Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPOSANTES PRV GÉNÉRALISÉES ET CHEMINS DE LITTELMANN

Pierre-Louis Montagard

Tome 145
Fascicule 1

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 29-45

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 145, mars 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
`christian.smf@cirm-math.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`bullsmf@ihp.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (1), 2017, p. 29-45

COMPOSANTES PRV GÉNÉRALISÉES ET CHEMINS DE LITTELMANN

PAR PIERRE-LOUIS MONTAGARD

RÉSUMÉ. — Nous énonçons une condition suffisante pour qu'un chemin de Littelmann représente un vecteur de poids extrémal d'une représentation intégrable, irréductible et de plus haut poids d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable. À l'aide de cette condition, nous présentons, dans un contexte plus général, une preuve alternative de résultats de Boris Pasquier, Nicolas Ressayre et l'auteur de cet article sur l'existence de composantes PRV généralisées.

ABSTRACT (*PRV generalized components and Littelmann paths*). — We give a sufficient condition for a Littelmann path to represent a vector of extremal weight of an integrable irreducible highest weight representation of a symmetrizable Kac-Moody algebra. Thanks to this condition we present, in a more general context, an alternative proof of a recent result by Boris Pasquier, Nicolas Ressayre and the author of this article on the existence of generalized PRV components.

0. Introduction

La conjecture PRV a été énoncée dans les années 60 dans [11] par Parthasarathy, Ranga Rao et Varadarajan. Cette conjecture concerne le problème de décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles d'une

Texte reçu le 16 septembre 2014, modifié le 18 décembre 2015, accepté le 18 décembre 2015.

PIERRE-LOUIS MONTAGARD, Université Montpellier II - CC 51- Place Eugène Bataillon - 34095 Montpellier Cedex 5 - France • *E-mail :* pierre-louis.montagard@math.univ-montp2.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E46, 17B10, 17B65, 05E10.

Mots clefs. — Composantes PRV, produit tensoriel, chemins de Littelmann, algèbre de Kac-Moody symétrisable.

0037-9484/2017/29/$ 5.00

doi:10.24033/bsmf.2730

algèbre semi-simple complexe $\mathfrak{g}$. Son énoncé est très simple : soient μ et ν deux poids dominants de $\mathfrak{g}$ et v, w deux éléments du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$; soient $V(\mu)$ (resp. $V(\nu)$) la représentation irréductible de plus haut poids μ (resp. ν). Alors si le poids $\lambda = v\mu + w\nu$ est dominant la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda = v\mu + w\nu$ est de multiplicité non nulle dans $V(\mu) \otimes V(\nu)$.

On connaît aujourd'hui plusieurs preuves de cette conjecture. Citons d'abord, les preuves (simultanées et indépendantes) à la fin des années 80, de Shrawan Kumar [2] et [3] et Olivier Mathieu [8]. La géométrie, et notamment la géométrie des espaces de drapeaux du groupe G associé à $\mathfrak{g}$ intervient de façon essentielle dans ces deux preuves. Notons que ces deux preuves sont valables dans le contexte plus général des algèbres de Kac-Moody symétrisables. Plus tard, au milieu des années 90, Peter Littelmann a donné une preuve combinatoire et plus élémentaire de la conjecture PRV. Cette preuve est une application de la théorie des chemins de Littelmann développée dans [5] et [6], théorie qui généralise la règle de Littlewood-Richardson dans le cadre des algèbres de Kac-Moody symétrisables.

Récemment dans [9] et [10], avec Nicolas Ressayre et Boris Pasquier, nous avons démontré plusieurs généralisations de l'énoncé PRV dans le contexte d'un groupe algébrique réductif G et en utilisant des outils géométriques. Énonçons l'une de ces généralisations.

THÉORÈME 0.1. — *Soit G un groupe algébrique réductif complexe, soient (μ, ν) un couple de poids dominants et (v, w) un couple d'éléments du groupe de Weyl, soit β une racine positive (et $\beta^\vee$ la coracine associée) telle que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

1. *β est une racine simple ;*
2. *$v^{-1}\beta$ est une racine simple ;*
3. *$w^{-1}\beta$ est une racine simple.*

Soit k un entier vérifiant les inégalités :

$$0 \leq k \leq \min\{\langle v\mu, \beta^\vee\rangle, \langle w\nu, \beta^\vee\rangle\},$$

alors si le poids $\lambda = v\mu + w\nu - k\beta$ est dominant la représentation irréductible $V(\lambda)$ est de multiplicité non nulle dans le produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$.

