ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 44 *fascicule 2* *mars-avril 2011*

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Alain GENESTIER & Vincent LAFFORGUE

Théorie de Fontaine en égales caractéristiques

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4ᵉ série, t. 44, 2011, p. 263 à 360

THÉORIE DE FONTAINE EN ÉGALES CARACTÉRISTIQUES

PAR Alain GENESTIER ET Vincent LAFFORGUE

RÉSUMÉ. – Les chtoucas locaux sont des analogues en égales caractéristiques des groupes p-divisibles — par exemple on leur associe un module de Tate, qui est un module libre sur l'anneau d'entiers d'un corps local K de caractéristique positive. Nous associons à un chtouca local une structure de Hodge (ou, plus précisément, une structure de Hodge-Pink), ce qui induit un morphisme de périodes analogue à celui construit par Rapoport et Zink. Pour les structures de Hodge-Pink définies sur une extension finie de K nous démontrons un analogue du théorème « faiblement admissible implique admissible » de Colmez et Fontaine. Nous développons aussi une théorie entière. Les démonstrations sont élémentaires et ne font pas intervenir de clôture algébrique de K. Les arguments utilisés dans la théorie entière sont très proches de ceux qui interviennent dans la théorie rationnelle.

ABSTRACT. – Local shtukas are analogs in equal characteristics of p-divisible groups: for example one can associate to them a Tate module, which is a free module over the ring of integers of a local field K of positive characteristic. We associate to a local shtuka a Hodge structure (or more precisely a Hodge-Pink structure) which gives rise to a period morphism analogous to the one constructed by Rapoport and Zink. For Hodge-Pink structures defined over a finite extension of K we prove an analog of the "weakly admissible implies admissible" theorem of Colmez and Fontaine. We also develop an integral theory. The proofs are elementary and do not use an algebraic closure of K. The arguments used in the integral theory are very close to those used in the rational theory.

Soient K un corps local non archimédien de caractéristique p, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, et $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers. On choisit une fois pour toutes une uniformisante π de $\mathcal{O}$, ce qui identifie $\mathcal{O}$ à $\mathbb{F}_q[[\pi]]$ et K à $\mathbb{F}_q((\pi))$.

Soient S un schéma formel adique sur Spf $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}_S$ est donc complet pour une topologie adique relativement à un faisceau d'idéaux qui contient π ; pour nous complet sous-entendra toujours séparé). Soit $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$ le faisceau sur S qui associe à un ouvert affine Spf B le complété $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B$ de $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{F}_q} B$ vis-à-vis de la topologie $\pi\otimes 1$-adique. On notera toujours z au lieu de $\pi\otimes 1$, en gardant la notation π pour $1\otimes\pi$ (z et π sont donc deux sections partout définies du faisceau $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$). L'isomorphisme $\mathcal{O}=\mathbb{F}_q[[\pi]]$ induit par le choix de l'uniformisante π fournit une identification $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B = B[[z]]$.

Soit Fr l'endomorphisme de $\mathcal{O}_S$ qui agit par $b \mapsto b^q$ sur les sections locales de $\mathcal{O}_S$. Pour tout faisceau M de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$-modules, on note

$$^{\tau}M = M \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S, 1\widehat{\otimes}\mathrm{Fr}} \mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S.$$

Si x est une section de M, on note $^{\tau}x$ la section $x \otimes 1$ de $^{\tau}M$.

DÉFINITION 0.1. – *Un chtouca local de rang r sur S est une paire (M, ϕ_M) formée d'un faisceau M de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$-modules qui est localement* [(1)] *libre de rang r pour la topologie de Zariski sur S, et d'un isomorphisme*

$$\phi_M : {}^{\tau}M\left[\frac{1}{z-\pi}\right] \to M\left[\frac{1}{z-\pi}\right]$$

tel que, pour certains entiers $s, t \in \mathbb{Z}$, on ait

$$(z-\pi)^t M \subset \phi_M({}^{\tau}M) \subset (z-\pi)^s M.$$

Dans ce cas on dira que $M = (M, \phi_M)$ est d'amplitude $\subset [s, t]$.

