ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 42 fascicule 6 novembre-décembre 2009

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Emmanuel DELSINNE

Le problème de Lehmer relatif en dimension supérieure

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4$^{\mathrm{e}}$ série, t. 42, 2009, p. 981 à 1028

LE PROBLÈME DE LEHMER RELATIF EN DIMENSION SUPÉRIEURE

PAR EMMANUEL DELSINNE

RÉSUMÉ. – Nous généralisons en dimension supérieure un théorème d'Amoroso et Zannier concernant le problème de Lehmer relatif. Nous minorons la hauteur d'un point d'un tore en fonction de son indice d'obstruction sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$, l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$, à condition qu'il ne soit pas contenu dans une sous-variété de torsion de petit degré. Nous en déduisons une minoration du minimum essentiel d'une sous-variété non contenue dans un sous-groupe algébrique propre en fonction de son indice d'obstruction sur $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$. Nous montrons ainsi, à un epsilon près, les conjectures les plus fines qui peuvent être formulées dans ce cadre.

ABSTRACT. – We generalize in higher dimension a theorem of Amoroso and Zannier concerning the relative Lehmer problem. We obtain a lower bound for the height of a point in a torus in terms of its obstruction index over $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$, the maximal abelian extension of $\mathbb{Q}$, provided that this point does not lie in a torsion subvariety of small degree. We deduce a lower bound for the essential minimum of a subvariety not contained in a proper algebraic subgroup in terms of its obstruction index over $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$. We prove up to an epsilon the sharpest conjectures that can be formulated.

1. Introduction

Nous nous proposons dans cet article de poursuivre l'étude du problème de Lehmer dans un tore, amorcée par F. Amoroso et S. David dans [2] et [4]. Soit n un entier naturel non nul. Nous considérons le plongement « naturel » de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans $\mathbb{P}^n$. La hauteur (normalisée) d'un point $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ est donc la hauteur de Weil logarithmique $h(\boldsymbol{\alpha})$ du point projectif $(1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n)$. Cette hauteur est nulle si et seulement si $\boldsymbol{\alpha}$ est un point de torsion, c'est-à-dire un point dont les coordonnées sont des racines de l'unité. Le *problème de Lehmer* consiste à déterminer la minoration optimale de la hauteur $h(\boldsymbol{\alpha})$ si $\boldsymbol{\alpha}$ n'est pas de torsion.

Dans le cas $n = 1$, le problème de Lehmer « classique » est le suivant :

CONJECTURE 1.1. – *Il existe un nombre réel c strictement positif tel que, pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(\bar{\mathbb{Q}})$ qui n'est pas une racine de l'unité, on a*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}.$$

Si l'on ne suppose rien de plus sur α, c'est la meilleure minoration possible étant donné que $h(2^{1/d}) = (\log 2)/d$. Dans cette direction, le meilleur résultat à ce jour est la minoration de E. Dobrowolski [12] :

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}\left(\frac{\log(3[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}])}{\log\log(3[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}])}\right)^3,$$

où c est un réel strictement positif. Par la suite, F. Amoroso et U. Zannier montrent dans [6] que l'on a le même type de minoration en remplaçant le degré total $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ de α par le degré « non abélien » de α, c'est-à-dire $[\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(\alpha):\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}]$, où $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ désigne l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$: c'est le problème de Lehmer « relatif ».

Par ailleurs, dans [2], F. Amoroso et S. David énoncent une conjecture qui est l'analogue en dimension supérieure du problème de Lehmer. L'invariant à considérer en dimension supérieure n'est plus le degré, mais une notion plus géométrique : l'indice d'obstruction.

DÉFINITION 1.2. – Soient $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ et K un sous-corps de $\bar{\mathbb{Q}}$. On appelle *indice d'obstruction* de $\boldsymbol{\alpha}$ relativement à K (ou sur K) et on note $\omega_K(\boldsymbol{\alpha})$ le plus petit degré [(1)] d'une hypersurface de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ définie sur K contenant $\boldsymbol{\alpha}$.

