Revue d'histoire des mathématiques,
6 (2000), p. 167–217.

PEUT-ON TOUT DE MÊME PARLER D'UN 'TRIANGLE DE PASCAL' ?

Laurent KYRIACOPOULOS (*)

RÉSUMÉ. — Lorsque vers 1654 Pascal considère le triangle arithmétique, il ne se contente pas de dresser l'inventaire d'applications déjà anciennes, ni d'étendre son usage aux jeux de hasard. Son recueil de traités est aussi le lieu où se confrontent deux manières successives de résoudre les mêmes problèmes : soit par *lecture du triangle*, soit par des *calculs* dont le triangle est exclu.

Or, du point de vue de la preuve, le recueil donne à voir ces solutions sans triangle comme un second mouvement, une conclusion. Car elles sont toujours démontrées *à partir du triangle* : de ses lectures et de ses propriétés.

C'est que Pascal n'a pas vraiment délaissé l'objet portant parfois son nom. Des premières aux secondes résolutions, le triangle n'a pas disparu, il s'est seulement déplacé. D'abord moyen de résolution, il est devenu outil de preuve, élément d'une démarche singulière pour démontrer des égalités (on parlera ici d'une *procédure de démonstration*). Or, pour sa nouvelle fonction, il change de nature. Pourrait-on à cet égard parler enfin, avec justesse, d'un 'triangle de Pascal' ?

ABSTRACT. — CAN ONE NEVERTHELESS SPEAK OF 'PASCAL'S TRIANGLE' ? Around 1654, when Pascal considered the arithmetical triangle, he neither contented himself with taking stock of well-tried applications nor with extending their use to games of chance. In his collection of treatises two successive ways of solving the same set of problems are being confronted : either *reading the triangle* or *calculations* which do not take the triangle into account.

Yet, as regards proofs, the solutions without the triangle are presented as a second movement, a conclusion. These solutions however are provided *on the basis of the triangle*, i.e. by its readings or its properties.

Indeed, Pascal never really neglected the object which later bore his name. Between the first and the second resolutions, the triangle has not disappeared; it had only been displaced. From a means of resolution it had become a way to demonstrate, an element within a particular procedure to establish equalities (we shall call this a *procedure of*

(*) Texte reçu le 25 mars 2000, révisé le 25 janvier 2001.

L. KYRIACOPOULOS, 114 rue Victor Hugo, 84210 Pernes-les-Fontaines (France). Courrier électronique : laurent.kyriacopoulos@laposte.net.

Mots clés : Pascal, triangle arithmétique, démonstration, problème des partis, nombres figurés, combinaisons.

Classification AMS : 01A45.

demonstration). Yet, this new purpose changes the very nature of the triangle. In this respect, can one eventually and rightly speak of Pascal's triangle ?

Les travaux de Pascal sur le triangle arithmétique sont regroupés en un recueil de traités, dont nous connaissons deux versions successives, aux dates d'impression incertaines. La première version, qui nous est parvenue en un exemplaire imprimé, fut entièrement rédigée en latin. Son impression a pu se situer au plus tard dans la première partie de l'année 1654, voire en 1653, mais ne fut suivie d'aucune publication. La seconde version fut probablement composée en 1654. Le libraire Guillaume Desprez la publia en 1665, après la mort de Pascal[1].

De la première version à la seconde, le contenu change en un seul point : aux trois usages du triangle exposés dans le recueil initial, s'ajoute une application remarquable : *les problèmes de partis* — au sens de partages — *entre deux joueurs à un jeu de hasard*. Mais en même temps Pascal réécrit en français une partie du recueil, conservant le reste tel quel en latin (cette seconde version mêle donc le français et le latin ; nous la nommerons cependant *version en français* par commodité). Et un remaniement complet s'opère alors dans l'agencement des traités entre eux. On décrira en fin d'introduction comment la présentation du recueil a changé et on reviendra à plusieurs reprises sur les variations significatives de l'une à l'autre version.

