GUY HENNIART

Représentations des groupes réductifs p-adiques

Séminaire N. Bourbaki, 1990-1991, exp. n° 736, p. 193-219.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__193_0>

Séminaire BOURBAKI
43ème année, 1990-91, n° 736

Février 1991

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES RÉDUCTIFS p-ADIQUES

par Guy HENNIART

1. INTRODUCTION, PRÉSENTATION DES RÉSULTATS ET HISTORIQUE

1.1. Soient k un corps de nombres et $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur k, par exemple le groupe GL_n. Généralisant la notion classique de forme modulaire, on est amené à considérer des représentations, dites automorphes, du groupe des points de $\mathbf{G}$ à valeurs dans l'anneau $\mathbf{A}_k$ des adèles de k ; la situation classique correspond à $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_2$ et $k = \mathbf{Q}$. Le groupe $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ est un produit restreint des groupes $\mathbf{G}(k_v)$ où v parcourt les places de k et k_v est le complété de k en v, ce qui conduit à étudier les représentations de $\mathbf{G}(k_v)$. Quand v est une place archimédienne, $\mathbf{G}(k_v)$ est un groupe de Lie et la théorie de ses représentations est extrêmement élaborée (et présente d'ailleurs d'autres motivations et intérêts). En particulier, on sait les classifier en examinant la restriction à un sous-groupe compact maximal K : c'est la théorie dite des K-types (*cf.* [Vo]). Lorsque v est une place non archimédienne, de caractéristique résiduelle p, alors k_v est une extension finie du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques, et le problème se pose de classifier ou construire les représentations irréductibles de $\mathbf{G}(k_v)$ (la bonne notion étant celle de représentation lisse, *cf.* 1.2), par exemple en termes de restriction à des sous-groupes compacts maximaux.

Le présent exposé vise à présenter les résultats obtenus récemment sur ce problème, les plus complets et spectaculaires concernant le groupe GL_n.

L'étude des représentations de $\mathbf{G}(k_v)$ mène à bien des problèmes autres que la classification ou la construction de toutes ces représentations. Par exemple, on se demande lesquelles de ces représentations sont unitarisables, les représentations unitaires étant celles qui interviennent dans le cas global des représentations automorphes pour les corps de nombres. On a aussi toute une théorie duale des distributions, notamment les distributions invariantes (par conjugaison) sur $\mathbf{G}(k_v)$. Là aussi, les progrès récents ont été spectaculaires, mais les techniques sont très différentes et, par manque de place et de temps, nous n'avons pu présenter ici ces résultats.

1.2. Soit donc F un corps commutatif localement compact non archimédien. Notons p sa caractéristique résiduelle. Si F est de caractéristique nulle, F est une extension finie du corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques ; si F est de caractéristique p, F est isomorphe au corps des séries de Laurent formelles à coefficients dans le corps résiduel de F, un corps fini.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. Nous pensons le plus souvent à l'exemple $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$. Le groupe $G = \mathbf{G}(F)$ est localement compact et totalement discontinu. Une représentation *lisse* π de G est un homomorphisme π de G dans $\mathrm{GL}(V)$ où V est un espace vectoriel complexe, de sorte que chaque vecteur de V ait un stabilisateur ouvert dans G ; elle est dite *irréductible* si tout sous-espace de V stable par $\pi(G)$ est $\{0\}$ ou V. On sait que dans le cas où π est irréductible, le centre Z de G agit sur V par un *caractère*, *i.e.* un homomorphisme continu dans $\mathbf{C}^\times$, appelé *caractère central* de π, et que π est *admissible*, c'est-à-dire que, pour tout sous-groupe ouvert H de G, l'espace V^H des points de V fixés par $\pi(H)$ est de dimension finie. Si H est en outre compact modulo Z, la restriction de π à H est semi-simple et ses composants isotypiques sont de dimension finie. Le plus souvent (c'est le cas en particulier pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, $n > 1$), les seules représentations lisses irréductibles de dimension finie de G sont de dimension 1, c'est-à-dire des caractères, de sorte qu'il s'agit en général ici de représentations de *dimension infinie*. Cependant, l'admissibilité entraîne que l'on peut faire une étude *algébrique* du *dual admissible* de G, c'est-à-dire de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations lisses irréductibles de G. Des références pour la théorie générale des représentations lisses de G sont [BZ1, Cas].

