

L'ARITHMÉTICIEN ÉDOUARD LUCAS (1842–1891) : THÉORIE ET INSTRUMENTATION

Anne-Marie DÉCAILLOT (*)

RÉSUMÉ. — Édouard Lucas est étudié, dans l'article qui suit, comme une des figures les plus représentatives du milieu des arithméticiens français de la seconde moitié du XIX^e siècle, milieu à qui on doit notamment des méthodes de calcul rapides et des algorithmes. À travers les éléments biographiques présentés dans la première partie, le caractère marginal de Lucas (et corrélativement de tout ce milieu) est mis en évidence. La nature des problèmes abordés par Lucas, les lieux d'expression et de publication de ses résultats et ses difficultés de carrière en témoignent. La deuxième partie de l'article est consacrée à l'examen des principaux résultats théoriques de Lucas : petit théorème de Fermat et tests de primalité. La conception d'un instrument arithmétique destiné à tester mécaniquement la primalité de certains grands nombres entiers est au centre de la troisième partie. La postérité des travaux de Lucas, plus importante à l'étranger, et notamment aux États-Unis, qu'en France, est abordée en fin d'article.

ABSTRACT. — ÉDOUARD LUCAS (1842–1891), THE ARITHMETICIAN : THEORY AND INSTRUMENTATION. — In this article, Edouard Lucas is studied as one of the most representative figures of the French arithmeticians' milieu, which was responsible for fast computing methods and algorithms in the second half of the 19th century. Some biographical elements presented in the first part show that Lucas (and correlatively this whole milieu) exhibited marginal aspects, as witnessed by the nature of the problems tackled by Lucas, his results' outlets for publication, and his career difficulties. The second part of this paper is devoted to the examination of Lucas's principal theoretical results : Fermat's "little" theorem and primality tests. The conception of an arithmetical instrument designed for testing the primality of certain large numbers is the focus of the third part. More important abroad (and notably in the United States) than in France, the posterity of Lucas's work is touched upon at the end of the article.

L'arithméticien Édouard Lucas (1842-1891) apparaît comme l'un des auteurs français les plus prolifiques de la fin du XIX^e siècle dans le domaine de la théorie des nombres. Lucas se rattache au groupe de

(*) Texte reçu le 15 décembre 1997, révisé le 4 février 1999.

Anne-Marie DÉCAILLOT, UFR de Mathématiques et Informatique, Paris V, 45 rue des Saints Pères, 75006 Paris et Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay.
Courrier électronique : deca@math-info.univ-paris5.fr.

mathématiciens français se référant à une tradition algébrique classique de la discipline. Il est également connu pour ses œuvres de vulgarisation, récréations mathématiques et arithmétique amusante. Prédominante entre 1870 et 1900, cette catégorie d'arithméticiens disparaît presque entièrement des publications académiques françaises au début du XX^e siècle ; le renouveau disciplinaire met alors en avant la théorie des formes et la théorie analytique des nombres. À travers le personnage de Lucas, c'est une meilleure connaissance de ce groupe qui est visée. Marginaux par rapport au milieu académique et universitaire, publiant dans des revues considérées de second plan, travaillant sur des questions négligées par les autres mathématiciens de l'époque (calcul algorithmique et calcul mécanique en arithmétique par exemple), ces scientifiques connaissent aujourd'hui un fort regain d'intérêt. Il faut souligner que Lucas est un membre actif d'une société savante, la Société Mathématique de France (SMF), et d'une association à caractère scientifique, l'Association Française pour l'Avancement des Sciences (AFAS).

Tombée en France dans un oubli relatif au début du XX^e siècle¹, l'œuvre de Lucas est enrichie par les Anglo-Saxons, en particulier par Derrick Henry Lehmer dans les années 1930. Elle ressort aujourd'hui de l'indifférence, la cryptographie remettant à l'honneur la recherche de très grands nombres premiers². Les plus grands d'entre eux découverts dernièrement sont des nombres de Mersenne, c'est-à-dire de la forme $2^n - 1$, et le critère de primalité utilisé demeure celui de Lucas-Lehmer. L'intérêt de la contribution de Lucas à l'étude des questions de primalité, au moyen de tests puissants et rapides, s'en trouve justifié.

