ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 43 *fascicule 2* *mars-avril 2010*

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Fabrizio ANDREATTA & Olivier BRINON

B_{dR}-*représentations dans le cas relatif*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 43, 2010, p. 279 à 339

B_{dR}-REPRÉSENTATIONS DANS LE CAS RELATIF

PAR FABRIZIO ANDREATTA ET OLIVIER BRINON

RÉSUMÉ. – Dans ce travail nous développons un analogue relatif de la théorie de Sen pour les B_{dR}-représentations. On donne des applications à la théorie des représentations p-adiques, en la reliant à la théorie des (φ, Γ)-modules relatifs, et à celle des modules de Higgs p-adiques développée par G. Faltings.

ABSTRACT. – In this work, we develop a relative analogue of Sen's theory for B_{dR}-representations. We give applications to the theory of p-adic representations, linking it to the theory of relative (φ, Γ)-modules and to the theory of p-adic Higgs modules, developed by G. Faltings.

1. Introduction

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et G_K le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Dans [19], S. Sen a classifié les C_K-représentations de G_K (*i.e.* les C_K-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire et continue de G_K, cf. définition 2.1), où C_K est le complété de $\overline{K}$ pour la valuation. À la suite de Sen, J.-M. Fontaine a classifié dans [14] les $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$-représentations de G_K, où $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$ est le corps des périodes p-adiques associé à K par Fontaine. Soit $K_\infty \subseteq \overline{K}$ l'extension de K obtenue en adjoignant les racines p^n-ièmes de l'unité pour $n \in \mathbf{N}$. Posons $H_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Soient B l'un des corps C_K ou $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$ et $\mathbf{Rep}_B(G_K)$ la catégorie des B-représentations de G_K (cf. définition 2.1). Sen et Fontaine montrent tout d'abord que cette catégorie est équivalente à la catégorie $\mathbf{Rep}_{B^{H_K}}(\Gamma_K)$ des B^{H_K}-représentations de Γ_K. Ensuite ils prouvent un résultat de décomplétion. Plus précisément, ils montrent que la catégorie $\mathbf{Rep}_{B^{H_K}}(\Gamma_K)$ est équivalente à celle des espaces vectoriels de dimension finie sur un sous-corps dense de B^{H_K} (qui est K_∞ dans le cas de Sen et $K_\infty(\!(t)\!)$ dans le cas de Fontaine, avec $t = \log([\varepsilon])$ l'élément habituel). La troisième étape consiste à passer de l'action de Γ_K, qui est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$, à son action infinitésimale. Cela fournit un opérateur différentiel. La principale application est la suivante : si V est une représentation

p-adique de G_K, on obtient, en appliquant les résultats qui précèdent à $V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{O}_K)$, un $K_\infty((t))$-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ muni d'un opérateur différentiel. Ce dernier contient d'importantes informations arithmétiques (par exemple, il est trivial si et seulement si la représentation V est de de Rham). En utilisant les travaux de Fontaine et de Cherbonnier-Colmez, on peut relier le (φ, Γ_K)-module surconvergent associé à V à $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$. Ce lien est fondamental pour les lois de réciprocité explicites de Colmez ([10]). C'est aussi un ingrédient crucial dans les travaux de Berger ([5]) où il montre que la conjecture de Fontaine qui affirme qu'une représentation de de Rham est potentiellement semi-stable résulte de la conjecture de monodromie p-adique.

Dans cet article, on étudie la situation lorsque K est remplacé par une base plus générale (cf. partie 2). Soient d un entier, $T_1, \ldots, T_d$ des indéterminées et $R^0 = \mathcal{O}_K\{T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;
(loc) complétion p-adique d'une localisation ;
(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que le théorème de pureté de Faltings s'applique à $\widetilde{R}$. On fixe une extension finie et normale $\widetilde{R} \subseteq R$, qui est étale quand on inverse p et telle que R est intègre (cf. remarque 2.3). Dans ce cas, l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ est remplacé par le normalisé $\overline{R}$ de R dans l'extension maximale non ramifiée de $R[p^{-1}]$. De même, on remplace K_∞ par l'anneau $R_\infty[p^{-1}]$ obtenu à partir de $R[p^{-1}]$ en adjoignant les racines p^n-ièmes de l'unité et des variables $T_1, \ldots, T_d$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose $\mathcal{G}_R := \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, $\mathcal{H}_R = \mathrm{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}], R_\infty[p^{-1}]\right)$ et $\Gamma_R = \mathcal{G}_R/\mathcal{H}_R = \mathrm{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$. Notons $\widehat{\overline{R}}$ le séparé complété de $\overline{R}$ pour la topologie p-adique et $C = \widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$. La théorie de Sen des C-représentations libres de rang fini de $\mathcal{G}_R$ a été développée dans [2, §2 & 3] (cf. aussi [12, §3]). Comme dans le cas classique, on dispose des anneaux de périodes $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}]$ (cf. partie 2.7). Cet anneau permet de définir la notion de représentation p-adique de de Rham de $\mathcal{G}_R$: si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_R)$, on pose $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathcal{G}_R}$, c'est un $R[p^{-1}]$-module projectif de rang fini muni d'une filtration et d'une connexion intégrable. On dit que V est de de Rham lorsque l'application naturelle $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{R[p^{-1}]} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme (cf. [8]).

