# ŒUVRES MATHÉMATIQUES

## VOLUME I

**René THOM**

*DOCUMENTS MATHÉMATIQUES*

***série dirigée par Pierre Colmez***

***Secrétariat : Nathalie Christiaën***
DOCUMENTS MATHÉMATIQUES
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
christia@dma.ens.fr • http://smf.emath.fr/



ISSN : 1629-4939

ISBN 978-2-85629-816-9

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 15

# ŒUVRES MATHÉMATIQUES

## VOLUME I

René THOM

Société Mathématique de France 2017

# TABLE DES MATIÈRES



(1) Les nombres entre crochets et en caractères gras renvoient à la bibliographie.

RENÉ THOM

Congrès international des mathématiciens, Nice 1970

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# PRÉFACE

Toute grande œuvre naît de la rencontre entre l'air du temps et une personnalité singulière. Dans le cas de René Thom, l'air du temps était exceptionnellement favorable : à la fin de la seconde guerre mondiale, il fallait reconstruire le monde sur de nouvelles bases ; en mathématiques, l'école qui s'est alors constituée autour d'Henri Cartan y a contribué avec une étonnante clairvoyance.

Thom est un des premiers membres de cette école et l'un des plus glorieux, mais d'emblée à part : provincial, né hors du sérail universitaire, il avait acquis très jeune une connaissance intime du calcul différentiel tel que ses fondateurs le concevaient ; à rebours de son temps, il ne se méfiait donc nullement de la géométrie, où il avait développé son intuition jusqu'à « voir » en dimension quatre ; enfin, ayant suivi Henri Cartan à Strasbourg comme jeune chercheur du CNRS, il y est resté après le départ de son maître, bénéficiant en particulier de l'influence de Charles Ehresmann.

Ainsi nanti d'une vision du monde différente (et complémentaire) de celle des « Parisiens », Thom a pu résoudre des questions fondamentales auxquelles d'autres n'auraient sans doute pas pensé à cette époque.

Quelques jalons :

– De 1949 à 1956, Thom travaille en topologie algébrique et élabore « une manière complètement neuve d'étudier les variétés différentiables » (Milnor), sur lesquelles il obtient ainsi des résultats définitifs, donnant naissance à la théorie du *cobordisme*.

– À partir de 1956 il se concentre sur les singularités d'applications différentiables, qui apparaissaient naturellement dans sa vision de la topologie différentielle. À la suite de Hassler Whitney, il étudie alors les stratifications et introduit la « stratification naturelle des espaces d'applications » précisée ultérieurement par John Mather[(1)].

– Dès le milieu des années soixante, conscient que les singularités d'applications et la transversalité aident à comprendre toutes sortes de phénomènes naturels, il développe une *théorie des catastrophes* ; celle-ci connaîtra une fortune médiatique extraordinaire après la parution de son livre *Stabilité structurelle et morphogénèse* en 1972.

– À la fin des années 1970, l'engouement parfois délirant pour les catastrophes subit un coup d'arrêt brutal, sans doute guère plus justifié que les errements de la mode. À partir de cette date, Thom s'éloigne des mathématiques au profit de la philosophie.

Loin de constituer une suite de reniements, cette trajectoire hors norme (comme le personnage lui-même) témoigne d'une profonde unité de pensée : dès son entrée à l'École Normale Supérieure, Thom était tenté par la philosophie des sciences, dont la direction de l'École a dû le détourner. Ses grands résultats mathématiques ont une connotation philosophique marquée : à une époque où, en France, les modernistes prétendaient affranchir les mathématiques « pures » de la question du sens, Thom ne perd jamais de vue celui-ci, tant dans son œuvre mathématique que dans sa contribution à la linguistique.

Les œuvres *complètes* de René Thom ont fait l'objet en 2003 d'un CD-Rom diffusé par l'IHÉS. Cette somme, produit du gigantesque travail de Michèle Porte et de ses collaborateurs, a bénéficié du concours de Thom lui-même.

