ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 42 *fascicule 2* *mars-avril 2009*

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Pascal AUTISSIER

Géométrie, points entiers et courbes entières

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 42, 2009, p. 221 à 239

GÉOMÉTRIE, POINTS ENTIERS ET COURBES ENTIÈRES

PAR PASCAL AUTISSIER

RÉSUMÉ. – Soit X une variété projective sur un corps de nombres K (resp. sur $\mathbb{C}$). Soit H la somme de « suffisamment de diviseurs positifs » sur X. On montre que tout ensemble de points quasi-entiers (resp. toute courbe entière) dans $X - H$ est non Zariski-dense.

ABSTRACT. – Let X be a projective variety over a number field K (resp. over $\mathbb{C}$). Let H be the sum of "sufficiently many positive divisors" on X. We show that any set of quasi-integral points (resp. any integral curve) in $X - H$ is not Zariski dense.

1. Introduction

Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K. On note $O_{K;S}$ l'anneau des S-entiers de K. On s'intéresse dans cet article aux solutions dans $O_{K;S}^r$ de systèmes d'équations du type

$$\forall i \in \{1;\dots;n\} \quad F_i(x_1;\dots;x_r) = 0, \qquad (*)$$

où les F_i sont des polynômes à r variables et à coefficients dans $O_{K;S}$. Pour formaliser cette étude, on utilise le langage de la géométrie algébrique :

Désignons par Y la « variété algébrique » sur K définie par $F_1 = 0, \dots, F_n = 0$. Tout ensemble de solutions de $(*)$ dans $O_{K;S}^r$ définit alors un ensemble (de points) S-entier sur Y.

Le problème est de donner des conditions géométriques suffisantes sur Y pour que tout ensemble S-entier soit non Zariski-dense dans Y.

Dans la suite, on se donne Y sous la forme $Y = X - D$, où X est une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$ et D un diviseur effectif sur X. L'esprit de la conjecture de Lang et Vojta (cf. conjecture 4.2 de [9] p. 223) est qu'une telle condition suffisante s'exprime en termes de « positivité » de D :

CONJECTURE (Lang, Vojta). – *Soit X une variété projective lisse sur K de diviseur canonique $\mathcal{K}_X$. Soit D un diviseur effectif sur X, à croisements normaux. Posons $Y = X - D$. On suppose $\mathcal{K}_X + D$ gros (par exemple ample) sur X. Alors tout ensemble S-entier sur Y est non Zariski-dense dans Y.*

Les théorèmes de Siegel et de Faltings [5] montrent cette conjecture lorsque X est une courbe. Plus généralement, cet énoncé est connu de Faltings [6] lorsque X est une sous-variété de variété abélienne. Par ailleurs, c'est un corollaire direct du théorème du sous-espace lorsque $X = \mathbb{P}^d_K$ et D égale la somme de $d+2$ hyperplans en position générale.

Notons cependant que la conjecture est encore largement ouverte : le cas où $X = \mathbb{P}^2_K$ n'est par exemple pas connu.

Dans cet article, on démontre des cas particuliers de cette conjecture, lorsque D a « suffisamment » de composantes irréductibles. Plus précisément, disons qu'une variété Y sur K est *arithmétiquement quasi-hyperbolique* lorsqu'il existe un fermé $Z \neq Y$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble quasi-entier $\mathcal{E} \subset Y(K')$ sur Y, l'ensemble $\mathcal{E} - Z(K')$ soit fini (cf. section 2 pour les autres définitions). On prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. – *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Soient δ un entier ≥ 2 et $D_1; \ldots; D_{d\delta}$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement deux à deux. On suppose que toute intersection de $\delta+1$ quelconques d'entre eux est vide. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_{d\delta}$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique. En particulier, tout ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K)$ S-entier sur Y est non Zariski-dense dans Y.*

Cet énoncé améliore un résultat récent de Levin (cf. théorème 10.4A de [11]). En fait, Levin a besoin de $2\left\lfloor \frac{\delta+1}{2} \right\rfloor d+1$ diviseurs au lieu de $d\delta$ (cf. aussi remarque 2.4 pour une comparaison des travaux).