Le premier objectif de ce travail est de donner, comme dans le cas classique, un critère différentiel pour qu'une représentation soit de de Rham. Pour ce faire, on étudie la catégorie des B_{dR}-représentations « régulières » (cf. définition 3.9). C'est l'objet de la partie 3, où on développe la théorie de Sen pour les $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentations libres de rang fini de $\mathcal{G}_R$. On prouve que cette catégorie est équivalente à celle des modules « potentiellement libres » de rang fini sur le sous-anneau $R_\infty[p^{-1}][\![u_1, \ldots, u_d, t]\!]$ de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, munis de l'action résiduelle de Γ_R (cf. théorème 3.23). Les techniques employées sont proches de celles de [14] : une descente « presque étale » (qui utilise le théorème de pureté de Faltings), suivie d'une décomplétion. Remarquons toutefois que cette dernière est beaucoup plus subtile dans le cas relatif, parce que le groupe de Lie p-adique Γ_R est de dimension $d+1$: on doit utiliser les traces normalisées de Tate généralisées construites dans [2, §2 & 3] (cf. proposition 3.17 en particulier).

Étant donné un module Y potentiellement libre de rang fini sur $R_\infty[p^{-1}][\![u_1,\dots,u_d,t]\!]$ muni d'une action de Γ_R, on étudie dans la partie 4 l'action infinitésimale de Γ_R, qui fournit une connexion (non nécessairement intégrable) $\widetilde{\nabla}_Y\colon Y \to Y\frac{\mathrm{d}\,t}{t} \oplus_{i=1}^d Y\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}$ (proposition 4.6). Dans le paragraphe 5 on étudie les objets ainsi obtenus (invariants sous Γ_R, sections horizontales), en particulier, on montre que la $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation de départ est triviale si et seulement si le module à connexion $(Y,\widetilde{\nabla}_Y)$ est trivial (théorème 5.17). Tout ce qui précède s'étend aux B_{dR}-représentations qui sont déduites d'une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-représentation libre en inversant t.

Finalement, dans la partie 7, on applique ces résultats aux représentations p-adiques. Une telle représentation V étant donnée, on dispose de la B_{dR}-représentation $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Elle est régulière : ce qui précède permet de lui associer un module différentiel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$. On montre (proposition 7.1) que V est de de Rham si et seulement si $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ est trivial, *i.e.* admet une base de sections horizontales.

Par ailleurs, la surconvergence des représentations p-adiques, démontrée par Cherbonnier et Colmez dans le cas classique (cf. [9]), a été étendue au cas relatif dans [2] : une représentation p-adique $V\in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathscr{G}_R)$ est entièrement déterminée par son (φ,Γ_R)-module surconvergent $\mathrm{D}^\dagger(V)$ (cf. [2, Théorème 4.35] ; mentionnons à ce propos que nous avons inclus en appendice un erratum à l'article [2]). En général, pour des raisons de convergence, il n'est pas possible de définir l'action de l'algèbre de Lie du groupe de Lie p-adique Γ_R directement sur $\mathrm{D}^\dagger(V)$. L'autre objectif de ce travail est de relier le (φ,Γ_R)-module $\mathrm{D}^\dagger(V)$ au module différentiel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$ (théorème 7.5) où l'action de l'algèbre de Lie est donnée par la connexion.

Dans le cas relatif, il y a un nouvel aspect : nous développons dans la partie 6 une variante géométrique de la théorie de Sen en utilisant les groupes $G_R = \mathrm{Gal}\big(\overline{R}[p^{-1}]/R\overline{K}\big)$, $H_R = \mathrm{Gal}\big(\overline{R}[p^{-1}]/R_\infty\overline{K}\big)$ et $\widetilde{\Gamma}_R = \mathrm{Gal}\big(R_\infty\overline{K}/R\overline{K}\big)$. On étudie en particulier les représentations continues $G_R \to \mathsf{GL}_n\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathscr{O}_K)\big)$ (où $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathscr{O}_K)$ est l'anneau des entiers de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}(\mathscr{O}_K)$). Soit $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}$ l'adhérence (en un sens convenable) de $\mathrm{R}_\infty\cdot \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathscr{O}_K)$ dans B_{dR}. À toute $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathscr{O}_K)$-représentation V de G_R, on associe un module Y sur le sous-anneau $\mathbb{R}_{\mathrm{dR}}[\![u_1,\dots,u_d]\!]$ de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, muni d'une connexion logarithmique intégrable $\widetilde{\nabla}_Y\colon Y \to \oplus_{i=1}^d Y\frac{\mathrm{d}\,u_i}{t}$. Dans ce contexte, Faltings associe (cf. [12]) un module de Higgs à la C_K-représentation résiduelle V/tV de G_R. Il s'agit d'un module M projectif de rang fini sur (une extension finie étale de) la complétion p-adique $\widehat{R\overline{K}}$ de $R\overline{K}$, muni d'une application $\widehat{R\overline{K}}$-linéaire $\theta\colon M \to M\widehat{\otimes}_R\Omega^1_{R/O_K}(-1)$ telle que $\theta\wedge\theta = 0$, appelée le champ de Higgs associé. Étant donnée une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathscr{O}_K)$-représentation V de G_R, on montre que le module de Higgs associé à V/tV est la réduction modulo t de Y et que le champ de Higgs associé est le résidu en t de la connexion $\widetilde{\nabla}_Y$ (remarque 4.12). En particulier, on montre que ce champ de Higgs est nul si et seulement si Y est trivial, si et seulement si V est une représentation de de Rham géométrique (corollaire 6.6).

