 x 512 points, chacun d'eux ayant un certain niveau de gris, pris dans une palette de 256 niveaux. L'image (B) est le résultat d'une compression par un facteur 8, réalisée en réduisant les niveaux de gris à 2 valeurs possibles seulement (noir ou blanc). L'image (C) a été obtenue de (A) par une compression d'un facteur 32 en utilisant une base d'ondelettes. La différence de qualité avec l'image initiale est à peine perceptible. (Illustration auteur)

Une image numérisée se comprime, tout comme un jus d'orange que l'on réduit à quelques grammes de poudre concentrée. Il ne s'agit pas d'un tour de passe-passe, mais de techniques mathématiques et informatiques permettant de réduire la place occupée par une image dans un ordinateur ou dans un câble de communication. Elles sont aujourd'hui indispensables pour stocker de l'information ou la transmettre par Internet, téléphone, satellite ou autre.

La compression d'une image revient à représenter celle-ci à l'aide d'un nombre réduit de paramètres, en éliminant les redondances. Un exemple caricatural aidera à comprendre l'idée de principe : dans le cas d'une image uniformément blanche, il est inutile de préciser explicitement pour chacun de ses points le niveau de gris correspondant ; cela serait beaucoup plus long que d'énoncer : « tous les points de l'image sont blancs ». Le problème de la représentation est un sujet central en mathématiques, et ses applications vont bien au-delà de la compression de données. Durant ces dix dernières années, des avancées considérables ont eu lieu grâce au développement de la théorie des *ondelettes*. Dans le domaine du traitement d'images, ces progrès ont abouti à l'adoption du nouveau standard de compression JPEG-2000. Cette histoire a de nombreux méandres, qui illustrent bien le rôle des mathématiques dans le paysage scientifique et technologique moderne.

Trente-deux fois moins de place grâce aux ondelettes

Considérons une image comme celle de la figure 1A. Elle est constituée de 512 x 512 points, dont les niveaux de gris peuvent varier de 0 (noir) à 255 (blanc). Chacun des 256 niveaux de gris possibles peut être représenté par un octet, c'est-à-dire un nombre binaire constitué de 8 bits (un octet est donc simplement une suite de 8 chiffres 0 ou 1, comme 11 010 001). Il faut donc 512 x 512 x 8 = 2 097 152 bits pour coder une seule image de ce genre, ce qui est beaucoup ! Première idée qui vient à l'esprit pour réduire le nombre de bits : diminuer le nombre de niveaux de gris, par exemple en se limitant à du blanc ou du noir, comme dans la figure 1B. Les deux valeurs possibles du niveau de gris se codent avec un seul bit (valant 0 ou 1), et l'on a ainsi diminué le nombre de bits par 8. Évidemment, la qualité de l'image s'est beaucoup dégradée. Regardez maintenant l'image de la figure 1C. Elle est codée avec 32 fois moins de bits que l'image originale, par une méthode utilisant la théorie des ondelettes ; pourtant, la dégradation est à peine perceptible ! Pourquoi ? Parce qu'au lieu de réduire la précision, c'est la manière de représenter l'information qui a ici été changée.

Au commencement était l'analyse de Joseph Fourier…

Comme on l'a dit, l'image numérisée est définie par les 512 x 512 nombres qui spécifient l'intensité lumineuse en chaque point. On peut donc interpréter cette image comme un point dans un espace à 512 x 512 dimensions — de la même façon qu'un point sur une surface, espace à deux dimensions, peut être repéré par deux coordonnées — et se demander quels sont les axes de coordonnées les plus appropriés pour représenter un tel point. Un système d'axes (ici de nature plus abstraite que les axes familiers de la géométrie élémentaire) définit ce que l'on appelle une *base*.

Une première avancée fondamentale a été réalisée par le mathématicien-physicien Joseph Fourier en 1802, dans son mémoire à l'Académie des Sciences sur la propagation de la chaleur, sujet *a priori* sans relation avec notre problème. Fourier a notamment montré que, pour représenter de façon compacte et commode une fonction $f(x)$ (du point de vue mathématique, une telle fonction est un point dans un espace ayant une infinité de dimensions), on peut utiliser des « axes » construits à l'aide d'un ensemble infini de fonctions sinusoïdales. En des termes un peu plus précis : Fourier a montré que l'on peut représenter une fonction $f(x)$ par une somme d'une infinité de fonctions sinus et cosinus de la forme sin (ax) ou cos (ax), chacune affectée d'un certain coefficient.

Ces « bases de Fourier » sont devenues un outil essentiel, d'usage extrêmement fréquent dans les sciences, car elles servent à représenter de nombreux types de fonctions, donc de nombreuses grandeurs physiques. En particulier, on les utilise aussi pour représenter des sons ou des images. Et pourtant, les ingénieurs savent bien que ces sinusoïdes sont loin d'être idéales pour des signaux aussi complexes que des images : elles ne représentent pas efficacement des structures transitoires telles que les contours de l'image.

