ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 43 fascicule 2 mars-avril 2010

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Jérémy BLANC

Groupes de Cremona, connexité et simplicité

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 43, 2010, p. 357 à 364

GROUPES DE CREMONA, CONNEXITÉ ET SIMPLICITÉ

PAR JÉRÉMY BLANC

RÉSUMÉ. – Le groupe de Cremona est connexe en toute dimension et, muni de sa topologie, il est simple en dimension 2.

ABSTRACT. – The Cremona group is connected in any dimension and, endowed with its topology, it is simple in dimension 2.

1. Questions et résultats

Soit k un corps algébriquement clos. On note $\mathrm{Cr}_n(k)$ le groupe de Cremona de dimension n, groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n_k$, anti-isomorphe via l'action sur le corps des fractions rationnelles à $\mathrm{Aut}_k(k(x_1,\ldots,x_n))$. Ce groupe est muni d'une topologie naturelle (décrite à la section 2).

En 1974, dans un rapport sur les questions ouvertes importantes en géométrie algébrique [5], D. Mumford consacre un paragraphe au groupe $\mathrm{Cr}_2(k)$. Il parle de mettre une topologie sur le groupe, et pose alors la question : ce groupe est-il simple ? Le théorème 4.2 démontré plus bas permet de répondre par l'affirmative.

La technique utilisée pour cela est élémentaire. Elle permet également de prouver que le groupe $\mathrm{Cr}_n(k)$ est connexe pour tout n (Théorème 5.1). Ceci répond à une question posée par J-P. Serre lors du 1000^{e} exposé Bourbaki [8], concernant la dimension $n \geq 3$, le cas $n \leq 2$ étant déjà bien connu.

Cet article est articulé ainsi : la section 2 donne des rappels sur la topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(k)$, la section 3 présente un lemme de déformation, qui permet de montrer la simplicité de $\mathrm{Cr}_2(k)$ (section 4) et la connexité de $\mathrm{Cr}_n(k)$ (section 5).

Je tiens à remercier J.-P. Furter pour des discussions intéressantes sur cet article, et tout spécialement J-P. Serre pour ses relectures attentives de cet article et ses précieuses corrections.

0012-9593/02/© 2010 Société Mathématique de France. Tous droits réservés

2. La topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(k)$

Soit X une k-variété (k est toujours le corps algébriquement clos fixé au départ). On note $\mathrm{Bir}(X)$ l'ensemble des applications birationnelles $X \dashrightarrow X$, et $\mathrm{Aut}(X) \subset \mathrm{Bir}(X)$ le groupe des automorphismes de X.

Afin de décrire la topologie de $\mathrm{Bir}(X)$, décrivons tout d'abord les morphismes $A \to \mathrm{Bir}(X)$:

Définition 2.1. – Une *famille algébrique* d'éléments de $\mathrm{Bir}(X)$ est la donnée d'une application rationnelle $f : A \times X \dashrightarrow X$ où A est une k-variété, définie sur un ouvert dense U tel que, pour tout $a \in A$, $U_a := U \cap (\{a\} \times X)$ soit un ouvert dense de $\{a\} \times X$ et que la restriction de $\mathrm{id} \times f$ à U soit un isomorphisme de U sur un ouvert dense de $A \times X$.

Pour tout $a \in A$, l'application birationnelle $x \dashrightarrow f(a, x)$ représente alors un élément $f_a \in \mathrm{Bir}(X)$. La famille f_a ($a \in A$) représente une application $A \to \mathrm{Bir}(X)$, que l'on appellera *morphisme* de A vers $\mathrm{Bir}(X)$.

Cette définition correspond à celle de [8] et [2, §1] ; un morphisme $A \to \mathrm{Bir}(X)$ correspond alors à un pseudo-automorphisme du A-schéma $A \times X$. On définit la topologie de Zariski sur $\mathrm{Bir}(X)$ de la manière suivante (voir [8, §1.6]) :

Définition 2.2. – On dit qu'un ensemble $R \subset \mathrm{Bir}(X)$ est *fermé* si, pour toute k-variété A et tout morphisme $A \to \mathrm{Bir}(X)$, la préimage de R dans A est fermée.

Comme l'explique [8], ceci donne une topologie sur $\mathrm{Bir}(X)$, qui est la topologie la plus fine qui rende les morphismes vers $\mathrm{Bir}(X)$ continus. De plus, en définissant de manière analogue la topologie de Zariski sur $\mathrm{Bir}(X) \times \mathrm{Bir}(X)$, la composition donne une application continue $\mathrm{Bir}(X) \times \mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Bir}(X)$.

