ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 44 fascicule 6 novembre-décembre 2011

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Laurent FARGUES

La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4ᵉ série, t. 44, 2011, p. 905 à 961

LA FILTRATION CANONIQUE DES POINTS DE TORSION DES GROUPES p-DIVISIBLES

PAR LAURENT FARGUES
AVEC LA COLLABORATION DE YICHAO TIAN

RÉSUMÉ. – Étant donnés un entier $n \geq 1$ et un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n et de dimension d sur un anneau de valuation d'inégales caractéristiques, nous donnons une borne explicite sur son invariant de Hasse qui implique que sa filtration de Harder-Narasimhan possède un sous-groupe libre de rang d. Lorsque $n = 1$ nous redémontrons également le théorème d'Abbes-Mokrane ([1]) et de Tian ([36]) par des méthodes locales. On applique cela aux familles p-adiques de tels objets et en particulier à certaines variétés de Shimura de type PEL afin de montrer l'existence de familles compatibles de sections de certaines correspondances de Hecke sur des voisinages tubulaires explicites du lieu ordinaire.

ABSTRACT. – Given an integer $n \geq 1$ and a truncated Barsotti-Tate group of level n and dimension d over an unequal characteristic valuation ring, we give an explicit bound on its Hasse invariant so that its Harder-Narasimhan filtration has a break which is free of rank d. When $n = 1$ we also give a local proof of the Abbes-Mokrane ([1]) and Tian ([36]) theorem. We apply this to p-adic families of such objects and, in particular, we prove the existence of compatible families of sections of some Hecke correspondences on explicit tubular neighborhoods of the ordinary locus in some PEL type Shimura varieties.

1. Introduction

1.1. – Soit p un nombre premier. Soient K une extension valuée complète de $\mathbb{Q}_p$ de valuation discrète et A un schéma abélien de dimension g sur $\mathcal{O}_K$. Si A a réduction ordinaire sur le corps résiduel de K et $n \geq 1$ est un nombre entier, les points de p^n-torsion de A sont munis d'une filtration canonique

$$0 \longrightarrow A[p^n]^0 \longrightarrow A[p^n] \longrightarrow A[p^n]^{\text{ét}} \longrightarrow 0$$

où $A[p^n]^0$ est un schéma en groupes de type multiplicatif d'ordre p^{ng} et $A[p^n]^{\text{ét}}$ est étale du même ordre. Soit $\mathcal{S}_{\text{ord}}$ le lieu formé des points à bonne réduction ordinaire dans l'espace analytique rigide p-adique $\mathcal{S}$ associé aux variétés de Siegel de niveau premier à p. C'est un ouvert admissible au sens de la géométrie rigide que l'on peut voir comme le tube au-dessus de l'ouvert d'ordinarité de la réduction modulo p des modèles entiers canoniques de ces variétés. Soit $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_n} \longrightarrow \mathcal{S}$ le revêtement étale fini associé au sous-groupe de congruence

$$\mathfrak{P}_n = \left\{ x \in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}_p) \mid x \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod p^n \right\},$$

les blocs de la matrice précédente étant de taille $g \times g$. Sur le lieu ordinaire, les filtrations précédentes se mettent en famille et fournissent une section du revêtement $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_n} \rightarrow \mathcal{S}$. Lorsque n varie, ces filtrations vérifient certaines relations de compatibilité.

Sur la réduction modulo p des variétés de Siegel, il y a une forme automorphe algébrique de poids $p-1$. Sa valuation définit une fonction « invariant de Hasse »

$$\mathrm{Ha} : \mathcal{S} \longrightarrow [0,1].$$

De plus, le lieu d'ordinarité de $\mathcal{S}$ est exactement le lieu $\mathrm{Ha}^{-1}(\{0\})$. Se pose alors la question de savoir si l'on peut étendre pour un n donné la section canonique précédente sur un voisinage tubulaire $\mathrm{Ha}^{-1}([0,\epsilon_n[)$ de $\mathcal{S}_{\mathrm{ord}}$ pour un $\epsilon_n \in \mathbb{Q}_{>0}$ que l'on aimerait pouvoir contrôler. La question précédente s'étend en un problème plus général concernant les groupes de Barsotti-Tate tronqués (pour l'étude du même problème dans le cas des variétés de Shimura autres que les variétés de Siegel, le cas des points de torsion des schémas abéliens est insuffisant).