Remarquons que la condition $(z-\pi)^t M \subset \phi_M({}^{\tau}M)$ équivaut à $\phi_M^{-1}(M) \subset (z-\pi)^{-t}\, {}^{\tau}M$. Les chtoucas locaux d'amplitude $\subset [s, t]$ forment un champ pour la topologie de Zariski.

Un morphisme de chtoucas locaux $(M, \phi_M) \to (M', \phi_{M'})$ sur S est un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$-modules $f : M \to M'$, tel que $\phi_{M'} \circ {}^{\tau}f = f \circ \phi_M$. La catégorie des chtoucas locaux sur S est $\mathcal{O}$-linéaire.

Une isogénie est un morphisme $f : (M, \phi_M) \to (M', \phi_{M'})$ tel qu'il existe un morphisme $g : (M', \phi_{M'}) \to (M, \phi_M)$ et une fonction localement constante $e : S \to \mathbb{N}$ pour lesquels $g \circ f = z^e$ et $f \circ g = z^e$. La catégorie des chtoucas locaux à isogénie près s'obtient à partir de la catégorie des chtoucas locaux en inversant les isogénies. On emploiera aussi le terme d'isochtouca local comme synonyme de chtouca local à isogénie près.

Lorsque (M, ϕ_M) est un chtouca local sur S et $S' \to S$ est un morphisme de Spf $\mathcal{O}$-schémas formels, le changement de base $(M, \phi_M)_{S'} = (M \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S} \mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{S'}, \phi_M \otimes 1)$ est un chtouca local sur S'.

On dit qu'un chtouca local est minuscule s'il est d'amplitude $\subset [0, 1]$. Plus concrètement on a la définition suivante.

DÉFINITION 0.2. – *Un chtouca local minuscule de rang r sur S est une paire (M, ϕ_M) formée d'un faisceau M de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$-modules qui est localement libre de rang r pour la topologie de Zariski sur S, et d'un morphisme $\phi_M : {}^{\tau}M \to M$ tel qu'il existe $\psi : M \to {}^{\tau}M$ vérifiant $\phi_M \circ \psi = (z-\pi)$ et $\psi \circ \phi_M = (z-\pi)$.*

[(1)] Dans le cas particulier où S est un schéma affine Spec B (muni de la topologie triviale) le $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$-module M des sections globales n'est pas nécessairement localement libre, contrairement à ce qui est affirmé dans [26] (en effet pour $f \in B$ l'inclusion $(\mathcal{O}\widehat{\otimes}B)[(1\otimes f)^{-1}] \subset \mathcal{O}\widehat{\otimes}(B[f^{-1}])$ est en général stricte). Cette confusion y est cependant sans conséquence : il suffit d'y remplacer systématiquement l'expression « localement libre pour la topologie de Zariski sur Spec $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ » par « localement libre pour la topologie de Zariski sur Spf $\mathcal{O} \widehat{\otimes} B$ ».

Dans la situation de la définition précédente ψ est unique et sera noté ψ_M. D'autre part ϕ_M et ψ_M sont injectifs. D'après le a) du lemme 1.1, $\psi_M(M)/(z-\pi)^{\tau}M$ est un sous-$\mathcal{O}_S$-module localement facteur direct du $\mathcal{O}_S$-module localement libre de type fini ${}^{\tau}M/(z-\pi)^{\tau}M$, et on verra que l'inclusion

$$\psi_M(M)/(z-\pi)^{\tau}M \subset {}^{\tau}M/(z-\pi)^{\tau}M$$

joue le rôle de la filtration de Hodge (cf. [2] et le paragraphe I.3 de [26]).

On définit un morphisme (resp. une isogénie) de chtoucas locaux minuscules comme un morphisme (resp. une isogénie) de chtoucas locaux.

