ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 44 *fascicule 1* *janvier-février 2011*

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Benjamin SCHRAEN

Représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 44, 2011, p. 43 à 145

REPRÉSENTATIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES DE $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$

PAR BENJAMIN SCHRAEN

RÉSUMÉ. – Nous construisons un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, associé à certaines représentations semi-stables de dimension 3 du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$. Nous montrons ensuite que l'on peut retrouver le (φ, N)-module filtré de la représentation galoisienne en considérant les morphismes, dans la catégorie dérivée des $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules, de ce complexe dans le complexe de de Rham de l'espace de Drinfel'd de dimension 2. La preuve requiert le calcul de certains espaces de cohomologie localement analytiques de sous-groupes unipotents à coefficients dans des séries principales localement analytiques.

ABSTRACT. – We construct a complex of locally analytic representations of $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, which is associated to some semi-stable 3-dimensional representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$. Then we show that we can retrieve the (φ, N)-filtered module of the Galois representation in the space of morphisms, in the derived category of $D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p))$-modules, of this complex in the de Rham-complex of the 2-dimensional Drinfel'd's space. For the proof, we compute some spaces of locally analytic cohomology of unipotent subgroups with coefficients in some locally analytic principal series.

1. Introduction

Soient p un nombre premier et K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si k est un entier plus grand que 2, les K-représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ semi-stables non cristallines de dimension 2, à poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$, apparaissent en famille $(V(k, \mathscr{L}))$ dépendant d'un paramètre $\mathscr{L} \in K$. En appliquant le foncteur D_{st}^* de Fontaine à ces représentations, on obtient une famille de (φ, N)-modules filtrés dont les (φ, N)-modules sous-jacents sont tous isomorphes. Le paramètre $\mathscr{L}$ détermine donc la filtration de Hodge de ces modules. Cette situation est particulièrement intéressante pour étudier la correspondance de Langlands p-adique. En effet, la représentation unitaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à une représentation semi-stable est un complété d'une représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, laquelle ne dépend que du (φ, N)-module sous-jacent ainsi que des poids de Hodge-Tate ([7], [9], [15]). Dans le cas présent, la représentation localement algébrique est $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes \mathrm{St}_2 \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$. Dans [7], Christophe Breuil construit une famille $(\Sigma(k, \mathscr{L}))$

de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de telle sorte que $\Sigma(k,\mathscr{L}) \simeq \Sigma(k,\mathscr{L}')$ implique $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$. La représentation $\Sigma(k,\mathscr{L})$ est construite comme une extension de la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2) \otimes |\det|^{\frac{k-2}{2}}$ par la représentation $\Sigma(k)$, cette dernière est un analogue localement analytique de la représentation de Steinberg. Le paramètre $\mathscr{L}$ définit alors la classe d'isomorphisme d'une telle extension. Il a ensuite été prouvé par Christophe Breuil et Ariane Mézard dans certains cas ([8] et [9]), puis dans tous les cas par Pierre Colmez ([15] et [16]), que le complété universel unitaire de $\Sigma(k,\mathscr{L})$ est non nul, admissible, et que sa classe d'isomorphisme dépend effectivement de $\mathscr{L}$.

Dans [52], nous montrons comment $\Sigma(k,\mathscr{L})$ permet de réaliser le (φ,N)-module filtré $D_{st}^*(V(k,\mathscr{L}))$ dans la cohomologie de de Rham du demi-plan de Drinfel'd $\mathscr{X}_1 = \mathbb{C}_p\backslash\mathbb{Q}_p$. Notons $R\Gamma_{dR}(k)$ le complexe de de Rham de $\mathscr{X}_1$ tensorisé avec la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}(K^2)' \otimes |\det|^{-\frac{k-2}{2}}$. C'est un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, de caractère central $a \mapsto (a|a|)^{2-k}$. D'après Schneider et Teitelbaum ([48, §3]), une représentation localement analytique est munie d'une structure de $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-module, $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ étant l'algèbre des distributions localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans K. Soit $\mathscr{D}$ la catégorie dérivée de la catégorie des $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$-modules de caractère central $a \mapsto (a|a|)^{2-k}$. On définit des endomorphismes φ et N de $R\Gamma_{dR}(k)$ dans la catégorie $\mathscr{D}$, ainsi qu'une filtration $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-stable du complexe $R\Gamma_{dR}(k)$. Pour toute représentation localement analytique Σ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, ces constructions munissent le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\Sigma'[-1], R\Gamma_{dR}(k))$ d'une structure de (φ,N)-module filtré. On a alors un isomorphisme de (φ,N)-modules filtrés

