Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR DES CORPS LOCAUX SUPÉRIEURS II

Diego Izquierdo

Tome 145
Fascicule 2

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 267-293

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 145, juin 2017

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Emmanuel BREUILLARD
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Charles FAVRE
Marc HERZLICH
Raphaël KRIKORIAN
Laurent MANIVEL
Julien MARCHÉ
Kieran O'GRADY
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
`christian.smf@cirm-math.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`bullsmf@ihp.fr` • `smf.emath.fr`

© *Société Mathématique de France 2017*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (2), 2017, p. 267-293

PRINCIPE LOCAL-GLOBAL POUR LES CORPS DE FONCTIONS SUR DES CORPS LOCAUX SUPÉRIEURS II

par Diego Izquierdo

Résumé. — Soit K le corps des fonctions d'une courbe projective lisse X sur un corps local supérieur k. On définit les groupes de Tate-Shafarevich d'un schéma en groupes commutatif en considérant les classes de cohomologie qui deviennent triviales sur chaque complété de K provenant d'un point fermé de X. On applique certains théorèmes de dualité arithmétique à l'approximation faible pour les tores sur K et à l'étude du principe local-global pour les K-torseurs sous un groupe linéaire connexe.

Abstract (*Local-global principle for function fields over higher-dimensional fields II*). — Let K be the function field of a smooth projective curve X over a higher-dimensional local field k. We define Tate-Shafarevich groups of a commutative group scheme via cohomology classes locally trivial at each completion of K coming from a closed point of X. We apply some arithmetic duality theorems to the weak approximation for tori over K and to the study of the obstruction to the local-global principle for K-torsors under a connected linear algebraic group.

Ces dernières années, nous avons été témoins d'un important regain d'intérêt pour les questions de type principe local-global sur des corps autres que les corps de nombres ou les corps de fonctions de courbes sur des corps finis. Deux principales techniques ont été mises au point pour étudier ces problèmes : la méthode du patching développée par Harbater, Hartmann et Krashen et utilisée par Colliot-Thélène, Parimala et Suresh pour le cas des corps de fonctions de courbes sur un corps complet de valuation discrète ([18]), et les méthodes cohomologiques développées par Harari, Scheiderer et Szamuely pour le cas des corps de fonctions de courbes sur un corps p-adique ([16]). Cette dernière

Texte reçu le 12 janvier 2015, modifié le 14 septembre 2016, accepté le 14 septembre 2016.

Diego Izquierdo, Département de mathématiques et applications, École normale supérieure, CNRS, PSL Research University, 45, Rue d'Ulm - 75005 Paris - France •
E-mail : diego.izquierdo@ens.fr

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2017/267/$ 5.00
© Société Mathématique de France
doi:10.24033/bsmf.2737

méthode a aussi permis à Colliot-Thélène et Harari d'étudier le cas des corps de fonctions de courbes sur $\mathbb{C}((t))$ ([9]). Dans [21] les théorèmes de dualité arithmétique qui avaient été obtenus précédemment dans [16] et [9] ont été généralisés aux corps de fonctions de courbes sur des corps locaux supérieurs. De nouvelles difficultés, liées à la grande dimension cohomologique et à la non finitude de certains groupes de cohomologie, avaient alors été mises en évidence. Comme pour [19], le but du présent article est de présenter certains aspects du principe local-global sur de tels corps.

1. Introduction

1.1. Organisation de l'article et énoncés des théorèmes principaux. — Tout comme [19], ce texte fait suite à l'article [21] (et à sa version plus complète qui fait l'objet du chapitre 1 de [20]) où sont établis des théorèmes de dualité arithmétique pour les modules finis, les tores, les groupes de type multiplicatif et même les complexes à deux termes de tores sur le corps des fonctions d'une courbe sur un corps local supérieur.

Commençons par rappeler le cadre de l'article [21]. On se donne un entier $d \geq 0$ et un corps d-local k, c'est-à-dire un corps complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel est $(d-1)$-local, les corps 0-locaux étant par définition les corps finis et $\mathbb{C}((t))$. On suppose que le corps 1-local correspondant est de caractéristique 0, le cas où il est de caractéristique positive posant de sérieuses difficultés même pour établir une dualité locale (voir le paragraphe 0.5 de [21]). Soit X une courbe projective lisse sur k. Soient $X^{(1)}$ l'ensemble de ses points fermés, K son corps des fonctions et T un K-tore. On note $\hat{T}$ le module des caractères de T, $\check{T}$ le module des cocaractères de T et $\tilde{T} = \hat{T} \otimes \mathbb{Z}(d)$, où $\mathbb{Z}(d)$ est le d-ième complexe motivique. On note aussi $Ш^r(T)$ (resp. $Ш^r(\tilde{T})$) est le sous-groupe de $H^r(K,T)$ (resp. $H^r(K,\tilde{T})$) constitué des éléments dont la restriction à $H^r(K_v,T)$ (resp. $H^r(K_v,\tilde{T})$) est nulle pour chaque $v \in X^{(1)}$.

