

CONSTRUCTION D’HYPERSURFACES AFFINES À COHOMOLOGIE D’INTERSECTION PRESCRITE

par

Patrick Polo

Résumé. — Soit $\rho(q) = a_1q + \cdots + a_dq^d$ un polynôme de degré d , à coefficients entiers positifs ou nuls, et sans terme constant. On pose $a = \rho(1)$ et $N = 2d + a$. On exhibe une hypersurface quasi-homogène $V_\rho \subset \mathbb{C}^{N+1}$ dont le m -ième nombre de Betti, pour la cohomologie d’intersection, est a_i si $m = 2i$, et 0 sinon. Explicitement, soient $x_1, y_1, \dots, x_d, y_d, z_0, z_1, \dots, z_a$ des indéterminées et, pour $s = 1, \dots, d$, soit π_s le produit des z_i , pour $1 \leq i \leq a_1 + \cdots + a_s$. Alors V_ρ est définie par le polynôme $F_\rho = x_1y_1 + \pi_1x_2y_2 + \cdots + \pi_{d-1}x_dy_d + \pi_dz_0$. Ceci est conséquence d’un travail antérieur de l’auteur, concernant les variétés de Schubert.

Abstract (Construction of affine hypersurfaces with prescribed intersection cohomology)

Let $\rho(q) = a_1q + \cdots + a_dq^d$ be a polynomial of degree d , with non-negative integral coefficients and without constant term. Let $a = \rho(1)$ and $N = 2d + a$. We exhibit a quasi-homogeneous hypersurface $V_\rho \subset \mathbb{C}^{N+1}$ such that the m -th intersection cohomology Betti number of V_ρ is a_i for $m = 2i$, and 0 otherwise. Explicitly, let $x_1, y_1, \dots, x_d, y_d, z_0, z_1, \dots, z_a$ be indeterminates and, for $s = 1, \dots, d$, let π_s denote the product of the z_i , for $1 \leq i \leq a_1 + \cdots + a_s$. Then V_ρ is defined by the polynomial $F_\rho = x_1y_1 + \pi_1x_2y_2 + \cdots + \pi_{d-1}x_dy_d + \pi_dz_0$. This is a consequence of earlier work of the author about Schubert varieties.

Introduction

Le but de cet article, principalement d’exposition, est de montrer le résultat suivant. Soit $\rho(q) = a_1q + \cdots + a_dq^d$ un polynôme de degré $d \geq 1$, à coefficients entiers ≥ 0 , et sans terme constant. Soient $x_1, y_1, \dots, x_d, y_d, z_0, z_1, \dots, z_a$ des indéterminées, où l’on a posé $a = a_1 + \cdots + a_d$, et soit V_ρ l’hypersurface définie par le polynôme

$$F_\rho := x_1y_1 + \left(\prod_{i=1}^{a_1} z_i \right) x_2y_2 + \cdots + \left(\prod_{i=1}^{a_1+\cdots+a_{d-1}} z_i \right) x_dy_d + \prod_{i=0}^a z_i.$$

Alors, la cohomologie d’intersection de V_ρ est décrite par le théorème suivant.

Théorème. — On a $\sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IH}^i(V_\rho) t^i = 1 + \rho(t^2)$.

Classification mathématique par sujets (2000). — 32S60, 14M15.

Mots clefs. — Cohomologie d’intersection, hypersurfaces, variétés de Schubert, polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Comme F_ρ est quasi-homogène, on a $\mathrm{IH}^i(V_\rho) \cong \mathcal{IH}_0^i(V_\rho)$, où $\mathcal{IH}_0^i(V_\rho)$ désigne la fibre au point 0 du faisceau $\mathcal{IH}^i(V_\rho)$. Le théorème est alors conséquence du fait que V_ρ s'identifie, au produit par un espace affine près, à un certain ouvert d'une variété de Schubert X_{w_ρ} , sur lequel on a décrit les faisceaux \mathcal{IH}^i dans [10]. De façon plus précise, dans [10] on a associé au polynôme ρ un certain couple d'éléments $y_\rho < w_\rho$ dans le groupe symétrique S_n , où $n = a + d + 2$, et montré que :

$$(*) \quad \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{IH}_{y_\rho}^i(X_{w_\rho}) t^i = 1 + \rho(t^2).$$

On montre ici qu'un voisinage ouvert de y_ρ dans X_{w_ρ} est isomorphe au produit d'un espace affine par V_ρ , ce qui entraîne le résultat voulu.