Le cas des courbes elliptiques a été complètement résolu par Katz ([25]) et Lubin ([30]). Dans l'article [1] Abbes et Mokrane ont résolu le cas des variétés abéliennes de dimension générale lorsque $n = 1$, c'est-à-dire le cas des points de p-torsion. Ils utilisent pour cela la description donnée par Bloch et Kato des cycles évanescents p-adiques sur les variétés projectives lisses ayant bonne réduction, couplée à la théorie de la ramification développée par Abbes et Saito dans [2]. Dans l'article [36], Tian a étendu le résultat d'Abbes-Mokrane au cas des groupes de Barsotti-Tate tronqués d'échelon 1. Il fait usage pour cela de résolutions de tels groupes par des schémas abéliens et des résultats de Bloch-Kato sur les cycles évanescents p-adiques associés. Dans l'article [3] Andreatta et Gasbarri ont retrouvé le résultat d'Abbes-Mokrane par d'autres méthodes globales, c'est-à-dire faisant intervenir des schémas abéliens. Conrad a montré dans [10] la surconvergence en général pour les points de p^n-torsion des schémas abéliens pour tout n mais sans borne explicite. Le cas des variétés modulaires de Hilbert a été étudié en détail dans [26], [21] et [22]. Notons enfin que, dans [32], des résultats sur les sous-groupes canoniques de niveau quelconque ont été obtenus par des méthodes complètement différentes. Ces résultats concernent d'autres filtrations des schémas en groupes finis et plats que celles que nous utilisons (ces filtrations interviennent tout de même dans la section 3 où nous les appelons filtrations de ramification inférieure naïves, mais uniquement comme intermédiaires pour en étudier d'autres).

1.2. – Nous commençons tout d'abord par redémontrer le théorème d'Abbes-Mokrane et Tian par des méthodes locales ne faisant pas intervenir de schémas abéliens (cependant contrairement à Abbes et Mokrane, nous ne traitons pas dans ce texte le cas des schémas semi-abéliens). Nous précisons également le comportement de leurs filtrations vis-à-vis de la dualité et donc des polarisations. Voici le théorème démontré dans la section 6. On fixe une extension valuée complète $K|\mathbb{Q}_p$ pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $p \neq 2, 3$ dans le reste de cette introduction.

THÉORÈME (Théorème 4 point (2) et Corollaire 2). – *Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon* 1, *de hauteur h et de dimension $d < h$ sur $\mathcal{O}_K$. Soit $(G^{\lambda}_{\mathrm{AS}})_{\lambda>0}$ la filtration d'Abbes-Saito de G. Supposons que son invariant de Hasse $w \in [0,1]$ soit strictement plus petit que $\frac{1}{2}$. Alors pour $\frac{w}{p-1} \leq \lambda < \frac{p}{p-1}(1-w)$ le groupe $G^{\lambda}_{\mathrm{AS}}$ est de rang d, indépendant de λ. Il en est de même de G^D, la filtration étant alors de rang $h-d$. Pour λ comme précédemment, via l'accouplement $G(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \times G^D(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathbb{F}_p(1)$, on a l'égalité $(G^D)^{\lambda}_{\mathrm{AS}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\perp} = G^{\lambda}_{\mathrm{AS}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$.*

La démonstration de ce théorème fait intervenir une étude fine de l'application de Hodge-Tate des schémas en groupes finis et plats sur $\mathcal{O}_K$. Dans la section 6 nous démontrons d'autres résultats concernant cette application qui sont utiles dans la suite, notamment le résultat suivant.

THÉORÈME (Théorème 4 point (3)). – *Sous les hypothèses du théorème précédent la réduction du cran de rang d de la filtration de G modulo les éléments de $\mathcal{O}_K$ de valuation supérieure ou égale à $1-w$ coïncide avec le noyau du morphisme de Frobenius de la réduction de G.*

L'un des résultats-clefs pour la suite est également le théorème suivant (qui de notre avis, en dehors de l'existence des sous-groupes canoniques, est un des résultats les plus importants de cet article cf. section 9.2). Si E est un schéma en groupes fini et plat sur $\mathcal{O}_K$ on note $\deg(E) = \sum_i v(a_i)$ lorsque $\omega_E \simeq \oplus_i \mathcal{O}_K/a_i\mathcal{O}_K$, la valuation du « discriminant » de E.

THÉORÈME (Théorème 4 point (1)). – *Sous les hypothèses précédentes si $C \subset G$ désigne le sous-groupe canonique construit précédemment alors* $\deg(G/C) = \mathrm{Ha}(G)$.

1.3. – Le second but de cet article est le suivant. Dans [16] l'auteur a développé une théorie des filtrations de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats. Nous utilisons cette théorie afin de construire des sous-groupes canoniques en niveau quelconque dans la section 7. Voici une version abrégée du théorème 6 de cette section.