La première partie de l'étude qui suit est consacrée à ces arithméticiens français de la deuxième moitié du XIX^e siècle et à quelques éléments de la biographie de Lucas. À travers la carrière parfois difficile de ce scientifique, nous nous efforçons de montrer le caractère marginal de ce groupe par rapport au milieu mathématique français classique. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à l'apport théorique de Lucas concernant le petit théorème de Fermat et le domaine des tests de primalité. Le principe

¹ Eugène Cahen est chargé d'un cours de théorie des nombres à la Sorbonne entre 1910 et 1915. Il publie en 1900 des *Éléments de théorie des nombres* [Cahen 1900], ouvrage pour une large part algébrique, dans lequel il omet de faire référence à Lucas et à son traité de *Théorie des nombres* [Lucas 1891], qui ne date pourtant que de 1891.

² Voir, par exemple, le *Cours d'algèbre* de Michel Demazure [1997].

de l'instrument arithmétique, que Lucas qualifie de mécanisme et parfois de «*machine arithmétique*», destiné à tester la primalité de certains grands nombres entiers, est analysé dans la troisième partie. Cette machine a-t-elle été construite en 1891 par l'ingénieur civil Henri Genaille, sous le nom de piano arithmétique, comme certains témoignages le laissent à croire ? Ce dernier s'est-il contenté d'en dessiner les plans ? La question demeure posée. L'analyse de la postérité de Lucas constitue la dernière partie. L'influence de l'arithméticien est beaucoup plus faible en France, où le calcul numérique et algorithmique rapide est longtemps négligé³, qu'à l'étranger, essentiellement aux États-Unis.

ÉDOUARD LUCAS, FIGURE REPRÉSENTATIVE DU MILIEU DES ARITHMÉTICIENS FRANÇAIS DE LA DEUXIÈME MOITIÉ DU XIX^e SIÈCLE

À l'exception de Charles Hermite, la théorie des nombres préoccupe assez peu le milieu mathématique français classique avant 1910. On peut remarquer qu'elle est absente de l'enseignement supérieur (facultés des sciences et grandes écoles). Contrairement aux universités étrangères, il n'existe aucune chaire de théorie des nombres dans l'Université française, hormis la charge de cours d'Eugène Cahen entre 1910 et 1915 à la Sorbonne. La tradition allemande est plus ancienne et les universités germaniques sont au cœur de l'enseignement et de la recherche en ce domaine : ainsi Ernst Eduard Kummer est nommé professeur à Breslau en 1842, puis à Berlin ; parmi ses élèves figurent Leopold Kronecker et Paul Bachmann, qui occupent à leur tour des fonctions universitaires. Les notes des cours de théorie des nombres de Gustav Lejeune-Dirichlet et Richard Dedekind, *Vorlesungen über die Zahlentheorie*, paraissent en 1863⁴.

En France, le milieu des théoriciens des nombres est constitué pour l'essentiel de professeurs de l'enseignement secondaire et de membres d'associations à caractère scientifique, comme l'AFAS. Ces arithméticiens s'expriment dans des notes aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences (CRAS), dont l'analyse est faite de 1870 à 1914 par Catherine Goldstein [1994]. Lucas apparaît comme l'un des auteurs les plus féconds en

³ Voir [Tournès 1998].

⁴ Voir Catherine Goldstein, *Le métier des nombres*, dans [Serres 1989, p. 275–295].

ce domaine (neuf notes pendant la période considérée). Il appartient au groupe de mathématiciens français intéressés par les aspects algébriques traditionnels de cette discipline, dont les références vont de Fermat, des Bernoulli, d'Euler, de Lagrange et de Legendre aux *Disquisitiones* de Gauss. Leurs études (environ 130 notes aux CRAS) portent pour l'essentiel sur les nombres premiers, les diviseurs d'un nombre donné, les fractions continues, l'analyse diophantienne, les équations à coefficients entiers. Cette catégorie d'arithméticiens est prédominante entre 1870 et 1900. Elle disparaît presque entièrement des notes aux *Comptes rendus* au début du XX^e siècle, au moment où se manifestent un renouveau thématique, ainsi que des changements de perspective et de niveau d'exigence de la discipline. L'explosion de nouvelles recherches met alors en avant la théorie analytique des nombres et la théorie des formes ; celle des corps de nombres émerge.

