ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 43 fascicule 3 mai-juin 2010

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Aurélien DJAMENT & Christine VESPA

Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4$^{\text{e}}$ série, t. 43, 2010, p. 395 à 459

SUR L'HOMOLOGIE DES GROUPES ORTHOGONAUX ET SYMPLECTIQUES À COEFFICIENTS TORDUS

PAR AURÉLIEN DJAMENT ET CHRISTINE VESPA

RÉSUMÉ. – On calcule dans cet article l'homologie stable des groupes orthogonaux et symplectiques sur un corps fini k à coefficients tordus par un endofoncteur usuel F des k-espaces vectoriels (puissance extérieure, symétrique, divisée...). Par homologie stable, on entend, pour tout entier naturel i, les colimites des espaces vectoriels $H_i(O_{n,n}(k); F(k^{2n}))$ et $H_i(\mathrm{Sp}_{2n}(k); F(k^{2n}))$ — dans cette situation, la stabilisation (avec une borne explicite en fonction de i et F) est un résultat classique de Charney.

Tout d'abord, nous donnons un cadre formel pour relier l'homologie stable de certaines suites de groupes à l'homologie de petites catégories convenables, à l'aide d'une suite spectrale, qui dégénère dans de nombreux cas favorables. Cela nous permet d'ailleurs de retrouver des résultats de Betley sur l'homologie stable des groupes linéaires et des groupes symétriques, par des méthodes purement algébriques (sans recours à la K-théorie stable).

Pour une application exploitable de ce formalisme aux groupes orthogonaux ou symplectiques sur un corps fini, nous réinterprétons la deuxième page de notre suite spectrale en termes de foncteurs de Mackey non additifs et utilisons leurs propriétés d'acyclicité. Cela permet d'obtenir une simplification spectaculaire de la deuxième page de la suite spectrale en employant de puissants résultats d'annulation connus en homologie des foncteurs.

Dans le cas où les groupes orthogonaux ou symplectiques sont pris sur un corps fini et les coefficients à valeurs dans les espaces vectoriels sur ce même corps, nous pouvons mener le calcul de cette deuxième page grâce à des résultats classiques : annulation homologique à coefficients triviaux (Quillen, Fiedorowicz-Priddy), et calcul des groupes de torsion entre foncteurs usuels (Franjou-Friedlander-Scorichenko-Suslin, Chałupnik). Ceci permet de nombreux calculs d'homologie stable à coefficients.

ABSTRACT. – We compute the stable homology of orthogonal and symplectic groups, over a finite field k, when the coefficients module is twisted by a usual endofunctor F of k-vector spaces (e.g. an exterior, a symmetric, or a divided power) — that is, for each natural integer i, we compute the colimit of the vector spaces $H_i(O_{n,n}(k); F(k^{2n}))$ and $H_i(\mathrm{Sp}_{2n}(k); F(k^{2n}))$. Stabilization in this situation is a classical result of Charney.

We first set a formal framework, within which the stable homology of some families of groups relates through a spectral sequence to the homology of suitable small categories. The spectral sequence

Les auteurs ont bénéficié des contrats INTAS 06-1000017-8609 et ANR BLAN08-2-338236 (HGRT : *Nouveaux liens entre la théorie de l'homotopie et la théorie des groupes et des représentations*).

0012-9593/03/© 2010 Société Mathématique de France. Tous droits réservés

collapses in many cases. We illustrate this purely algebraic method to retrieve results of Betley for the stable homology of the general linear groups and of the symmetric groups.

We then apply our approach to orthogonal and symplectic groups over a finite field. To this end, we reinterpret the second page of our spectral sequence with Mackey functors and use their acyclicity properties. It allows us to simplify the second page of the spectral sequence, by using powerful cancellation results for functor homology.

For the orthogonal as for the symplectic groups over a finite field, and for coefficients modules over the same field, we compute the second page of the spectral sequence. Classical results prove useful at this point: homological cancellation with trivial coefficients (Quillen, Fiedorowicz-Priddy), and calculation of the torsion groups between usual functors (Franjou-Friedlander-Scorichenko-Suslin, Chałupnik). This provides extensive computations of stable homology with coefficients.

Introduction

Cet article a pour objet l'homologie stable à coefficients tordus de familles de groupes classiques, c'est-à-dire la colimite de leur homologie ; celle-ci, dans de nombreux cas, est atteinte en temps fini pour chaque degré. Alors que cette homologie stable possède un comportement plus régulier que l'homologie instable, elle s'avère généralement inaccessible au calcul direct. Depuis les travaux de Betley ([4]) et Suslin ([14]), on dispose cependant d'une interprétation de l'homologie stable des groupes linéaires en terme d'homologie des foncteurs, qui permet de mener à bien de nombreux calculs. Néanmoins aucun analogue n'était jusqu'alors connu dans les cas des groupes orthogonaux et symplectiques.

