Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INVERSION D'OPÉRATEURS DE COURBURES AU VOISINAGE DE LA MÉTRIQUE EUCLIDIENNE

Erwann Delay

Tome 145
Fascicule 3

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 411-420

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 145, septembre 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
`christian.smf@cirm-math.fr`

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`bullsmf@ihp.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (3), 2017, p. 411-420

INVERSION D'OPÉRATEURS DE COURBURES AU VOISINAGE DE LA MÉTRIQUE EUCLIDIENNE

PAR ERWANN DELAY

RÉSUMÉ. — Nous montrons que certains opérateurs affines en la courbure de Ricci sont localement inversibles, dans des espaces de Sobolev à poids, au voisinage de la métrique euclidienne.

ABSTRACT (*Inversion of some curvature operators near the euclidiean metric*). — We show that some operators, affine relatively to the Ricci curvature, are locally invertible, in some weithted sobolev spaces, near the euclidiean metric.

1. Introduction

Sur une variété Riemannienne (M,g), considérons $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et $R(g)$ sa courbure scalaire. Parmi les (champs de) 2-tenseurs symétriques géométriques naturels que l'on peut construire, les plus simples sont ceux qui seront « affines » en la courbure de Ricci, autrement dit, de la forme

$$\mathrm{Ein}(g) := \mathrm{Ric}(g) + \kappa R(g)g + \Lambda g,$$

où κ et Λ sont des constantes. Ainsi, si $\kappa = \Lambda = 0$ on retrouve la courbure de Ricci, si $\kappa = -\frac{1}{2}$ le tenseur d'Einstein (avec constante cosmologique Λ), enfin si $\kappa = -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda = 0$ le tenseur de Schouten. Rappelons que ce tenseur est

Texte reçu le 5 mars 2015, modifié le 7 mars 2016, accepté le 26 mai 2016.

ERWANN DELAY, Labo. de Math. d'Avignon, Fac. des Sciences, Campus Jean-Henri Fabre, 301 rue Baruch de Spinoza, F-84916 Avignon, France

Classification mathématique par sujets (2010). — 53C21, 53A45, 58J05, 58J37, 35J62.

Mots clefs. — Courbure de Ricci, 2-tenseurs symétriques, EDP elliptique quasi-linéaire, espaces de Sobolev à poids.

 0037-9484/2017/411/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2742

géométriquement naturel dans le sens où pour tout difféomorphisme φ assez régulier,

$$\varphi^* \operatorname{Ein}(g) = \operatorname{Ein}(\varphi^* g).$$

Nous nous posons ici le problème de l'inversion de l'opérateur Ein. On se donne donc E un champ de tenseurs symétriques sur M, on cherche g métrique riemannienne telle

$$\operatorname{Ein}(g) = E. \tag{1.1}$$

On doit ainsi résoudre un système quasi-linéaire particulièrement complexe. Le cas de la courbure de Ricci prescrite remonte aux années 80. DeTurck [10], en 1981, a tout d'abord montré un résultat d'existence locale au voisinage d'un point p (voir aussi [9]).

Puis il y a eu des résultats *globaux* : [11] sur le cas très particulier de la dimension 2, pour les surfaces *compactes*. Hamilton [14], a traité le cas de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n > 2$) en prouvant un résultat d'inversion locale au voisinage de la métrique standard. Nous avions ensuite prouvé un résultat analogue sur l'espace hyperbolique réel [6], et complexe [8], au voisinage de la métrique canonique.

Ce type d'inversion locale de l'opérateur de Ricci a été aussi adapté à certaines variétés d'Einstein [12], [7], [5].

Notons qu'il existe aussi des résultats d'obstruction sur l'inversion de la courbure de Ricci [13], [2], [14], [4], [6].

Le but de cet article est de prouver un résultat d'existence locale sur $\mathbb{R}^n$ près de la métrique euclidienne δ. Nous travaillons pour cela dans des espaces de Sobolev à poids $H^{s,t}$ de fonctions (ou champs de tenseurs) u telles que $\langle x\rangle^t u$ est dans l'espace de Sobolev classique H^s (voir section 3 pour une définition plus précise).