En particulier, on peut restreindre ceci à $\mathrm{Aut}(X)$ et mettre ainsi une topologie sur ce groupe. Lorsque $X = \mathbb{P}^n_k$, on peut démontrer que l'on retrouve la topologie de Zariski habituelle du groupe algébrique $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PGL}(n+1, k)$ et qu'en fait $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Cr}_n(X)$ est une immersion fermée [7].

Les groupes qui nous intéressent le plus sont ceux où la k-variété X est rationnelle. On rappelle que si X est rationnelle, de dimension n, alors $\mathrm{Bir}(X)$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Cr}_n(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ via une application birationnelle choisie $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$; le choix de celle-ci fait juste varier l'homéomorphisme $\mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Cr}_n(k)$. Dans la suite, on prendra le plus souvent $X = \mathbb{A}^n_k$ ou $X = \mathbb{P}^n_k$, suivant les besoins.

3. Préliminaires techniques

3.1. Le groupe de de Jonquières

Pour $n \geq 2$, notons ϕ la projection

$$(x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (x_1 : \cdots : x_n)$$

de $\mathbb{P}^n_k$ dans $\mathbb{P}^{n-1}_k$. On appelle *groupe de de Jonquières* J_n le sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ qui préserve l'ensemble des fibres de ϕ. On note J_n^0 le sous-groupe de J_n constitué des éléments qui préservent une fibre générale de ϕ.

De manière affine, on peut restreindre ϕ à la projection $k^n \to k^{n-1}$, et ainsi voir que J_n est naturellement isomorphe à $J_n^0 \rtimes \mathrm{Bir}(k^{n-1})$, où

$$J_n^0 \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K) \simeq \mathrm{PGL}(2,K), \text{ avec } K = k(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

L'homomorphisme déterminant $\mathrm{GL}(2,K) \to K^*$ induit un homomorphisme surjectif

$$\det\colon \mathrm{PGL}(2,K) \to K^*/(K^*)^2,$$

où $(K^*)^2$ désigne l'ensemble des carrés de K^*. On notera $J_n^1 \subset J_n^0$ le sous-groupe normal correspondant au noyau de det. Alors, l'homomorphisme précédent nous donne

$$J_n^1 \simeq \mathrm{PSL}(2,K).$$

Le groupe J_n^1 est simple [3, Chapitre II, §2]. De plus, comme tout élément $f \in J_n^0$ satisfait $\det(f^2) = 1$, le quotient J_n^0/J_n^1 est un groupe abélien de type $(2,\dots,2,\dots)$. Les classes de $J_n^0 \pmod{J_n^1}$ sont représentées par les involutions de de Jonquières $f_h\colon (x_1,\dots,x_n) \dashrightarrow (x_1,\dots,x_{n-1},h/x_n)$, où $h \in k(x_1,\dots,x_{n-1})^* = K^*$. Puisque $\det(f_h) = -h$, deux involutions f_h et $f_{h'}$ représentent la même classe si et seulement si h/h' est un carré dans K^*.

3.2. Dérivée normale

Dans cette section, on se donne la situation suivante :

Partons d'une k-variété lisse X. Soit Y la droite affine sur k et soit $Z = X \times Y$; le morphisme $x \mapsto (x,0)$ identifie X à une sous-variété de Z. Soit U un ouvert dense de Z tel que $U_X := U \cap X$ soit dense dans X et soit $f\colon U \to Z$ un morphisme qui envoie U_X dans X ; notons $f_X\colon U \to X$ et $f_Y\colon U \to Y$ les deux composantes de f.

À partir de cette donnée, on va définir la dérivée normale de f, qui est une application rationnelle $f_0\colon Z \dashrightarrow Z$, et montrer qu'il s'agit d'une limite de conjugués de f.

La fonction f_Y a la propriété que $f_Y(x,y) = 0$ si $y = 0$; on en déduit que f_Y est divisible par la fonction « y », ce qui veut dire que $f_Y(x,y) = y \cdot g_Y(x,y)$ pour une certaine fonction g_Y sur U. Ceci nous permet de définir la *dérivée normale de f le long de X*, qui est le morphisme

$$f_0\colon U_X \times Y \to Z,$$

donné par la formule $f_0(x,y) = (f_X(x,0), y \cdot g_Y(x,0))$.

On remarque que f_0 ne dépend que du comportement de f dans un voisinage infinitésimal de X et est une sorte de linéarisation de f ; en fait f_0 ne dépend pas du choix de l'ouvert U mais seulement de f vue comme application rationnelle de Z dans lui-même. De plus $(x,0) \mapsto f_X(x,0)$ est la restriction de f à X, ce qui implique que f_0 est compatible avec la projection $Z \to X$; on a les diagrammes commutatifs

(1)
$$\begin{tikzcd} U_X \times Y \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ U_X \arrow[r, "f|_{U_X}"] & X \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "f_0"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r, dashed, "f|_X"] & X. \end{tikzcd}$$

De plus, f_0 est une homothétie sur chaque fibre.