Le présent travail établit un isomorphisme naturel entre l'homologie stable des groupes orthogonaux (ou symplectiques) sur un corps fini, à coefficients tordus par un foncteur polynomial, et des groupes de torsion entre endofoncteurs des espaces vectoriels. Il est remarquable que cet isomorphisme ne fasse pas intervenir de catégorie d'espaces quadratiques (ou symplectiques), et qu'il ne s'exprime que par la catégorie déjà bien étudiée des endofoncteurs entre espaces vectoriels. Cela rend calculables les groupes d'homologie stable des groupes orthogonaux pour les foncteurs polynomiaux usuels : puissances symétriques, extérieures, tensorielles, etc.

L'homologie stable à coefficients constants des groupes orthogonaux sur un corps fini k a été calculée dans les années 1970 par Fiedorowicz et Priddy [12], en généralisant les méthodes initiées par Quillen [25] pour les groupes linéaires. L'homologie stable à coefficients dans un corps de même caractéristique que k est triviale pour les groupes orthogonaux (si la caractéristique de k est impaire), symplectiques ou linéaires sur k. De plus, on dispose de résultats de stabilité homologique pour les familles de groupes classiques sur les corps finis, à coefficients constants ou tordus par un foncteur polynomial — le cas des groupes orthogonaux étant dû à Charney [8]. Pour autant, la détermination de cette valeur stable semblait jusqu'à présent inabordable, y compris pour des coefficients tordus par un foncteur polynomial non constant élémentaire.

L'annulation de l'homologie stable du groupe linéaire sur un anneau, à coefficients tordus par un foncteur polynomial sans terme constant, a été obtenue par Betley [3] par des méthodes complètement différentes de celles utilisées pour les coefficients constants. En 1999, Betley [4] et Suslin [14, appendice] ont démontré indépendamment une généralisation du résultat précédent, pour des coefficients tordus par un *bi*foncteur, polynomial en chaque variable. L'homologie stable n'est alors plus généralement nulle, mais naturellement isomorphe à l'homologie de Hochschild de la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie, à coefficients dans le bifoncteur. Ces groupes d'homologie sont accessibles pour les foncteurs usuels, comme l'a notamment montré l'article [14]. La démonstration de Betley repose sur un analogue, en termes de groupes *algébriques*, du lien entre l'homologie des groupes linéaires et l'homologie de Hochschild des bifoncteurs polynomiaux, résultat établi un peu plus tôt par Friedlander et Suslin [16]. Suslin s'appuie entièrement, pour sa part, sur des considérations internes aux foncteurs entre espaces vectoriels. Sa démarche a été étendue peu après à l'homologie stable des groupes linéaires sur un anneau arbitraire par Scorichenko [27], qui a obtenu un isomorphisme entre K-théorie stable et homologie de Hochschild d'un bifoncteur polynomial.

Ces résultats constituent une illustration de la richesse du point de vue des catégories de foncteurs, dont on trouvera une synthèse dans [13]. Cette approche a déjà permis de résoudre de difficiles conjectures de finitude, comme en témoignent les travaux de Friedlander-Suslin [16], et tout récemment de Touzé et van der Kallen [31]. L'étude fine des catégories de foncteurs s'est également poursuivie avec, par exemple, les résultats cohomologiques de Chałupnik [7] et Touzé [29], complétant ceux de [14], ou l'introduction de nouvelles catégories de foncteurs reliées aux groupes orthogonaux dans [33].

Nous présentons maintenant le contenu de l'article. Une première section dégage un cadre formel pour étudier l'homologie stable d'une suite convenable de groupes, à partir de l'homologie d'une catégorie adaptée à la situation. Plus précisément, on considère une petite catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{C}, \oplus, 0)$ dont l'unité 0 est objet initial, et A un objet de $\mathcal{C}$. Pour chaque entier naturel i, on note $G(i)$ le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus i})$. La catégorie $\mathcal{C}$ sera par exemple celle des modules projectifs de type fini sur un anneau A, avec les *monomorphismes scindés* comme flèches, et la somme directe pour structure monoïdale. On peut prendre aussi pour $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles finis avec injections, pour A un ensemble à 1 élément et la réunion disjointe pour $\oplus$, ce qui nous permettra de retrouver des résultats de Betley ([5]) sur l'homologie stable des groupes symétriques. Pour le sujet principal de cet article, on considère une catégorie $\mathcal{C}$ d'espaces quadratiques, ou symplectiques, de dimension finie sur un corps commutatif, pour A un espace hyperbolique ou symplectique de dimension 2 et pour $\oplus$ la somme orthogonale. Ces exemples sont détaillés au paragraphe 1.2.

