ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 46 fascicule 4 juillet-août 2013

ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE

Mikhail BOROVOI & Cyril DEMARCHE & David HARARI

Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4ᵉ série, t. 46, 2013, p. 651 à 692

COMPLEXES DE GROUPES DE TYPE MULTIPLICATIF ET GROUPE DE BRAUER NON RAMIFIÉ DES ESPACES HOMOGÈNES

PAR MIKHAIL BOROVOI, CYRIL DEMARCHE ET DAVID HARARI

RÉSUMÉ. – On calcule par des méthodes arithmétiques le groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes de groupes algébriques linéaires sur différents corps. Les formules obtenues font intervenir l'hypercohomologie de complexes de groupes de type multiplicatif.

ABSTRACT. – We compute by arithmetic methods the unramified Brauer group of homogeneous spaces of linear algebraic groups over various fields. We get formulae in terms of hypercohomology of complexes of groups of multiplicative type.

1. Introduction

Soit G un groupe algébrique linéaire connexe lisse défini sur un corps k. Soit X un espace homogène de G, tel que le stabilisateur géométrique $\overline{H}$ soit *de type (ssumult)*, c'est-à-dire une extension d'un groupe de type multiplicatif lisse par un groupe connexe, lisse et sans caractères (par exemple, un groupe linéaire lisse et connexe sur un corps parfait est de type (ssumult), ainsi qu'un groupe linéaire commutatif sur un corps de caractéristique zéro). Le but de cet article est d'établir des formules (obtenues précédemment dans des cas particuliers par Colliot-Thélène et Kunyavskiĭ [15], [16]) pour le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Br}_1 X^c$ (et parfois pour tout le groupe de Brauer $\mathrm{Br}\, X^c$) d'une compactification lisse X^c de X. Le groupe $\mathrm{Br}\, X^c$ coïncide avec le groupe de Brauer non ramifié de X si k est de caractéristique zéro (et le même énoncé vaut en caractéristique p exception faite de la torsion p-primaire).

Dans le cas où k est un corps global, on rappelle que ce groupe $\mathrm{Br}\, X^c$ intervient de façon cruciale dans l'étude de l'arithmétique de l'espace homogène X et de sa compactification X^c, via l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible (voir par exemple [48], théorème 5.2.1 (a)). Par ailleurs, ce groupe est également utilisé pour étudier la rationalité de l'espace homogène X sur un corps k quelconque (voir par exemple [17]). Ces deux exemples illustrent l'intérêt et la motivation que l'on peut avoir à disposer de formules décrivant le groupe $\mathrm{Br}\, X^c$ sur un corps k quelconque.

Comme dans les travaux antérieurs, les formules obtenues ici pour le groupe $\operatorname{Br} X^c$ font intervenir des groupes « Ш_ω », mais ils sont associés à des groupes d'hypercohomologie galoisienne de certains complexes (définis et utilisés dans [9] et [10]) au lieu simplement de groupes de cohomologie galoisienne.

Les résultats principaux de cet article sont les suivants :

1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et $X = G/H$ un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G, avec H connexe. Alors (théorème 5.1) le groupe de Brauer $\operatorname{Br} X^c$ d'une compactification lisse X^c de X est nul. Ceci étend le résultat classique de Bogomolov (qui concerne le cas $k = \mathbf{C}$ et G semi-simple simplement connexe), et répond par l'affirmative à une question posée par Colliot-Thélène et Kunyavskiĭ (et également auparavant par Colliot-Thélène et Sansuc). Si k est séparablement clos de caractéristique p, le même résultat vaut pour la partie première à p de $\operatorname{Br} X^c$ si l'on suppose de plus G et H lisses et réductifs.

2. Pour un espace homogène X d'un groupe linéaire connexe G sur un corps k quelconque de caractéristique zéro, on obtient une formule « de type Ш_ω » pour le groupe de Brauer algébrique $\operatorname{Br}_1 X^c$, qui est valable dès que le stabilisateur géométrique $\overline{H}$ est de type (ssumult) et G est de groupe de Picard géométrique nul (théorème 8.1). Ce résultat généralise le théorème principal de [16] dans deux directions : on ne demande plus que G soit quasi-trivial, et l'hypothèse sur $\overline{H}$ est plus faible que l'hypothèse habituelle de connexité (sous laquelle notre théorème 5.1 permet également d'obtenir la formule pour tout le groupe de Brauer $\operatorname{Br} X^c$ et pas seulement pour $\operatorname{Br}_1 X^c$). On a de plus des contre-exemples qui montrent que l'hypothèse que $\overline{H}$ est de type (ssumult) ne peut pas être supprimée ; en particulier l'hypothèse que le groupe des composantes connexes de $\overline{H}$ est commutatif n'est pas suffisante (proposition 8.4).

