ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 50 fascicule 1 janvier-février 2017

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Alexis BOUTHIER

La fibration de Hitchin-Frenkel-Ngô et son complexe d'intersection

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : smf@smf.univ-mrs.fr

Tarifs

Europe : 519 €. Hors Europe : 548 €. Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4ᵉ série, t. 50, 2017, p. 85 à 129

LA FIBRATION DE HITCHIN-FRENKEL-NGÔ ET SON COMPLEXE D'INTERSECTION

PAR Alexis BOUTHIER

RÉSUMÉ. – Dans cet article, on construit la fibration de Hitchin pour les groupes d'après celle esquissée par Frenkel-Ngô [14] dans le cas de SL_2. Cette construction utilise de manière cruciale le semi-groupe de Vinberg et fait suite à l'étude menée dans [4]. L'espace total de Hitchin s'obtient comme le produit fibré du champ de Hecke avec la diagonale du champ des G-torseurs Bun_G; on démontre alors un énoncé de transversalité du complexe d'intersection du champ de Hecke avec cette diagonale, au-dessus d'un ouvert suffisamment gros, pour obtenir des applications locales, telles que le lemme fondamental pour l'algèbre de Hecke sphérique. Dans le cours de la preuve de ce théorème, on établit un énoncé sur les classes de conjugaisons entières des points d'un groupe simplement connexe sur un corps local.

ABSTRACT. – In this article, we construct the Hitchin fibration for groups following the scheme outlined by Frenkel-Ngô [14] in the case of SL_2. This construction uses as a decisive tool the Vinberg semigroup and follows the study accomplished in [4]. The total space of Hitchin is obtained by taking the fiber product of the Hecke stack with the diagonal of the stack of G-bundles Bun_G; we prove a transversality statement between the intersection complex of the Hecke stack and the diagonal of Bun_G, over a sufficiently big open subset, in order to get local applications, such as the fundamental lemma for the spherical Hecke algebra. Along the proof of this theorem, we establish a result concerning the integral conjugacy classes of the points of a simply connected group in a local field.

Introduction

Dans sa preuve du lemme fondamental pour les algèbres de Lie [25], Ngô utilise la fibration de Hitchin comme un moule géométrique pour les intégrales orbitales de la fonction caractéristique du compact maximal. Dans ce travail, on s'intéresse à la construction d'un analogue de la fibration de Hitchin pour le cas des groupes ainsi qu'au lien entre cet espace et les intégrales orbitales d'une autre classe de fonctions, celles de l'algèbre de Hecke sphérique.

Soit k un corps algébriquement clos ou un corps fini, soient $\mathcal{O} := k[[\pi]]$ et $F = k((\pi))$. On note $D := \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ et $D^{\bullet} := \mathrm{Spec}(F)$.

 doi:

Pour alléger l'introduction, on considère un groupe G semisimple simplement connexe déployé, (T, B) une paire de Borel, $r = \mathrm{rg}(T)$, W le groupe de Weyl et w_0 son élément long. Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples, ainsi que le cône des cocaractères (resp. caractères) dominants $X_*(T)^+ \subset X_*(T)$, (resp. $X^*(T)^+ \subset X^*(T)$). Enfin, on note $\omega_1, \dots, \omega_r$, les poids fondamentaux. On pose $K := G(\mathcal{O})$. Considérons la grassmannienne affine,

$$\mathrm{Gr} := G(F)/K,$$

que l'on peut munir d'une structure d'ind-schéma d'après [19, Prop.2]. On a une interprétation modulaire de la grassmanienne affine Gr, elle classifie les paires (E, β) où E est un G-torseur sur D et β une trivialisation sur $D^\bullet$. De plus, elle admet une décomposition en K-orbites, dite de Cartan :

$$\mathrm{Gr} := \coprod_{\lambda \in X_*(T)^+} K\pi^\lambda K/K.$$

On introduit alors $\mathrm{Gr}_\lambda := K\pi^\lambda K/K$ ainsi que $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda$ l'adhérence Gr_λ dans Gr. On a la description suivante :

$$\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda = \coprod_{\mu \leq \lambda} \mathrm{Gr}_\mu .$$

En particulier, pour deux G-torseurs E, E' sur le disque et β un isomorphisme sur $D^\bullet$ entre E et E', on obtient un point :

$$\mathrm{inv}(E, E', \beta) \in K\backslash \mathrm{Gr} = X_*(T)^+.$$

Supposons maintenant que k est fini. Soit un entier premier $l \neq p$, on considère l'algèbre de Hecke sphérique

$$\mathcal{H} := C_c(K\backslash G(F)/K, \overline{\mathbb{Q}}_l),$$

avec comme produit, la convolution des fonctions. Par le dictionnaire fonctions-faisceaux, elle admet une base, due à Lusztig, donnée par les fonctions ϕ_λ qui correspondent aux faisceaux $IC_{\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda}$.