La présente publication ne prétend pas se substituer au CD-Rom mais le compléter. Les différences sont les suivantes :

– Nous nous concentrons sur les articles mathématiques, ou au moins répertoriés dans les *Mathematical Reviews*. Il aurait été anormal que l'œuvre mathématique de Thom, qui conserve toute son actualité, ne fasse pas l'objet d'une publication soignée sur un support durable.

– La bibliographie, comme la biographie, complète, corrige et enrichit celle du CD-Rom ; elle recense tous les écrits de Thom, mathématiques ou non.

– Nous avons choisi de reproduire les originaux au lieu de les transcrire en typographie mathématique moderne, évitant ainsi d'y ajouter des fautes. Une exception est constituée de deux inédits remarquables[(2)] dont la version

(1) Cette idée, à laquelle Thom tenait beaucoup, fournit par exemple le cadre des travaux de Jean Cerf sur la pseudo-isotopie et de ceux de Victor Vassiliev sur les invariants des nœuds.
(2) Absents du CD-Rom.

dactylographiée était peu lisible [**27**][3] ; ils figurent dans ce volume 1 assortis de notes et d'un bref commentaire.

– L'appareil critique comporte en effet des commentaires mathématiques ou historiques plus ou moins développés, justifiés par les développements ultérieurs et l'actualité de cette œuvre souvent visionnaire. Certains se trouvent à la suite de l'article sur lequel ils portent ; d'autres servent d'introduction à un ensemble. Après chaque article on peut trouver des notes plus brèves renvoyant à un point précis du texte qui les précède.

Ce volume 1 réunit les articles de Thom publiés entre 1949 et 1960[4] dans l'ordre chronologique de leur parution, *grosso modo* celui des thématiques abordées. Cela comporte en particulier :

– la première publication de Thom, où l'on peut voir l'acte de naissance du complexe de Morse ;

– ses contributions célèbres à la topologie algébrique ;

– les articles fondateurs de la théorie des singularités ;

– l'exposé au séminaire Bourbaki sur la classification par Smale des immersions, suivi de l'article de 1959 où Thom a l'idée du $h$-principe.

Ces textes sont précédés d'une biographie et d'une bibliographie s'appuyant sur les versions antérieures de Michèle Porte, Jean Petitot et, pour la bibliographie, Aurélie Brest, bibliothécaire à l'IHÉS.

**Remerciements.** — Nous remercions :

– Françoise, Elisabeth et Christian Thom, qui nous ont apporté une aide inestimable, nous donnant accès à leurs archives familiales ;

– l'IHÉS, qui a soutenu l'entreprise de multiples manières, la plus précieuse étant sans nul doute de nous avoir ouvert les archives Thom ;

– Aurélie Brest et Sylvie Sallé, bibliothécaires à l'IHÉS, Julie Janody et Bérengère Warneck, bibliothécaires à l'École Normale Supérieure et à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, Alexandra Miric, bibliothécaire à l'Institut de Mathématiques de Jussieu puis à l'Institut Henri Poincaré, Christine Disdier, bibliothécaire à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg et l'équipe des archives de l'Académie des Sciences de Paris, tout particulièrement Florence Greffe, qui nous ont aidés à collecter les documents ;

(3) Les numéros renvoient à la bibliographie.

(4) La rédaction par Harold Levine [**33**] du cours sur les singularités donné à Bonn en 1959 figurera au début du volume 2.

Le comité de rédaction, à géométrie variable selon les volumes, est pour celui-ci formé de André Haefliger(5), initiateur du projet, Marc Chaperon(6) (coordinateur), Alain Chenciner(7), Jean Lannes(8), François Laudenbach(9), Jean Petitot(10), Bernard Teissier(11), David Trotman(12) et Pierre Vogel(8).

Les notes et commentaires sont signés par les initiales de leurs auteurs(13), ici Marc Chaperon (M.C.), André Haefliger (A.H.), Jean Lannes (J.L.), François Laudenbach (F.L.), Jean Petitot (J.P.) et Pierre Vogel (P.V.).