La démonstration de (*) donnée dans [10] comporte essentiellement quatre étapes. Pour la commodité du lecteur, on rappelle brièvement ces quatre étapes, et l'on indique comment l'un des ingrédients, un argument de théorie des représentations dû à Irving [6], peut être remplacé par un argument géométrique dû à Braden et MacPherson [2]. On donne aussi, dans le cas de V_ρ , une démonstration directe de l'une des étapes, plus simple qu'un énoncé général sur les variétés de Schubert démontré dans [10, Sect.4].

1. Énoncé du théorème

1.1. Soit X une variété algébrique irréductible sur \mathbb{C} . On désigne par $\mathrm{IC}(X)$ le complexe d'intersection de X , et par $\mathrm{IH}^\bullet(X) := \mathbb{H}^\bullet(X, \mathrm{IC}(X))$ la cohomologie d'intersection, voir [5]. À la différence de *loc. cit.*, on prend la convention que $\mathrm{IC}(X)$ coïncide sur le lieu lisse de X avec le faisceau constant \mathbb{C} placé en degré 0 (au lieu de $-\dim_{\mathbb{C}} X$ dans *loc. cit.*). Notons $\mathcal{IH}^i(X)$ les faisceaux de cohomologie de $\mathrm{IC}(X)$ et, pour tout point $x \in X$, notons $\mathcal{IH}_x^i(X)$ la fibre en x .

Soit t une indéterminée. On considèrera les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} \mathrm{IH}(X, t) &:= \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{IH}^i(X) t^i, \\ \mathrm{IH}_x(X, t) &:= \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{IH}_x^i(X) t^i. \end{aligned}$$

1.2. Soit $\rho(q) = a_1 q + \dots + a_d q^d$ un polynôme de degré $d \geq 1$, à coefficients entiers ≥ 0 , et sans terme constant, où $q = t^2$. Soient $x_1, y_1, \dots, x_d, y_d, z_0, z_1, \dots, z_a$ des indéterminées, où l'on a posé $a = a_1 + \dots + a_d$. Posons $N = 2d + a$ et considérons l'hypersurface V_ρ de \mathbb{C}^{N+1} définie par le polynôme F_ρ suivant :

$$F_\rho := x_1 y_1 + \left(\prod_{i=1}^{a_1} z_i \right) x_2 y_2 + \dots + \left(\prod_{i=1}^{a_1 + \dots + a_{d-1}} z_i \right) x_d y_d + \prod_{i=0}^a z_i.$$

Théorème. — $\mathrm{IH}(V_\rho, t) = \mathrm{IH}_0(V_\rho, t) = 1 + \rho(t^2)$.

La première égalité résulte du fait que F_ρ est quasi-homogène, de poids total $a+1$, si l'on attribue, par exemple, le poids 1 à chaque x_i et z_i , et le poids $\sum_{j \geq i} a_j$ à chaque y_i .

La seconde égalité est conséquence du fait, démontré plus bas, que V_ρ s'identifie, au produit par un espace affine près, à un certain ouvert d'une variété de Schubert X_{w_ρ} , sur lequel on a décrit les faisceaux \mathcal{IH}^i dans [10].

2. Variétés de Schubert

2.1. Soit $n \geq 2$. On note $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{C}^n et l'on désigne par \mathbb{C}^i le sous-espace engendré par e_1, \dots, e_i . Le groupe $GL(n)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux $V^1 \subset \dots \subset V^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, où $\dim V^i = i$, et le stabilisateur du drapeau standard $\mathbb{C}^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}^{n-1}$ est le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures. Ainsi, $GL(n)/B$ s'identifie à la variété des drapeaux, notée $\text{Fl}(n)$.

On considère le groupe symétrique S_n comme un sous-groupe de $GL(n)$, agissant par permutation des e_i . Pour tout $w \in S_n$, soit V_w^\bullet le drapeau défini par $V_w^i = w(\mathbb{C}^i)$; il correspond au point wB/B . On note $\ell(w)$ le nombre d'inversions de w et l'on introduit la fonction de rang de w , définie par

$$r_w(a, b) = \#\{i \leq a \mid w(i) \leq b\},$$

pour $a, b \in [1, n]$. Il est bien connu que l'orbite BV_w^\bullet est un espace affine de dimension $\ell(w)$ et que son adhérence, notée X_w et appelée la variété de Schubert associée à w , est l'ensemble des drapeaux V^\bullet vérifiant

$$(1) \quad \dim(V^a \cap \mathbb{C}^b) \geq r_w(a, b), \quad \forall a, b \in [1, n],$$

voir, par exemple, [9, §§2.1 & 3.6.2]. On note $v \leq w$ si $X_v \subseteq X_w$; c'est l'ordre d'Ehresmann-Bruhat-Chevalley sur S_n .