3. On montre également une formule analogue sur un corps global de caractéristique p (théorème 7.4), et on prouve la trivialité du groupe considéré sur un corps fini (théorème 7.5) moyennant quelques hypothèses de lissité additionnelles. Noter aussi que l'utilisation d'un théorème récent de Gabber (qui précise le théorème d' A. J. de Jong sur les altérations) permet de démontrer la plupart de ces énoncés sur $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}} X$ en caractéristique p (en exceptant la torsion p-primaire) sans supposer l'existence d'une compactification lisse pour X.

Une autre nouveauté importante de cet article est que la méthode de démonstration de plusieurs de nos théorèmes passe (comme pour le résultat principal de [15]) par le cas des corps finis, mais pour traiter ceux-ci on est amené à passer sur des corps locaux de caractéristique p et à utiliser des théorèmes de dualité arithmétique pour obtenir le résultat dans ce contexte. C'est pourquoi on a été amené à étendre certains résultats classiques de dualité sur les corps p-adiques aux corps locaux de caractéristique quelconque, et aussi à certains complexes de groupes de type multiplicatif au lieu de se limiter à des modules galoisiens (proposition 3.2, proposition 7.2). Enfin on donne aussi au passage une démonstration détaillée d'une formule de compatibilité entre accouplements (théorème 6.2) qui est utile en elle-même, notamment si on est intéressé par l'accouplement de Brauer-Manin sur les espaces homogènes au-dessus d'un corps global.

2. Notations et conventions

Dans ce texte, tous les schémas en groupes sont supposés localement de type fini. Si k est un corps, on dit simplement « k-groupe » pour désigner un k-schéma en groupes linéaire, i.e. affine et de type fini. Un *k-groupe réductif* (resp. semi-simple) est un k-schéma en groupes affine, lisse, connexe, et réductif (resp. semi-simple). On note souvent G^0 la composante connexe du neutre d'un k-groupe G. Si G est un k-groupe connexe lisse sur un corps parfait, on note G^{u} son radical unipotent, $G^{\mathrm{red}} := G/G^{\mathrm{u}}$ le quotient réductif, G^{ss} le sous-groupe dérivé de G^{red} et G^{sc} le revêtement semi-simple simplement connexe de G^{ss}. On dit alors que G est *quasi-trivial* si $G^{\mathrm{tor}} := G^{\mathrm{red}}/G^{\mathrm{ss}}$ est quasi-trivial (i.e. son groupe des caractères est un module galoisien de permutation) et G^{ss} est simplement connexe.

Pour tout corps k, on note $\bar{k}$ une clôture *séparable* de k et $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Si X est un k-schéma et L une extension de k, on pose $X_L := X \times_k L$ et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$. Les groupes de cohomologie étale $H^n_{\mathrm{et}}(X, \dots)$ sont notés simplement $H^n(X, \dots)$, tandis qu'on note $H^n_{\mathrm{fppf}}(X, \dots)$ s'il s'agit de groupes fppf (les deux coïncident pour des faisceaux représentés par des schémas en groupes lisses et quasi-projectifs). Pour simplifier on note aussi souvent $H^n(X, C^\bullet)$ les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^n(X, C^\bullet)$ quand $C^\bullet$ est un complexe borné de faisceaux étales sur X (et de même avec les groupes fppf). On adopte des notations analogues pour les ensembles de cohomologie (non abélienne) $H^1(X, \dots)$. En particulier si G est un k-schéma en groupes lisse, l'ensemble $H^1(k, G)$ (resp. les groupes $H^i(k, G)$ si G est commutatif) s'identifie à l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\Gamma_k, G(\bar{k}))$ (resp. aux groupes de cohomologie galoisienne $H^i(\Gamma_k, G(\bar{k}))$).

Par convention, quand on écrit un complexe à deux termes sous la forme $[A \to B]$, cela signifie que A est en degré -1 et B en degré 0. Si Z est un schéma, on note $\mathcal{D}(Z)$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)$) la catégorie dérivée bornée des faisceaux étales (resp. fppf) sur Z. Si k est un corps et M est un Γ_k-module galoisien (ou encore un complexe borné de modules galoisiens), on note (pour tout $i \geq 1$) $Ш^i_{\omega,\mathrm{alg}}(k, M)$ (ou $Ш^i_{\omega,\mathrm{alg}}(M)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps k) le sous-groupe de $H^i(\Gamma_k, M)$ constitué des éléments dont la restriction à $H^i(C, M)$ est nulle pour tout sous-groupe procyclique C de Γ_k.

