

M.P. Gualdani
S. Mischler
C. Mouhot

**FACTORIZATION OF NON-SYMMETRIC
OPERATORS AND EXPONENTIAL
H-THEOREM**

MÉMOIRES DE LA SMF 153

Société Mathématique de France 2017

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Emmanuel BREUILLARD
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Marc HERZLICH
O' Grady KIERAN

Raphaël KRIKORIAN
Julien MARCHÉ
Laurent MANIVEL
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 35 € (\$ 52)

Abonnement électronique : 113 € (\$ 170)

Abonnement avec supplément papier : 162 €, hors Europe : 186 € (\$ 279)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memsmf@ihp.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2017

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633X (print) 2275-3230 (electronic)

ISBN 978-2-85629-874-9

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

MÉMOIRES DE LA SMF 153

FACTORIZATION OF NON-SYMMETRIC
OPERATORS AND EXPONENTIAL
H-THEOREM

M.P. Gualdani

S. Mischler

C. Mouhot

Société Mathématique de France 2017

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

M.P. GUALDANI

Department of Mathematics, The University of Texas at Austin, 1 University
Station C1200, Texas 78712, USA.

E-mail : gualdani@math.utexas.edu

S. MISCHLER

CEREMADE, Université Paris IX-Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny,
75775 Paris, France.

E-mail : mischler@ceremade.dauphine.fr

C. MOUHOT

DPMMS, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge, Wilberforce
Road, CB3 0WA Cambridge UK.

E-mail : cmouhot@ceremade.dauphine.fr

2010 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION. — 47D06, 34G10, 34K30, 35P15,
47H20, 37L05, 47J35, 54H15, 58D07, 35Q84, 76P05, 82B40, 82C40, 82D05.

KEY WORDS AND PHRASES. — Spectral gap – semigroup – spectral mapping
theorem – quantitative – Plancherel theorem – coercivity – hypocoercivity –
dissipativity – hypodissipativity – Fokker-Planck equation – Boltzmann equation –
 H -theorem – exponential rate – stretched exponential weight – Povzner estimate –
averaging lemma – thermalization – entropy.

FACTORIZATION OF NON-SYMMETRIC OPERATORS AND EXPONENTIAL H -THEOREM

M.P. Gualdani, S. Mischler, C. Mouhot

ABSTRACT. — We present an abstract method for deriving decay estimates on the resolvents and semigroups of non-symmetric operators in Banach spaces in terms of estimates in another smaller reference Banach space. This applies to a class of operators writing as $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ where \mathcal{A} is bounded, \mathcal{B} is dissipative and the two parts satisfy a semigroup commutator condition of regularization. The core of the method is a high-order quantitative factorization argument on the resolvents and semigroups. We then apply this approach to the Fokker-Planck equation, to the kinetic Fokker-Planck equation in the torus, and to the linearized Boltzmann equation in the torus.

We finally use this information on the linearized Boltzmann semigroup to study perturbative solutions for the nonlinear Boltzmann equation. We introduce a non-symmetric energy method to prove nonlinear stability in this context in $L_v^1 L_x^\infty(1 + |v|^k)$, $k > 2$, with sharp rate of decay in time. Our result drastically improves the class of functions considered in the literature, it also provides optimal rate of convergence and our proof is constructive.

As a consequence of these results, we obtain the first constructive proof of exponential decay, with sharp rate, towards global equilibrium for the full nonlinear Boltzmann equation for hard spheres, conditionally to some smoothness and (polynomial) moment estimates. This improves the result in [46] where polynomial rates at any order were obtained, and solves the conjecture raised in [119], [43], [110] about the optimal decay rate of the relative entropy in the H -theorem.

RÉSUMÉ. — Nous présentons une méthode abstraite pour démontrer des estimations de décroissance sur les résolvantes et les semi-groupes d'opérateurs non-symétriques dans des espaces de Banach, à partir d'estimations dans un autre espace de Banach de référence plus petit. Cette méthode s'applique à une classe d'opérateurs s'écrivant $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ avec \mathcal{A} borné et \mathcal{B} dissipatif, et sous une condition de régularisation sur un commutateur au niveau des semi-groupes. Le cœur