On démontre en outre l'énoncé suivant (où $\lambda'_d = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{d+1}\right]^{-1}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ est une constante $\leq \frac{12}{7}$ ne dépendant que de d, cf. remarque 2.3) :

THÉORÈME 1.2. – *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls et nefs sur X qui se coupent proprement (avec $r > \lambda'_d d$). Posons $L = \sum_{i=1}^r D_i$ et $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. On suppose que le $\mathbb{Q}$-diviseur $L - \lambda'_d d D_i$ est ample pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

L'hypothèse sur les $L - \lambda'_d d D_i$ est vérifiée lorsque les D_i vivent dans un cône « suffisamment étroit » du groupe de Néron-Severi de X. L'intérêt de ce résultat réside dans le nombre (potentiellement linéaire en d) de diviseurs à considérer.

Appliquons, à titre d'exemple, le théorème 1.2 au cas où $X = (\mathbb{P}^1_K)^d$ (avec $d \geq 2$) :

Soit r un entier $> \lambda'_d d$. Pour $i \in \{1; \ldots; r\}$, soit D_i un diviseur effectif non nul sur $(\mathbb{P}^1_K)^d$, de d-degré $(e_{i1}; \ldots; e_{id})$.

COROLLAIRE. – *Supposons que les diviseurs $D_1; \ldots; D_r$ se coupent proprement et que l'on a $\lambda'_d d \max_i e_{ij} < \sum_{i=1}^r e_{ij}$ pour tout $j \in \{1; \ldots; d\}$. Alors $(\mathbb{P}^1_K)^d - D_1 \cup \cdots \cup D_r$ est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

On observe qu'une application directe du corollaire 0.3 de Vojta [16] ne donne ce résultat que pour $r \geq 2d + 1$.

Remarquons que les théorèmes 1.1 et 1.2 s'inscrivent bien dans le cadre de la conjecture de Lang et Vojta, puisque si X est lisse sur K de diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ et les D_i sont amples sur X, alors $\mathcal{K}_X + D_1 + \cdots + D_r$ est ample sur X dès que $r \geq d + 2$ (c'est une conséquence du théorème du cône de Mori, cf. exemple 1.5.35 de [10] p. 87).

Les démonstrations reposent sur une extension (théorème 3.3) de travaux de Corvaja-Zannier [3] et de Levin [11], qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points S-entiers, et sur un bon choix (théorème 4.4) de multiplicités associées aux diviseurs D_i.

L'ingrédient arithmétique principal est la version de Vojta [15] du théorème du sous-espace de Schmidt [13] et Schlickewei [12] (c'est un énoncé d'approximation diophantienne qui généralise le théorème de Roth).

Par ailleurs, Vojta [14] a développé un « dictionnaire » entre la géométrie diophantienne et la théorie de Nevanlinna : l'étude des points S-entiers sur les variétés sur K est mise en analogie avec l'étude des courbes entières sur les variétés complexes.

Pour étayer ce dictionnaire, on montre aussi les énoncés qui « correspondent » aux théorèmes 1.1 et 1.2 :

Théorème 1.3. – *Soit X une variété complexe projective de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \ldots; D_{d\delta}$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement deux à deux (avec $\delta \geq 2$). On suppose que toute intersection de $\delta + 1$ quelconques d'entre eux est vide. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_{d\delta}$. Alors Y est Brody quasi-hyperbolique. En particulier, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to Y(\mathbb{C})$ est d'image non Zariski-dense dans Y.*

Théorème 1.4. – *Soit X une variété complexe projective de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls et nefs sur X qui se coupent proprement (avec $r > \lambda'_d d$). Posons $L = \sum_{i=1}^{r} D_i$ et $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. On suppose que le $\mathbb{Q}$-diviseur $L - \lambda'_d d D_i$ est ample pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$. Alors Y est Brody quasi-hyperbolique.*

La section 2.1 décrit les résultats purement géométriques utilisés, qui sont prouvés aux sections 4 et 5. La section 2.2 donne les critères de quasi-hyperbolicité, qui sont démontrés à la section 3.

Je remercie Antoine Chambert-Loir et Christophe Mourougane pour de fructueuses discussions. Je remercie également le rapporteur pour ses suggestions pertinentes.

2. Définitions et énoncés

2.1. Géométrie

Soit K un corps de caractéristique nulle.

