ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 42 fascicule 2 mars-avril 2009

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Weizhe ZHENG

Sur l'indépendance de l en cohomologie l-adique sur les corps locaux

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 42, 2009, p. 291 à 334

SUR L'INDÉPENDANCE DE l EN COHOMOLOGIE l-ADIQUE SUR LES CORPS LOCAUX

PAR WEIZHE ZHENG

RÉSUMÉ. – Gabber a déduit son théorème d'indépendance de l de la cohomologie d'intersection d'un résultat général de stabilité sur les corps finis. Dans cet article, nous démontrons un analogue sur les corps locaux de ce résultat général. Plus précisément, nous introduisons une notion d'indépendance de l pour les systèmes de complexes de faisceaux l-adiques sur les schémas de type fini sur un corps local équivariants sous des groupes finis et nous établissons sa stabilité par les six opérations de Grothendieck et le foncteur des cycles proches. Notre méthode permet d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème de Gabber. Nous donnons aussi une généralisation aux champs algébriques.

ABSTRACT. – Gabber deduced his theorem of independence of l of intersection cohomology from a general stability result over finite fields. In this article, we prove an analogue of this general result over local fields. More precisely, we introduce a notion of independence of l for systems of complexes of l-adic sheaves on schemes of finite type over a local field, equivariant under finite groups. We establish its stability by Grothendieck's six operations and the nearby cycle functor. Our method leads to a new proof of Gabber's theorem. We also give a generalization to algebraic stacks.

Introduction

Dans les années 1980, Gabber a prouvé l'indépendance de l de la cohomologie d'intersection [12, Th. 1] : pour X un schéma propre sur un corps fini $k = \mathbb{F}_{p^f}$, équidimensionnel et $i \in \mathbb{Z}$, $\det(1 - tF_0^f, IH^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l))$ est un polynôme dans $\mathbb{Z}[t]$, indépendant de $l \neq p$. Ici $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, $F_0 \in \mathrm{Aut}(\bar{k})$ est le Frobenius géométrique absolu qui envoie a sur $a^{1/p}$. Il déduit ce résultat d'un théorème général d'indépendance de l [*ibid.*, Th. 2] : pour E une extension de $\mathbb{Q}$, il définit une notion de E-compatibilité pour les systèmes de complexes l-adiques ($l \neq p$) sur les schémas séparés de type fini sur k et établit la stabilité de cette E-compatibilité par les six opérations de Grothendieck.

L'objet de cet article est d'étudier l'indépendance de l sur un corps local K, par lequel on entend le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel fini. De façon précise, on définit une notion de E-compatibilité pour les systèmes de complexes l-adiques sur les schémas de type fini sur K. On prouve la stabilité de cette E-compatibilité par les opérations usuelles, notamment les six opérations et le foncteur des cycles proches $R\Psi$.

La E-compatibilité est sensible aux morphismes finis. Dans l'étude de la E-compatibilité, il est naturel d'utiliser les résultats de de Jong sur les altérations équivariantes [16], ce qui amène à généraliser le problème au cas équivariant sous des actions de groupes finis.

Au § 1, après avoir fixé les notations, on définit la E-compatibilité pour les systèmes de complexes équivariants au-dessus d'un corps fini ou local et énonce la stabilité par les six opérations. La démonstration dans le cas d'un corps fini est donnée au § 2. En vue du théorème de Gabber de la stabilité de la E-compatibilité par les six opérations, il suffit d'appliquer une technique de Deligne-Lusztig qui permet de se débarrasser des actions de groupes finis par descente galoisienne. Au § 3 on se réduit au cas des courbes. L'ingrédient essentiel est un raffinement [28, 4.4], dû à Gabber, de résultats de de Jong, grâce auquel on se ramène au cas de Rj_*L_λ pour l'inclusion $j : U \to X$ du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux G-strict D dans un schéma régulier X et des complexes G-équivariants L_λ sur U à faisceaux de cohomologie lisses, modérément ramifiés le long de D. Dans le cas d'un corps fini, le cas des courbes étant déjà connu depuis Deligne [7, 9.8], on obtient une démonstration indépendante du théorème de Gabber. La fin de la démonstration des énoncés du § 1 dans le cas d'un corps local est donnée au § 4. On les déduit, à l'aide des résultats de de Jong, d'un cas particulier de la stabilité par $R\Psi$, que l'on traite en utilisant à nouveau la technique de Deligne-Lusztig. Le cas général de la stabilité par $R\Psi$ découle de ce cas particulier et encore une fois des résultats de de Jong.