Il s'agit donc de construire une fibration, analogue à la fibration de Hitchin, dont le nombre de points fournirait les intégrales orbitales des fonctions ϕ_λ. Elle s'obtient de la manière suivante.

Soit X une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k, on note F son corps de fonctions, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles et $\mathcal{O}_\mathbb{A}$ les adèles entières. On considère une somme formelle $\lambda = \sum_{x \in X} \lambda_x[x]$ avec $\lambda_x \in X_*(T)^+$ presque tous nuls et $S = \mathrm{supp}(\lambda) := \{x \in X \mid \lambda_x \neq 0\}$. Enfin, on pose $\overline{\mathrm{Gr}}_\lambda := \prod_{x \in X} \overline{\mathrm{Gr}}_{\lambda_x}$.

À la suite de Beilinson-Drinfeld [2], on considère le champ de Hecke $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ qui classifie les triplets (E, E', β) où E, E' sont des G-torseurs sur X et un isomorphisme

$$\beta : E_{|X-S} \to E'_{|X-S},$$

tel que pour tout $x \in S$, $\mathrm{inv}_x(E_{|D_x}, E'_{|D_x}, \beta_{D_x^\bullet}) \leq \lambda_x$. On forme alors le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{M}}_\lambda \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & \overline{\mathcal{H}}_\lambda \arrow[d] \\ \mathrm{Bun}_G \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_G . \end{tikzcd}$$

On a la description adélique suivante :

$$\overline{\mathcal{M}}_\lambda(k) := G(F)\backslash\{(\gamma, (g_x)) \in G(F) \times G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O}_\mathbb{A})|\ g_x^{-1}\gamma g_x \in \overline{K_x \pi_x^\lambda K_x}\},$$

où $G(F)$ agit par $h.(\gamma, (g_x)) = ((h\gamma h^{-1}, (hg_x)))$. Si k est fini, si l'on considère le complexe $\Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}$, la trace de Frobenius en un point $t = (\gamma, (g_x))$ est donnée par :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_t, \Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}) = \prod_{x \in X} \phi_{\lambda_x}(g_x^{-1}\gamma g_x).$$

Si l'on regarde au travers des représentations fondamentales $\rho_i : G \to GL(V_{\omega_i})$, la condition $\mathrm{inv}_x(E, E, \phi) \leq \lambda_x$ se récrit :

$$\forall\ i, \rho_i(\phi) \in H^0(X, \mathrm{End}(\rho_i(E))(\langle \omega_i, -w_0\lambda \rangle)),$$

où $\rho_i(E)$ est le fibré vectoriel que l'on obtient en poussant E par $\rho_i : G \to GL(V_{\omega_i})$. On a alors une application introduite par Frenkel-Ngô :

$$f : \overline{\mathcal{M}}_\lambda \to \mathcal{A}_\lambda := \bigoplus_{i=1}^r H^0(X, \mathcal{O}_X(\langle \omega_i, -w_0\lambda \rangle))$$

donnée par $(E, \phi) \mapsto (\mathrm{Tr}(\rho_i(\phi)))_{1 \leq i \leq r}$, réminiscente de la fibration de Hitchin.

Si l'on suppose que k est fini et f propre, en calculant la trace de Frobenius en un point $a \in \mathcal{A}_\lambda$ de $f_* \Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}$, on obtient une intégrale orbitale globale stable :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_a, f_* \Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}) = SO_a(\phi_\lambda).$$

Pour pouvoir utiliser des techniques similaires à celles de Ngô [25], on aimerait savoir si $\Delta^* IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda}$ est pervers et pur, comme cela a été formulé par Frenkel et Ngô dans la conjecture 4.1 de [14]. En fait, on démontre que l'on obtient le complexe d'intersection sur $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$, quitte à considérer un certain ouvert. Ceci fait l'objet de notre premier théorème.

On définit un ouvert $\mathcal{A}_\lambda^\flat \subset \mathcal{A}_\lambda$, soit $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^\flat$ l'ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ correspondant. On note toujours $\Delta : \overline{\mathcal{M}}_\lambda^\flat \to \overline{\mathcal{H}}_\lambda$ la flèche naturelle. Le théorème principal est l'énoncé de transversalité du complexe d'intersection de $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ avec la diagonale Δ au-dessus de l'ouvert $\mathcal{A}_\lambda^\flat$:

THÉORÈME 1. – *Soit G un schéma en groupes quasi-déployé sur X, tel que G_{der} est simplement connexe sans facteur simple de type A_{2r}, alors le champ $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^\flat$ est équidimensionnel, on note d sa codimension dans $\overline{\mathcal{H}}_\lambda$ et on a les égalités suivantes :*

$$\Delta^! IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda} = \Delta^*[-d] IC_{\overline{\mathcal{H}}_\lambda} = IC_{\overline{\mathcal{M}}_\lambda^\flat}.$$