1.3. Un procédé général pour obtenir des représentations lisses de G est celui d'*induction*. Soit H un sous-groupe fermé de G et $\rho : H \to \mathrm{GL}(W)$ une représentation lisse de H. Soit $I(\rho)$ l'espace des fonctions f de G dans W vérifiant les conditions suivantes :

i) il existe un sous-groupe ouvert K de G tel que $f(gk) = f(g)$ pour $g \in G$, $k \in K$.

ii) il existe une partie compacte C de G telle que f soit nulle hors de HC.

iii) pour $h \in H$ et $g \in G$, on a $f(hg) = \rho(h)f(g)$.

Alors G agit par translations à droite sur l'espace $I(\rho)$ et on obtient une représentation *lisse* de G dite *induite compacte* de ρ et notée $\mathrm{ind}_H^G \rho$.

Cette construction est utilisée principalement dans deux cas. Le premier est celui où H est un sous-groupe *parabolique* P de G (dans le cas de $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, il s'agit simplement du stabilisateur d'un drapeau dans F^n). Alors $P \backslash G$ est compact de sorte que la condition ii) est vide. On prend pour ρ une représentation lisse irréductible de P, triviale sur le radical unipotent de P, de sorte que ρ provient d'une représentation d'un sous-groupe de Lévi de G, qui dans le cas de GL_n est un produit de groupes $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ avec $\sum n_i = n$. Alors $\mathrm{ind}_H^G \rho$ est de longueur finie et ses sous-quotients irréductibles donnent des éléments du dual admissible de G. On appelle *cuspidales* les représentations lisses irréductibles de G qui ne peuvent être obtenues ainsi par induction à partir de sous-groupes paraboliques propres de G. On voit donc que modulo la connaissance du dual admissible des sous-groupes de Lévi propres de G (qui sont de dimension sur F strictement inférieure à celle de G) et l'étude de la décomposition des représentations induites à G, on a réduit la détermination du dual admissible de G à celle de sa partie *cuspidale, i.e.* formée des classes de représentations cuspidales. Cette réduction est l'analogue pour F de la classification de Langlands des représentations des groupes réductifs réels. Noter que dans le cas où l'on considère en même temps tous les groupes $\mathrm{GL}_n(F)$, pour $n \geq 1$, une étude fine de l'induction parabolique donne naissance à une algèbre de Hopf extrêmement intéressante, introduite par J. Bernstein et A. Zelevinski [BZ2, Ze] ; voir l'exposé de Rodier au Séminaire Bourbaki [Ro].

1.4. Le second cas où le procédé d'induction est utilisé est celui où H est un sous-groupe ouvert de G, contenant le centre Z de G et compact modulo Z. En ce cas, toute représentation lisse irréductible ρ de H est de dimension finie et triviale sur un sous-groupe ouvert ; c'est donc à peu de choses près une représentation d'un groupe fini. De plus, la représentation lisse $\pi = \mathrm{ind}_H^G \rho$ de G est *admissible* si et seulement si elle est somme directe d'un nombre fini de représentations cuspidales de G [Bu2] ; et si π est irréductible, alors π est admissible et cuspidale. On dispose même d'un critère d'irréductibilité pour π qui s'exprime de la même façon que pour les groupes finis : pour que π soit irréductible, il suffit que, pour $g \in G-H$, les restrictions à $H \cap gHg^{-1}$ des représentations ρ et $\rho^g : x \mapsto \rho(g^{-1}xg)$ n'aient aucun constituant commun.

On sait qu'une représentation cuspidale a ses coefficients matriciels à support compact modulo Z ; même plus, le caractère (trace) de π est à support dans la réunion des sous-groupes compacts modulo Z [De]. Il est donc raisonnable de conjecturer que toute représentation cuspidale de G est obtenue comme composant d'une représentation admissible induite à partir d'un sous-groupe ouvert compact modulo Z, voire même est une telle induite. Récemment, L. Corwin d'une part [Co4], et C. Bushnell et Ph. Kutzko d'autre part [BK] ont annoncé une preuve du résultat suivant :

THÉORÈME 1.— *Soit π une représentation (lisse irréductible) cuspidale de* $\mathrm{GL}_n(F)$. *Alors π est l'induite d'une représentation admissible d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre.*

En fait, le résultat ne se réduit pas à ce simple constat d'existence. De manière plus précise et plus intéressante, on sait dresser une liste de paires (H, ρ) où H est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_n(F)$, compact modulo le centre, et ρ une représentation lisse irréductible de H, de sorte que toute représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$ soit induite à partir de l'une des paires (H, ρ) et l'on sait dire quand deux telles paires (H, ρ) et (H', ρ') induisent à G des représentations cuspidales isomorphes. On peut donc parler d'une véritable *paramétrisation du dual cuspidal* de G.