Les schémas équivariants sont mieux compris dans le contexte de leurs champs quotients associés. Ce point est élucidé au § 5. On y donne aussi des généralisations des résultats d'indépendance de l aux champs algébriques.

Ce travail fait partie de ma thèse. Je remercie vivement mon directeur de thèse, L. Illusie, qui m'a donné d'innombrables conseils lors de la préparation de l'article. Je remercie aussi N. Katz pour sa suggestion d'utiliser la technique de Deligne-Lusztig. Je remercie enfin S. Morel et F. Orgogozo pour leurs longues listes de commentaires.

1. Indépendance de l et six opérations

1.1. – Pour une catégorie $\boldsymbol{C}$, on note $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ la catégorie des objets de $\boldsymbol{C}$ munis d'une action d'un groupe fini à droite. Les objets sont les triplets (X, G, a), où X est un objet de $\boldsymbol{C}$, G est un groupe fini, a est une action de G sur X à droite (i.e. $a : G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Aut}_{\boldsymbol{C}}(X)$ est un homomorphisme de groupes). On enlève a de la notation lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre. Un morphisme $(X_1, G_1) \to (X_2, G_2)$ est un couple (f, α), où $\alpha : G_1 \to G_2$ est un homomorphisme de groupes, $f : X_1 \to X_2$ est un morphisme G_1-équivariant de $\boldsymbol{C}$, l'action de G_1 sur X_2 étant induite par α. La condition de G_1-équivariance signifie que pour tout $g \in G_1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "a_g"] \arrow[d, "f"] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "a_{\alpha(g)}"] & X_2 \end{tikzcd}$$

est commutatif. Pour (X, G, a) un objet de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ et $g \in G$, $T_g = (a_g, h \mapsto g^{-1}hg)$ est un automorphisme de (X, G, a). Ceci définit une action de G sur (X, G, a) à droite. Si les produits fibrés sont représentables dans $\boldsymbol{C}$, il en est de même dans $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$:

$$(X_1, G_1) \times_{(X,G)} (X_2, G_2) = (X_1 \times_X X_2, G_1 \times_G G_2).$$

On note $\boldsymbol{Gr.fini}$ la catégorie des groupes finis. Le foncteur projection $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{Gr.fini}$ qui envoie (X, G) sur G est fibrant. On note $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_G$ sa fibre en G. Pour $\alpha : G \to H$ un homomorphisme de groupes finis,

$$\alpha^* : \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_H \to \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_G,$$

est donné par $\alpha^*(Y, H, a) = (Y, G, a \circ \alpha^{\mathrm{op}})$. Pour $\alpha : G \to H$ injectif, l'adjoint à gauche

$$\alpha_* : \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_G \to \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_H$$

de α^* existe dès que les sommes disjointes finies sont représentables dans $\boldsymbol{C}$. Pour l'expliciter, choisissons un système S de représentants de $\alpha(G)\backslash H$. Pour $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$, on a

$$\alpha_*(X, G) \simeq (\coprod_{s \in S} X_s, H), \tag{1.1.1}$$

où $X_s = X$ et l'action de $h \in H$ est donnée par $a_g : X_s \to X_t$, où $g \in G$ et $t \in S$ vérifient $sh = \alpha(g)t$. Rappelons qu'une flèche $(f, \alpha) : (X, G) \to (Y, H)$ dans $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ est *cocartésienne* [3, VI 10] si pour tout objet (Y', H) de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})_H$, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_H((Y, H), (Y', H)) &\to \mathrm{Hom}_\alpha((X, G), (Y', H)) \\ u &\mapsto u \circ (f, \alpha) \end{aligned}$$

est bijective.

1.1.2. – Pour $(Y, H) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$, si Y est la somme disjointe d'une famille finie d'objets $(X_j)_{j \in J}$ de $\boldsymbol{C}$, et s'il existe une action *transitive* de H sur J à droite telle que pour tout $h \in H$ et tout $j \in J$, $a_h | X_j : X_j \to Y$ se factorise à travers l'inclusion $X_{jh} \hookrightarrow Y$, alors pour tout $j \in J$, l'inclusion $(X_j, G_j) \hookrightarrow (Y, H)$ est cocartésienne, où G_j est le stabilisateur de j dans H.