Remarque. — Pour la commodité du lecteur, on rappelle le fait suivant (cf. [4, §10.5, Ex.10] ou [9, Prop.3.6.6]). Dans (1), il suffit de se limiter aux couples (a, b) qui vérifient :

$$(\dagger) \quad w^{-1}(b) \leq a \leq w^{-1}(b+1) \quad \text{et} \quad w(a) \leq b < w(a+1).$$

En effet, si $a < w^{-1}(b)$ alors $r_w(a, b) = r_w(a, b-1)$ et la condition pour (a, b) est conséquence de celle pour $(a, b-1)$. On peut donc supposer $a \geq w^{-1}(b)$. Si de plus $a \geq w^{-1}(b+1)$, alors $r_w(a, b+1) = r_w(a, b) + 1$ et la condition $\dim(V^a \cap \mathbb{C}^b) \geq r_w(a, b)$ peut être omise car elle est conséquence de

$$\dim(V^a \cap \mathbb{C}^{b+1}) \geq r_w(a, b+1) = r_w(a, b) + 1.$$

De même, si $b < w(a)$ alors $r_w(a, b) = r_w(a-1, b)$ et la condition pour (a, b) résulte de celle pour $(a-1, b)$. Enfin, si $b \geq \max\{w(a), w(a+1)\}$, alors $r_w(a+1, b) = r_w(a, b) + 1$ et la condition pour (a, b) résulte de celle pour $(a+1, b)$. Ceci montre qu'il suffit de se limiter dans (1) aux couples (a, b) vérifiant (\dagger) .

2.2. Soit U^- le sous-groupe de $GL(n)$ formé des matrices triangulaires inférieures unipotentes. Soient $y \leq w$ dans S_n et soit $\Omega_{y,w} := X_w \cap yU^-B/B$; c'est un voisinage ouvert du point V_y^\bullet dans X_w .

Rappelons qu'on a identifié S_n au sous-groupe de $GL(n)$ formé des matrices de permutation. Ainsi, le translaté yU^- est bien défini et est une sous-variété fermée de $GL(n)$. Posons

$$\mathcal{V}_{y,w} := \{u \in yU^- \cap U^-y \mid uV_y^\bullet \in X_w\};$$

c'est une sous-variété fermée de yU^- . On sait, d'après [7, Lemma A.4], que $\Omega_{y,w}$ est isomorphe au produit de l'orbite $BV_y^\bullet \cong \mathbb{C}^{\ell(y)}$ et de la variété $\mathcal{V}_{y,w}$.

Notons φ l'inclusion $\mathcal{V}_{y,w} \hookrightarrow X_w$ ainsi obtenue; c'est une immersion transversalement lisse (je propose cette terminologie comme traduction de « normally nonsingular »). Alors, d'après [5, Th. 5.4.1], l'on a $\mathrm{IC}(\mathcal{V}_{y,w}) \cong \varphi^* \mathrm{IC}(X_w)$. On a donc

$$\mathrm{IH}_y(\mathcal{V}_{y,w}, t) = \mathrm{IH}_y(X_w, t).$$

De plus, d'après Kazhdan et Lusztig [8] (voir aussi [11] pour une démonstration différente, due à MacPherson), le terme de droite est égal au polynôme de Kazhdan-Lusztig $P_{y,w}(t^2)$.

Enfin, notons $C_{[y,w]}$ l'ouvert $\bigcup_{z \in [y,w]} BzB/B$ de X_w . On sait, d'après Chevalley (voir [3, § 3.3, Lemme 1(a)]), que $\Omega_{y,w} \subseteq C_{[y,w]}$.

2.3. Revenons à notre polynôme $\rho(q) = \sum_{s=1}^d a_s q^s$ et posons $a = \rho(1)$ et $n = a + d + 2$. Introduisons de plus les notations suivantes. Soit $A_s = a_1 + \dots + a_s$, pour $s = 1, \dots, d$, et, pour $i = 1, \dots, a$, notons d_i le plus petit entier $s \geq 1$ tel que $i \leq A_s$. Dans [10], on a associé à ρ les éléments w_ρ et y_ρ de S_n définis comme suit. Premièrement, $w_\rho(n) = 2$, $w_\rho(n-1) = 1$, $w_\rho(n-s) = A_{s-1} + s + 1$ pour $s = 2, \dots, d$, et, pour $i = 1, \dots, a$, $w_\rho(i) = i + 1 + d_i$. Deuxièmement, $y_\rho(1) = 1$, $y_\rho(n) = n$, $y_\rho(i) = w_\rho(i-1)$ pour $i = 2, \dots, a+1$, et pour $s = 1, \dots, d$, $y_\rho(n-s) = A_{s-1} + s + 1$ (on pose $A_0 = 0$). On vérifie sans difficulté que $y < w$ et $\ell(w) - \ell(y) = 2d + a$, voir [10, § 2.1].

