

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPACTNESS PROPERTIES
OF PERTURBED
SUB-STOCHASTIC
 C_0 -SEMIGROUPS ON $L^1(\mu)$
WITH APPLICATIONS TO
DISCRETENESS AND
SPECTRAL GAPS

Numéro 148

Nouvelle série

2 0 1 6

Mustapha MOKHTAR-KHARROUBI

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Valérie BERTHÉ	Raphaël KRIKORIAN
Gérard BESSON	O' Grady KIERAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Emmanuel RUSS
Jean-François DAT	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

Tarifs 2016

Vente au numéro : 35 € (\$52)
Abonnement Europe : 138 €, hors Europe : 154 € (\$231)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-839-8

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

COMPACTNESS PROPERTIES
OF PERTURBED
SUB-STOCHASTIC
 C_0 -SEMIGROUPS ON $L^1(\mu)$
WITH APPLICATIONS TO
DISCRETENESS AND
SPECTRAL GAPS

Mustapha Mokhtar-Kharroubi

M. Mokhtar-Kharroubi

Département de Mathématiques, CNRS-UMR 6623,

Université de Franche-Comté, 16 Route de Gray, 25030 Besançon, France.

E-mail : mmokhtar@univ-fcomte.fr

2010 Mathematics Subject Classification. — 47D06, 47B07, 47B34, 47B65, 35P15.

Key words and phrases. — L^1 space, absorption semigroup, local weak compactness, discrete spectrum, spectral gap, convolution semigroup, Witten Laplacian.

COMPACTNESS PROPERTIES OF PERTURBED SUB-STOCHASTIC C_0 -SEMIGROUPS ON $L^1(\mu)$ WITH APPLICATIONS TO DISCRETENESS AND SPECTRAL GAPS

Mustapha Mokhtar-Kharroubi

Abstract. — We deal with positive C_0 -semigroups $(U(t))_{t \geq 0}$ of contractions in $L^1(\Omega; \mathcal{A}, \mu)$ with generator T where $(\Omega; \mathcal{A}, \mu)$ is an abstract measure space and provide a systematic approach of compactness properties of perturbed C_0 -semigroups $(e^{t(T-V)})_{t \geq 0}$ (or their generators) induced by singular potentials $V : (\Omega; \mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$. More precise results are given in metric measure spaces (Ω, d, μ) . This new construction is based on several ingredients: new a priori estimates peculiar to L^1 -spaces, local weak compactness assumptions on unperturbed operators, “Dunford-Pettis” arguments and the assumption that the sublevel sets $\Omega_M := \{x; V(x) \leq M\}$ are “thin at infinity with respect to $(U(t))_{t \geq 0}$ ”. We show also how spectral gaps occur when the sublevel sets are not “thin at infinity”. This formalism combines intimately the kernel of $(U(t))_{t \geq 0}$ and the sublevel sets Ω_M . Indefinite potentials are also dealt with. Various applications to convolution semigroups, weighted Laplacians and Witten Laplacians on 1-forms are given.