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(\Sigma(k,\mathscr{L})'[-1], R\Gamma_{dR}(k)) \simeq D_{st}^*(V(k,\mathscr{L})). \tag{1.1}$$

Le but de cet article est d'étudier une situation analogue pour une famille de K-représentations de dimension 3 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ dépendant d'un triplet $\underline{\mathscr{L}} \in K^3$. Plus précisément, nous utilisons (1.1) comme fil directeur pour construire un complexe de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ dépendant du triplet $\underline{\mathscr{L}}$, de telle sorte que le même procédé permette de « réaliser » le (φ,N)-module filtré dans la cohomologie de de Rham de l'espace de Drinfel'd de dimension 2.

1.1. Notations

Quand nous l'avons pu, nous avons essayé de formuler nos résultats dans le cadre le plus général possible, en vue de généraliser ce travail à d'autres groupes que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique connexe réductif déployé sur $\mathbb{Q}_p$, $\underline{T}$ un sous-tore déployé maximal et $X(T) = \mathrm{Hom}(\underline{T},\mathbb{G}_m)$ son groupe des caractères. Soit Φ l'ensemble des racines de $\underline{G}$ relativement à $\underline{T}$, Δ une base de racines simples du système $(X(T),\Phi)$ et Φ^+ le sous-ensemble des racines positives pour Δ. Soit W le groupe de Weyl du système $(X(T),\Phi)$. Si $w \in W$, on fixe $w \in \underline{G}(\mathbb{Q}_p)$ un relevé de w. On note $\underline{B}^+$ le sous-groupe de Borel associé à Δ et $\underline{B}$ le sous-groupe de Borel opposé. Pour $\alpha \in \Delta$, $s_\alpha \in W$ désigne la réflexion simple associée à α et si S est un sous-ensemble de Δ, on note $\underline{P}_S^+$ le sous-groupe parabolique contenant $\underline{B}^+$ et engendré par les éléments s_α pour $\alpha \in S$, ainsi que $\underline{P}_S$ le parabolique opposé. Le radical unipotent de $\underline{P}_S$ est noté N_S, celui de $\underline{P}_S^+$, N_S^+, et $N = N_\Delta$, $N^+ = N_\Delta^+$.

On note également $\underline{L}_S$ l'unique sous-groupe de Lévi de $\underline{P}_S$ (ou de $\underline{P}_S^+$) contenant $\underline{T}$. Pour tout sous-groupe $\underline{H} \subset \underline{G}$, on note $\overline{\underline{H}}$ le quotient de $\underline{H}$ par le centre de $\underline{G}$. Le symbole w_0 désigne l'unique élément de longueur maximale dans W.

On note X_S^+ l'ensemble des poids $\lambda \in X(T)$ tels que $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in S$. Pour un tel λ, il existe une unique représentation algébrique irréductible de dimension finie de $\underline{L}_S$ et de plus haut poids λ que l'on note $F_{\lambda,S}$. On note $X^+ = X_\Delta^+$, $F_\lambda = F_{\lambda,S}$, c'est alors une représentation de $\underline{G}$.

Soit $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$. On définit l'action tordue de W sur $X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ par $w\cdot\lambda = w(\lambda+\delta)-\delta$. Nous utiliserons également l'action $w * \lambda = w(\lambda-\delta)+\delta = -w\cdot(-\lambda)$. Il s'agit de l'action tordue obtenue en choisissant $-\Delta$ comme base de racines positives.

Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et ρ une K-représentation de dimension finie de $\mathfrak{p}$, on note $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\rho) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \rho$. C'est un $U(\mathfrak{g})$-module appelé module de Verma généralisé. Si $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie de B, on note $\mathfrak{m}(\rho) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\rho)$, c'est un module de Verma.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, $\underline{G}$ est le plus souvent $\mathrm{GL}_{3,\mathbb{Q}_p}$. Dans ce cas on choisit pour $\underline{T}$ le sous-groupe des matrices diagonales et $\Delta = \{\alpha_1,\alpha_2\}$ où $\alpha_1 = \epsilon_0\epsilon_1^{-1}$ et $\alpha_2 = \epsilon_1\epsilon_2^{-1}$, ϵ_i étant le caractère du tore

$$\begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto t_i. \tag{1.2}$$

On abrégera ainsi $P_i = P_{\{\alpha_i\}}$, $s_i = s_{\alpha_i}$, $\mathfrak{m}_i(\rho) = \mathfrak{m}_{P_i}(\rho)$, $F_{\lambda,i} = F_{\lambda,\{\alpha_i\}}$, $N_i = N_{\alpha_i}$.

Si $\underline{H}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}_p$, on note $H = \underline{H}(\mathbb{Q}_p)$ son groupe des $\mathbb{Q}_p$-points, c'est toujours un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique. On fixe alors G_0 un sous-groupe compact maximal spécial de G et pour tout sous-groupe fermé H de G, on pose $H_0 = H \cap G_0$.

Pour V un espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe séparée, on note $C^{\mathrm{an}}(H,V)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur H à valeurs dans V défini dans [48, §2]. Une représentation localement analytique de H est la donnée d'une action de H sur un espace vectoriel localement convexe séparé Σ par des endomorphismes continus et telle que les applications orbites $g \mapsto g\cdot v$ appartiennent à $C^{\mathrm{an}}(G,\Sigma)$. Une représentation localement algébrique est une représentation localement analytique dont l'espace sous-jacent est muni de la topologie localement convexe la plus fine ([50, §6]) et dont les applications orbites sont localement algébriques. Une représentation lisse est une représentation localement algébrique dont les applications orbites sont localement constantes.

La représentation de Steinberg lisse du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est notée St_n.

Si V est un espace vectoriel localement convexe, on note V' son dual topologique muni de la topologie forte ([45, §9]). On note $D(H) = C^{\mathrm{an}}(H,K)'$, c'est l'algèbre des distributions de H ([48, §2]). On note également $C_c^{\mathrm{an}}(H,K)$ l'espace des fonctions localement analytiques à support compact et $\mathscr{D}_c(H)$ son dual fort ([51, §2]). On désigne par $\mathscr{M}(H)$ la catégorie des $D(H)$-modules. Si (ρ,Σ) est une représentation localement analytique, pour $\mu \in D(H)$, $f \in \Sigma'$ et $v \in \Sigma$, on pose

$$(\mu\cdot f)(v) = \mu(h \mapsto f(\rho(h)\cdot v)). \tag{1.3}$$

Ceci munit Σ' d'une structure de $D(H)$-module. Si $\lambda \in X(T)$, sa restriction au centre Z de H est un caractère de Z, et donne lieu à un caractère de l'algèbre $D(Z)$. En général, si χ est un caractère de Z, on note $\mathcal{M}(H)_\chi$ la catégorie des $D(H)$-modules sur lesquels l'algèbre $D(Z)$ agit via le caractère χ^{-1}, et $D^b(\mathcal{M}(H)_\chi)$ sa catégorie dérivée bornée.