La catégorie des chtoucas locaux minuscules est une sous-catégorie pleine de la catégorie des chtoucas locaux et elle est donc aussi $\mathcal{O}$-linéaire.

Les chtoucas locaux minuscules fournissent l'analogue en égales caractéristiques des groupes p-divisibles. Nous allons rappeler comment associer un « module $\mathcal{O}$-divisible » à un chtouca local minuscule, en commençant par le résultat général suivant.

Proposition 0.3 (Drinfeld [19] paragraphe 2, SGA 3 VII_A 7.4, [26] chapitre 1)

Soient S un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $r \in \mathbb{N}$. On note σ le morphisme de Frobenius de S dans lui-même qui à une section locale x du faisceau structural associe x^q. Alors il y a une anti-équivalence de catégories entre

- *les $\mathcal{O}_S$-modules localement libres M de rang r munis d'un morphisme $\phi_M : \sigma^*(M) \to M$,*
- *les schémas en groupe finis et plats G sur S, de présentation finie, d'ordre q^r, munis d'une action de $\mathbb{F}_q$ qui induit sur le cotangent de G l'action de $\mathbb{F}_q$ provenant du fait que S est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, et dont le Verschiebung est nul.*

Rappelons, d'après Drinfeld, le foncteur de la première catégorie dans la seconde. À (M, ϕ_M) il associe le schéma en groupes sur S avec action de $\mathbb{F}_q$ noté $\mathrm{Gr}(M, \phi_M)$ et défini de la manière suivante : si on note encore M^* et $\sigma^*(M^*)$ les schémas en groupes qui sont les espaces totaux de M^* et $\sigma^*(M^*) = \sigma^*(M)^*$, le transposé de ϕ_M et le Frobenius relatif $\sigma_{M^*/S}$ de M^* sur S sont des morphismes de schémas en groupes de M^* vers $\sigma^*(M^*)$ et on pose alors

$$\mathrm{Gr}(M, \phi_M) = \mathrm{Ker}({}^t\phi_M - \sigma_{M^*/S} : M^* \to \sigma^*(M^*)).$$

Drinfeld montre en complément que $\mathrm{Lie}^*(\mathrm{Gr}(M, \phi_M)) = \mathrm{Coker}(\phi_M)$, où $\mathrm{Lie}^*(\mathrm{Gr}(M, \phi_M))$ désigne l'image inverse de $\Omega^1_{\mathrm{Gr}(M,\phi_M)/S}$ par la section nulle. Drinfeld construit un quasi-inverse explicite : à G on associe le faisceau M des homomorphismes de schémas en groupes commutatifs avec action de $\mathbb{F}_q$ de G dans $\mathbb{G}_a$ (muni d'une action de $\mathcal{O}_S$ qui vient de l'action de $\mathcal{O}_S$ sur $\mathbb{G}_a$ par homothéties, et d'un morphisme $\sigma^*(M) \to M$ qui vient du morphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\mathbb{G}_a$ dans lui-même au-dessus de S).

Soit maintenant (M, ϕ_M) un chtouca local minuscule sur S. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n = \mathrm{Gr}(M/z^nM, \phi_M \bmod z^n)$. Alors (G_n) est une suite de schémas en groupe finis et plats de présentation finie, munis d'une action de $\mathcal{O}$, avec des inclusions $G_n \to G_{n+m}$, donnant lieu aux suites exactes habituelles. L'existence de ψ dans la définition 0.2 assure que l'action de $\mathcal{O}$ sur $\mathrm{Lie}^*(G_n)$ est celle provenant du fait que S est un schéma formel sur $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}$.

Passons maintenant en revue le contenu de cet article.