L'emploi classique du triangle peut s'énoncer de façon simple : il s'agit de lire, d'utiliser les entiers qu'il contient. Une partie du recueil de Pascal consiste précisément à expliciter ou à établir l'usage du triangle pour chacune des quatre applications considérées : les nombres figurés ; les combinaisons ; les problèmes de partis ; les coefficients du développement des puissances d'un binôme. On rappellera dans un premier temps comment Pascal identifie le triangle et ces usages. Mais il sera surtout question, dans notre première partie, de dégager un mouvement moins apparent qui parcourt le recueil : *comment traiter les mêmes applications sans avoir recours au triangle arithmétique*. Bien que cet objet mathématique soit déjà présent chez de nombreux prédécesseurs arabes [Djebbar 1997,

[1] La présentation des deux versions repose sur les notices de J. Mesnard [Pascal 1964, II, p. 1166–1175] et M. Le Guern [Pascal 1998, I, p. 1051–1058]. Les deux éditions publient les deux versions. Lors des citations, on renverra à l'édition de 1998 (les traductions du latin sont de M. Le Guern).

p. 18 ; Rashed 1998, p. 55 et *sq.*], chinois [Lam Lay Yong 1980, p. 407–424], européens[2], l'ouvrage de Pascal continue d'être salué comme une vaste synthèse de ses applications [Koyré 1973, p. 368], [Serres 1995, p. 231–232]. Et pourtant, la disposition des traités, c'est-à-dire les liens et les renvois de l'un à l'autre, la résolution des problèmes énoncés, ou encore les passages de transition, nous conduiront à conclure que les démarches sans triangle y jouent un rôle de premier plan.

En contrepoint, la seconde partie de l'article tentera de montrer que le triangle est toujours resté au cœur des travaux de Pascal. Car lorsque celui-ci le délaisse comme moyen de résolution, il en renouvelle en même temps l'usage : le triangle fait désormais partie d'un procédé singulier pour démontrer des égalités. Une manière différente de penser l'objet prend forme chez Pascal. Le triangle ne produit plus des entiers en dernière instance ; d'abord objet de résolution, il est devenu un *outil de preuve.* Aussi s'agira-t-il d'expliciter ce nouvel emploi du triangle.

LES DEUX VERSIONS DU RECUEIL

Le tableau 1 rend compte de certaines variations entre les deux recueils successifs (pour plus de clarté, à la différence des impressions originales, j'ai désigné les traités, de (*a.*) à (*f.*) et de (*1.*) à (*7.*)). Pour la seconde version, Pascal écrivit en français un nouveau traité d'ouverture sur le triangle ((*a.*) puis (*1.*)) ; les traités (*c.*), (*e.*) et (*f.*) furent au contraire conservés tels quels en latin ((*4.*), (*6.*) et (*7.*)). Quant au traité (*b.*), il se scinda en deux pour le second recueil : le premier des quatre usages en français (*2.*) en traduisit la première partie, tandis que le *traité des ordres numériques* (*3.*) reprit la suite sans grand changement, voire à l'identique. Le même partage, que symbolisent les flèches, eut lieu sur le traité *Combinationes* (*d.*) : le début devint l'*Usage II* en français, la seconde partie restant inchangée en latin (*5.*) d'une impression à l'autre. Seule l'application aux partis, apparue avec l'*Usage III*, fut un réel ajout. Certes l'*Usage IV* fut lui aussi spécialement rédigé pour la version en français, mais cette dernière application du triangle était déjà présente dans le recueil en latin par le biais du traité (*e.*), où la méthode exposée nécessite le développement de puissances de binômes.

[2] *Cf.* entre autres [Tartaglia 1560], [Cardan 1570], [Stifel 1544]. À propos de Hérigone et Maurolico, *cf.* [Pascal, *Œuvres* 1998, I, p. 1053–1056].

RECUEIL EN LATIN

a. Triangulus arithmeticus

Il énonce et démontre 18 propriétés (19 dans le *1.*) sur les cellules, les lignes, les colonnes, les bases,. . .