On note $C_1^\omega(H,K)$ l'espace des germes de fonctions localement analytiques en 1 défini dans [48, §2] et $D(H)_1$ son dual qui est alors une sous-algèbre de $D(H)$. L'action par translation à gauche de H sur $C^{\mathrm{an}}(H,K)$ est différentiable, donc induit une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur $C^{\mathrm{an}}(H,K)$. De plus, cette action passe au quotient pour donner une action de $\mathfrak{h}$ sur $C_1^\omega(H,K)$. Cette action se prolonge naturellement en une action de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{h})$. L'accouplement

$$\langle X, f\rangle = (X\cdot f)(1) \tag{1.4}$$

induit une injection de $U(\mathfrak{h})$ dans $D(H)_1$ et donc dans $D(H)$. Si $h\in H$ on note δ_h l'élément de $D(H)$ défini par $\delta_h(f)=f(h)$. Ainsi l'application $\sum a_h h\mapsto \sum a_h\delta_h$ est une injection de l'algèbre de groupe $K[H]$ dans $D(H)$. D'après [34, lemme 1.1.1], l'image de cette injection est dense dans $D(H)$.

Si H est un groupe de Lie $\mathbb{Q}_p$-analytique compact, $D(H)$ est un espace de Fréchet nucléaire ([45, §19]). Un espace de Fréchet nucléaire est un espace réflexif, autrement dit, l'application $V\to (V')'$ est un isomorphisme topologique. De plus, le foncteur $V\mapsto V'$ induit une équivalence entre la catégorie des espaces de Fréchet nucléaires et la catégorie des espaces de type compact ([48, §1]).

Si V et W sont deux K-espaces vectoriels localement convexes, on note $V\otimes_{K,\iota}W$ leur produit tensoriel muni de la topologie inductive ([45, §17]), et $V\hat{\otimes}_{K,\iota}W$ le complété de ce produit tensoriel pour cette topologie. Si V et W sont en plus munis d'une structure de $D(H)$-module, on note $V\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}W$ le quotient de $V\hat{\otimes}_{K,\iota}W$ par le sous-K-espace vectoriel image de l'application $V\hat{\otimes}_{K,\iota}D(H)\hat{\otimes}_{K,\iota}W\to V\hat{\otimes}_{K,\iota}W$ définie par $v\otimes\mu\otimes w\mapsto v\mu\otimes w - v\otimes\mu w$ pour $(v,\mu,w)\in V\times D(H)\times W$, on le munit de la topologie quotient. On note $V\hat{\otimes}_{D(H),\iota}W$ le quotient de $V\tilde{\otimes}_{D(H),\iota}W$ par l'adhérence de $\{0\}$. De même on désigne par $\hat{\otimes}_{K,\pi}$ le produit tensoriel muni de la topologie projective ([45, §17]), et on définit de même $\hat{\otimes}_{K,\pi}$. Lorsque V et W sont des espaces de Fréchet, on oublie le ι dans le produit tensoriel car, dans ce cas, toutes les topologies produit tensoriel sont les mêmes ([45, proposition 17.6]). De plus, on note $\mathcal{L}(V,W)$ l'espace des applications linéaires continues de V dans W muni de la topologie forte ([45, §6]). Si V et W sont munis d'actions continues d'un groupe topologique H, on note $\mathcal{L}_H(V,W)$ le sous-espace des applications linéaires continues commutant à l'action de H, et on le munit de la topologie de sous-espace.

Dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n$, nous numérotons les lignes et les colonnes de 0 à $n-1$ et notons $u_{i,j}$ la matrice élémentaire ayant un 1 dans la case (i,j) et 0 ailleurs, elle engendre un sous-espace de poids $\epsilon_i-\epsilon_j$ pour l'action adjointe du sous-tore des matrices diagonales.

Si f est une fonction sur un espace X et $x\in X$, on note ev_x l'application d'évaluation en x.

Si $C^\cdot$ est un complexe, $C^\cdot_{\geq i}$ désignera la troncation bête

$$[0\to\cdots\to 0\to C^i\to C^{i+1}\to\cdots]. \tag{1.5}$$

Si ρ est une représentation d'un groupe H et $h\in H$, on désigne par ρ^h la représentation $\rho(h^{-1}\cdot h)$.