Dans le cas général, la suite de morphismes :

$$0 \to A \to \cdots \to A^{\oplus n} \to A^{\oplus(n+1)} \to \cdots$$

donnés par :

$$A^{\oplus n} \simeq A^{\oplus n} \oplus 0 \xrightarrow{\mathrm{Id} \oplus (0 \to A)} A^{\oplus n} \oplus A \simeq A^{\oplus(n+1)}$$

est compatible aux actions des groupes d'automorphismes $G(n) = \mathrm{Aut}(A^{\oplus n})$, où $G(n)$ agit sur $A^{\oplus(n+1)}$ via le morphisme :

$$G(n) \xrightarrow{g \mapsto g \oplus A} G(n+1).$$

Ceci induit une suite naturelle de morphismes :

$$\cdots \to H_*(G(n); F(A^{\oplus n})) \to H_*(G(n+1); F(A^{\oplus (n+1)})) \to \cdots,$$

où F est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers les groupes abéliens. On appelle *homologie stable* des groupes $G(n)$ à coefficients dans F la colimite de cette suite.

Il existe toujours un morphisme naturel de l'homologie stable des groupes $G(n)$ à coefficients dans F vers l'homologie de $\mathcal{C}$ à coefficients dans F. Sous de bonnes hypothèses sur la catégorie $\mathcal{C}$, ce morphisme est un isomorphisme en degré 0, mais ce n'est plus en général le cas au-delà, où l'on obtient, au paragraphe 2.2, une suite spectrale convergeant vers cette homologie stable et dont la deuxième page s'exprime par des groupes de torsion sur la catégorie $\mathcal{C}$.

Cette suite spectrale offre une alternative purement algébrique à la suite spectrale de la K-théorie stable convergeant vers l'homologie stable du groupe linéaire à coefficients tordus, et à ses avatars la généralisant aux familles de groupes usuelles. En effet, dans les cas connus où l'on sait exprimer la K-théorie stable en termes algébriques plus simples, et où la suite spectrale correspondante s'arrête dès la deuxième page, on observe un phénomène analogue dans notre formalisme — voir notamment nos propositions 2.22 et 2.26. Ceci n'est guère surprenant dans la mesure où les travaux de Scorichenko (cas classique de la K-théorie stable) ou Betley (cas des groupes symétriques) n'utilisent en fait nullement la définition de la K-théorie stable, mais seulement l'existence d'une suite spectrale naturelle d'un certain type, et où l'article [6] de Betley et Pirashvili identifie dans de nombreux cas la K-théorie stable à un foncteur dérivé défini de façon purement algébrique.

Notre résultat principal relatif à l'homologie stable des groupes orthogonaux, démontré au paragraphe 3.2, est le suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit k un corps fini de caractéristique impaire. Pour tout foncteur* polynomial *(voir définition 3.20) F entre k-espaces vectoriels, il existe un isomorphisme naturel :*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(O_{n,n}(k); F(k^{2n})) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}_k^f}(V \mapsto k[S^2(V^*)], F)$$

où $\mathcal{E}_k^f$ désigne la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie, et S^2 la seconde puissance symétrique.

Rappelons que les foncteurs n-ième puissance tensorielle T^n et n-ième puissance symétrique S^n sont polynomiaux de degré n. Par les résultats de [8], la colimite du théorème est donc atteinte pour n fini, en chaque degré homologique. Hormis pour cette considération de stabilisation, le choix des groupes orthogonaux $O_{n,n}$ plutôt que d'autres n'a pas d'importance : toute colimite analogue construite à partir de l'homologie d'autres groupes orthogonaux (associés à des formes quadratiques non dégénérées) sur k est canoniquement isomorphe à celle qu'on considère (cf. remarque 2.24. 3).

Le théorème 1 s'obtient par la suite d'isomorphismes suivante :

1. $$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_*(O_{n,n}(k); F(k^{2n})) \simeq H_*(\mathcal{E}_q; F)$$
   où $\mathcal{E}_q$ est la catégorie des k-espaces quadratiques non dégénérés de dimension finie.