Proposition. — $V_\rho \cong \mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$.

Démonstration. — D'abord, pour tout $y \in S_n$, la sous-variété $yU^- \cap U^-y$ de $GL(n)$ est formée des matrices $(u_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}$ telles que $u_{y(i),i} = 1$ et $u_{j,i} = 0$ si $y^{-1}(j) < i$ ou $j < y(i)$.

D'autre part, on déduit de la remarque 2.1 que X_{w_ρ} est formée des drapeaux V^\bullet qui vérifient $\mathbb{C}^1 \subset V^{n-1}$ et $V^i \subset \mathbb{C}^{i+1+d_i}$, pour $i = 1, \dots, a$.

On déduit de ce qui précède la description suivante de $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$. Soit (u_{ji}) un élément arbitraire de $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$. Comme $y_\rho(i') < y_\rho(i)$ si $a+1 \leq i < i' \leq n-1$, on obtient déjà que dans les colonnes C_i , où $a+1 \leq i \leq n-1$, mis à part $u_{y(i),i}$ qui vaut 1, tous les termes sont nuls sauf éventuellement ceux de la dernière ligne. On pose $z_0 = u_{n, a+1}$ et $y_s = u_{n, n-s}$, pour $s = 1, \dots, d$.

De plus, pour $1 \leq i \leq a$, la condition $V^i \subseteq \mathbb{C}^{i+1+d_i}$ entraîne que $u_{ji} = 0$ si $j > i+1+d_i$. Par conséquent, dans les colonnes d'indice $i \leq a$, mis à part $u_{y(i),i}$ qui vaut 1, les seuls termes éventuellement non nuls sont les u_{ji} avec $1+i+d_{i-1} \leq j \leq 1+i+d_i$. On pose $z_i = -u_{1+i+d_i,i}$ et l'on désigne par $-x_1, \dots, -x_d$ les coefficients u_{ji} restants, en lisant de haut en bas la première colonne, puis la seconde, etc. C.-à-d., $x_1 = -u_{21}$ et lorsqu'on passe de x_i à x_{i+1} , l'indice de ligne augmente de $1+a_i$, et l'indice de colonne augmente de a_i (voir les exemples plus bas). En termes de formule, ceci donne

$$x_{s+1} = -u_{A_s+s+2,A_s+1}, \quad \text{pour } s = 1, \dots, d-1.$$

On obtient ainsi que $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$ s'identifie à la sous-variété de l'espace affine \mathbb{C}^{N+1} formée des matrices $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, y_1, \dots, x_d, y_d, z_0, z_1, \dots, z_a)$ telles que $e_1 \in \mathbf{u}(\mathbb{C}^{n-1})$. Cette condition équivaut au fait que la sous-matrice de \mathbf{u} obtenue en prenant les colonnes de 1 à $n-1$ et les lignes de 2 à n , est singulière. Or, en ajoutant à la 1ère colonne une combinaison linéaire appropriée des autres colonnes, on voit que le déterminant de cette sous-matrice est $\pm F_\rho$. Ceci prouve la proposition. \square

Illustrons le calcul fait dans la démonstration par les deux exemples ci-dessous. On a désigné par des \bullet les coefficients u_{ji} qui sont nuls parce que $y^{-1}(j) < i$ ou $j < y(i)$, et par des 0 les coefficients u_{ji} pour $1 \leq i \leq a$ et $j > 1+i+d_i$, qui sont nuls en raison de la condition $\mathbf{u}(\mathbb{C}^i) \subseteq \mathbb{C}^{1+i+d_i}$.

Exemple 1. — Pour $\rho = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4$, on a $a = \rho(1) = 10$, $n = 16$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 11 & 7 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 & 7 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{V}_{y_\rho, w_\rho}$ est formée des matrices \mathbf{u} :

1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-x ₁	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•
-z ₁	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	-x ₂	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•
0	-z ₂	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	-z ₃	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	-x ₃	•	•	•	•	•	•	•	•	•	1	•	•
0	0	0	-z ₄	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	-z ₅	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	-z ₆	1	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	-x ₄	•	•	•	•	•	1	•	•	•
0	0	0	0	0	0	-z ₇	1	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	-z ₈	1	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	0	-z ₉	1	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-z ₁₀	1	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z ₀	y ₄	y ₃	y ₂	y ₁
															1