ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 45 fascicule 5 septembre-octobre 2012

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Wen-Wei LI

La formule des traces pour les revêtements de groupes réductifs connexes. II. Analyse harmonique locale

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 45, 2012, p. 787 à 859

LA FORMULE DES TRACES POUR LES REVÊTEMENTS DE GROUPES RÉDUCTIFS CONNEXES. II. ANALYSE HARMONIQUE LOCALE

PAR WEN-WEI LI

RÉSUMÉ. – On établit des résultats de l'analyse harmonique locale nécessaires pour la formule des traces invariante d'Arthur pour les revêtements de groupes réductifs connexes. Plus précisément, on démontre pour les revêtements locaux (1) la formule de Plancherel et des préparatifs reliés, (2) la normalisation des opérateurs d'entrelacement soumise aux conditions d'Arthur, (3) le comportement local de caractères de représentations admissibles dans le cas non archimédien, et (4) la partie spécifique de la formule des traces locale invariante. Comme un sous-produit de la démonstration de la formule des traces locale invariante, on obtient aussi la densité de caractères tempérés pour les revêtements.

ABSTRACT. – We establish some results in local harmonic analysis which are necessary for Arthur's invariant trace formula for coverings of connected reductive groups. More precisely, for local coverings we will study (1) the Plancherel formula and its preparations, (2) the normalization of intertwining operators subject to Arthur's conditions, (3) the local behavior of characters of admissible representations in the nonarchimedean case, and (4) the genuine part of the invariant local trace formula. As a byproduct of the invariant local trace formula, we deduce the density of tempered characters for coverings.

1. Introduction

Cet article fait suite à [31] qui vise à établir une formule des traces invariante à la Arthur [6] pour une grande classe de revêtements des groupes réductifs connexes. Afin d'arriver à la formule des traces invariante, Arthur a besoin des résultats profonds d'analyse harmonique locale. Tandis qu'ils sont admis par certains mathématiciens, il s'avère que les modifications nécessaires ne sont pas toujours triviales. Notre objet est donc d'établir, ou plutôt de justifier, de tels résultats. Plus précisément, nous visons à établir

- la formule de Plancherel [36] ;
- la normalisation des opérateurs d'entrelacement [8], avec formules explicites dans le cas archimédien ;
- la régularité et le développement local de caractères dans le cas non archimédien [25] ;

– le théorème de Paley-Wiener invariant pour les fonctions de Schwartz-Harish-Chandra [12], qui est un ingrédient crucial pour mettre la formule des traces locale en une forme invariante ;
– la formule des traces locale invariante [9] ;
– le théorème à la Kazhdan de la densité de caractères tempérés dans le cas non archimédien [26].

Le Graal de cet article est la formule des traces locale invariante sous la forme présentée dans [14, Proposition 6.1] :

$$I_{\text{disc}}(f) = \sum_{M \in \mathscr{L}(M_0)} |W_0^M||W_0^G|^{-1}(-1)^{\dim A_M/A_G} \int_{\Gamma_{G-\text{reg,ell}}(M(F))^{\text{bon}}} I_{\tilde{M}}(\gamma, f)\, \mathrm{d}\gamma$$

pour tout $f \in \mathscr{C}_{--}(\tilde{G} \times \tilde{G})$, où

– $\mathscr{C}_{--}(\tilde{G}\times\tilde{G})$ est la « composante anti-spécifique » de l'espace des fonctions de Schwartz-Harish-Chandra sur $\tilde{G} \times \tilde{G}$;
– $I_{\text{disc}}(\cdot)$ est la « partie discrète » du côté spectral spécifique de la formule des traces locale non invariante ;
– $I_{\tilde{M}}(\gamma, \cdot)$ est la distribution invariante fabriquée des intégrales orbitales pondérées et des caractères pondérés. C'est l'intégrale orbitale usuelle lorsque $M = G$. Cette distribution est reliée aux distributions apparaissant dans la formule des traces globale par une formule de scindage (le lemme 5.8.4).