2. Notations et rappels

Définition 2.1. – Soient G un groupe profini et B une $\mathbf{Q}_p$-algèbre topologique munie d'une action continue de G. Une *B-représentation de* G est un B module de type fini W muni d'une action semi-linéaire continue de G *i.e.* telle que

(1) $g(w_1+w_2)=g(w_1)+g(w_2)$ pour $w_1,w_2\in W$ et $g\in G$;
(2) $g(bw)=g(b)g(w)$ pour $w\in W$, $b\in B$ et $g\in G$.

On dit que W est libre (resp. projective) de rang n si elle l'est en tant que B-module. Soient W_1,W_2 deux B-représentations de G. On munit le B-module $W_1\otimes_B W_2$ de la structure de B-représentation de G donnée par $g(w_1\otimes w_2)=g(w_1)\otimes g(w_2)$. De même, on munit le B-module $\mathrm{Hom}_B(W_1,W_2)$ de la structure de B-représentation donnée par $g(f)(w)=g(f(g^{-1}w))$ pour tout $f\in\mathrm{Hom}_B(W_1,W_2)$ et $w\in W_1$. Un morphisme de W_1 dans W_2 est une application B-linéaire $f\colon W_1\to W_2$ qui est G-équivariante. On note $\mathrm{Hom}_G(W_1,W_2)=\big(\mathrm{Hom}_B(W_1,W_2)\big)^G$ le groupe des morphismes de W_1 dans W_2. On dispose d'un objet unité : c'est B muni de l'action G.

On définit ainsi une catégorie qu'on note $\mathbf{Rep}_B(G)$. On note $\mathbf{Rep}_B^{\mathrm{l}}(G)$ (resp. $\mathbf{Rep}_B^{\mathrm{pr}}(G)$) la sous-catégorie pleine constituée des B-représentations qui sont libres (resp. projectives) de rang fini.

Remarque 2.2. – Soient W une B-représentation libre de rang n et $\mathfrak{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de W sur B. Pour $g\in G$, notons U_g la matrice dont le j-ième vecteur colonne est donné par les coordonnées de $g(e_j)$ dans la base $\mathfrak{B}$. Alors $U_g\in\mathsf{GL}_n(B)$ et $U\colon G\to\mathsf{GL}_n(B)$ est un cocycle continu. Réciproquement, la donnée d'un cocycle continu $U\colon G\to\mathsf{GL}_n(B)$ munit naturellement B^n d'une structure de B représentation de G. Ainsi, après le choix d'une base, la donnée d'un cocycle continu $U\colon G\to\mathsf{GL}_n(B)$ est équivalente à celle d'une structure de B-représentation de G. Par ailleurs, si on change de base, le cocycle obtenu est cohomologue au premier (le cobord étant donné par la matrice de changement de base de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$).

Nous allons travailler avec les anneaux considérés dans [1], [2], [8]. Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique 0, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p>0$. On note v la valuation normalisée par $v(p)=1$ et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit d un entier, $T_1,\dots,T_d$ des indéterminées et $R^0=\mathcal{O}_K\{T_1^{\pm1},\dots,T_d^{\pm1}\}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_K\big[T_1^{\pm1},\dots,T_d^{\pm1}\big]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;
(loc) complétion p-adique d'une localisation ;
(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que $\mathcal{O}_K\big[T_1^{\pm1},\dots,T_d^{\pm1}\big]\to\widetilde{R}$ est à fibres géométriquement régulières ou que $\widetilde{R}$ est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k\to\widetilde{R}\otimes_V k$ est géométriquement intègre. Il en résulte que $T_1,\dots,T_d$ est une p-base de $\widetilde{R}\otimes_{\mathcal{O}_K}k$. Dans ces conditions, le théorème de pureté de Faltings (cf. [11]) s'applique.

Soit E une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(\widetilde{R})$ qui contient $\overline{K}$. On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des sous-$\widetilde{R}$-algèbres finies normales S de E telles que $\widetilde{R}[p^{-1}]\subseteq S[p^{-1}]$ est étale. Soit $R\in\mathscr{I}$ tel que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$ (on peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant K par sa clôture algébrique dans $R[p^{-1}]$).