Ce texte est constitué de deux parties. Dans la première, nous appliquons les théorèmes de dualité arithmétique pour les tores établis dans [21] à l'étude de l'approximation faible pour les tores (on se reportera à 2.1 pour les définitions) :

Théorème 1.1 (Théorème 2.4 et corollaires 2.6 et 2.7). — *On garde les notations ci-dessus, et pour chaque groupe topologique abélien A, on note $\overline{A}$ le quotient de A par son sous-groupe divisible maximal et A^D le groupe des morphismes continus de A dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soit $S \subseteq X^{(1)}$ une partie finie.*

(i) *On a une suite exacte :*

$$0 \to T(K)_S^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v\in S} T(K_v) \to \overline{Ш_S^{d+2}(\tilde{T})}^D \to Ш^1(T) \to 0,$$

où $T(K)_S^{\mathrm{adh}}$ *désigne l'adhérence de* $T(K)$ *dans* $\prod_{v \in S} T(K_v)$ *et* $Ш_S^{d+2}(\tilde{T})$ *est le sous-groupe de* $H^{d+2}(K, \tilde{T})$ *constitué des éléments dont la restriction à* $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ *est nulle pour chaque* $v \in X^{(1)} \setminus S$.

(ii) *On a la suite exacte :*

$$0 \to T(K)^{\mathrm{adh}} \to \prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v) \to (Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T}))^D \to (Ш^{d+2}(\tilde{T}))^D \to 0,$$

où $T(K)^{\mathrm{adh}}$ *désigne l'adhérence de* $T(K)$ *dans* $\prod_{v \in X^{(1)}} T(K_v)$ *et* $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ *est le sous-groupe de* $H^{d+2}(K, \tilde{T})$ *constitué des éléments dont la restriction à* $H^{d+2}(K_v, \tilde{T})$ *est nulle pour presque tout* $v \in X^{(1)}$.

(iii) *Le tore* T *vérifie l'approximation faible si, et seulement si,* $Ш^{d+2}(\tilde{T}) = Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$.

(iv) *Le tore* T *vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si, le groupe de torsion* $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ *est de type cofini. En particulier, lorsque* $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ *pour une extension finie* L *de* K *déployant* T*, le tore* T *vérifie l'approximation faible faible si, et seulement si,* $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ *est fini.*

(v) *Le tore* T *vérifie l'approximation faible faible dénombrable si, et seulement si, le groupe de torsion* $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ *est dénombrable.*

REMARQUE 1.2. — (a) La preuve de ce théorème mélange les difficultés qui avaient été rencontrées dans les articles [16] et [9] : le groupe $Ш^{d+2}(\mathbb{Z}(d))$ n'est pas forcément nul, et le groupe $Ш_\omega^{d+2}(\tilde{T})$ n'est pas forcément fini (ni même de torsion de type cofini).

(b) Des exemples où $Ш^{d+2}(L, \mathbb{Z}(d)) = 0$ ont été exhibés dans [19] : par exemple, pour certaines courbes constantes sur $\mathbb{Q}_p((t_2))\dots((t_d))$ ou certaines courbes elliptiques sur $\mathbb{C}((t_0))\dots((t_d))$.

Dans la deuxième partie, nous utilisons le théorème de dualité arithmétique pour les complexes à deux termes de tores de [22] afin d'étudier le principe local-global pour les K-espaces principaux homogènes sous un groupe linéaire connexe. Dans le cas où $k = \mathbb{C}((t))$, nous appliquons les méthodes de Borovoi ([2]) et Sansuc ([28]), ce qui permet notamment de montrer que la seule obstruction est l'obstruction de Brauer-Manin, alors que, dans les autres cas, nous suivons la méthode de Harari et Szamuely ([16]).

1.2. Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu David Harari pour son soutien et ses conseils, ainsi que pour sa lecture soigneuse de ce texte : sans lui, ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Je suis aussi très reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène, Tamás Szamuely et Bruno Kahn pour leurs commentaires et leurs remarques, et à Giancarlo Lucchini Arteche pour de nombreuses discussions. Je voudrais également remercier le rapporteur pour ses commentaires. Je voudrais