Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

THÉORÈME DE BEILINSON EXPLICITE

François Brunault

Tome 135
Fascicule 2

2007

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

Bull. Soc. math. France
135 (2), 2007, p. 215–

VALEUR EN 2 DE FONCTIONS *L* DE FORMES MODULAIRES DE POIDS 2 : THÉORÈME DE BEILINSON EXPLICITE

PAR FRANÇOIS BRUNAULT

RÉSUMÉ. — Nous montrons une version explicite du théorème de Beilinson pour la courbe modulaire $X_1(N)$. Ce résultat est la première étape d'un travail reliant, d'une part, la valeur en 2 de la fonction L d'une forme primitive de poids 2, et d'autre part, la fonction dilogarithme associée à la courbe modulaire correspondante, dans l'esprit de la conjecture de Zagier pour les courbes elliptiques. Comme corollaire de notre théorème, dans le cas où N est premier, nous répondons à une question de Schappacher et Scholl concernant l'image de l'application régulateur de Beilinson.

ABSTRACT (*Value at* 2 *of L-functions of modular forms of weight* 2*: an explicit version of Beilinson's theorem*)

We prove an explicit version of Beilinson's theorem for the modular curve $X_1(N)$. This result is the first step of a work linking the value at 2 of the L-function of a newform of weight 2 on the one hand, and the dilogarithm function associated to the corresponding modular curve on the other, in the spirit of Zagier's conjecture for elliptic curves. As a corollary of our theorem, in the case N is prime, we answer a question raised by Schappacher and Scholl concerning the image of Beilinson's regulator map.

Texte reçu le 2 mars 2006, accepté le 15 mai 2006

FRANÇOIS BRUNAULT, Université de Lyon, Unité de mathématiques pures et appliquées, ENS, 69007 Lyon, France • *E-mail :* `brunault@umpa.ens-lyon.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F67, 11G40, 19F27.

Mots clefs. — K-théorie algébrique, conjecture de Beilinson, fonction L, valeur spéciale, régulateur, forme modulaire, courbe modulaire, courbe elliptique, dilogarithme.

1. Introduction

Soient $N \geq 1$ un entier et $X_1(N)$ la courbe modulaire (complète) définie sur $\mathbb{Q}$ associée au sous-groupe de congruence

$$(1) \qquad \Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N},\ a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}.$$

Bloch et Beilinson [6], [4], [5], [22] ont développé des conjectures générales prédisant en particulier, dans le cas de la courbe $X_1(N)$, la valeur spéciale en $s = 2$ de la fonction $L(h^1(X_1(N)), s)$ à un facteur rationnel près. Ces travaux ont permis à Goncharov et Levin de démontrer la conjecture de Zagier, reliant la valeur spéciale $L(E, 2)$ associée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, et la fonction dilogarithme elliptique [27], [14].

La conjecture de Beilinson fait intervenir une *application régulateur* dont la source est le groupe de K-théorie algébrique $K_2(X_1(N))$ associé à $X_1(N)$. La définition de cette application est la suivante. Soit $F = \mathbb{Q}(X_1(N))$ le corps des fonctions de $X_1(N)$. Pour toutes fonctions rationnelles $u, v \in F^*$, la forme différentielle

$$(2) \qquad \eta(u, v) = \log |u| \cdot \mathrm{d} \arg v - \log |v| \cdot \mathrm{d} \arg u$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ hors des zéros et pôles de u et v dans $X_1(N)(\mathbb{C})$. On définit

$$(3) \qquad \begin{aligned} \widehat{r}_N : K_2(F) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Omega^1(X_1(N)), \mathbb{R}), \\ \{u, v\} &\longmapsto \Big(\omega \mapsto \int_{X_1(N)(\mathbb{C})} \eta(u, v) \wedge \omega\Big). \end{aligned}$$

L'application régulateur r_N s'obtient alors en composant $\widehat{r}_N$ avec l'homomorphisme naturel $K_2(X_1(N)) \to K_2(F)$. Nous écrirons

$$(4) \qquad r_N : K_2\big(X_1(N)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\big(\Omega^1\big(X_1(N)\big), \mathbb{R}\big).$$

Après tensorisation de (4) par $\mathbb{C}$, nous obtenons une application, que nous noterons encore r_N, définie sur $K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ et à valeurs dans le dual de $S_2(\Gamma_1(N))$. Rappelons maintenant les résultats de Beilinson.

Soit $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ une forme parabolique *primitive* (propre pour l'algèbre de Hecke, nouvelle et normalisée), de caractère ψ. Soit χ un caractère de Dirichlet pair de niveau arbitraire. Beilinson a montré (voir [4], [23]) que la quantité $L(f, 2)L(f, \chi, 1)$ est égale à $\big\langle r_N(\gamma_{f,\chi}), f\big\rangle$ pour un certain élément $\gamma_{f,\chi} \in K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ défini à l'aide d'unités modulaires de niveau divisible par N. Un autre ingrédient important est l'existence d'un caractère χ tel que $L(f, \chi, 1)$ soit non nul. Cependant, la méthode de Beilinson souffre des imprécisions suivantes :

1) L'écriture de $\gamma_{f,\chi}$ comme symbole de Milnor n'est pas explicite.

2) Le régulateur associé à $\gamma_{f,\chi}$ est calculé à un facteur algébrique près.

3) Le caractère χ est choisi parmi une infinité de caractères.