Hélène Gispert analyse les recherches françaises de haut niveau, notamment les thèses soutenues entre 1870 et 1914 par des sociétaires de la Société Mathématique de France : la théorie des formes et la théorie des nombres y sont singulièrement peu présentes⁵. Pendant cette période le *Bulletin de la Société Mathématique de France* comporte seulement 6 % de communications en théorie des nombres contre 32 % en géométrie et 27 % en analyse⁶. Hormis les notes aux *Comptes rendus*, qui constituent de véritables publications de recherche, on peut s'interroger sur les lieux d'expression des résultats numériques français. Un élément de réponse est apporté par H. Gispert : « *Ces disciplines semblent être principalement cultivées dans le cadre de revues de diffusion ou d'enseignement* » qui proposent en guise de récréations mathématiques des questions de théorie des nombres, d'analyse diophantienne ou de divisibilité par exemple. Le recensement effectué par Leonard Eugene Dickson et ses collaborateurs confirme par ailleurs le rôle de la revue française *Nouvelles annales de mathématiques*, ainsi que des revues belges *Nouvelle correspondance*

⁵ Parmi les thèses soutenues à la faculté des sciences de Paris, on peut mentionner celle du R.P. Joubert (août 1876) sur l'application des fonctions elliptiques à l'arithmétique supérieure, et celle de Léon Charve (juillet 1880) sur l'application de la théorie arithmétique à un nouveau mode d'approximation contenant les fractions continues (dont le rapport, rédigé par Ch. Hermite, est conservé aux Archives nationales (désormais A.N.) AJ¹⁶ 5533).

⁶ Voir [Gispert 1991, p. 86, 91, 158 et tableau p. 173].

mathématique et *Mathesis* dans le domaine numérique⁷.

Dans l'édition, les années 1880–1900 sont marquées en France par un besoin de mise à jour des connaissances mathématiques : de grands traités paraissent où l'analyse est la préoccupation dominante. Or en algèbre et en théorie des nombres les traités sont rares ; dans ce paysage, l'ouvrage *Théorie des nombres* d'Édouard Lucas, publié en 1891, fait exception. Il sera suivi du traité remarquable constitué des conférences de Jules Tannery à l'École normale supérieure, rédigées par Émile Borel pour l'algèbre et Jules Drach pour la théorie des nombres, ainsi que du traité d'Eugène Cahen⁸. Ces efforts sont insuffisants pour assurer la présence française lors du congrès international de mathématiques qui se tient à Zürich en 1897, où la section d'algèbre et de théorie des nombres ne comporte aucun intervenant français.

Le désintérêt relatif du milieu académique français permet d'appréhender l'investissement d'un certain nombre de mathématiciens, par ailleurs membres de la SMF, très présents à l'AFAS dans le domaine arithmétique. Entre 1872 (année de la fondation de l'association) et 1914, les 1200 interventions de la section 1 du groupe des sciences mathématiques comportent 20 % de communications concernant des problèmes numériques. L'AFAS s'affirme ainsi comme un lieu d'expression et de publication de résultats concernant les nombres, au même titre que les revues de diffusion et d'enseignement. L'activité des arithméticiens y atteint une ampleur comparable à celle qui se déploie au travers des notes aux *Comptes rendus*. Sans être des mathématiciens d'exception, ces scientifiques ont une action et une influence qui ne peuvent être tenues pour négligeables⁹.

⁷ Voir [Dickson 1919–1923].

⁸ Voir [Tannery 1895] et [Cahen 1900].

⁹ Parmi eux nous trouvons : Aubry, Fontès, Gérardin, Gohierre de Longchamps, Laisant, Lucas, Maillet, d'Ocagne, Pellet, Perrin. Pour sa part, Henri Poincaré effectue deux communications tout à fait exceptionnelles au congrès de l'association en 1881. L'une porte sur « *les invariants arithmétiques et leur utilisation pour reconnaître si deux formes quadratiques sont équivalentes* » [AFAS 1881, p. 109–117], l'autre sur « *les applications de la géométrie non euclidienne à la théorie des formes quadratiques* » [AFAS 1881, p. 132–138]. Il faut souligner à ce propos que des étrangers, et parmi eux des savants de tout premier plan comme Cantor, Peano, Sylvester ou Tchebychef, n'hésitent pas à utiliser l'AFAS pour diffuser certains de leurs résultats.