ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 45 fascicule 1 janvier-février 2012

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Benoît STROH

Sur une conjecture de Kottwitz au bord

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^e série, t. 45, 2012, p. 143 à 165

SUR UNE CONJECTURE DE KOTTWITZ AU BORD

PAR BENOÎT STROH

RÉSUMÉ. – Nous nous intéressons à la cohomologie d'intersection de la compactification minimale des variétés de Siegel à certaines places de mauvaise réduction. Nous calculons la trace semi-simple du morphisme de Frobenius sur les fibres des cycles proches du complexe d'intersection. Nous obtenons une généralisation commune de résultats de Morel et de Haines et Ngô.

ABSTRACT. – We are interested in the intersection cohomology of the minimal compactification of Siegel modular varieties at some places of bad reduction. We compute the semi-simple trace of the Frobenius morphism on the fibers of the nearby cycles of the intersection complex. We obtain a common generalization of results of Morel, Haines and Ngô.

1. Introduction

Calculer les fonctions L des variétés de Shimura est une des clés de voûte du programme de Langlands. Ces fonctions sont définies par des produits eulériens et se calculent donc place par place. Soient p un nombre premier et X une variété de Shimura PEL de type A ou C. Le premier cas à considérer est celui où X a bonne réduction en p. Lorsque X est de plus supposée propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, le calcul du facteur L en p de la représentation galoisienne non ramifiée

$$\mathrm{H}^\bullet(X \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p), \mathbb{Q}_\ell)$$

de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (où ℓ désigne n'importe quel nombre premier différent de p) a été effectué par Kottwitz [9] modulo certains lemmes fondamentaux prouvés depuis par Ngô et Waldspurger.

Lorsque X est toujours supposé lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ mais plus propre, la représentation galoisienne

$$\mathrm{H}^\bullet(X \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p), \mathbb{Q}_\ell)$$

est non ramifiée mais se comporte de manière plutôt pathologique (elle n'est par exemple pas pure). Il est plus intéressant et plus naturel d'étudier plutôt la cohomologie d'intersection

$$\mathrm{IH}^\bullet(X^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p), \mathbb{Q}_\ell)$$

où X^* est la compactification minimale de X, construite par Faltings et Chai dans le cas des variétés de Siegel [3] et par Lan dans le cas PEL général [11]. Avant même de pouvoir mettre en œuvre la stratégie de Kottwitz, on se heurte à un problème purement géométrique qui n'apparaissait pas dans le cas propre : calculer la trace du morphisme de Frobenius sur les fibres du complexe d'intersection de X^*. Ce problème a été résolu par Morel dans [12] et [13] (les détails sont écrits dans le cas des variétés de Siegel et des variétés de Shimura associées aux groupes unitaires sur $\mathbb{Q}$ mais la méthode est complètement générale). L'idée de Morel repose sur une nouvelle caractérisation du prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur sur les variétés sur les corps finis [13, th. 3.1.4]. Cette construction s'applique aux variétés de Shimura qui ont bonne réduction en p car le faisceau pervers décalé $\mathbb{Q}_\ell$ est pur sur les variétés lisses sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$.

Morel a ensuite mené à bien la stratégie de Kottwitz ([14] et [15]) et en a déduit une expression automorphe du facteur L en p des variétés de Siegel et des variétés de Shimura associées à un groupe unitaire sur $\mathbb{Q}$.

Concentrons-nous à présent sur le cas de mauvaise réduction où X n'est plus supposée lisse sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Dans ce cas, la fonction L en p définie par Serre [19] est trop compliquée à étudier car elle n'est plus directement reliée à la géométrie de la fibre spéciale sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Rapoport a défini [18] une modification de la fonction L en p, la fonction L semi-simple en p, qui se calcule via la formule de Lefschetz et est donc reliée à la géométrie de la fibre spéciale.

Supposons X propre et la mauvaise réduction de type parahorique. Contrairement au cas de bonne réduction propre, il y a un problème local à résoudre : calculer la trace semi-simple du morphisme de Frobenius sur les fibres du complexe $\mathrm{R}\Psi(\mathbb{Q}_\ell)$ des cycles proches. La réponse, à savoir une fonction de Bernstein centrale dans une algèbre de Hecke parahorique, a été conjecturée par Kottwitz. Haines et Ngô ont démontré cette conjecture dans [7].