THÉORÈME. – *Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Soit G un groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon n, de hauteur h et de dimension $d < h$ sur $\mathcal{O}_K$. Soit $w \in [0,1]$ son invariant de Hasse. Supposons que*

$$w < \frac{1}{2p^{n-1}}.$$

La filtration de Harder-Narasimhan de G possède alors un cran C tel que $C(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ soit un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module libre de rang nd. La filtration de G^D possède également un cran D tel que $D(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ soit libre de rang $n(h-d)$. De plus $C(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = D(\mathcal{O}_{\overline{K}})^{\perp}$.

Le théorème précédent est plus précis au sens où il comprend un résultat de compatibilité lorsque n varie. Si $1 \leq k < n$, l'adhérence schématique dans G de $C(\mathcal{O}_{\overline{K}})[p^k]$, C_k, est un cran de la filtration de Harder-Narasimhan de $G[p^k]$. Soit $\epsilon_n = \frac{1}{2p^{n-1}}$ la borne donnée dans le théorème précédent. On montre alors que le groupe de Barsotti-Tate tronqué d'échelon $n-k$, $p^{-(n-k)}C_k/C_k$ est d'invariant de Hasse strictement plus petit que ϵ_{n-k} et

C/C_k est le cran de sa filtration de Harder-Narasimhan libre de rang $(n-k)d$. Voici un des autres résultats que nous démontrons dans la section 7 (cf. théorème 5 et le corollaire 3).

THÉORÈME. – *Soit H un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$ tel que* $\mathrm{Ha}(H) < \frac{1}{2}$. *Soit $C \subset H[p]$ le sous-groupe canonique du théorème précédent.*

- *Si* $\mathrm{Ha}(H) < \frac{1}{p+1}$ *alors* $\mathrm{Ha}(H/C) = p\mathrm{Ha}(H)$.
- *Si* $\frac{1}{p+1} \leq \mathrm{Ha}(H) < \frac{1}{2}$ *alors* $\mathrm{Ha}(H/C) \geq 1 - \mathrm{Ha}(H)$.

En particulier tout groupe p-divisible non-ordinaire sur $\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe p-divisible d'invariant de Hasse supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

Le cas des courbes elliptiques à réduction supersingulière montre que le théorème précédent est optimal.

On remarquera enfin que, dans [38], Yichao Tian démontre que le sous-groupe plat fini précédent C, qui est un cran de la filtration de Harder-Narasimhan de G et dont on a montré qu'il est un cran de la filtration d'Abbes-Saito lorsque $n = 1$, est également un cran de la filtration d'Abbes-Saito pour tout entier n. Cela complète donc les résultats précédents.

1.4. – On montre dans [16] que les filtrations de Harder-Narasimhan des groupes finis et plats se mettent en famille. Le théorème qui suit découle alors facilement des résultats précédents et de ceux de [16]. Nous énonçons le théorème dans le cas des variétés de Siegel mais celui-ci s'applique à d'autres cas de variétés de Shimura de type PEL (par exemple toutes celles associées à un groupe de similitudes symplectiques sur un corps totalement réel). Il est probable que les techniques de cet article s'appliquent à toutes les variétés de Shimura de type PEL (une fois défini un bon invariant de Hasse qui modifie l'invariant usuel).

On note $\mathfrak{P}_0 = \mathrm{Gsp}_{2g}(\mathbb{Z}_p)$. Si $n \geq k \geq 0$ il y a une correspondance de Hecke

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}_{\mathfrak{P}_n} \arrow[dl, "\pi_{1,n,k}"'] \arrow[dr, "\pi_{2,n,k}"] & \\ \mathcal{S}_{\mathfrak{P}_k} & & \mathcal{S}_{\mathfrak{P}_k} \end{tikzcd}$$

où $\pi_{1,n,k}$ est l'application d'oubli du niveau et $\pi_{2,n,k}$ associe à un couple (A, C) le couple $(A/C[p^{n-k}], C/C[p^{n-k}])$ où A est une variété abélienne principalement polarisée et $C \subset A[p^n]$ un sous-groupe totalement isotrope maximal.

THÉORÈME (Théorème 8). – *Posons pour $n \geq 1$, $\epsilon_n = \frac{1}{2p^{n-1}}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $k \geq 0$ et $\epsilon > 0$ on note $(\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_k})_{\mathrm{ord}}(\mathring{\epsilon})$ le tube du lieu ordinaire dans $\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_k}$ où l'invariant de Hasse est strictement plus petit que ϵ.*

1. *Il y a alors pour tout $n \geq 1$ une section s_n*

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{S}_{\mathfrak{P}_n})_{\mathrm{ord}}(\mathring{\epsilon}_n) \arrow[d, "\pi_{1,n,0}"'] \\ \mathcal{S}_{\mathrm{ord}}(\mathring{\epsilon}_n). \arrow[u, bend right, "s_n"'] \end{tikzcd}$$

étendant la section canonique sur le lieu ordinaire.