La conjecture peut alors se formuler ainsi :

CONJECTURE 1.3. – *Soit n un entier naturel non nul. Il existe un nombre réel $c(n)$ tel que pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$ à coordonnées multiplicativement indépendantes, on a*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})}.$$

La version « relative » de cette conjecture correspond à celle où l'on remplace $\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha})$ par $\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})$. Notons que l'on ne peut, dans cette conjecture, faire l'économie de l'hypothèse d'indépendance multiplicative des coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$: il suffit de considérer le point $\boldsymbol{\alpha}_d = (2^{1/d},\dots,2^{1/d})$, $d \in \mathbb{N}^*$, dont la hauteur peut être arbitrairement petite et qui vérifie, dès que $n \geq 2$, $\omega_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{\alpha}_d) = \omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha}_d) = 1$. Rappelons également que faire cette hypothèse équivaut à supposer que $\boldsymbol{\alpha}$ n'appartient à aucune *sous-variété de torsion*, c'est-à-dire une réunion de translatés de sous-tores stricts par des points de torsion. Dans [2], F. Amoroso et S. David montrent l'analogue du résultat de E. Dobrowolski, puis dans [4], une version « semi-relative » :

THÉORÈME 1.4. – *Pour tout entier naturel n non nul, il existe des nombres réels strictement positifs $c(n)$, $\kappa(n)$ et $\mu(n)$ ne dépendant que de n et effectivement calculables tels que la propriété suivante soit vraie.*

(1) Le plongement de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ dans $\mathbb{P}^n$ ayant été fixé, on entend par degré d'une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ le degré de son adhérence de Zariski dans $\mathbb{P}^n$.

Soient $\mathbb{L}$ *une extension cyclotomique de* $\mathbb{Q}$ *et* $\boldsymbol{\alpha}$ *un point de* $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$*. Si*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \left(c(n)\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})(\log(3[\mathbb{L}:\mathbb{Q}]\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})))^{\kappa(n)}\right)^{-1},$$

alors il existe une sous-variété de torsion B *définie sur* $\mathbb{L}$ *et contenant* $\boldsymbol{\alpha}$ *telle que*

$$(\deg B)^{1/\operatorname{codim}(B)} \leq c(n)\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})(\log(3[\mathbb{L}:\mathbb{Q}]\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})))^{\mu(n)}.$$

Dans ce résultat, la dépendance en le corps $\mathbb{L}$ n'est pas satisfaisante car le degré $[\mathbb{L}:\mathbb{Q}]$ peut être pathologiquement grand par rapport à $\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})$ (en particulier lorsque $[\mathbb{L}:\mathbb{Q}]$ n'est pas polynomial en $\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})$). Nous montrons ici que l'on peut se défaire de cette dépendance. Avant d'énoncer les résultats principaux, nous posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\kappa_1(n) = 3\left(2(n+1)^2(n+1)!\right)^n, \quad \kappa_2(n) = n\kappa_1(n),$$
$$\eta_1(n) = (n-1)!\left(\sum_{i=0}^{n-3}\frac{1}{i!}+1\right), \quad \eta_2(n) = \eta_1(n)+n-1$$

et

$$\mu(n) = 8n!\left(2(n+1)^2(n+1)!\right)^n.$$

THÉORÈME 1.5. – *Pour tout entier naturel* n *non nul, il existe un réel strictement positif* $c_1(n)$ *ne dépendant que de* n *et effectivement calculable tel que la propriété suivante soit vraie. Soit* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$*. Si*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \left(c_1(n)\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})(\log(3\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})))^{\kappa_1(n)}\right)^{-1}$$

alors $\boldsymbol{\alpha}$ *est contenu dans une sous-variété de torsion* B *telle que*

$$(\deg B)^{1/\operatorname{codim}(B)} \leq c_1(n)\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})^{\eta_1(n)}(\log(3\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(\boldsymbol{\alpha})))^{\mu(n)}.$$

Il semble raisonnable de conjecturer que l'on peut obtenir le même résultat en remplaçant $\eta_1(n)$ par 1, quel que soit n (ici, $\eta_1(n)$ est majoré par $4(n-1)!$ et on a $\eta_1(1) = \eta_2(1) = 1$). Malheureusement, le schéma de la preuve que nous utilisons (une récurrence sur n) ne nous permet pas d'obtenir un tel exposant.

Par un simple argument d'algèbre linéaire, on montre que pour tout sous-corps K de $\bar{\mathbb{Q}}$ on a l'inégalité

$$\omega_K(\boldsymbol{\alpha}) \leq n[K(\boldsymbol{\alpha}):K]^{1/n}.$$

Par conséquent, il devient possible d'obtenir une forme « faible » du théorème 1.5 (comme corollaire immédiat de celui-ci) en remplaçant l'indice d'obstruction par une racine n-ième du degré. On peut en fait en déduire un résultat plus précis concernant le produit des hauteurs des coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$ en fonction du degré :

THÉORÈME 1.6. – *Pour tout entier naturel* n *non nul, il existe un réel strictement positif* $c_2(n)$ *ne dépendant que de* n *et effectivement calculable tel que la propriété suivante soit vraie. Soit* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n(\bar{\mathbb{Q}})$*. Si*

$$\prod_{i=1}^n h(\alpha_i) \leq \left(c_2(n)[\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{\alpha}):\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}](\log(3[\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{\alpha}):\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}]))^{\kappa_2(n)}\right)^{-1}$$

alors $\boldsymbol{\alpha}$ *est contenu dans une sous-variété de torsion* B *telle que*

$$(\deg B)^{1/\operatorname{codim}(B)} \leq c_2(n)[\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{\alpha}):\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}]^{\eta_2(n)}(\log(3[\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}(\boldsymbol{\alpha}):\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}]))^{\mu(n)}.$$