(5) Professeur émérite à l'Université de Genève.

(6) Professeur à l'Université Paris 7, membre de l'IMJ-PRG, UMR 7586 du CNRS.

(7) Professeur émérite à l'Université Paris 7, membre de l'IMCCE, Observatoire de Paris, UMR 8028 du CNRS.

(8) Professeur émérite à l'Université Paris 7, membre de l'IMJ-PRG, UMR 7586 du CNRS.

(9) Professeur émérite à l'Université de Nantes, membre du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR 6629 du CNRS.

(10) Directeur d'études émérite, Centre d'analyse et de mathématique sociales, École des Hautes Études en Sciences Sociales, UMR 8557 du CNRS.

(11) Directeur de recherche émérite, IMJ-PRG, UMR 7586 du CNRS.

(12) Professeur à l'Université d'Aix-Marseille, membre de l'Institut Mathématique de Marseille, UMR 7373 du CNRS.

(13) À l'exception du texte de David Spring sur le $h$-principe.

**La Note de Thom et le complexe de Morse**
*par F. Laudenbach*

La Note de René Thom de 1949, sa première publication mathématique, est une sorte de point de départ pour ce qui sera appelé plus tard le *complexe de Morse*. Dans les lignes qui suivent, je retrace brièvement cette histoire.

**1.** Dans [Bo82], R. Bott écrit : *The stratification goes back to Thom 1949,...* Il s'agit de la stratification par les *nappes de gradient montantes* (*ou descendantes*)[14] d'une fonction de Morse sur une variété compacte sans bord. À ce point, le concept de stratification est à prendre en un sens très faible ; Thom lui-même ne parle que de *partition*.

Toujours dans [Bo82], Bott expose deux méthodes pour prouver les inégalités de Morse : 1) *The level surface method*, 2) *The dynamical systems method.*

La seconde méthode remonte à S. Smale [Sm60]. Dans cet article consacré aux systèmes appelés aujourd'hui *Morse-Smale*, Smale attribue à la Note de Thom une preuve « dynamique », c'est-à-dire par champ de gradient, des inégalités de Morse (*cf.* section 5 de [Sm60]).

En 1949, René Thom, futur orfèvre *ès transversalité*, n'a pas explicité dans sa Note l'hypothèse de transversalité mutuelle de chaque paire de variétés stables et instables ; comme on dit aujourd'hui, il n'a pas supposé que le gradient était un champ *Morse-Smale*. Thom considérait-il la position générale comme allant de soi ? Il reste que cette négligence est mineure puisque la propriété en question est *générique*, donc toujours satisfaite après une petite perturbation du gradient (ou de la métrique riemannienne), comme Smale l'a prouvé dans [Sm61-1]. Toujours est-il qu'une affirmation de la Note de Thom est incorrecte sans l'hypothèse Morse-Smale (voir appendice) et, *stricto sensu*, cette Note ne contient pas de preuve des inégalités de Morse. D'après ses souvenirs racontés dans [Sm90], Smale était parfaitement conscient de la faille dans la Note de Thom.

**2.** Après Thom, l'étape suivante en direction du complexe de Morse est franchie par Smale dans [Sm61-1]. Il y montre l'existence de fonctions de Morse *ordonnées* [. . . ]

[14] Terminologie utilisée par J. Cerf dans [Ce] pour désigner les variétés stables et instables des points critiques.

**Sur les travaux de René Thom en topologie algébrique**
*par J. Lannes et P. Vogel*

Les premiers travaux de Thom concernent essentiellement la topologie algébrique. Les contributions de Thom à ce domaine des mathématiques peuvent être réparties grossièrement en deux parties : l'une concerne les classes caractéristiques et l'autre le cobordisme. A ces contributions, il faut ajouter sa collaboration avec A. Dold.

*Classes caractéristiques*

En 1950 les classes caractéristiques classiques, classes de Chern pour les fibrés vectoriels complexes, classes de Stiefel-Whitney et classes de Pontrjagin pour les fibrés vectoriels réels, étaient déjà définies.