Problema

b. Numeri figurati seu ordines numerici

Problema 1, Problema 2, Problema 3, Problema 4

c. De numerorum continuorum productis. Numericarum potestatum generalis

Extraction de la racine n-ième d'un nombre entier

d. Combinationes

Lemma 5 (Problematice enuntiatum), Lemma 6, Problema 1, Problema 2

e. Potestatum numericarum summa

Méthode pour calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique d'entiers élevés à la même puissance

f. De numeris multiplicibus . . .

Étude des caractères de divisibilité des nombres

RECUEIL EN FRANÇAIS

1. Traité du triangle arithmétique

Problème

2. Divers usages du triangle arithmétique dont le générateur est l'unité

Chaque usage explicite ou justifie l'emploi du triangle pour l'application considérée

Usage I pour les ordres numériques

Usage II pour les combinaisons

Problème 1 (correspond au Lemma 5 du traité *d*).

Usage III pour déterminer les partis. . .

Problème 1, Problème 2, Problème 3, Problème 4

Usage IV pour trouver les puissances des binômes [. . .]

3. Traité des ordres numériques

Problema 1, Problema 2, Problema 3, Problema 4

4. De numerorum continuorum . . . Numericarum potestatum . . .

5. Combinationes

Lemma 6, Problema 1, Problema 2

6. Potestatum numericarum summa

7. De numeris multiplicibus . . .

Étude des caractères de divisibilité des nombres

Tableau 1. Les deux versions du recueil

Ainsi, outre la présence nouvelle de l'application aux jeux de hasard, un vrai changement de présentation a eu lieu. La constitution du groupe des *Usages* en est la marque. Une séparation nette est désormais établie entre ce groupe et la suite du recueil. C'est ce que manifeste le partage opéré au sein des deux traités latins (*b.*) et (*d.*). On verra précisément en quoi *cette séparation révèle une direction dans le travail de Pascal autour du triangle arithmétique.*

Le tableau précise aussi le propos général de certains traités. Enfin, comme il sera beaucoup question dans l'article d'une série de « problèmes » (c'est le mot de Pascal) énoncés dans le recueil, nous avons indiqué leur répartition au sein de chaque version. Ils sont tous communs aux deux versions, hormis les quatre problèmes de l'*Usage III* propres bien entendu à la seconde rédaction. Certes les traités sont surtout constitués de propriétés, conséquences, lemmes, remarques, etc., et ces « problèmes » ne représentent pas une grande part du recueil. Mais ils ont la *caractéristique de toujours se situer en fin de traités* (sauf les lemmes 5 et 6 du (*d.*)), comme des points culminants.

***Vocabulaire du* Traité du triangle arithmétique (1.)**

La désignation des lignes et des colonnes a changé par rapport au *Triangulus arithmeticus* (*a.*). J'indique les termes employés dans celui-ci entre crochets. Pascal nomme *cellules* les cases du triangle, *rangs parallèles* ses lignes, *rangs perpendiculaires* ses colonnes, *bases* ses diagonales, *dividente* son axe de symétrie. Pour désigner le numéro d'un rang ou d'une base, il parle d'*exposant*.

	1	2	3	4	5	6	7
1			¢				&
2			¢		A	&	
3			¢		&		
4	@	@	@ ¢	@ &			
5		B	¢ &		dividente		
6		&					
7	&						

Figure 1. Le triangle arithmétique de Pascal

@ : cellules du *rang parallèle* d'exposant 4 [cellules de *rang* d'exposant 4]
¢ : cellules du *rang perpendiculaire* d'exposant 3 [cellules de *racine* 3]
& : cellules de la 7^{e} base

Les cellules que j'ai notées A et B sont dites cellules *réciproques* : A est de rang parallèle (d'exposant) 2 et de rang perpendiculaire 5, B est de rang parallèle 5 et de rang perpendiculaire 2.

Rappelons enfin une propriété donnée par Pascal au début du traité (*1.*).

Soit une cellule quelconque. Si je note x l'exposant de son rang parallèle, y l'exposant de son rang perpendiculaire, z l'exposant de sa base, on a :

$$x + y = z + 1.$$