Le premier paragraphe est consacré à des préliminaires. Dans les paragraphes 2 et 3 nous étudions les chtoucas locaux à isogénie près sur une base quelconque. Nous introduisons la notion de pseudo-isochtouca local, qui est équivalente à celle de chtouca local à isogénie près (aussi appelé isochtouca) lorsque la base est le spectre d'un anneau de valuation réelle complet dans lequel l'image de π est non nulle et de valuation > 0. Si la base est affine, π-adique et sans π-torsion, nous associons aux pseudo-isochtoucas locaux rigidifiés des structures de Hodge-Pink sur sa fibre générique au sens de Raynaud (ces structures ont été introduites par Pink dans le cadre de l'uniformisation des t-motifs, voir [49]). Dans le cas minuscule une structure de Hodge-Pink est simplement une structure de Hodge d'amplitude $\subset [0, 1]$ alors qu'en général elle induit seulement (sur les strates d'une stratification) une structure de Hodge qui ne suffit pas en retour à la déterminer. Lorsque la base est un schéma formel adique localement de type fini (au sens du paragraphe 0.2 de [5]) on associe aux pseudo-isochtoucas locaux rigidifiés des structures de Hodge-Pink sur la fibre générique au sens de Raynaud-Berthelot de ce schéma formel : on peut recouvrir cette variété rigide analytique par des spectres d'algèbres de Tate, dont les anneaux d'entiers sont des algèbres π-adiques et sans π-torsion, de sorte qu'on est en fait ramené au cas affine π-adique et sans π-torsion et on peut supposer de plus que les modules considérés sont libres. Dans le cas universel où la base est un espace de modules de chtoucas locaux rigidifiés, la structure de Hodge-Pink associée au chtouca local universel définit une application de la fibre générique au sens de Raynaud-Berthelot vers l'espace de modules des structures de Hodge-Pink, appelée application des périodes (voir [51] chapitre 4 et [31]).

Dans le paragraphe 4 nous cherchons quelles puissances divisées sont adaptées pour une théorie entière sur une base π-adique et sans π-torsion. La réponse n'est satisfaisante que dans le cas minuscule ; dans les paragraphes 5 et 6 nous développons une telle théorie entière pour les chtoucas locaux minuscules sur une base π-adique. Le paragraphe 5 est consacré à la théorie de Dieudonné cristalline des chtoucas minuscules. Nous y associons un « cristal de Honda-Gross-Hopkins » à tout chtouca minuscule. Ces cristaux de Honda-Gross-Hopkins sont définis en utilisant une notion de puissances divisées due à Honda et Gross-Hopkins, moins contraignante que la notion plus habituelle due à Grothendieck et Berthelot. La construction originale de Gross-Hopkins [33], utilisant la notion de quasi-logarithme, ne permet de traiter que le cas où la base est sans π-torsion. L'analogue en égales caractéristiques de la construction de Messing [48] nécessite quant à elle des puissances divisées nilpotentes au sens de Grothendieck et Berthelot. Notre construction lève donc ces deux limitations. À la fin du paragraphe 5 nous la comparons à celle de Messing dans le cas particulier d'un épaississement à puissances divisées nilpotentes au sens de Grothendieck et Berthelot (nous ne l'avons pas comparée à celle de Mazur-Messing [47] qui évite la condition de nilpotence). Dans le paragraphe 6 nous démontrons un analogue du théorème de relèvement de Grothendieck et Messing pour les épaississements à puissances divisées nilpotentes au sens de Grothendieck et Berthelot.

Les paragraphes 7, 8, 10 et 11 sont consacrés au cas où la base est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet dans lequel l'image de π est non nulle et de valuation > 0, et dont le corps résiduel est parfait. Les paragraphes 7 et 8 montrent que sous cette hypothèse la catégorie des chtoucas locaux à isogénie près est équivalente à celle des isochtoucas sur le corps résiduel munis d'une structure de Hodge-Pink faiblement admissible. Ce résultat est un analogue en égales caractéristiques du théorème « faiblement admissible implique admissible » de Colmez et Fontaine [16]. Hartl [31] a étendu ce résultat à certains anneaux