Un *corps local* est un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini : c'est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (s'il est de caractéristique 0) ou d'un corps de séries de Laurent $\mathbf{F}_q((t))$ sur un corps fini (s'il est de caractéristique > 0). On utilisera fréquemment le fait (dû à Kneser [37] en caractéristique zéro et à Bruhat-Tits [11] en caractéristique > 0) que pour un groupe semi-simple simplement connexe G sur un corps local K, on a $H^1(K, G) = 0$. Par Hilbert 90, on en déduit alors le résultat analogue si G est quasi-trivial sur un corps local.

Un *corps global* est un corps de nombres (extension finie de $\mathbf{Q}$) ou le corps des fonctions d'une courbe algébrique sur un corps fini. Pour toute place v d'un tel corps k, on note k_v le complété de k en v. Si k est un corps global et M un Γ_k-module galoisien (ou un complexe borné de modules galoisiens), on note $Ш^i_\omega(k, M)$ (ou simplement $Ш^i_\omega(M)$) le sous-groupe de $H^i(k, M)$ constitué des éléments dont la restriction à $H^i(k_v, M)$ est nulle pour presque toute place v de k. Si de plus M est un Γ_k-module galoisien de type fini (resp. de type fini sans torsion), une conséquence facile du théorème de Čebotarev est que $Ш^1_\omega(M) = Ш^1_{\omega,\mathrm{alg}}(M)$ (resp. $Ш^2_\omega(M) = Ш^2_{\omega,\mathrm{alg}}(M)$), [44], section 2.

Si A est un groupe abélien, et $n \in \mathbf{N}$, $A[n]$ désigne le sous-groupe de n-torsion de A. Si l est un nombre premier, $A\{l\}$ désigne le sous-groupe de torsion l-primaire de A, et $A\{l'\}$ le sous-groupe de torsion première à l.

3. Accouplement entre complexes de groupes de type multiplicatif

Dans cette section on étend l'accouplement $S \times \widehat{S} \to \mathbf{G}_m$ entre un groupe de type multiplicatif S et son groupe des caractères $\widehat{S}$ à des complexes à deux termes, et on montre un résultat de dualité lié à cet accouplement sur un corps local.

LEMME 3.1. – *Soit Z un schéma. Soient $C = [S \to T]$ un complexe de groupes de type multiplicatif de type fini sur Z et $\widehat{C} = [\widehat{T} \to \widehat{S}]$ le complexe dual. Alors on a un accouplement canonique*

$$[S \to T] \otimes^{\mathbf{L}} [\widehat{T} \to \widehat{S}] \to \mathbf{G}_m[1]$$

dans la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)$ des faisceaux fppf sur Z. De plus, cet accouplement induit pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme canonique

$$H^n_{\mathrm{fppf}}(Z, [S \to T]) \to \mathbf{R}^n\mathrm{Hom}_Z([\widehat{T} \to \widehat{S}], \mathbf{G}_m[1])$$

où $\mathrm{Hom}_Z(\dots)$ *désigne les homomorphismes dans la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}(Z)$ des faisceaux étales sur Z. La même assertion est valable si l'on remplace* $\mathrm{Hom}_Z(\dots)$ *par* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)}(\dots)$.

Démonstration. – On note que par dualité pour les groupes de type multiplicatif, le complexe $\widehat{C}$ est le complexe des morphismes $\mathcal{H}om^*(C, \mathbf{G}_m[1])$ correspondant au foncteur « Hom interne » $\mathcal{H}om(., \mathbf{G}_m[1])$ dans la catégorie des complexes de faisceaux fppf sur Z. Alors $\mathbf{R}\mathcal{H}om(., \mathbf{G}_m[1]))$ est le foncteur dérivé total de $\mathcal{H}om(., \mathbf{G}_m[1])$, d'où un morphisme naturel dans $\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)$:

$$\widehat{C} \to \mathbf{R}\mathcal{H}om(C, \mathbf{G}_m[1])\,.$$

Par adjonction entre le produit tensoriel dérivé $\otimes^{\mathbf{L}}$ et $\mathbf{R}\mathcal{H}om$, on a un isomorphisme naturel d'adjonction (cf. [50], Th. 10.8.7) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)}(\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} C, \mathbf{G}_m[1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)}(\widehat{C}, \mathbf{R}\mathcal{H}om(C, \mathbf{G}_m[1]))$$

qui donne un morphisme

$$\hat{C} \otimes^{\mathbf{L}} C \to \mathbf{G}_m[1]$$

fournissant l'accouplement souhaité.

Pour la deuxième assertion, on note pour commencer que le groupe de droite ne change pas que l'on travaille dans $\mathcal{D}(Z)$ ou dans $\mathcal{D}_{\mathrm{fppf}}(Z)$ (via [48], lemme 2.3.7). L'isomorphisme se déduit immédiatement par dévissage à partir des cas extrêmes $S = 0$ ou $T = 0$ (via le lemme des cinq), le résultat étant alors connu (loc. cit.). □