Dans cet article, nous tentons de trouver une généralisation commune, appelée conjecture de Kottwitz au bord, des travaux de Morel et de Haines et Ngô. Nous nous plaçons donc dans le cadre suivant : X est une variété de Shimura PEL qui n'est pas propre et qui a mauvaise réduction de type parahorique en p. Nous supposons de plus que X est une variété de Siegel (mais nos résultats valent dans une généralité plus grande, voir la remarque 9.5). Soit X^* la compactification minimale de X construite dans [21] sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Nous sommes intéressés par le facteur L semi-simple en p de la cohomologie d'intersection

$$\mathrm{IH}^\bullet(X^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{Q}}_p), \mathbb{Q}_\ell)$$

et il nous faut calculer la trace semi-simple du morphisme de Frobenius sur les fibres du complexe $\mathrm{R}\Psi_{X^*} \circ \underline{\mathscr{IC}}_{X^*}(\mathbb{Q}_\ell)$ des cycles proches du complexe d'intersection de X^*. Cette question généralise simultanément celles étudiées par Morel (cas sans mauvaise réduction) et par Haines et Ngô (cas sans bord). Le corollaire 9.3 donne une expression explicite de cette trace semi-simple en terme de théorie des groupes. Cette expression fait intervenir le produit d'une fonction de Bernstein et d'une somme portant sur divers sous-groupes paraboliques du groupe définissant la variété de Shimura X.

Nous commençons par montrer dans la partie 4 que la cohomologie d'intersection de $X^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$ est égale à la cohomologie d'intersection de $X^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ à valeur dans les cycles proches $\mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)$. Ceci résulte en fait de l'énoncé local de commutation

$$\mathrm{R}\Psi_{X^*} \circ \underline{\mathscr{IC}}_{X^*}(\mathbb{Q}_\ell) \;=\; \underline{\mathscr{IC}}_{X^*} \circ \mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)\,.$$

Il peut alors paraître envisageable d'appliquer le théorème général [13, 3.1.4] pour calculer la trace semi-simple du morphisme de Frobenius sur les fibres du complexe $\underline{\mathscr{H}}_{X^*} \circ \mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)$ sur $X^* \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Mais les cycles proches $\mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)$ ne sont en général pas purs et la pureté est l'hypothèse primordiale de [13, th. 3.1.4]. Nous décomposons donc ces cycles proches $\mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)$ en faisceaux pervers simples dans le groupe de Grothendieck. On peut appliquer le théorème [13, 3.1.4] à chacun de ces constituants simples puisque les faisceaux pervers simples sont purs. On obtient alors une expression pour la trace semi-simple du morphisme de Frobenius sur les fibres de $\mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)$, mais cette expression est non explicite car elle fait intervenir les multiplicités inconnues des facteurs de Jordan-Hölder de $\mathrm{R}\Psi_X(\mathbb{Q}_\ell)$. Ce problème est résolu dans la partie 7 où l'on montre que certaines de ces multiplicités sont égales à celles des facteurs de Jordan-Hölder de $\mathrm{R}\Psi_{X'}(\mathbb{Q}_\ell)$ avec X' une strate de bord de la compactification minimale X^* de X. Nous utilisons à plusieurs reprises l'existence de compactifications toroïdales de X, qui ont été construites dans [20] et résolvent certaines des singularités de la compactification minimale X^*.

Je remercie chaleureusement Sophie Morel pour de nombreux conseils prodigués lors d'un séjour à Harvard. Je remercie également Alain Genestier, Ulrich Görtz et Bao Châu Ngô de m'avoir aidé à clarifier certains points de cet article. Je remercie enfin le rapporteur anonyme pour une relecture très attentive. L'auteur a bénéficié du projet ANR-10-BLAN 0114 ArShiFo pendant la préparation de cet article.

2. Prolongement intermédiaire et troncation par le poids

Cette partie est consacrée à de brefs rappels du théorème fondamental de [13]. La situation considérée ici n'a rien à voir avec les variétés de Siegel, aussi adopterons-nous des notations indépendantes du reste de l'article. Soient a un entier relatif, k un corps fini et X un schéma séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$. Notons $D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux ℓ-adiques mixtes sur X. Morel a introduit dans [13, 3.1] un foncteur de « troncation en poids inférieur à a »

$$\mathrm{w}_{\leq a} \;:\; D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

et un foncteur de « troncation en poids strictement supérieur à a »

$$\mathrm{w}_{> a} \;:\; D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)\,.$$

Cette paire de foncteurs de troncation est associée à une t-structure sur $D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ notée $({}^{\mathrm{w}}D^{\leq a}, {}^{\mathrm{w}}D^{>a})$. Dans toute la suite de l'article, le terme de faisceau pervers sera relatif à la t-structure perverse autoduale habituelle et le foncteur cohomologique associé sera noté ${}^p\mathscr{H}^0$. Lorsque K est pervers mixte sur X, le complexe $\mathrm{w}_{\leq a}K$ est le plus grand sous-faisceau pervers de K de poids $\leq a$ et $\mathrm{w}_{>a}K$ le plus grand quotient de poids $> a$. En particulier, si K est pervers pur de poids a sur X, on a $\mathrm{w}_{\leq a}K = K$ et $\mathrm{w}_{>a}K = 0$. Lorsque K est un complexe mixte, le complexe $\mathrm{w}_{\leq a}K$ vérifie que ${}^p\mathscr{H}^n(\mathrm{w}_{\leq a}K)$ est mixte de poids $\leq a$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\mathrm{w}_{>a}K$ vérifie que ${}^p\mathscr{H}^n(\mathrm{w}_{>a}K)$ est mixte de poids $> a$.

