SÉMINAIRE N. BOURBAKI

OLIVIER DEBARRE

Variétés rationnellement connexes

Séminaire N. Bourbaki, 2001-2002, exp. n° 905, p. 243-266.

<http://www.numdam.org/item?id=SB_2001-2002__44__243_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2002
54e année, 2001-2002, n° 905, p. 243 à 266

VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES
[d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A.J. de Jong]

par **Olivier DEBARRE**

1. LE THÉORÈME POUR LES VARIÉTÉS COMPLEXES

Une variété complexe[(1)] X est *rationnellement connexe* si deux points généraux de X peuvent être reliés par une courbe rationnelle, c'est-à-dire sont dans l'image d'un morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$. On peut donner les exemples suivants.

• Toute variété propre rationnelle, ou même seulement unirationnelle, c'est-à-dire dominée par un espace projectif, est rationnellement connexe. Toutes ces notions sont équivalentes pour les variétés propres et lisses de dimension au plus 2.

• Une variété de Fano (c'est-à-dire une variété projective et lisse dont le déterminant du fibré tangent est ample) est rationnellement connexe ([C1], [KMM1], [KMM2]). En particulier, une hypersurface lisse de $\mathbf{P}^n$ de degré au plus n est rationnellement connexe.

En dimension au moins 3, la connexité rationnelle devient une propriété plus générale que la rationalité (et, conjecturalement, que l'unirationalité) qui s'est révélée être aussi beaucoup plus maniable : pour les familles de variétés complexes propres et lisses, elle est ouverte et fermée (*cf.* § 2) et il en existe, au moins conjecturalement, une caractérisation numérique (*cf.* conjecture 3.3). On peut faire remonter au moins à Mumford au début des années 80 l'idée (orale) de la définition et de cette conjecture, mais c'est dans [KMM2] que Kollár, Miyaoka et Mori donnent véritablement son essor à cette théorie. Le résultat central qui restait manquant, la dernière pièce du puzzle, qui montre en un certain sens que l'intuition de Mumford, Kollár, Miyaoka et Mori était la bonne, et qui couronne leur théorie, est le théorème ci-dessous, conjecturé dans [KMM2], et qui fait l'objet de cet exposé. Il confirme la place centrale qu'occupe la connexité rationnelle dans l'étude des variétés de dimension supérieure.

THÉORÈME 1.1 (Graber–Harris–Starr). — *Un morphisme propre d'une variété complexe sur une courbe lisse dont les fibres générales sont rationnellement connexes a une section.*

---
(1) C'est-à-dire un schéma séparé, intègre et de type fini sur $\mathbf{C}$.

Ce résultat est démontré dans [GHS][2] , et généralisé par de Jong et Starr dans [dJS] au cas d'un corps de base algébriquement clos quelconque (th. 2.1). La démonstration dans le cas complexe est expliquée dans le § 4, tandis que les modifications à apporter dans le cas général font l'objet du § 5.

Soit K le corps des fonctions d'une courbe complexe, c'est-à-dire une extension de $\mathbf{C}$ de degré de transcendance 1. Le théorème 1.1 peut s'énoncer ainsi :

1.2.— *Toute variété X définie sur K, propre et rationnellement connexe*[3], *a un point rationnel sur K.*

L'origine de ce genre de résultat remonte à M. Noether, qui montre dans [N] qu'une surface fibrée en coniques sur $\mathbf{P}^1$ admet une section, résultat généralisé ensuite par Enriques au cas d'une courbe base irrationnelle ([En]), puis enfin par Tsen, qui montre dans [T] qu'étant donné le corps des fonctions K d'une courbe, toute hypersurface de $\mathbf{P}^n_K$ de degré au plus n a un point rationnel sur K (dans la terminologie d'E. Artin, K est « quasi algébriquement clos », dans celle de Lang, K est C_1). On trouve aussi des cas particuliers du théorème de Tsen dans des articles postérieurs de Conforto et Severi[4]. Enfin, Campana, Peternell et Pukhlikov donnent dans la prépublication [CPP] une démonstration différente de 1.2 lorsque X est une variété de Fano de dimension 3.