L'ensemble des composantes ainsi obtenues contenant strictement les composantes obtenues par l'énoncé de la conjecture PRV originale, nous les appellerons composantes PRV généralisées. Nous avons représenté dans la figure 0.1, un exemple, montrant les composantes obtenues par ce procédé. Dans cet exemple G est égal au groupe $\mathrm{Sl}_3(\mathbb{C})$, $\mu = 7\varpi_1 + 2\varpi_2$, $\nu = \varpi_1 + 3\varpi_2$ où ϖ_1, ϖ_2 sont les deux poids fondamentaux de G. Nous avons représenté sur la figure les poids dominants correspondants aux représentations irréductibles de multiplicité non nulle du produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$, les composantes PRV classiques, les composantes PRV généralisées ainsi que les segments de direction β donnés par le

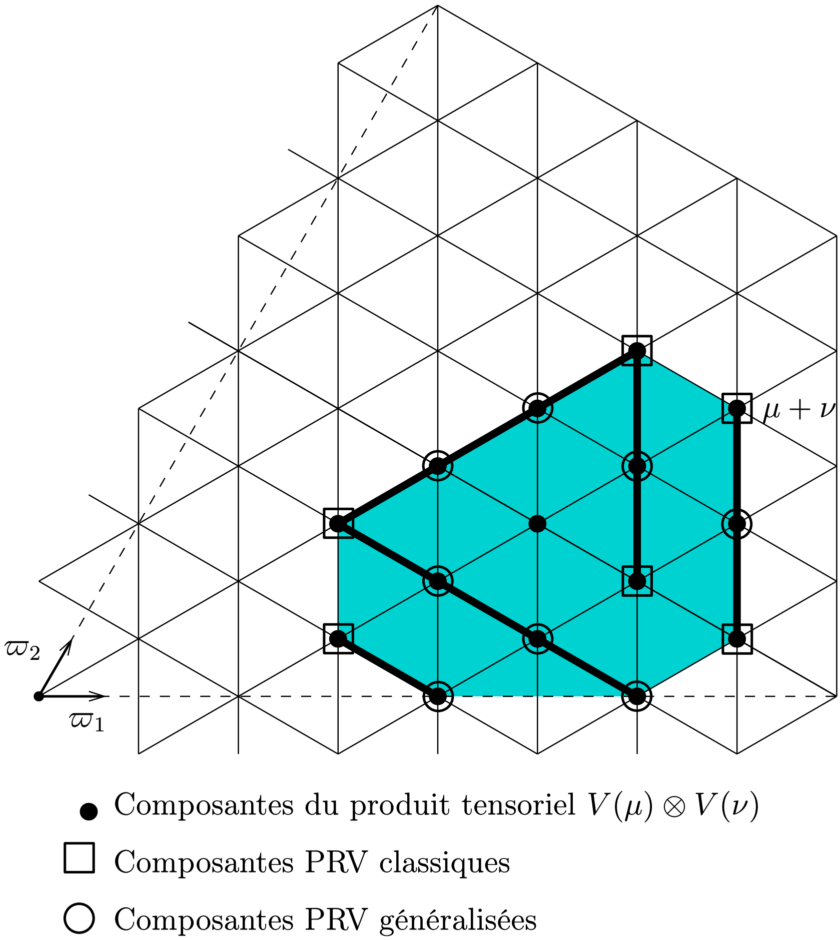

FIGURE 0.1.

théorème 0.1 et contenant une composante PRV généralisée (et non classique). Le réseau représenté est le réseau engendré par les racines (et non le réseau des poids). En effet, comme dans ce cas le poids $\mu + \nu$ appartient au réseau des racines, tous les plus haut poids des composantes qui apparaissent dans le produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$ appartiennent à ce réseau.

Dans cet article, nous allons donner une preuve de l'existence des composantes PRV généralisées pour les algèbres de Kac-Moody, en utilisant la théorie des chemins de Littelmann. Nous ne retrouvons pas exactement le même énoncé dans le contexte des algèbres de Kac-Moody symétrisables. En effet, dans le cas (i) (β est une racine simple) la preuve du théorème n'est valable que si $\mathfrak{g}$