BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIE-CLAUDE ARNAUD

Création de points périodiques de tous types au voisinage des tores K.A.M.

Bulletin de la S. M. F., tome 123, n° 4 (1995), p. 591-603

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_4_591_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 591–603.

CRÉATION DE POINTS PÉRIODIQUES DE TOUS TYPES AU VOISINAGE DES TORES K.A.M.

PAR

MARIE-CLAUDE ARNAUD (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons dans cet article qu'une partie résiduelle G de l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe C^∞ d'une variété M vérifie : pour tout f dans G, tout tore lagrangien périodique de période notée τ sur lequel f^τ est C^∞ conjuguée à une rotation ergodique est limite de points périodiques de tous types (*i.e.* ayant une dimension elliptique et une dimension hyperbolique que l'on peut imposer à l'avance).

ABSTRACT. — We prove in this paper that there exists a residual subset G of the set of C^∞ symplectic diffeomorphisms of a manifold M such that : for all f in G, every Lagrangian periodic torus (with period τ) on which f^τ is conjugated to an ergodic rotation is limit of periodic points of all types (*i.e.* which have hyperbolic and elliptic dimensions that we can chose).

Le but de cet article est de mettre en évidence pour tout difféomorphisme f symplectique de classe C^∞ « générique » en un sens que nous préciserons ultérieurement un fermé invariant contenant un sous-ensemble dense de points périodiques de tous types (cette notion sera précisée par la suite).

Dans la première partie, nous énonçons les résultats que nous allons démontrer, et les comparons à d'autres résultats déjà connus. Dans la seconde partie, nous donnons la démonstration des résultats précédemment énoncés.

(*) Texte reçu le 25 avril 1994.
M.-C. ARNAUD, Université Paris Sud, bât. 425, Laboratoire de topologie, 91405 Orsay (France).

Classification AMS : 58F05, 58F08, 58F22.

1. Énoncés de résultats

Rappelons tout d'abord les notions que nous allons utiliser :

DÉFINITION 1.1. — Soit f un difféomorphisme symplectique de classe C^∞ d'une variété symplectique (M, ω). Un point périodique p de f de période élémentaire τ sera dit *général* si $\mathrm{D}f^\tau(p)$ a toutes ses valeurs propres distinctes (donc en particulier n'a pas de valeur propre égale à 1).

REMARQUE 1.2. — L'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe C^∞ de M dont tous les points périodiques sont généraux contient un G_δ dense (on dit aussi « *est un ensemble résiduel* ») de $\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ (ensemble des difféomorphismes symplectiques de M de classe C^∞), comme cela est démontré par C. ROBINSON dans [10].

DÉFINITION 1.3. — Soit $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ et p un point périodique de f, de période élémentaire τ. Alors :

- la *dimension elliptique* de p, notée $\mathrm{dime}(p)$, est la dimension du plus grand sous-espace vectoriel E de T_pM invariant par $\mathrm{D}f^\tau(p)$ tel que la restriction de $\mathrm{D}f^\tau(p)$ à E ait toutes ses valeurs propres de module 1 et différentes de 1 ;
- la *dimension hyperbolique* de p, notée $\mathrm{dimh}(p)$, est la dimension du plus grand sous-espace vectoriel H de T_pM invariant par $\mathrm{D}f^\tau(p)$ tel que la restriction de $\mathrm{D}f^\tau(p)$ à H ait toutes ses valeurs propres de module différent de 1 ;
- un tel point p sera dit *hyperbolique* si $\mathrm{dimh}(p) = \dim M$ et *complètement elliptique* si $\mathrm{dime}(p) = \dim M$; il sera dit *quasi-elliptique* si $\mathrm{dime}(p) \geq 2$;
- le *type* d'un tel point p périodique est $t(p) = (\mathrm{dime}(p), \mathrm{dimh}(p))$.

REMARQUE 1.4. — Remarquons qu'à cause du caractère symplectique des difféomorphismes considérés, le dimension elliptique et la dimension hyperbolique sont toujours paires ; de plus, en un point périodique général, on a

$$\mathrm{dime}(p) + \mathrm{dimh}(p) = \dim M$$

et si p est un point périodique général de $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$, tout difféomorphisme $g \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$ suffisamment proche de f possède un point périodique proche de p et de même type que p pour f.

On se demande alors s'il existe des ensembles dans lesquels les points périodiques d'un type donné forment une partie dense.

Rappelons que dans [3], on avait démontré que tout difféomorphisme symplectique d'une variété compacte suffisamment proche de l'identité a au moins un point fixe complètement elliptique. On y avait aussi démontré un résultat analogue concernant les difféomorphismes exacts symplectiques fortement monotones à torsion définie de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ (nous renvoyons le lecteur à [3] pour la définition de ces notions). Mais ce type de résultat ne donne une information que sur *un* point périodique et ne fournit évidemment aucun résultat de densité.