Comme le signale le rapporteur de l'article, en effectuant en détail les calculs dans les démonstrations, le lecteur est quasiment amené à calculer les valeurs des constantes $c_1(n)$ et $c_2(n)$. Nous regroupons en annexe des valeurs indicatives pour les constantes utilisées au cours du texte et celles-ci nous permettent d'affirmer que l'on peut prendre

$$c_1(n) = \exp\left(64nn!\left(2(n+1)^2(n+1)!\right)^{2n}\right) \text{ et } c_2(n) = (2n^2)^n \exp\left(64n^2n!\left(2(n+1)^2(n+1)!\right)^{2n}\right).$$

Enfin, nous pouvons déduire du théorème 1.5 un résultat concernant le *minimum essentiel* $\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(V)$ d'une sous-variété V, défini comme étant la borne inférieure des réels $\theta > 0$ tels que l'ensemble des points de V de hauteur majorée par θ est Zariski dense dans V. Nous obtenons ainsi :

COROLLAIRE 1.7. – *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ qui n'est contenue dans aucun sous-groupe algébrique propre de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Alors*

$$\hat{\mu}^{ess}(V) \geq \left(c_3(n)\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(V)(\log(3\omega_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}}(V)))^{\kappa_1(n)}\right)^{-1}$$

où $c_3(n) = c_1(n)(\dim(V)+1)$.

Ce corollaire généralise le théorème principal de [11], où un tel résultat est démontré pour les sous-variétés de codimension 1.

REMARQUE 1.8. – Il est possible d'énoncer les mêmes résultats que précédemment en remplaçant $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ par K^{ab} où K^{ab} désigne l'extension abélienne maximale d'un corps de nombres K quelconque. Dans ce cas, les constantes dépendent alors de n et de K. Il suffit pour cela de procéder à la manière de [6], en substituant à l'ensemble des nombres premiers un ensemble d'idéaux premiers (voir le début du paragraphe 2 de [6]). Afin de ne pas alourdir les notations, nous démontrons les résultats pour $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$, mais les démonstrations sont exactement les mêmes dans le cas de K^{ab}.

Le plan de cet article est le suivant. Dans le paragraphe 2, nous précisons tout d'abord les notations que nous utiliserons et montrons quelques lemmes préliminaires. Puis nous passons, dans le paragraphe 3, à la preuve du théorème 1.5, dont le schéma s'inspire naturellement de celle du théorème 1.4 (schéma classique d'une preuve de transcendance), avec cependant des différences notoires. À la différence de [4], nous devons prendre en compte les premiers qui sont ramifiés dans l'extension abélienne $\mathbb{L}$, ce qui nous oblige à effectuer une dichotomie entre les premiers « peu » et « très » ramifiés, à la manière de [6]. Pour les premiers peu ramifiés, la transcendance est semblable à celle de [4], mis à part le fait que nous devrons utiliser un théorème de Siegel « absolu », afin d'éviter toute dépendance en $\mathbb{L}$. La suite de la transcendance s'en trouve alors modifiée. En ce qui concerne les premiers très ramifiés, nous utiliserons un argument de déterminant, qui s'inspire de [5] et de [1] et qui a l'avantage d'éviter l'utilisation d'un lemme de Siegel. Nous combinons alors ces deux résultats pour montrer que, si la hauteur de $\boldsymbol{\alpha}$ est petite (en fonction de $\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})$), il existe soit un multiple $\boldsymbol{\alpha}^l$ de $\boldsymbol{\alpha}$ pour lequel l'indice d'obstruction $\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha}^l)$ sur $\mathbb{L}$ est pathologiquement petit, soit un multiple $\boldsymbol{\alpha}^{l'}$ de $\boldsymbol{\alpha}$ pour lequel l'indice d'obstruction $\omega_{\mathbb{L}_{(l')}}(\boldsymbol{\alpha}^{l'})$ sur un sous-corps strict $\mathbb{L}_{(l')}$ de $\mathbb{L}$ est du même ordre de grandeur que $\omega_{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\alpha})$. Comme dans [2] et [4], cette proposition ne suffit pas pour conclure ; il nous faut utiliser un argument de descente, que cette dichotomie rend particulièrement technique (paragraphe 4). Enfin, dans le paragraphe 5, nous démontrons le