L'énoncé 1.2 était aussi déjà connu lorsque X est une surface propre, lisse et rationnellement connexe et K un corps C_1 ([M], [CT]) ou un espace homogène sous un groupe algébrique linéaire connexe et K un corps C_1 parfait (théorème de Chevalley–Springer ; *cf.* [S], III-14-16 et [B], 18.2).

Il est naturel de poser la question suivante : l'énoncé 1.2 reste-t-il valable pour tout corps C_1 ? Esnault y répond par l'affirmative dans [Es] lorsque K est un corps fini[5].

---

(2) Graber, Harris, Mazur et Starr démontrent dans [GHMS] la « réciproque » suivante au théorème 1.1 : étant donné un morphisme propre $u : X \to B$ entre variétés complexes, avec B normale et quasi-projective, il existe un plongement projectif de B tel que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) le morphisme u a une section au-dessus d'une courbe section linéaire très générale de B ;

(ii) il existe une sous-variété Y de X telle que les fibres générales de $u|_Y : Y \to B$ soient rationnellement connexes (*cf.* note 6).

Ce résultat leur permet de construire une famille sans section de surfaces d'Enriques paramétrée par une courbe lisse : le théorème 1.1 ne se généralise donc pas aux variétés complexes X vérifiant par exemple la condition plus faible (*cf.* 3.4) $H^m(X, \mathscr{O}_X) = 0$ pour tout $m > 0$. Ceci répond négativement à une question de Serre ([GS], p. 152).

(3) C'est-à-dire que si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, la variété $X_{\overline{K}}$ satisfait à la définition ci-dessus ; *cf.* aussi § 2.

(4) L'article de Tsen, paru en allemand dans une revue chinoise en 1936, n'a pas dû avoir à cette époque la diffusion qu'il méritait.

(5) Plus précisément, Esnault montre, pour toute variété X propre et lisse définie sur un corps fini $\boldsymbol{k}$ de cardinal q qui vérifie $\mathrm{CH}_0(X \times \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{k}(X)})) \simeq \mathbf{Z}$, la congruence $\mathrm{Card}(X(\boldsymbol{k})) \equiv 1 \pmod{q}$. Cela s'applique aux variétés propres, lisses et rationnellement connexes définies sur $\boldsymbol{k}$.

Quelques conventions : une *variété* X est un schéma séparé géométriquement intègre de type fini défini sur un corps $\boldsymbol{k}$; pour toute extension $\boldsymbol{k}'$ de $\boldsymbol{k}$, on note $X_{\boldsymbol{k}'}$ la variété $X \times_{\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k})} \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}')$. On note Ω_X le faisceau des différentielles sur X ; lorsque X est une variété lisse, c'est le dual du fibré tangent T_X. Une *courbe* est un schéma séparé géométriquement réduit et connexe, de dimension 1, défini sur un corps, qui n'est pas nécessairement irréductible.

On dit qu'un point *général* (resp. *très général)* d'une variété vérifie une propriété donnée si l'ensemble des points qui la vérifie contient un ouvert non vide (resp. une intersection dénombrable d'ouverts non vides).

Je voudrais remercier T. Graber et J. Kollár de leurs patientes explications, ainsi que P. Baumann, A. Beauville, K. Behrend, J.-F. Boutot, A. Chambert-Loir, J.-L. Colliot-Thélène, H. Esnault, O. Gabber, J. Harris, J. de Jong, V. Kharlamov, Y. Laszlo, L. Moret-Bailly, M. Perret, M. Raynaud, Ph. Satgé et J. Starr de leurs conseils et suggestions.

2. VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES ET SÉPARABLEMENT RATIONNELLEMENT CONNEXES

La définition de la connexité rationnelle donnée au début du § 1, valable sur le corps des complexes (ou sur tout corps algébriquement clos non dénombrable), se traduit sur un corps quelconque de la façon suivante : une variété X définie sur un corps $\boldsymbol{k}$ est *rationnellement connexe* s'il existe un $\boldsymbol{k}$-schéma de type fini T et un morphisme

$$F : T \times \mathbf{P}^1 \longrightarrow X$$

(auquel il faut penser comme à une famille de courbes rationnelles sur X paramétrée par T) tels que le morphisme

$$\begin{aligned} T \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 &\longrightarrow X \times X \\ (t, u, u') &\longmapsto \big(F(t,u), F(t,u')\big) \end{aligned} \tag{1}$$

soit dominant[6]. Si X est lisse et $\boldsymbol{k}$ algébriquement clos de caractéristique nulle, c'est équivalent à demander que son application tangente soit surjective en un point (t_0, u_0, u_0'). Notant f la courbe $F(t_0, \cdot) : \mathbf{P}^1 \to X$, on vérifie ([D2], Cor. 4.17) que c'est le cas si et seulement si $H^1(\mathbf{P}^1, f^*T_X(-2)) = 0$; on dit que la courbe rationnelle f est *très libre*.

La présence d'une courbe rationnelle très libre sur une variété rationnellement connexe, souvent essentielle dans les applications, n'est pas assurée en caractéristique

[6] Un point est rationnellement connexe, le vide ne l'est pas.

non nulle[7]. Cela conduit à dire qu'une variété X est *séparablement rationnellement connexe* s'il existe T et $F : T \times \mathbf{P}^1 \to X$ comme ci-dessus tels que le morphisme (1) soit *génériquement lisse.* Une variété lisse X est alors séparablement rationnellement connexe si et seulement s'il existe sur X une courbe rationnelle très libre. En caractéristique nulle, les deux notions sont bien sûr identiques.

On peut maintenant énoncer la version du théorème 1.1 valable en toute caractéristique.

THÉORÈME 2.1 (de Jong–Starr). — *Un morphisme propre d'une variété lisse sur une courbe lisse, dont les fibres générales sont des variétés lisses et séparablement rationnellement connexes, a une section.*

De nouveau, ce résultat peut s'énoncer : *toute variété propre, lisse et séparablement rationnellement connexe définie sur le corps des fonctions d'une courbe a un point rationnel sur ce corps.* Il sera démontré dans le § 5.

Un produit fini de variétés (séparablement) rationnellement connexes est (séparablement) rationnellement connexe, un revêtement étale fini d'une variété (séparablement) rationnellement connexe est (séparablement) rationnellement connexe. La connexité rationnelle (séparable) est une propriété birationnelle parmi les variétés propres. Enfin, pour les familles de variétés propres et lisses, la propriété d'être séparablement rationnellement connexe est ouverte[8] et, en caractéristique nulle, fermée[9].

Il existe beaucoup de courbes rationnelles sur une variété séparablement rationnellement connexe, comme le montre le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. — *Soit X une variété propre et lisse définie sur un corps algébriquement clos. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la variété X est séparablement rationnellement connexe ;*

(ii) *étant donnés des points distincts $p_1, \ldots, p_r$ de X et des directions tangentes $\ell_1, \ldots, \ell_r$ en ces points, il existe une courbe rationnelle très libre $\mathbf{P}^1 \to X$ non ramifiée qui passe par chaque p_i dans la direction ℓ_i ;*

En caractéristique nulle, elles sont de plus équivalentes à :

(iii) *deux points généraux de X peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles.*

La démonstration se trouve dans [KMM2], 2.4, ou [Ko1], Th. IV.3.9.4, sauf pour ce qui concerne les directions tangentes, point pour lequel on pourra consulter [D2], Ex. 4.8.6.

---

(7) Kollár construit dans [Ko2] des variétés de Fano, donc projectives, lisses et rationnellement connexes, sans courbe rationnelle très libre (c'est-à-dire non séparablement rationnellement connexes).

(8) Cela résulte de leur caractérisation par l'existence d'une courbe rationnelle très libre.

(9) Cela résulte de leur caractérisation par la condition (iii) ci-dessous.