Dans sa thèse [3][15], Thom étend la définition des classes de Stiefel-Whitney aux fibrés en sphères à l'aide des opérations de Steenrod (Steenrod a introduit ces opérations en 1947 [St] et Adem a découvert les relations qu'elles satisfont en 1952 [Ad]). Il en déduit en particulier que les classes de Stiefel-Whitney d'une variété différentiable (par définition, celles de son fibré tangent) ne dépendent pas de la structure différentiable. Signalons que juste après ces travaux de Thom, Wu précise que, dans le cas compact, ces classes sont en fait des invariants d'homotopie [Wu]. Les résultats de [3] ont été préalablement annoncés dans les notes [1] et [2].

On peut également remarquer que la théorie moderne des fibrations sphériques est en germe dans [3]. Thom pressent l'importance de cette notion et pose la question de la bonne définition du foncteur déterminant les fibrations sphériques et de la nature du classifiant correspondant ; tout cela sera clarifié ultérieurement par Spivak [Sp].

Après ces travaux sur les classes de Stiefel-Whitney, Thom aborde le problème du cobordisme et ramène entièrement la détermination des groupes de cobordisme à des calculs de groupes d'homotopie de certains spectres (Thom n'utilise pas cette terminologie mais le concept de spectre est implicite dans [7]). En utilisant l'expression, donnée en 1953 par Hirzebruch [. . . ]

(15) Les numéros renvoient à la bibliographie figurant, pour la commodité du lecteur, à la fin de cette introduction.

Cartan envoie à Thom de Dolomieu le 10 septembre cette lettre dont voici un extrait :

« Nous voici à 5 jours de la date à laquelle, en principe, vous auriez dù déposer votre texte à la Sorbonne... Et je n'en suis qu'à vous renvoyer votre Chap. III (et encore, peut-être pas tout entier). Je me demande comment tout cela va finir. Je ne pourrai envoyer mon rapport à la Sorbonne qu'après avoir eu en mains un exemplaire du texte polycopié que vous y aurez déposé ; quand ? En tout cas il est clair qu'il faut renoncer au Chap. VI, si intéressantes que puissent être certaines idées directrices, faute de temps pour les tirer au clair. Vous aurez encore à travailler à les mettre au net, une fois que vous serez à Princeton ; et peut-être Steenrod pourra-t-il vous être de quelque secours. Cela vous donnera l'occasion de faire une publication là-bas ; sans parler des autres sujets que vous avez en tête. »

Thom a soutenu sa thèse à la faculté des sciences de Paris en octobre 1957, donc juste avant son départ pour Princeton. Le sujet de sa seconde thèse était le théorème ergodique de G. Birkhoff (voir ci-après la page de garde du manuscrit de sa thèse).

A. H.

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE PARIS.

Pour obtenir le grade de Docteur ès-Sciences

par

René THOM

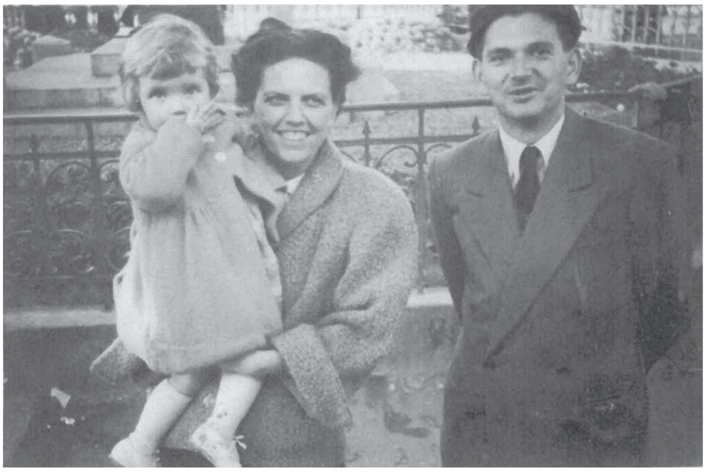
---

1ère THESE : Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod.