Voir §5 pour les détails. Il peut paraître curieux car la formule des traces locale n'est pas un ingrédient dans la preuve originelle d'Arthur de la formule des traces globale. Néanmoins, Arthur fait usage d'un argument global pour compléter son argument de récurrence (voir [6, §5]), ce qui est problématique sur les revêtements car il faudrait une propriété d'approximation faible des bons éléments. Un cas particulier du résultat d'Arthur est la densité de caractères tempérés due à Kazhdan [26] qui est indispensable dans toute application de la formule des traces. Donc il faut les établir à tout prix. Ici la formule des traces locale en fournit une approche contournée mais purement locale, cf. [10, Corollary 5.3]. D'ailleurs, la formule des traces locale interviendra dans toute étude sérieuse d'analyse harmonique locale, e.g. la théorie de représentations tempérées elliptiques ; elle est également utilisée dans le travail de Mezo [33, §3] sur la correspondance métaplectique.

Vu les travaux de Harish-Chandra, il est tentant de penser que les théories archimédiennes s'adaptent aux revêtements sans peine. Bien au contraire ! Par exemple, le théorème de Paley-Wiener invariant pour les fonctions de Schwartz-Harish-Chandra fait l'usage de la théorie de K-types minimaux de Vogan, notamment la multiplicité 1, ce qui dépend des hypothèses d'algébricité ou de connexité du groupe de Lie en question.

C'est inévitable d'admettre les généralisations aux revêtements de certains résultats standard d'analyse harmonique dans cet article, à savoir :

– la théorie de décomposition de Bernstein, notamment le lemme géométrique [16] ;
– la classification des représentations tempérées en termes des représentations de carré intégrable modulo le centre dans le cas non archimédien [36] ;
– la classification de Langlands des représentations admissibles dans le cas non archimédien [30] ;

– la théorie de R-groupes, cf. [34].

On donnera des justifications pour le lemme géométrique en 2.2.

Organisation de cet article. – Dans le §2, nous recueillons des définitions de base pour l'analyse harmonique locale non archimédienne pour les revêtements et nous établissons la théorie de Harish-Chandra pour les revêtements : fonctions de Schwartz-Harish-Chandra, représentations tempérées, opérateurs d'entrelacement, fonction c et μ, la formule de Plancherel. Les preuves sont plus ou moins identiques au cas des groupes réductifs connexes et nous adoptons les notations de [36] ; le but de cette section est plutôt de fixer les notations et les choix de mesures. Une exception : il faut choisir un sous-groupe ouvert d'indice fini $A_M(F)^\dagger$ de $A_M(F)$, où M est un sous-groupe de Lévi semi-standard de G (voir la proposition 2.1.1). Afin de compenser cette ambiguïté, les intégrales concernant $A_M(F)^\dagger$ sont multipliées par le facteur ι_M défini dans (1).

Dans le §3, nous étudions la normalisation des opérateurs d'entrelacement satisfaisant aux conditions d'Arthur, cf. [8, §2] et [11, §2]. Nous en donnons des formules explicites similaires à celles d'Arthur dans le cas archimédien. Pour le cas non archimédien, nous reprenons l'argument dans [21, Lecture 15] à quelques corrections près. Enfin, il faut aussi considérer le cas des revêtements non ramifiés et nous le faisons à l'aide de la théorie de séries principales non ramifiées spécifiques. Pour les revêtements archimédiens à deux feuillets, par exemple ceux provenant des $\mathbf{K}_2$-extensions de Brylinski-Deligne [19], nos facteurs normalisants sont liés à ceux d'Arthur pour les $\mathbb{R}$-groupes réductifs connexes qui s'expriment en termes de fonctions L archimédiennes.

Dans le §4, nous reprenons [25]. La méthode de descente semi-simple nous ramène à l'algèbre de Lie, où le revêtement disparaît mais un caractère intervient. Le même phénomène paraît aussi dans [31]. On peut se débarrasser du caractère en travaillant systématiquement avec le module croisé $[G_{\mathrm{SC}} \times Z^\circ_{G^\circ} \to G]$. Remarquons que l'intégrabilité locale des caractères admissibles irréductibles pour les revêtements est déjà apparue comme une hypothèse dans des travaux sur la correspondance de Howe.