Conventions. – On appelle variété sur K tout schéma quasi-projectif et géométriquement intègre sur K. Le mot « diviseur » sous-entend « diviseur de Cartier ».

Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Lorsque L est un diviseur sur X tel que $h^0(X;L) \geq 1$, on désigne par $\mathbf{B}_L$ le lieu de base de $\Gamma(X;L)$ et par $\Phi_L : X - \mathbf{B}_L \to \mathbb{P}(\Gamma(X;L))$ le morphisme défini par $\Gamma(X;L)$. Pour tout diviseur effectif D sur X, on note 1_D la section globale de $\mathcal{O}_X(D)$ qu'il définit.

Définition. – Un diviseur L sur X est dit *libre* lorsque $\mathbf{B}_L$ est vide.

Définition. – Un diviseur L sur X est dit *gros* lorsque $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} h^0(X;nL) > 0$.

Définition. – Soit L un diviseur gros sur X. On dit que L est *presque ample* lorsqu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que nL soit libre.

Définition. – Un $\mathbb{R}$-diviseur L sur X est dit *nef* lorsque pour tout 1-cycle effectif C sur X, on a $\langle L.C\rangle \geq 0$ (où $\langle L.C\rangle$ désigne le nombre d'intersection).

Définition. – Soient D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs sur X. On dit que D_1 et D_2 *se coupent proprement* lorsque $\mathcal{O}_X(-D_1 - D_2) = \mathcal{O}_X(-D_1) \cap \mathcal{O}_X(-D_2)$.

Définition. – Plus généralement, soient $D_1;\ldots;D_r$ des diviseurs effectifs sur X. On dit que $D_1;\ldots;D_r$ *se coupent proprement* lorsque, pour toute partie I non vide de $\{1;\ldots;r\}$, la section globale $(1_{D_i})_{i\in I}$ de $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{O}_X(D_i)$ est régulière (autrement dit, pour tout $x \in \bigcap_{i\in I} D_i$, en notant φ_i une équation locale de D_i en x, les $(\varphi_i)_{i\in I}$ forment une suite régulière de l'anneau local $\mathcal{O}_{X;x}$).

Remarque. – Supposons X de Cohen-Macaulay (par exemple lisse sur K); alors d'après le lemme A.7.1 de [7] p. 418, les diviseurs $D_1;\ldots;D_r$ se coupent proprement si et seulement si, pour toute partie I non vide de $\{1;\ldots;r\}$, le fermé $\bigcap_{i\in I} D_i$ est purement de codimension $\#I$ dans X (éventuellement vide).

Soit L un diviseur sur X tel que $h^0(X;L) \geq 1$. Soient $D_1;\ldots;D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X (avec $r \geq 1$). Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties I non vides de $\{1;\ldots;r\}$ telles que $\bigcap_{i\in I} D_i$ soit non vide. Pour $I \in \mathcal{P}$, $\underline{a} = (a_i)_i \in \mathbb{N}^I$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit le sous-espace vectoriel $V_{I;\underline{a};k}$ de $\Gamma(X;L)$ par

$$V_{I;\underline{a};k} = \sum_{\underline{b}} \Gamma\Big(X; L - \sum_{i\in I} b_i D_i\Big) \text{ où la somme porte sur les } \underline{b} \in \mathbb{N}^I \text{ tels que } \sum_{i\in I} a_i b_i \geq k\,.$$

Définition. – On pose

$$\nu(L;D_1;\ldots;D_r) = \inf_{I\in\mathcal{P}} \inf_{\underline{a}\in\mathbb{N}^I-\{0\}} \frac{\sum_{k\geq 1}\dim V_{I;\underline{a};k}}{h^0(X;L)\sum_{i\in I} a_i}.$$

On démontre à la section 4 le résultat suivant :

Théorème 2.1. – *On suppose $d \geq 2$. Soient $D_1;\ldots;D_r$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement deux à deux ; supposons que toute intersection de $\delta+1$ quelconques d'entre eux est vide (avec $2 \leq \delta \leq r$). Il existe alors $(m_1;\ldots;m_r) \in \mathbb{N}^{*r}$ tel qu'en posant $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$, on ait* $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\nu(nL;m_1D_1;\ldots;m_rD_r) > \frac{r}{d\delta}$.