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$. On appelle *quotient* de X par G un objet Y de $\boldsymbol{C}$ muni d'un morphisme $p : X \to Y$ invariant par G tel que $(X, G) \to (Y, \{1\})$ soit cocartésien, i.e. tel que, pour tout objet Z de $\boldsymbol{C}$, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(Y, Z) &\to \mathrm{Hom}(X, Z)^G \\ f &\mapsto f \circ p \end{aligned}$$

soit bijective. Pour $\alpha : G \to H$ un homomorphisme surjectif, si le quotient Y de X par $\mathrm{Ker}\,\alpha$ existe, alors l'action de G sur X induit une action de H sur Y, et la flèche $(X, G) \to (Y, H)$ est cocartésienne. De plus, le quotient de X par $\mathrm{Ker}\,\alpha$ existe si et seulement s'il existe une flèche cocartésienne de source (X, G) au-dessus de α. Cela est vrai pour $\alpha : G \to H$ un homomorphisme quelconque si les sommes disjointes finies sont représentables dans $\boldsymbol{C}$.

1.1.3. – Soit $F : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C}$ un foncteur. Pour (X, G) un objet de $\boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$, on note $F_{(X,G)}$ la catégorie fibre de $\boldsymbol{Eq}(F) : \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{F}) \to \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C})$ en (X, G). Pour $(\mathcal{F}, G)$, $(\mathcal{G}, G)$ deux objets de $F_{(X,G)}$, G agit à gauche sur $\mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: pour $c \in \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $g \in G$, $gc \in \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est l'unique flèche rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "a_g", "\sim"'] \arrow[d, "gc"] & \mathcal{F} \arrow[d, "c"] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "a_g", "\sim"'] & \mathcal{G}. \end{tikzcd}$$

On a une bijection $\mathrm{Hom}_{F_{(X,G)}}((\mathcal{F}, G), (\mathcal{G}, G)) \simeq \mathrm{Hom}_{F_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^G$.

1.2. – Soit S un schéma noethérien. On note $\boldsymbol{C}_S$ la catégorie des S-schémas de type fini et on pose $\boldsymbol{Eq}/S = \boldsymbol{Eq}(\boldsymbol{C}_S)$.

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Rappelons que l'action de G est dite *admissible* [3, V 1.7] si le quotient de X par G existe dans $\boldsymbol{C}_S$, ou, ce qui revient au même, si toute trajectoire de G dans X est contenue dans un ouvert affine [*ibid.*, 1.8]. Dans ce cas, le morphisme $X \to X/G$ est fini [*ibid.*, 1.5].

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Pour une partie Z de X, on note $G_d(Z)$ le stabilisateur de Z. Si x est un point de X, on appelle $G_d(x)$ *groupe de décomposition*. Ce groupe opère canoniquement à gauche sur le corps résiduel $\kappa(x)$, et le fixateur de $\kappa(x)$ est appelé *groupe d'inertie*, noté $G_i(x)$ [*ibid.*, 2]. On dit que l'action de G est *libre* si elle est admissible et si $G_i(x)$ est trivial pour tout $x \in X$. Dans ce cas, l'action de G fait de X un G-torseur sur X/G.

Soit $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$. Si G agit transitivement sur l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X, alors pour tout $Y \in \pi_0(X)$, l'inclusion $(Y, G_d(Y)) \to (X, G)$ est cocartésienne.

1.3. Formalisme l-adique équivariant

Supposons que S soit régulier de dimension ≤ 1. Soit l un nombre premier inversible sur S. On a un formalisme de faisceaux l-adiques sur les S-schémas séparés de type fini [11, § 6]. Ce formalisme a un sens pour les schémas de type fini sur S (pas nécessairement séparés), et ce n'est que pour certaines opérations ($Rf_!$ et $Rf^!$) qu'on a besoin d'une hypothèse de séparation sur les morphismes. (Voir [18] pour un formalisme sans hypothèse de séparation.) Le formalisme l-adique dans [11] marche aussi dans le cadre équivariant. On va le rappeler brièvement.

On choisit $F : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{C}_S$ un foncteur bifibré avec $F_X \simeq (X^{\sim}_{\text{ét}})^{\text{op}}$. Pour $(X, G) \in \boldsymbol{Eq}/S$, on définit la catégorie des faisceaux d'ensembles sur (X, G) par $(X, G)^{\sim} = F^{\text{op}}_{(X,G)}$ (1.1.3), qui est un topos. Un faisceau sur (X, G) est donc un faisceau $\mathcal{F}$ sur X muni d'une action de G à gauche, compatible à l'action de G sur X. En d'autres termes, $\mathcal{F}$ est muni d'une famille d'isomorphismes $(b_g : \mathcal{F} \to a_{g*}\mathcal{F})_{g \in G}$ telle que pour tous $g, h \in G$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "b_h"] \arrow[drr, "b_{gh}"'] & a_{h*}\mathcal{F} \arrow[r, "a_{h*}b_g"] & a_{h*}a_{g*}\mathcal{F} \arrow[d, equal] \\ & & (a_{gh})_*\mathcal{F} \end{tikzcd}$$