…puis est venue la « transformée en ondelettes »

Les spécialistes du traitement des signaux n'étaient pas les seuls à prendre conscience des limitations des bases de Fourier. Dans les années 1970, un ingénieur-géophysicien français, Jean Morlet, s'est rendu compte qu'elles n'étaient pas le meilleur outil mathématique pour explorer le sous-sol ; cela conduisit à l'une des découvertes — dans un laboratoire d'Elf-Aquitaine — de la *transformée en ondelettes*. Cette méthode mathématique, fondée sur un ensemble de fonctions de base différentes des fonctions sinusoïdales utilisées dans la méthode de Fourier, remplace avantageusement la *transformée de Fourier* dans certaines situations. Par ailleurs, dès les années 1930, les physiciens s'étaient rendu compte que les bases de Fourier n'étaient pas bien adaptées pour analyser les états d'un atome. Cela a été à l'origine de nombreux travaux qui ont, ultérieurement, beaucoup apporté à la théorie des ondelettes. C'est aussi vers les années 1930 que des mathématiciens se sont mis à tenter d'améliorer les bases de Fourier pour analyser des structures singulières localisées, ce qui a ouvert un important programme de recherche toujours très vivant. Autrement dit, une multitude de communautés scientifiques ont développé, avec les moyens du bord, des modifications des bases de Fourier. Dans les années 1980, Yves Meyer, un mathématicien français, a découvert les premières bases d'ondelettes orthogonales (l'orthogonalité désigne une propriété qui facilite beaucoup les raisonnements et les calculs ; les bases de Fourier sont également orthogonales). Cette découverte, suivie de quelques rencontres inopinées autour de photocopieuses ou de tables de café, ont déclenché en France un vaste mouvement scientifique pluridisciplinaire, dont l'impact international fut considérable. Les applications de la théorie et des algorithmes d'ondelettes ont fait leur chemin non seulement dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques, mais sont aussi à l'origine de la création de plusieurs entreprises aux États-Unis.

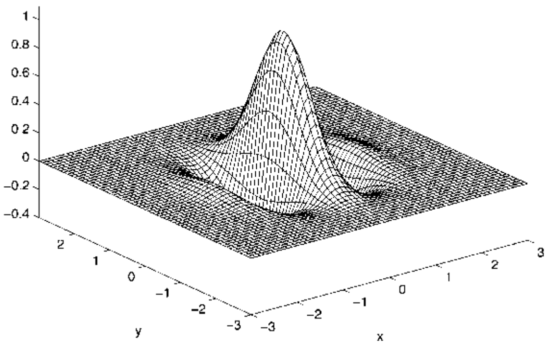


Figure 2. Le graphe d'une ondelette utilisée dans la compression d'images.

Les mathématiques des ondelettes ont joué un rôle de pivot dans nombre de domaines

Les mathématiques ont eu ici un rôle fondamental, à la fois de catalyse, de nettoyage et d'approfondissement. En dégageant les concepts fondamentaux des applications spécifiques, elles ont permis à des scientifiques de domaines très divers — en physique, en traitement du signal, en informatique, etc. — de se rendre compte qu'ils travaillaient sur le même outil. Aller au-delà, affiner ces outils, contrôler leurs performances : ce sont les travaux mathématiques modernes sur l'analyse de Fourier qui ont rendu tout cela possible. Enfin, cette théorie a donné une technique standard de calcul scientifique (la *transformée en ondelettes rapide*) grâce à une collaboration entre mathématiciens et spécialistes du traitement des signaux. L'image de la figure1C a ainsi été obtenue grâce aux mêmes bases d'ondelettes que celles utilisées en statistique, en sismique, ou en calcul scientifique, avec le même algorithme rapide. Et à travers le standard international JPEG-2000 pour la compression d'images, ces ondelettes envahissent actuellement tous les domaines de l'image, de l'Internet aux appareils photos numériques, et se dirigent vers les satellites.

Un pont reste à construire entre le monde des ondelettes et le monde de la géométrie

Les bases de Fourier n'étaient pas bien adaptées à l'analyse des phénomènes transitoires, tandis que les bases d'ondelettes le sont. Est-ce la fin de l'histoire ? Non. En traitement d'images, comme dans tous les autres domaines où les ondelettes sont devenues un outil de base, chacun bute actuellement sur le même type de problème : exploiter les régularités géométriques. En effet, on sait qu'une image, même complexe, est remarquablement bien représentée par un simple dessin composé de relativement peu de traits, et l'on peut souvent assimiler les contours des objets figurant dans l'image à des courbes géométriques assez simples. Mettre à profit ces courbes et leur régularité devrait donc permettre d'améliorer considérablement les résultats obtenus jusqu'à présent ; mais la théorie des ondelettes n'en est pour l'instant pas capable. Construire ce pont avec le monde de la géométrie pose des problèmes mathématiques difficiles. Cependant, l'enjeu scientifique et industriel étant important, on peut s'attendre à ce qu'il soit construit dans les dix années à venir. En France ?

Stéphane Mallat
Département de mathématiques appliquées,
École polytechnique, Palaiseau

Quelques références :

- B. B. Hubbard, *Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique* (Pour la Science/Belin, 1995).
- S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes* (École polytechnique/Ellipses, 2000).
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents* (Hermann, 1992).