

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ROLLING OF MANIFOLDS AND CONTROLLABILITY IN DIMENSION THREE

Numéro 147

Nouvelle série

Yacine CHITOUR

Petri KOKKONEN

2 0 1 6

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Valérie BERTHÉ
Gérard BESSON
Emmanuel BREUILLARD
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Charles FAVRE

Raphaël KRIKORIAN
O' Grady KIERAN
Julien MARCHÉ
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2016

Vente au numéro : 35 € (\$52)

Abonnement Europe : 138 €, hors Europe : 154 € (\$231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-838-1

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MÉMOIRES DE LA SMF 147

**ROLLING OF MANIFOLDS AND
CONTROLLABILITY IN
DIMENSION THREE**

**Yacine Chitour
Petri Kokkonen**

Société Mathématique de France 2016

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Y. Chitour

E-mail : `yacine.chitour@lss.supelec.fr`

L2S, Université Paris-Sud XI, CNRS and Supélec, Gif-sur-Yvette, 91192, France.

P. Kokkonen

E-mail : `pvkokkon@gmail.com`

L2S, Université Paris-Sud XI, CNRS and Supélec, Gif-sur-Yvette, 91192, France and University of Eastern Finland, Department of Applied Physics, 70211, Kuopio, Finland.

2010 Mathematics Subject Classification. — 53C05, 53C29, 70G45.

Key words and phrases. — Development of manifolds, geometric control, controllability, curvature tensor.

The work of the first author is supported by the “iCODE Institute project” funded by the IDEX Paris-Saclay, ANR11-IDEX-0003-02. The work of the second author is supported by Finnish Academy of Science and Letters.

ROLLING OF MANIFOLDS AND CONTROLLABILITY IN DIMENSION THREE

Yacine Chitour, Petri Kokkonen

Abstract. — We present the rolling (or development) of one smooth connected complete Riemannian manifold (M, g) onto another one $(\widehat{M}, \widehat{g})$ of equal dimension $n \geq 2$ where there is no relative spin or slip of one manifold with respect to the other one. Relying on geometric control theory, we provide an intrinsic description of the two constraints “without spinning” and “without slipping” in terms of the Levi-Civita connections ∇^g and $\nabla^{\widehat{g}}$ by defining corresponding vector fields distributions in the appropriate state space. We then address the issue of complete controllability for that rolling problem. We first establish basic global properties for the reachable set and investigate the associated Lie bracket structure. In particular, we point out the role played by a curvature tensor defined on the state space, that we call the *rolling curvature*. When the two manifolds are three-dimensional, we give a complete local characterization of the reachable sets and, in particular, we identify necessary and sufficient conditions for the existence of a non open orbit. In addition to the trivial case where the manifolds (M, g) and $(\widehat{M}, \widehat{g})$ are (locally) isometric, we show that (local) non controllability occurs if and only if (M, g) and $(\widehat{M}, \widehat{g})$ are either warped products or contact manifolds with additional restrictions that we precisely describe.