2ème THESE : Propositions données par la Faculté :
Le Théorème ergodique de G.BIRKHOFF.

Soutenues le octobre 1951 devant la Commission d'Examen

| | | |
|---|---|---|
| G.VALIRON | – | Président |
| H.CARTAN | : | Examinateurs |
| A.LICHNEROWICZ | : | |



Françoise, Suzanne et René Thom enfin réunis après le séjour à Princeton

Archives de la famille Thom

## Lettres de Princeton, 1952

Lors de son premier séjour aux États-Unis, René Thom a écrit très régulièrement à Suzanne, sa femme. Nous remercions leurs enfants Françoise, Élisabeth et Christian d'avoir bien voulu nous communiquer ces lettres(1).

Thom avait étudié l'allemand et, comme les meilleurs élèves de son époque, le latin et le grec, mais pas l'anglais ; séparé de sa femme et de leur fille nouvelle-née, probablement usé par les remaniements successifs de sa thèse(2), il a donc très mal vécu le début de son séjour à Princeton : crises d'angoisse, vertiges, maux d'estomac... Les extraits suivants, dont le choix m'est imputable ainsi que les notes, le montrent renaissant de ses cendres, en partie grâce à Serre.

M.C.

4 janvier : *Pour moi, cela ne va toujours pas fort, et je suis toujours bien mal dans ma peau. Cela m'étonnerait si j'ai le courage de rester ici jusqu'en mai.* [...] *je continue à travailler avec Steenrod ; pour la première fois, il m'a donné une idée intéressante, qui pourra me servir lors de la publication ; et j'aurai, je pense, bientôt fini avec lui.*

13 janvier : *Après 3 jours de relative amélioration, mes malaises ont repris ce matin ; mais je me suis armé de résignation, et tant que d'autres symptômes n'apparaissent pas je suis résolu à « tenir ». Hélas, j'ai beaucoup de choses en retard ; comme tu me le rappelles bien utilement il faut que j'envoie à Cartan la rédaction définitive de ma thèse, et que je fasse cette demande sur la liste d'aptitude*(3). *Mon travail avec Steenrod est en principe fini ; mais on a bien l'impression qu'il y a encore des choses à faire dans ce terrain, et ce serait dommage, peut-être de publier, avant que la chose ne soit complètement tirée au clair.*

18 janvier : *Si quelque gros pépin ne m'arrive pas d'ici 10 jours je suis décidé à revenir par le paquebot du 16 Mai.* [...] *Je me suis remis, avec une lenteur bien trop grande, à travailler à l'équipement de ma thèse. Il faudra que je trouve une machine à écrire. J'ai encore à travailler sur les puissances de Steenrod, afin de mettre au point quelques idées qui ont peut-être un certain intérêt.* [...] *Je dois – enfin – faire un exposé au séminaire de Steenrod jeudi prochain ; il est arrivé à Princeton un mathématicien suisse (Eckmann) que j'avais vu à Oberwolfach. Serre doit venir vers le 10 février, je pense, comme « visiting lecturer » ;* [...]

(1) Écrites sur des feuilles de papier « par avion » se repliant pour devenir leur propre enveloppe, elles ne comportent qu'une page, bien remplie sans aller à la ligne. Elles mettaient seulement deux jours à parvenir en Alsace...

(2) Même au milieu des années 1970, il en gardait un souvenir très vif.

(3) Aux fonctions de professeur des universités.

**Travaux de Thom sur les singularités, 1956–1957**
*par A. Haefliger*

Cette introduction concerne les premiers travaux de Thom sur les singularités des applications différentiables de 1956 à 1957[(1)], à savoir :

**1.** Les singularités des applications différentiables, Annales de l'Institut Fourier, Tome VI, Années 1956 et 1957, p. 43–87.

**2.** Les singularités des applications différentiables. Séminaire Bourbaki, mai 1956. Exposé 134, p. 1–18.

**3.** Un lemme sur les applications différentiables, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, p. 59–71, Fascicule d'octobre 1956.