Il semble que notre méthode permettrait de montrer le théorème de régularité de Harish-Chandra au niveau du groupe, ainsi que le développement local, dans le cadre tordu par un caractère $\boldsymbol{\omega}$. C'est la situation rencontrée en endoscopie tordue. Nous ne poursuivons pas ce problème dans cet article.

Dans le §5, nous établissons la formule des traces locale d'Arthur. Les arguments sont presque identiques à ceux d'Arthur et nous n'en donnons que des esquisses ; les intégrales d'Eisentein sont évitées dans notre article. Comme le formalisme d'Arthur évolue, la tâche est plutôt de faire une mise à jour. Notre référence est [14, §6] ; en particulier, les fonctions test sont dans l'espace de Schwartz-Harish-Chandra et les distributions sont rendues invariantes à l'aide du théorème de Paley-Wiener invariant pour de telles fonctions, dont la démonstration dans le cas archimédien est une variante de celle de [12]. Nous démontrons le « théorème 0 » de Kazhdan dans le théorème 5.8.10. Cette section est quelque peu formelle à l'exception du théorème de Paley-Wiener invariant, qui nécessite des constructions combinatoires techniques.

Selon Arthur, les caractères pondérés peuvent être non normalisés (ceux dans la formule des traces locale non invariante), normalisés relativement à un choix de facteurs normalisants, ou canoniquement normalisés à l'aide de fonctions μ. Dans l'étude de la formule des traces locale invariante, il nous faut utiliser et comparer tous les trois. Néanmoins, dans les énoncés finaux les caractères pondérés canoniquement normalisés sont toujours préférés.

Récapitulons le rapport entre les résultats principaux comme suit.

$$\begin{tikzcd}
& \text{La formule de Plancherel} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\text{Normalisation des opérateurs d'entrelacement} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{Théorème de Paley-Wiener invariant} \arrow[dl] \\
& \text{La formule des traces locale invariante} \arrow[d] & \\
\text{Régularité des caractères} \arrow[r] & \text{Densité des caractères tempérés} &
\end{tikzcd}$$

Les corps locaux des §§4-5 sont supposés de caractéristique nulle.

Notations générales. – Sauf mention expresse du contraire, les notations seront celles de [31], qui sont compatibles avec celles d'Arthur. Si V est un espace vectoriel, son dual est noté $V^\vee$ et l'accouplement entre eux est désigné par $\langle \check{v}, v \rangle$ ou $\check{v}(v)$.

Remerciements. – Je remercie très vivement J.-L. Waldspurger pour ses remarques sur le manuscrit, ainsi que T. Ikeda, P. McNamara et P. Mezo pour des conversations utiles. Je remercie aussi le rapporteur pour ses conseils très pertinents.

2. La formule de Plancherel

2.1. Définitions de base

On vise à établir la formule de Plancherel pour les revêtements locaux. Le cas archimédien est déjà traité dans les travaux de Harish-Chandra [24]. On se limite au cas où F est un corps local non archimédien. Notons q le cardinal du corps résiduel de F. Nous suivrons l'approche de Waldspurger [36] en mettant l'accent sur les énoncés et les changements nécessaires pour adapter ses preuves aux revêtements.

Soient $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$ et G un F-groupe réductif connexe. Considérons un revêtement à m feuillets

$$1 \to \mu_m \to \tilde{G} \xrightarrow{\mathbf{p}} G(F) \to 1.$$

Nous adoptons les conventions de [31] : les objets associés au revêtement sont affectés de $\sim$, e.g. $\tilde{P}, \tilde{x}$; les symboles sans $\sim$ désignent leurs images par $\mathbf{p}$. Une décomposition de Lévi d'un parabolique P s'écrit toujours de la forme $P = MU$. On construira des objets