Le problème de « créer » des points périodiques (ce qu'on veut faire pour obtenir beaucoup de tels points) n'est pas du tout un problème trivial. Dans [9], C. PUGH et C. ROBINSON ont montré dans le cas où M est compacte qu'il existe un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_\omega(M)$, G, tel que l'ensemble des points périodiques de tout élément de G est dense dans M. Malheureusement, leur démonstration utilise de façon fondamentale le caractère C^1 des perturbations qu'on s'autorise à faire et ne laisse aucun espoir à une généralisation aisée en classe C^r pour $r > 1$.

Faire apparaître des points périodiques d'un certain type semble a priori un problème encore plus difficile. Signalons à ce sujet le remarquable résultat démontré dans [8] :

THÉORÈME (S. NEWHOUSE). — *Si (M,ω) est une variété symplectique compacte, il existe un sous-ensemble résiduel $B \subset \mathrm{Diff}^1_\omega(M)$ tel que, si f appartient à B, f est soit Anosov, soit les points périodiques quasi-elliptiques de f sont denses dans M.*

Remarquons que l'on ne peut se libérer du cas Anosov : si f est Anosov, toutes ses perturbations sont Anosov et ses points périodiques sont hyperboliques.

Ceci nous permet de noter qu'il serait vain de chercher à voir apparaître tous les types de points périodiques sur un ensemble dense de M pour n'importe quel difféomorphisme symplectique : par exemple, si f est partiellement hyperbolique, on ne peut obtenir de point périodique complètement elliptique.

C'est pourquoi le résultat que nous obtenons ne concerne qu'un sous-ensemble particulier de M. Nous allons maintenant le définir :

DÉFINITION 1.5. — On appellera *tore lagrangien* de la variété symplectique (M,ω) de dimension $2n$ tout tore n-dimensionnel L C^∞-plongé dans M tel que la restriction de ω à TL soit nulle.

Si $f \in \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)$, on note $LR(f)$ l'ensemble des tores lagrangiens « périodiques », *i.e.* invariants par un f^q pour un $q \geq 1$ (q étant choisi minimal) sur lesquels f^q est conjuguée de manière C^∞ à une translation de vecteur à coordonnées rationnellement indépendantes et non rationnelles (*i.e.* toute orbite de cette translation est dense).

On note alors

$$T(f) = \mathrm{Adh}\Big(\bigcup\{L; L \in LR(f)\}\Big) ;$$

c'est évidemment un fermé invariant par f.

Nous nous proposons de démontrer alors :

THÉORÈME 1.6. — *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Il existe une partie résiduelle G de* $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$ *telle que tout élément f de G vérifie : pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$, l'ensemble des points périodiques de f de type $(2j, 2(n-j))$ contient $T(f)$ dans son adhérence.*

La théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser (cf. par exemple [4] et [5] à ce sujet) nous dit qu'il existe une partie résiduelle G' de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$ telle que pour tout élément f de G', tout point périodique complètement elliptique de f est dans $T(f)$. Aussi :

COROLLAIRE 1.7. — *Soit (M,ω) une variété symplectique. Alors, il existe une partie résiduelle G de* $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$ *telle que tout élément f de G vérifie : l'adhérence de l'ensemble des points périodiques complètement elliptiques de f est égale à $T(f)$.*

REMARQUE 1.8. — Il peut sembler naturel de se poser la question suivante : un tore lagrangien invariant peut-il contenir un point périodique ? J'ai démontré dans [1] que si M est de dimension 4 (en dimension 2, le résultat est trivial), la réponse est non pour un ensemble résiduel de $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$.

En appliquant encore la théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser (éventuellement dans une variété centre), on déduit aussi :

COROLLAIRE 1.9. — *Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Alors, il existe une partie résiduelle G de* $\mathrm{Diff}^{\infty}_{\omega}(M)$ *telle que tout élément f de G vérifie : pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, l'ensemble des points périodiques de type $(2j, 2(n-j))$ de f n'a pas de point isolé.*

REMARQUE 1.10. — Rappelons un résultat très proche du précédent dont la démonstration n'utilise pas la théorie de Kolmogorov–Arnold–Moser : il s'agit du théorème de Birkhoff-Lewis, dont le lecteur peut trouver une démonstration dans [7]. Ce théorème énonce en particulier que *pour tout $r \geq 4$, il existe un ensemble résiduel G dans* $\mathrm{Diff}^{r}_{\omega}(M)$ *tel que tout élément f de G vérifie : tout point quasi-elliptique de f est point d'accumulation de l'ensemble des points périodiques*; on peut même remplacer *périodique* par *périodique quasi-elliptique*, ou aussi écrire « *limite d'une suite de points périodiques hyperboliques* » comme le démontre