Cet article précise les points 1) à 3) ci-dessus. Le résultat principal s'énonce de la manière suivante. Soit $\mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$ le groupe des unités modulaires définies sur $\mathbb{Q}$ de $X_1(N)$. Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair et non trivial, il existe une unique unité modulaire $u_\chi \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ satisfaisant

$$\log\big|u_\chi(z)\big| = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{s\to 1\\ \mathrm{Re}(s)>1}} \left({\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}}' \frac{\chi(n)\cdot \mathrm{Im}(z)^s}{|Nmz+n|^{2s}} \right) \qquad (z\in\mathcal{H}), \tag{5}$$

où le symbole $'$ indique la sommation sur $(m,n)\neq(0,0)$.

Théorème 1.1. — *Soit $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ une forme parabolique primitive, de caractère ψ. Pour tout caractère de Dirichlet χ modulo N, pair, primitif et distinct de* 1 *et $\overline{\psi}$, le symbole $\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}$ appartient à $K_2(X_1(N))\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$, et nous avons*

$$L(f,2)L(f,\chi,1) = \frac{N\pi\tau(\chi)}{2\varphi(N)} \big\langle r_N(\{u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi}\}), f\big\rangle. \tag{6}$$

La démonstration du théorème 1.1 reprend la méthode de Beilinson en explicitant chacune de ses étapes. L'intérêt de la formule (6) réside dans le fait qu'elle utilise uniquement des unités modulaires de niveau N. Signalons aussi que Kato [15, § 7] et Scholl [25, Thm. 4.6.3] ont obtenu des formules explicites pour des intégrales de nature analogue. Le lien entre ces formules et la formule (6) n'est pas clair pour l'auteur.

Remarque 1.2. — Pour obtenir une information sur $L(f,2)$ à partir de la formule précédente, il est nécessaire que $L(f,\chi,1)$ soit non nul. Un théorème de Merel (voir l'appendice de [8]) entraîne l'existence d'un caractère pair χ modulo N tel que $L(f,\chi,1)\neq 0$. Il serait donc utile de lever l'hypothèse χ primitif dans le théorème 1.1, et de montrer que le caractère χ vérifiant $L(f,\chi,1)\neq 0$ peut être supposé distinct de 1 et $\overline{\psi}$.

Le membre de droite de (6) est lié [8, Prop. 17] à la fonction *dilogarithme* $G_{1,2}$ associée à $X_1(N)$, définie par Goncharov [13, Def. 9.1, p. 390]. Le théorème 1.1 peut donc être vu comme la première étape d'un travail reliant la valeur en 2 des fonctions L des formes modulaires de poids 2 d'une part, et le dilogarithme associé à $X_1(N)$ d'autre part, dans l'esprit de la conjecture de Zagier pour les courbes elliptiques.

Une idée de Merel (voir [8, Thm. 93]) permet d'exprimer le membre de droite de (6) comme combinaison linéaire explicite de symboles modulaires associés à f. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont essentiellement les périodes de la forme différentielle $\eta(u_{\overline{\chi}}, u_{\psi\chi})$. Lorsque f est la forme primitive associée à une courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$, on peut alors obtenir une formule pour $L(E,2)$ en divisant les deux membres de (6) par la période réelle de E.

Ces deux résultats feront l'objet de publications ultérieures.

Le théorème 1.1 permet d'apporter une réponse à la question suivante, soulevée par Schappacher et Scholl, concernant l'image de l'application régulateur r_N [23, 1.1.3]. Notons $\widehat{K}_N$ le sous-groupe de $K_2(F)$ engendré par les symboles $\{u,v\}$ avec $u,v \in \mathcal{O}^*\big(Y_1(N)\big)$, et posons

$$K_N := (\widehat{K}_N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \cap \big(K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\big). \tag{7}$$

Notons V_N l'espace d'arrivée de l'application régulateur (4).

Question 1.3. — Le groupe $r_N(K_N)$ engendre-t-il l'espace vectoriel réel V_N ?

Théorème 1.4. — *Lorsque $N = p$ est premier, le groupe $r_p(K_p)$ engendre V_p.*

Remarque 1.5. — Notons $\mathbb{T} \subset \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(S_2(\Gamma_1(N)))$ l'algèbre de Hecke, engendrée par les opérateurs de Hecke T_n $(n \geq 1)$ et les opérateurs diamants. Nous proposons les deux problèmes suivants, variantes de la question de Schappacher et Scholl :

1) Le groupe $r_N(K_N)$ engendre-t-il V_N comme $\mathbb{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$-module ?
2) Existe-t-il $\gamma \in K_N$ tel que $r_N(\gamma)$ engendre V_N comme $\mathbb{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$-module ?

Notre travail s'articule de la manière suivante. Les sections 2, 3 et 5 sont essentiellement des rappels sur des notions classiques : fonction de Green, séries d'Eisenstein et unités modulaires. La section 4, consacrée au calcul d'une intégrale par la méthode de Rankin-Selberg, constitue le cœur de la démonstration du théorème 1.1. Dans la section 6, nous construisons des éléments dans le groupe $K_2(X_1(N)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ à partir de certaines unités modulaires de $X_1(N)$. Enfin, les sections 7 et 8 contiennent respectivement la preuve des théorèmes 1.1 et 1.4.

En terminant cette introduction, je souhaite remercier chaleureusement Loïc Merel et Jörg Wildeshaus pour leurs encouragements et conseils quant à la rédaction de cet article.