

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PROBLÈME DE PLATEAU,  
ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET  
PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Numéro 133  
Nouvelle série

Laura DESIDERI

2 0 1 3

---

### **Comité de rédaction**

Jean BARGE  
Gérard BESSON  
Emmanuel BREUILLARD  
Antoine CHAMBERT-LOIR  
Jean-François DAT  
Charles FAVRE

Daniel HUYBRECHTS  
Yves LE JAN  
Julien MARCHÉ  
Laure SAINT-RAYMOND  
Wilhelm SCHLAG

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

### **Diffusion**

Maison de la SMF  
B.P. 67  
13274 Marseille Cedex 9  
France  
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### **Tarifs 2013**

*Vente au numéro* : 35 € (\$ 48)

*Abonnement* Europe : 262 €, hors Europe : 296 € (\$ 444)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### **Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-766-7

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

---

MÉMOIRES DE LA SMF 133

**PROBLÈME DE PLATEAU,  
ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET  
PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT**

Laura Desideri

Société Mathématique de France 2013  
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*L. Desideri*

Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé, 59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex.

*E-mail* : `Laura.Desideri@math.univ-lille1.fr`

*Url* : `http://math.univ-lille1.fr/~desideri/`

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 53A10, 34A30, 34M35, 34M50, 34M55, 32G34.

**Mots clefs.** — Surfaces minimales; systèmes complètement intégrables; équations fuchsienues et systèmes fuchiens; problème de Riemann-Hilbert; déformations isomonodromiques; système de Schlesinger.

---

# PROBLÈME DE PLATEAU, ÉQUATIONS FUCHSIENNES ET PROBLÈME DE RIEMANN-HILBERT

Laura Desideri

**Résumé.** — Ce mémoire est consacré à la résolution du problème de Plateau à bord polygonal dans l'espace euclidien de dimension trois. Il s'appuie sur la méthode de résolution proposée par René Garnier dans un article méconnu, voire inconnu, publié en 1928. L'approche de Garnier est très différente de la méthode variationnelle, elle est plus géométrique et constructive, et permet d'obtenir des disques minimaux sans point de ramification. Cependant, elle est parfois très compliquée, voire obscure et incomplète. On retranscrit sa démonstration dans un formalisme moderne, tout en proposant de nouvelles preuves plus simples, et en complétant certaines lacunes. Ce travail repose principalement sur l'utilisation plus systématique des systèmes fuchsien et la mise en évidence du lien entre la réalité d'un système et sa monodromie.

La méthode de Garnier repose sur le fait que, par la représentation de Weierstrass spinorielle des surfaces minimales, on peut associer une équation fuchsienne réelle du second ordre, définie sur la sphère de Riemann, à tout disque minimal à bord polygonal. La monodromie de cette équation est déterminée par les directions orientées des côtés du bord. Le bon point de vue consiste à considérer des polygones pouvant avoir un sommet en l'infini. Pour résoudre le problème de Plateau, on est donc amené à résoudre un problème de Riemann-Hilbert. On procède ensuite en deux étapes : on construit d'abord, par déformations isomonodromiques, la famille de tous les disques minimaux dont le bord est un polygone de directions orientées données. Puis on montre, en étudiant les longueurs des côtés des bords polygonaux, qu'on obtient ainsi tout polygone comme bord d'un disque minimal.