**4.** Cours à Chicago.

**5.** Les ensembles singuliers d'une application différentiable et leurs propriétés homologiques, Colloque de topologie de Strasbourg, Décembre 1957.

Revenons tout d'abord en 1954. Dans son article sur le cobordisme [**18**], au début du chapitre I, Thom rappelle les notions de points critiques et valeurs critiques pour une application différentiable de variété dans variété. Etant donné des variétés différentiables $V$ et $M$ ainsi qu'une sous-variété $N$ de $M$ de codimension $q$, il introduit la notion d'application différentiable $f : V \to M$ transverse à $N$ (il dit $t$-régulière sur $N$). Il montre que toute application différentiable de classe $C^k$ de $V$ (supposée compacte) dans $M$ peut être approchée dans la $C^k$-topologie par une application transverse à $N$ pour $k$ assez grand.

**Commentaire sur 1.** — Dès l'année 1955, Thom commence à s'intéresser plus généralement à l'étude des singularités des applications différentiables. Il publie en 1956 dans les Annales de l'Institut Fourier son travail fondamental « Les singularités des applications différentiables » [**22**].

Cet article fondateur est la première contribution de Thom à la théorie générale des singularités. Il contient une foule de concepts nouveaux et d'exemples fondamentaux. W.S. Massey a écrit un excellent compte rendu de ce travail dans les Math. Rewiews (MR0087149)[(2)].

Dans l'introduction (pages 43–44), Thom esquisse le programme de recherches qui va l'occuper jusqu'en 1959. [. . . ]

(1) Références [**22, 23, 24, 26**] de la bibliographie, p. 17 de ce volume.

(2) Reproduit ci-après p. 383

**Commentaire**

Thom s'attendait à ce que le lemme de transversalité dans les espaces de jets « se propage comme une traînée de poudre chez les mathématiciens appliqués »[(1)]. Ce résultat absolument remarquable met en effet dans un cadre unique et rigoureux une grande partie des arguments de position générale plus ou moins corrects utilisés jusque-là.

Il a fait l'objet d'un très bon exposé de Morlet au séminaire Cartan [Mo], qui a influencé Mather dans sa généralisation du lemme aux espaces de multijets [Ma] ; celle-ci couvre vraiment la plupart des arguments de position générale.

Un autre point de vue, développé par Abraham [AR] à la suite du théorème de Sard banachique dû à Smale [S], permet de ramener ces résultats à une version banachique du « lemme de transversalité élémentaire » qui en est la forme primitive (le théorème 1.5 de [T]). L'énoncé d'Abraham a l'avantage d'exprimer sans détour l'essence du problème et l'inconvénient de nécessiter un recours plus lourd à l'analyse fonctionnelle, où la distinction entre ce qui est local et ce qui ne l'est pas se perd un peu.

Le lemme de transversalité est un des fondements de la théorie des catastrophes développée plus tard par Thom, car il permet de savoir ce qui peut arriver « au pire » dans des systèmes *génériques*[(2)] dépendant d'un nombre donné de paramètres ; par exemple, les sept catastrophes élémentaires sont les accidents locaux qui peuvent survenir dans les familles génériques de potentiels dépendant d'au plus quatre paramètres.

Si l'on n'est pas trop exigeant sur la différentiabilité minimale des fonctions auxquelles le lemme de Thom s'applique, on peut le déduire du cas particulier où la transversalité équivaut à la non-intersection, c'est-à-dire du cas facile du théorème de Sard : pour toute application localement lipschitzienne $f$ d'une variété séparable $X$ dans une variété de dimension (finie) strictement plus grande, l'image $f(X)$ est négligeable. C'était bien connu des spécialistes (voir [G], p. 33) pour les sous-variétés des espaces de jets apparaissant naturellement en théorie des singularités. Selon Eliashberg et Mishachev [EM, chap. 2], cela s'étend au cas général. [. . . ]

(1) Communication privée à M.C., 1984.

(2) L'article de Thom faisant l'objet du présent commentaire propose une terminologie moins ambiguë, qui n'a pas été adoptée.