Remarque 2.1. – Si K n'est pas pervers, le complexe $\mathrm{w}_{\leq a}K$ n'est en général pas mixte de poids $\leq a$ au sens de Deligne. En effet, la condition garantissant que $\mathrm{w}_{\leq a}K$ soit mixte de poids $\leq a$ est que ${}^p\mathcal{H}^n(\mathrm{w}_{\leq a}K)$ soit mixte de poids $\leq n+a$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et cette condition n'est pas vérifiée si $\mathrm{w}_{\leq a}K$ a des groupes de cohomologie perverse non nuls en degré < 0.

Soit $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert non vide. Le foncteur $\mathrm{w}_{\leq a}$ est relié au prolongement intermédiaire $j_{!*}$ par le théorème suivant prouvé dans [13, 3.1.4].

Théorème 2.2 (Morel). – *Soit A un faisceau pervers pur de poids a sur U. Il existe un isomorphisme canonique $j_{!*}A \xrightarrow{\sim} \mathrm{w}_{\leq a}\, j_*A$ où j_* désigne le foncteur dérivé d'image directe.*

Remarque 2.3. – Une des propriétés surprenantes du foncteur de troncation $\mathrm{w}_{\leq a}$ est son caractère triangulé [13, 3.1.3 (iii)]. Il définit en particulier un morphisme entre groupes de Grothendieck. Ce morphisme joue un rôle clé dans [13] comme dans cet article.

Pour les applications aux variétés de Shimura, il est plus commode de travailler avec une version stratifiée de ce théorème. Donnons-nous donc une stratification $X = \coprod_{k=0}^{n} S_k$ par des sous-schémas localement fermés. On suppose que $S_n = U$ et que l'adhérence de S_k est égale à $\coprod_{l\leq k} S_l$ pour tout $k \leq n$. En particulier, U est l'unique strate ouverte de X et S_0 l'unique strate fermée. Notons i_k l'immersion de S_k dans X ; on a donc $i_n = j$. Notons $\mathcal{T}_k$ le foncteur $i_{k\,*} \circ \mathrm{w}_{>a} \circ i_k^*$ et, pour tout sous-ensemble ordonné $I = \{n_1 \leq \cdots \leq n_r\}$ de $\{0, \ldots, n-1\}$ de cardinal $\sharp I = r$, notons $\mathcal{T}_I$ le composé $\mathcal{T}_{n_1} \circ \cdots \circ \mathcal{T}_{n_r}$. La proposition suivante est démontrée dans [13, 3.3.5].

Proposition 2.4. – *Soit A un faisceau pervers pur de poids a sur U. Dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ on a l'égalité*

$$j_{!*}\,A \;=\; \sum_I (-1)^{\sharp I} \cdot \mathcal{T}_I\,(j_*\,A)$$

où I parcourt les sous-ensembles ordonnés de $\{0, \ldots, n-1\}$.

3. Compactifications des variétés de Siegel

3.1. Variétés de Siegel

Soient g un entier positif, p un nombre premier, $n \geq 3$ un entier non divisible par p et $\mathcal{D} = \{d_1 < d_2 < \cdots < d_s\}$ un sous-ensemble ordonné de $\{1, \ldots, g\}$. Soit $V = \oplus_{j=1}^{2g} \mathbb{Z}\cdot x_j$ le $\mathbb{Z}$-module libre de rang $2g$ de base (x_j). On le munit de la forme symplectique de matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J' \\ -J' & 0 \end{pmatrix}$$

où J' est la matrice anti-diagonale de coefficients non nuls égaux à 1. Notons

$$\mathcal{A}_V \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$$

l'espace de modules des schémas abéliens A principalement polarisés de genre g munis d'une similitude symplectique entre le groupe des points de n-torsion $A[n]$ et le $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-module symplectique V/nV, et d'une chaîne de groupes finis et plats $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_s \subset A[p]$ telle que H_i soit de rang p^{d_i} pour $0 \leq i \leq s$ et que H_s soit totalement isotrope pour l'accouplement de Weil. On appelle cette structure de niveau en p une structure de niveau