Montrons maintenant que f_0 est une limite de conjugués de f. Soit T un autre exemplaire de la droite affine sur k ; pour tout $t \in T$, soit U_t l'ouvert de Z formé des (x,y) tels que (x,ty)

appartienne à U. Remarquons que $U_0 = U_X \times Y$. La réunion U_T des $\{t\} \times U_t$ est un ouvert de $T \times Z$ contenant $T \times U_X$. Si $t \neq 0$, soit s_t l'automorphisme $(x, y) \mapsto (x, ty)$ de Z et posons $f_t = s_t^{-1} \circ f \circ s_t$, ce qui a un sens sur U_t ; si $t = 0$, définissons $f_t = f_0$ comme ci-dessus ; c'est un morphisme défini sur $U_0 = U_X \times Y$.

LEMME 3.1. – *Avec les notations précédentes, la famille des f_t $(t \in T)$ définit un morphisme $F \colon U_T \to Z$.*

Démonstration. – On a $F(t, x, y) = (f_X(x, ty), y \cdot g_Y(x, ty))$: lorsque $t \neq 0$, cela résulte de $t^{-1} f_Y(x, ty) = y \cdot g_Y(x, ty)$ et lorsque $t = 0$, c'est la définition de f_0. Le lemme suit alors du fait que $(t, x, y) \mapsto f_X(x, ty)$ et $(t, x, y) \mapsto g_Y(x, ty)$ sont des morphismes définis sur U_T. □

LEMME 3.2. – *Avec les mêmes notations qu'avant, supposons de plus que X est irréductible, que f est un isomorphisme de U sur un ouvert V de Z et que f se restreint à un isomorphisme de $U_X = U \cap X$ vers $V_X = V \cap X$ (ce qui implique que $f \in \mathrm{Bir}(Z)$ et $f|_X \in \mathrm{Bir}(X)$).*

Alors, la famille f_t $(t \in T)$ définit un morphisme $T \to \mathrm{Bir}(Z)$ (au sens de la définition 2.1).

Démonstration. – Le lemme 3.1 montre que $F \colon U_T \to Z$ est un morphisme, qui induit donc une application rationnelle $T \times Z \dashrightarrow Z$. Pour tout $t \in T$, $U_T \cap (\{t\} \times Z)$ n'est rien d'autre que $\{t\} \times U_t$, ouvert dense de $\{t\} \times Z$ par construction, et la restriction de F à cet ouvert correspond à f_t.

Notons $r \colon V \to U$ l'inverse de f, qui applique $V_X = V \cap X$ dans X par construction, et utilisons la construction précédente pour $r = (r_X, r_Y)$. On a $V_t = \{(x, y) \in Z \mid (x, ty) \in V\}$ et le lemme 3.1 nous donne un morphisme $R \colon V_T \to Z$, dont la restriction à $\{t\} \times V_t$ correspond à r_t.

Il suffit alors de voir que $\mathrm{id} \times f$ est un isomorphisme de U_T vers V_T, dont l'inverse est $\mathrm{id} \times r$, ce qui peut par exemple se déduire de la forme explicite de $F(t, x, y)$ et $R(t, x, y)$ donnée dans la preuve du lemme 3.1. □

3.3. Le lemme de déformation appliqué au groupe de Cremona

Rappelons que si Z est une k-variété irréductible lisse, si $f \in \mathrm{Bir}(Z)$ et $H, H' \subset Z$ sont deux hypersurfaces irréductibles, on dit que f *se restreint à une application birationnelle* $f|_H \colon H \dashrightarrow H'$ si f est définie sur un ouvert U tel que $U \cap H$ soit un ouvert dense de H et tel que $f|_{U \cap H} \colon U \cap H \to H'$ soit une immersion ouverte. On peut également présenter cette notion de la façon suivante : les hypersurfaces H et H' définissent des valuations discrètes v et v' du corps des fonctions de Z, et l'on demande que f transforme v en v'.

En appliquant les résultats de la section 3.2 au cas d'une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^n_k$, nous allons démontrer le résultat suivant.

LEMME 3.3. – *Pour $n \geq 2$, notons $H_0 \subset \mathbb{P}^n_k$ l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Soit $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ un élément qui se restreint à une application birationnelle $f|_{H_0} \colon H_0 \dashrightarrow H_0$.*

Notons $Z \subset \mathbb{P}^n_k$ le complémentaire de l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ et $X = Z \cap H_0$, de telle sorte que $Z = X \times Y$ avec $Y \cong \mathbb{A}^1_k$.