Théorème 1.1. — *Soient $s, t, \kappa, \Lambda \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{n}{2}$, $t \geq 0$, $\kappa > -\frac{1}{2(n-1)}$ et $\Lambda > 0$. Alors pour tout $e \in H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ proche de zéro, il existe un unique h proche de zéro dans $H^{s+2,t}(\mathbb{R}^n, \mathcal{S}_2)$ telle que*

$$\operatorname{Ein}(\delta + h) = \operatorname{Ein}(\delta) + e.$$

De plus l'application $e \mapsto h$ est lisse au voisinage de zéro entre les espaces de Hilbert correspondants.

Pour un opérateur d'ordre deux, il peut être surprenant de voir que la régularité de notre solution n'a pas deux points de plus que la donnée. On peut se convaincre que la régularité est optimale en transposant l'équation par un difféomorphisme peu régulier.

Cette inversion nous permet ensuite, en section 5 de prouver que l'image de certains opérateurs de type Riemann-Christoffel sont des sous variétés dans des espaces de Fréchet à poids.

Remerciements. — Je remercie Philippe Delanoë de m'avoir signalé en 1994 l'erreur malheureuse de [15] qui a motivée ce travail. Ce projet est en partie financé par les ANR SIMI-1-003-01 et ANR-10-BLAN 0105.

2. Définitions, notations et conventions

Pour une métrique riemannienne g, nous noterons ∇ sa connexion de Levi-Civita , par $\mathrm{Ric}(g)$ sa courbure de Ricci et par $\mathrm{Riem}(g)$ sa courbure de Riemann sectionnelle.

Soit $\mathcal{T}_p^q$ l'ensemble des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q. Lorsque $p = 2$ et $q = 0$, on notera $\mathcal{S}_2$ le sous-ensemble des tenseurs symétriques, qui se décompose en $\mathcal{G} \oplus \mathring{\mathcal{S}}_2$ où $\mathcal{G}$ est l'ensemble des tenseurs δ-conformes et $\mathring{\mathcal{S}}_2$ l'ensemble des tenseurs sans trace (relativement à δ). On utilisera la convention de sommation d'Einstein (les indices correspondants vont de 1 à n), et nous utiliserons g_{ij} et son inverse g^{ij} pour monter ou descendre les indices.

Le laplacien (brut) est défini par

$$\triangle = -\operatorname{Tr}_g \nabla^2 = \nabla^* \nabla,$$

où ∇^* est l'adjoint formel L^2 de ∇. Pour u un 2-tenseur covariant symétrique, on définit sa divergence par

$$(\mathrm{div} u)_i = -\nabla^j u_{ji}.$$

Pour une 1-forme ω sur M, on définit la partie symétrique de ses dérivées covariantes :

$$(\mathcal{L}\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i),$$

(notons que $\mathcal{L}^* = \mathrm{div}$). On introduit enfin l'opérateur de Bianchi des 2-tenseurs symétriques dans les 1-formes :

$$B_g(h) = \mathrm{div}_g h + \frac{1}{2} d(\operatorname{Tr}_g h).$$

3. Espaces à poids et isomorphismes

Les espaces à poids que nous utiliserons ici ne sont pas les espaces classiques utilisés dans le contexte asymptotiquement euclidien de la relativité générale (voir [15] par exemple).Ils sont plutôt utilisés en théorie du scattering comme dans les travaux de S. Agmon [1] ou de R. Melrose [16] (voir aussi son cours [17] section 6, ou [18] p241). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $s, t \in \mathbb{R}$, on introduit les espaces à poids

$$H^{s,t}(\mathbb{R}^n) = \langle x \rangle^{-t} H^s(\mathbb{R}^n) \ , \quad \|u\|_{s,t} := \|\langle x \rangle^t u\|_s,$$